**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**

О. Г. Илларионова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению контрольных работ
и варианты заданий

*для студентов II курса
специальности 162107
заочной формы обучения*

Москва – 2014

Рецензент – кандидат физ.-мат. наук, доцент Дементьев Ю.И.

О. Г. Илларионова.
Высшая математика. Пособие по выполнению контрольных работ и варианты заданий для студентов II курса специальности 162107 заочной формы обучения – М.: МГТУ ГА, 2014.

Данное пособие издаётся в соответствии с рабочей программой дисциплины «Высшая математика» по учебному плану специальности 162107.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры высшей математики 25.02.2014 г. и методического совета 20.03.2014 г.

Введение

Студенты заочного отделения специальностей 162107, 25.05.03 «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования» изучают дисциплину «Высшая математика» на первом и втором курсах.

Распределение часов по видам занятий и формы контроля

Курс, семестр	Часы на дисциплину				Число контр. работ	Форма контроля
	Общие	Самостоят. работа	Лекции	Практ. занятия		
Курс 1 Семестр 1	180	162	10	8	1	зачет
Курс 1 Семестр 2	180	156	10	14	3	экзамен
Курс 2	288	254	16	18	3	экзамен
Всего	648	572	36	40	7	

На втором курсе студенты должны изучить следующие темы: «Комплексные числа», «Дифференциальные уравнения», «Ряды», «Теория вероятностей», «Математическая статистика» и выполнить по этим темам контрольные работы №5 , №6 и №7.

Программа курса «Высшая математика» по учебному плану специальностей 162107, 25.05.03 (курс 2)

Тема «Комплексные числа»

1. Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Комплексное сопряжение.
2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах. Формула возведения в степень и извлечения корня.
3. Комплексная плоскость.

Тема «Дифференциальные уравнения»

4. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Понятия порядка уравнения, общего и частного решения.
5. Уравнения первого порядка. Задача Коши.
6. Уравнения с разделяющимися переменными.
7. Однородные уравнения.
8. Линейные уравнения.
9. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

10. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

Тема «Ряды»

11. Числовые ряды. Необходимое условие сходимости.
12. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами (Даламбера, Коши, интегральный признак). Признаки сравнения.
13. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость рядов.
14. Степенные ряды. Интервал сходимости. Ряд Тейлора. Разложение в ряд Тейлора элементарных функций. Приложения степенных рядов.
15. Гармонический анализ. Ряд Фурье. Условия разложимости в ряд Фурье. Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Ряд Фурье для функции с произвольным периодом. Ряды Фурье по синусам и по косинусам.

Тема «Теория вероятностей»

16. Основные понятия. Случайные события. Классическое определение вероятности.
17. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
18. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
19. Формула Бернулли.
20. Дискретные случайные величины. Закон и функция распределения дискретной случайной величины. Числовые характеристики дискретных случайных величин.
21. Биномиальный закон распределения.
22. Непрерывные случайные величины. Функция и плотность распределения непрерывной случайной величины. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
23. Равномерное, показательное и нормальное распределения.

Тема «Математическая статистика»

24. Задачи математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения. Гистограмма.
25. Оценка параметров распределения генеральной совокупности (метод моментов). Доверительные интервалы.
26. Статистическая проверка гипотез. Проверка гипотезы о законе распределения по критерию Пирсона.

Указания к выполнению контрольных работ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля для замечаний рецензента.
2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть четко написаны фамилия имя и отчество студента, учебный номер (шифр), название дисциплины, курс обучения, номер контрольной работы и номер варианта.
3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.
4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров.
5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать её условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.
6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
7. После получения прорецензированной работы, как незачтённой так и зачтённой, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты и выполнить все рекомендации рецензента. Если рецензент предлагает внести в решения задач те или иные исправления или дополнения и прислать их для повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок. При высылаемых исправлениях должна обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на неё. Поэтому рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после её рецензирования запрещается.
8. Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями следует сохранять. Без предъявления прорецензированных контрольных работ студент не допускается к собеседованию по контрольной работе, к сдаче зачёта или экзамена.
9. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются по номеру варианта и приведены в таблице. Номер варианта совпадает с последней цифрой учебного номера (шифра) студента, при этом цифра 0 соответствует варианту 10.

Номера заданий для выполнения контрольных работ

Вариант	Контрольная работа №5	Контрольная работа №6	Контрольная работа №7
1	1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1, 7.1, 8.1	9.1, 10.1, 11.1, 12.1, 13.1	14.1, 15.1, 16.1, 17.1, 18.1, 19.1, 20.1
2	1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 6.2, 7.2, 8.2	9.2, 10.2, 11.2, 12.2, 13.2	14.2, 15.2, 16.2, 17.2, 18.2, 19.2, 20.2
3	1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 6.3, 7.3, 8.3	9.3, 10.3, 11.3, 12.3, 13.3	14.3, 15.3, 16.3, 17.3, 18.3, 19.3, 20.3
4	1.4, 2.4, 3.4, 4.4,5.4, 6.4, 7.4, 8.4	9.4, 10.4, 11.4, 12.4, 13.4	14.4, 15.4, 16.4, 17.4, 18.4, 19.4, 20.4
5	1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5, 7.5, 8,5	9.5, 10.5, 11.5, 12.5, 13.5	14.5, 15.5, 16.5, 17.5, 18.5, 19.5, 20.5
6	1.6, 2.6, 3.6, 4.6, 5.6, 6.6, 7.6, 8.6	9.6, 10.6, 11.6, 12.6, 13.6	14.6, 15.6, 16.6, 17.6, 18.6, 19.6, 20.6
7	1.7, 2.7, 3.7, 4.7, 5.7, 6.7, 7.7, 8.7	9.7, 10.7, 11.7, 12.7, 13.7	14.7, 15.7, 16.7, 17.7, 18.7. 19.7, 20.7
8	1.8, 2.8, 3.8, 4.8, 5.8, 6.8, 7.8, 8.8	9.8, 10.8, 11.8, 12.8. 13.8	14.8, 15.8, 16.8, 17.8, 18.8, 19.8, 20.8
9	1.9, 2.9, 3.9, 4.9, 5.9, 6.9, 7.9, 8.9	9.9, 10.9, 11.9, 12.9, 13.9	14.9, 15.9, 16.9, 17.9, 18.9, 19.9, 20.9
10	1.10, 2.10, 3.10, 4.10, 5.10, 6.10, 7.10, 8.10	9.10, 10.10, 11.10, 12.10, 13.10	14.10, 15.10, 16.10, 17.10, 18.10, 19.10, 20.10

ЗАДАЧИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №5

по темам «Комплексные числа» и «Дифференциальные уравнения»

Задача №1. Даны числа z_1 и z_2. а) Вычислить z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

б) Указать действительные и мнимые части чисел $z_1-z_2, \dfrac{z_1}{z_2}$.

в) Изобразить на комплексной плоскости числа z_1, z_2, z_1+z_2, z_1-z_2.

1.1. $z_1=2+3i,\quad z_2=3-5i.$

1.2. $z_1=5-2i,\quad z_2=8+3i.$

1.3. $z_1=-4-5i,\quad z_2=5+6i.$

1.4. $z_1=-2-7i,\quad z_2=3-4i.$

1.5. $z_1=3+4i,\quad z_2=7-5i.$

1.6. $z_1=6+3i,\quad z_2=4-i.$

1.7. $z_1=4-7i,\quad z_2=1+2i.$

1.8. $z_1=6-9i,\quad z_2=7+4i.$

1.9. $z_1=2i-3,\quad z_2=4+i.$

1.10. $z_1=5-i,\quad z_2=2+7i.$

Задача №2. Дано число z . а) Представить z в тригонометрической и показательной формах. б) Вычислить z^6. в) Вычислить $\sqrt[3]{z}$.

2.1. $z=\sqrt{3}+i.$

2.2. $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$

2.3. $z=1+i.$

2.4. $z=1-i\sqrt{3}.$

2.5. $z=-1-i.$

2.6. $z=-8i.$

2.7. $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}.$

2.8. $z=-2+2\sqrt{3}i.$

2.9. $z=\sqrt{3}-i.$

2.10. $z=-\sqrt{3}+i.$

Задача №3. Найти общее решение или общий интеграл уравнения.

3.1. $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}\cdot y\cdot y'=0.$

3.2. $\boldsymbol{y\cdot\ 1+ln\,y\ +x\cdot y'=0}.$

3.3. $\boldsymbol{\sqrt{1-x^2}\cdot y'+xy^2+x=0}.$

3.4. $\boldsymbol{y\cdot ln\,y+x\cdot y'=0}.$

3.5. $\boldsymbol{\sqrt{5+y^2}+y'\cdot y\cdot\sqrt{1-x^2}=0}.$

3.6. $\boldsymbol{\sqrt{4-x^2}\cdot y'+x\cdot\ y^2+1\ =0}.$

3.7. $\sqrt{4+x^2}\cdot dx-4y\cdot dy=x^2\cdot y\cdot dy.$

3.8. $\boldsymbol{2-e^x\ \cdot dy+3e^x\cdot \mathbf{tg}\,y\cdot dx\ =0}$.

3.9. $\boldsymbol{1+e^x\ \cdot y\cdot y'=e^x}.$

3.10 . $\boldsymbol{2x+2xy^2+\sqrt{2-x^2}\cdot y'=0}.$

Задача №4. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения.

4.1. $\boldsymbol{2y'=\frac{y^2}{x^2}+\frac{8y}{x}+8}.$

4.2. $\boldsymbol{y'=\frac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}}.$

4.3. $\boldsymbol{x\cdot y'=2\cdot\sqrt{3x^2+y^2}+y}.$

4.4. $\boldsymbol{y'=\frac{y^2}{x^2}+7\cdot\frac{y}{x}+13}.$

4.5. $\boldsymbol{x\cdot y'=3\cdot\sqrt{2x^2+y^2}+y}.$

4.6. $\boldsymbol{y'=\frac{2y+3x}{x}}.$

4.7. $\boldsymbol{x\cdot y'=2\cdot\sqrt{x^2+y^2}+y}.$

4.8. $\boldsymbol{x^2-y^2+2xy\cdot y'=0}.$

4.9. $\boldsymbol{4x^2\cdot y'=y^2+10xy+5x^2}.$

4.10. $\boldsymbol{y'=\frac{x+y}{x-y}}$.

Задача №5. Решить задачу Коши.

5.1. $y' - \frac{y}{x} = \ln x;\ \ y\ \ 1\ \ = 0.$

5.2. $y' - y \cdot \cos x = \cos^2 x \cdot e^{\sin x},\ \ \ y\ \ 0\ \ = 0.$

5.3. $y' - \frac{y}{x} = \frac{-2}{x^2},\ \ y\ \ 1\ \ = 1.$

5.4. $y' - 3x^2 \cdot y = x^2 \cdot e^{x^3};\ \ \ \ y\ \ 0\ \ = 0.$

5.5. $y' - 4xy = 4x^3 \cdot e^{2x^2}\ \ ;\ \ \ \ y\ \ 0\ \ = 0.$

5.6. $y' - \frac{2y}{x+1} =\ \ x + 1\ \ ^3;\ \ y\ \ 0\ \ = \frac{1}{2}.$

5.7. $y' + \frac{y}{2x} = x;\ \ y\ \ 1\ \ = 0.$

5.8. $y' - \frac{y}{x} = x^2;\ \ \ y\ \ 1\ \ = 0.$

5.9. $y' - \frac{y}{x} = x \sin x;\ \ \ \ y\ \ \frac{\pi}{2}\ \ = \frac{\pi}{2}.$

5.10. $xy' + y = \ln x;\ \ \ y\ \ 1\ \ = 1.$

Задача №6. Найти общее решение уравнения.

6.1. $x^5 \cdot y'' + x^4 \cdot y' = 9.$

6.2. $x^4 \cdot y'' + x^3 \cdot y' = 4.$

6.3 $\ \ 1 + x^2\ \ \cdot y'' + 2x \cdot y' = 2.$

6.4. $x \cdot y'' - 2y' = -\frac{2}{x^2}.$

6.5. $y'' \cdot ctgx + 2y' = 0.$

6.6. $(1 + \sin x) \cdot y'' = \cos x \cdot y'.$

6.7. $x^3 \cdot y'' + x^2 \cdot y' = 1.$

6.8. $y'' \cdot \operatorname{tg} x = y' + 1.$

6.9. $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' = 1.$

6.10. $xy'' + y' = x + 1.$

Задача №7. Найти общее решение уравнения.

7.1. $y'' + y' = 4x - 1.$

7.2. $y'' - 6y' + 9y = 4x \cdot e^x.$

7.3. $y'' + y = x^2 + 6.$

7.4. $y'' + 2y' - 3y = 30 \cos 3x.$

7.5. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5.$

7.6. $y'' + 6y' + 13y = 75 \cos 2x.$

7.7. $y'' + 2y' + y = 2 - 3x^2.$

7.8. $y'' - 4y' + 3y = -4x \cdot e^x.$

7.9. $y'' + y' - 6y = 10e^{2x}.$

7.10. $y'' + 2y' + 5y = 17\sin 2x.$

Задача №8. Решить задачу Коши .

8.1. $\boldsymbol{y'' + 4y = 16\cdot e^{-2x};\ \ y\ 0\ = 0,\ \ y'\ 0\ = 0.}$

8.2. $\boldsymbol{y'' + y = 4\cdot e^{x};\ \ y\ 0\ = 4,\ \ y'\ 0\ = -3.}$

8.3. $y'' - 2y' = 2\cdot e^{x}\ ;\ \ y\ 0\ = -1,\ \ y'\ 0\ = 4.$

8.4. $y'' + 2y' + 2y = 2x - 4\ ;\quad y\ 0\ = 0,\ \ y'\ 0\ = 0.$

8.5. $y'' - 4y' = 8x + 4\ ;\quad y\ 0\ = 2,\ \ y'\ 0\ = 0.$

8.6. $\boldsymbol{y'' - 4y' + 4y = 5\cdot e^{-3x}\ ;\qquad y\ 0\ = 2,\ \ y'\ 0\ = 0.}$

8.7. $y'' + 81y = 162\cdot e^{9x};\quad y\ 0\ = 0;\quad y'\ 0\ = 9.$

8.8. $y'' - 2y' + 10y = 20x + 6\ ;\quad y\ 0\ = 0,\ \ y'\ 0\ = 0.$

8.9. $y'' + 9y = 18x + 9;\ \ y\ 0\ = 0;\quad y'\ 0\ = 4.$

8.10. $y'' - 2y' + y = 16\cdot e^{x}\ ;\ \ y\ 0\ = 1,\ \ y'\ 0\ = 2.$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №5

Тема «Комплексные числа»

Комплексным числом (в алгебраической форме) называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, i – так называемая мнимая единица, определяемая равенством

$$i = \sqrt{-1},\quad i^2 = -1,$$

x называется действительной частью, y мнимой частью числа z . Их обозначают так: $x = Re\, z,\quad y = Im\, z.$

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым; если $y = 0$, то получается действительное число $x + i0 = x.$

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy.$ Отметим, что $\bar{\bar{z}} = z.$

Сложение, вычитание, умножение и деление над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, определяются следующим образом.

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Две последние формулы запоминать нет необходимости, так как умножение комплексных чисел производится по правилу умножения двучленов с учетом равенства $i^2=-1$; а деление – путем домножения числителя и знаменателя на $\overline{z}_2$ и дальнейших преобразований.

Комплексное число $z=x+iy$ изображается на плоскости XOY точкой M с координатами (x,y) либо вектором, начало которого находится в точке $O\,(0,0)$, а конец в точке $M(x,y)$. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется *комплексной плоскостью.* Геометрически сложение и вычитание чисел z_1 и z_2 производится по правилу сложения и вычитания векторов.

Типовая задача №1. Даны числа $z_1=-2+3i$ и $z_2=\ 4+5i$. а) Вычислить z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$. б) Указать действительные и мнимые части чисел z_1-z_2, $\frac{z_1}{z_2}$. в) Изобразить на комплексной плоскости числа z_1, z_2, z_1+z_2, z_1-z_2.

Решение. а) Выполним действия:

$$z_1+z_2=(-2+4)+i(3+5)=2+8i,$$

$$z_1-z_2=(-2-4)+i(3-5)=-6-2i,$$

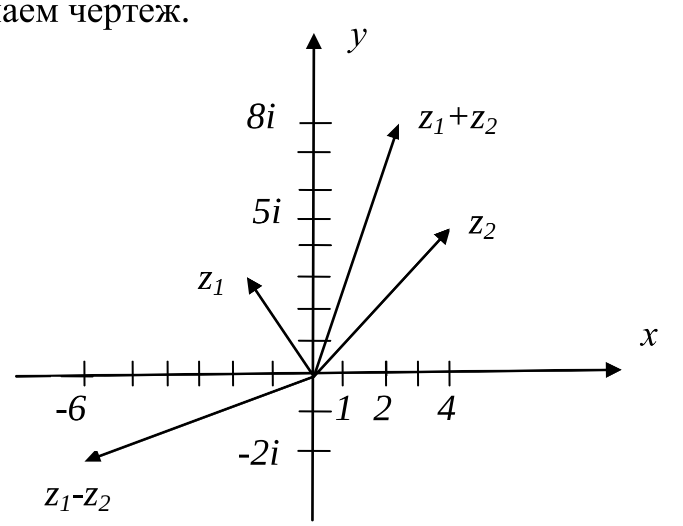
$$z_1\cdot z_2=(-2+3i)(4+5i)=-8+12i-10i-15=-23+2i,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-2+3i}{4+5i}=\frac{(-2+3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{7+22i}{41}=\frac{7}{41}+i\,\frac{22}{41}.$$

б) Укажем действительные и мнимые части:

$$Re(z_1-z_2)=-6,\qquad Re\frac{z_1}{z_2}=\frac{7}{41},\qquad Im(z_1-z_2)=-2,\qquad Im\frac{z_1}{z_2}=\frac{22}{41}.$$

в) Сделаем чертеж.



Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется действительное число, вычисляемое по формуле

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Модуль является неотрицательным числом, то есть $|z| \geq 0$. Геометрически $|z|$ – это длина вектора $\overrightarrow{OM}$ на комплексной плоскости. Равенство $|z| = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $x = 0$ и $y = 0$ одновременно.

Угол φ между положительным направлением оси OX и вектором z называется *аргументом* z и обозначается $A\mathrm{rg}\, z$. Он определен не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π. Единственное значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leq \pi$, называется *главным значением* аргумента и обозначается $\arg z$. Имеет место равенство

$$A\mathrm{rg}\, z = \arg z + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Для $z = 0$ понятие аргумента не определено.

Главное значение аргумента определяется формулой:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, & \text{если} \quad x > 0, \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{если} \quad x < 0,\ y \geq 0, \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{если} \quad x < 0,\ y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x = 0,\ y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Пользуясь этими понятиями, комплексное число можно записать *в тригонометрической форме*: $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Пусть даны два комплексных числа, записанные в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

то есть при умножении двух чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются; а при делении двух чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Из правила умножения следует формула возведения в степень

$$z^n = |z|^n\ (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Эта формула называется *формулой Муавра*.

Операция извлечения корня степени n из комплексного числа определяется как обратная к операции возведения в степень, а именно, комплексное число z называется *корнем степени* n из числа w и обозначается $\sqrt[n]{w} = z$, если $z^n = w$. Корень n степени из числа w $(w \neq 0)$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n} \right) + i \sin\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n} \right) \right), \ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1,$$

где через $\sqrt[n]{|w|}$ обозначено арифметическое значение корня.

Определим $e^{i\varphi}$, где $i = \sqrt{-1},\ \varphi \in R,$ следующей формулой

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Эта формула называется *формулой Эйлера.*

Тогда любое комплексное число z можно представить в так называемой *показательной форме*

$$z = r \cdot e^{i\varphi},$$

где r – модуль комплексного числа z, а φ – аргумент комплексного числа z.

При умножении и делении показательных функций действуют известные еще со школы правила. Поэтому для комплексных чисел $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ умножение и деление выполняются следующим образом:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (\text{в последнем случае } z_2 \neq 0).$$

Типовая задача №2. Дано число $z = -8 - i8\sqrt{3}.$ а) Представить z в тригонометрической и показательной формах. б) Вычислить z^3. в) Вычислить все корни $\sqrt[4]{z}$.

Решение. а) Вычислим модуль и аргумент числа z.

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = 16.$

Так как $x = -8 < 0,\ y = -8\sqrt{3} < 0,$ то угол $\varphi = arctg\dfrac{y}{x} - \pi = arctg\sqrt{3} - \pi = -\dfrac{2}{3}\pi.$

Следовательно, в тригонометрической форме

$z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi) = 16(\cos(-\dfrac{2}{3}\pi) + i \sin(-\dfrac{2}{3}\pi)),$

в показательной форме $z = 16 \cdot e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

б) Воспользуемся представлением числа z в тригонометрической форме и вычислим по формуле Муавра

$$z^3 = |z|^3 \cdot (\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 16^3(\cos\left((-\frac{2}{3}\pi)\cdot 3\right) + i\sin\left((-\frac{2}{3}\pi)\cdot 3\right) =$$

$$= 16^3(\cos\ (-2\pi)\ + i\sin(-2\pi)) = 4096.$$

б) Теперь вычислим

$$\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}} = \sqrt[4]{16\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right)\right)} =$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k}{4}\right)\right)\ (k = 0, 1, 2, 3).$$

Положим последовательно $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. Получим четыре корня:

$$z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i,$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Ответ: а) в тригонометрической форме $z = 16(\cos(-\frac{2}{3}\pi) + i\sin(-\frac{2}{3}\pi))$,

в показательной форме $z = 16 \cdot e^{-\frac{2\pi}{3}i}$; б) $z^3 = 4096$;
в) указанные выше $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$.

Тема «Дифференциальные уравнения»

Дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение, в котором содержится независимая переменная, искомая функция и её производные или дифференциалы, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид: $F(x, y, y') = 0$ (уравнение в неявной форме), или $y' = f(x, y)$ (уравнение разрешённое относительно производной), или $P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = 0$ (дифференциальная форма).

Решением дифференциального уравнения называется функция, при подстановке которой в уравнение получается тождество.

Решение дифференциального уравнения называется *общим решением*, если оно содержит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка имеет вид $y = \varphi(x, C)$, оно зависит от одной произвольной постоянной *C* и является решением уравнения при любом допустимом *C*.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется решение, получаемое из общего решения при каком-либо определённом значении произвольной постоянной *C*.

Соотношение вида Ф (x, y, C)=0, неявно определяющее общее решение, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения первого порядка. Соотношение, получаемое из общего интеграла при конкретном значении постоянной *C*, называется *частным интегралом* дифференциального уравнения.

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка ставится следующим образом: найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 – заданные значения независимой переменной x и искомой функции y.

График частного решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.* Графиком общего решения является семейство интегральных кривых.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде:

$$y' = f(x)\cdot g(y) \quad \text{или} \quad M(x)\cdot N(y)\cdot dx + P(x)\cdot Q(y)\cdot dy = 0.$$

Для решения уравнения такого вида надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входила только переменная *x*, а в другую только *y*, и затем проинтегрировать обе части. При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее x и y, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль. Поэтому случай равенства нулю делителя нужно рассмотреть отдельно.

Типовая задача №3. Найти общее решение или общий интеграл уравнения

$$y'\cos 2x = 4y\ln y.$$

Решение. Это уравнение является уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения на $\cos 2x \cdot 4y \cdot \ln y \neq 0$ и умножив на dx, получаем уравнение $\dfrac{dy}{y\ln y} = \dfrac{4dx}{\cos 2x}$.

Интегрируем обе части уравнения: $\displaystyle\int \frac{d\ln y}{\ln y} = 4\int \frac{dx}{\cos 2x}$;

$$\ln|\ln y| = 4\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^2 2x} = 2\int \frac{d\sin 2x}{1-\sin^2 2x} = -2\int \frac{d\sin 2x}{\sin^2 2x - 1} = -\ln\left|\frac{\sin 2x - 1}{\sin 2x + 1}\right| + \ln C.$$

По свойствам логарифмов находим: $\ln y = \pm C\dfrac{\sin 2x + 1}{\sin 2x - 1}$; $\ln y = C_1\dfrac{\sin 2x + 1}{\sin 2x - 1}$.

Таким образом, $y = e^{C_1 \frac{\sin 2x+1}{\sin 2x-1}}$ – общее решение, где произвольная постоянная $C_1 \neq 0$.

Отдельно рассмотрим случай $\cos 2x \cdot 4y \cdot \ln y = 0$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение получаем, что $x = \dfrac{\pi n}{2}$, где n – натуральное число, и $y = 0$ не являются решениями, а $y = 1$ – решение, которое входит в общее решение при $C_1 = 0$. Окончательно получаем

Ответ: $y = e^{C_1 \frac{\sin 2x+1}{\sin 2x-1}}$, где C_1 - произвольная постоянная.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка имеют вид $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ или $M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\cdot dy = 0$, где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции одинаковой степени. Метод решения– замена переменной $u = \dfrac{y}{x}$, тогда $y = xu$, $y' = u + xu'$. После преобразований получаются уравнения с разделяющимися переменными, которые решаем описанным выше способом.

Типовая задача №4. Решить уравнение $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.

Решение. Это уравнение является однородным второй степени. Разделив обе части этого уравнения на $x^2 dx$, получим $\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right) - 2\dfrac{y}{x}y' = 0$. Обозначим: $u = \dfrac{y}{x}$.

Тогда $y = xu$, $y' = u + xu'$, и уравнение примет вид $(1 + u^2) - 2u(u + xu') = 0$, откуда $2xuu' = 1 - u^2$; $\dfrac{2udu}{1-u^2} = \dfrac{dx}{x}$; $-\dfrac{d(1-u^2)}{1-u^2} = \dfrac{dx}{x}$. Интегрируя, находим:

$-\ln\left|1-u^2\right| = \ln|x| + \ln C_1$; $\ln\left|(1-u^2)x\right| = \ln\dfrac{1}{C_1}$; $(1-u^2)x = \pm\dfrac{1}{C_1}$; $(1-u^2)x = C$.

Возвращаясь к исходной функции, получим общий интеграл исходного уравнения: $\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\right)x = C$; $\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2}\right)x = C$; $x^2-y^2=Cx$.

Ответ: $x^2-y^2=Cx$.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами имеют вид

$$y' + a(x)\cdot y = f(x).$$

Метод Бернулли решения такого уравнения заключается в следующем: ищем общее решение уравнения в виде произведения $y=u(x)\cdot v(x)$. Подставив y и y' в исходное уравнение, получим $u'\cdot v + u\cdot v' + uv\cdot a(x) = f(x)$ или $u'\cdot v + u\cdot(v' + v\cdot a(x)) = f(x)$. Потребуем, чтобы функции u, v удовлетворяли условиям: $\begin{cases} v' + v\cdot a(x) = 0; \\ u'\cdot v = f(x). \end{cases}$

Из первого уравнения системы находим $v(x)$, подставляем его во второе уравнение. Далее находим $u(x)$ и окончательно $y=u(x)\cdot v(x)$.

Типовая задача №5. Решить задачу Коши: $y' + y\cdot\cos x = \sin 2x$, $y(0)=3$.

Решение. 1). Находим общее решение данного линейного уравнения методом Бернулли, то есть решение уравнения ищем в виде произведения $y=u(x)\cdot v(x)$. Подставив y и y' в исходное уравнение, получим $u'\cdot v + u\cdot v' + uv\cdot\cos x = \sin 2x$ или $u'\cdot v + u\cdot(v' + v\cdot\cos x) = \sin 2x$. Потребуем, чтобы функции u , v удовлетворяли условиям: $\begin{cases} v' + v\cdot\cos x = 0; \\ u'\cdot v = \sin 2x. \end{cases}$ Оба уравнения этой системы являются уравнениями с разделяющимися переменными.

Из этой системы последовательно находим:

$$v = e^{-\sin x},\ u = 2\sin x\cdot e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C_1.$$

Общее решение исходного уравнения запишется в виде:

$$y = u\cdot v = \left(2\sin x\cdot e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C_1\right)e^{-\sin x} = 2\sin x - 2 + C_1 e^{-\sin x}.$$

2). Находим частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=3$. Подставив $x=0$ и $y=3$ в общее решение $y = 2\sin x - 2 + C_1 e^{-\sin x}$, найдем константу $C_1 = 5$. Таким образом, получаем частное решение $y = 2\sin x - 2 + 5e^{-\sin x}$.

Ответ: $y = 2\sin x - 2 + 5e^{-\sin x}$.

Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид: $F(x, y, y', y'') = 0$ – уравнение в неявном виде, или $y'' = f(x, y, y')$ – уравнение разрешённое относительно старшей производной.

Общее решение этого уравнения $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ и общий интеграл $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ зависят от двух произвольных постоянных C_1 и C_2.

Уравнения второго порядка, не содержащие явно $y(x)$

Некоторые классы уравнений второго порядка с переменными коэффициентами путем подходящей замены переменной сводятся к уравнениям первого порядка. В частности, уравнение вида $y'' = f(x, y')$, *не содержащее явно искомую функцию* $y = y(x)$, сводится к уравнению первого порядка заменой $y' = z\ x$.

Типовая задача №6. Решить уравнение: $y'' = y'^{\,2}$.

Решение. Это уравнение второго порядка, не содержащее явно функцию *y*. Сделаем замену переменной $y' = z\ x$.Тогда $y'' = z'$ и уравнение примет вид $z' = z^2$ – это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решаем его.

$$\frac{dz}{dx} = z^2\ ; \quad \frac{dz}{z^2} = dx; \quad -\frac{1}{z} = x + C; \quad z = \frac{-1}{x + C_1}.$$

Возвращаясь к исходной переменной y, получаем $y' = -\frac{1}{x + C_1}$.

Еще раз интегрируем и получаем общее решение исходного уравнения

$$y = -\ln|x + C_1| + C_2.\ .$$

Ответ: $y = -\ln|x + C_1| + C_2$.

Задача Коши для уравнения второго порядка: найти частное решение (частный интеграл) уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = a_0, \quad y'(x_0) = a_1.$$

Подставляя начальные условия в общее решение, получим систему уравнений для определения значений произвольных постоянных C_1 и C_2. Затем найденные значения произвольных постоянных подставим в общее решение и получим искомое частное решение.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$, где p и q – действительные числа, называется линейным *неоднородным* дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если $f(x) = 0$, то уравнение называется *однородным.*

Однородные уравнения

Общее решение однородного уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ имеет вид

$$y_{o.o.}(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x),$$

где $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ – линейно независимые частные решения этого уравнения, а $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2$ – произвольные постоянные. Для отыскания общего решения однородного уравнения составляется квадратное уравнение

$$k^2 + p \cdot k + q = 0,$$

которое называется *характеристическим уравнением*. В зависимости от вида корней характеристического уравнения общее решение $y_{o.o.}(x)$ дифференциального уравнения будет иметь разный вид. Возможны три случая:

1. Если дискриминант квадратного уравнения $D > 0$, то корни характеристического уравнения k_1, k_2 действительные и различные; тогда функции $y_1(x) = e^{k_1 \cdot x}$ и $y_2(x) = e^{k_2 \cdot x}$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y_{o.o.} = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{k_2 \cdot x}.$$

2. Если $D = 0$, то корни $k_1 = k_2 = k$ действительные и равные; тогда $y_1(\tilde{o}) = e^{k \cdot x}$, $y_2(\tilde{o}) = x \cdot e^{k \cdot x}$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y_{o.o.} = C_1 e^{k \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{k \cdot x}.$$

3. Если $D < 0$, то корни характеристического уравнения комплексно-сопряжённые числа $k_1 = \alpha + i \cdot \beta$, $k_2 = \alpha - i \cdot \beta$; тогда частными решениями уравнения будут функции $y_1(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x)$, $y_2(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x)$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y_{o.o.} = C_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_2 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x).$$

Неоднородные уравнения

Общее решение $y_{o.н.}$ неоднородного уравнения есть сумма общего решения $y_{o.o.}$ соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения $y_{ч.н.}$ данного неоднородного уравнения, то есть

$$y_{o.н.} = y_{o.o.} + y_{ч.н.}$$

Способ нахождения функции $y_{o.o.}$ уже описан. Теперь задача сводится к отысканию частного решения $y_{ч.н.}$ неоднородного уравнения. В общем случае интегрирование неоднородного уравнения можно осуществить методом вариации произвольных постоянных. Если же правая часть уравнения $f(x)$ имеет специальный вид, то $y_{ч.н.}$ находят методом неопределённых коэффициентов. Укажем вид частного решения $y_{ч.н.}$ для некоторых специальных случаев правой части $f(x)$.

1. Пусть $f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ – некоторый многочлен степени *n*, тогда а) если корни характеристического уравнения $k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0$, то частное решение ищется в виде

$$y_{ч.н.} = Q_n(x);$$

здесь $Q_n(x)$ – многочлен с неопределёнными коэффициентами той же степени, что и многочлен $P_n(x)$;

б) если один из корней характеристического уравнения равен нулю, например, $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0$, то

$$y_{ч.н.} = x \cdot Q_n(x);$$

в) если оба корня характеристического уравнения равны нулю $k_1 = k_2 = 0$, то

$$y_{ч.н.} = x^2 \cdot Q_n(x).$$

Для нахождения коэффициентов многочлена $Q_n(x)$ частное решение подставляют в неоднородное дифференциальное уравнение и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях *x* в левой и правой частях уравнения.

2. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид $f(x) = P_n(x) \cdot e^{a \cdot x}$. Тогда

а) если *a* не является корнем характеристического уравнения, то есть $k_1 \neq a,\ k_2 \neq a$, то частное решение ищется в виде

$$y_{ч.н.} = Q_n(x) \cdot e^{a \cdot x};$$

б) если один из корней характеристического уравнения равен *a*, например, $k_1 = a,\ k_2 \neq a$, то

$$y_{ч.н.} = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{a \cdot x};$$

в) если оба корня характеристического уравнения равны *a*, то есть $k_1 = k_2 = a$, то

$$y_{ч.н.} = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{a \cdot x}.$$

3. Пусть правая часть уравнения имеет вид $f(x) = P_n(x) \cdot \cos bx + T_m(x) \cdot \sin bx$, где $P_n(x),\ T_m(x)$ – многочлены степени *n* и *m*. Тогда

а) если корни характеристического уравнения не равны $\pm bi$, то частное решение ищется в виде

$$y_{ч.н.} = Q_s(x) \cdot \cos bx + R_s(x) \cdot \sin bx,$$

где $Q_s(x),\ R_s(x)$ – многочлены *s* степени с неопределёнными коэффициентами (*s* наибольшая из степеней *n* и *m*);

б) если корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm bi$, то частное решение имеет вид

$$y_{ч.н.} = x \cdot (Q_s(x) \cdot \cos bx + R_s(x) \cdot \sin bx).$$

Приведем решение трех задач такого типа.

Типовая задача №7А. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+6y'+18y=17e^{2x}.$$

Решение. Решим соответствующее однородное уравнение $y''+6y'+18y=0$. Его характеристическое уравнение $k^2+6k+18=0$ имеет комплексные корни $k_1=-3+3i$ и $k_2=-3-3i$. Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид $y_{о.о.}=e^{-3x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_{ч.н.}=Ae^{2x}$. Тогда $y'_{ч.н.}=2Ae^{2x}$, $y''_{ч.н.}=4Ae^{2x}$. Подстановка в уравнение приводит к равенству $4A+12A+18A\ \cdot e^{2x}=17e^{2x}$, откуда $A=0,5$. Таким образом, общее решение заданного уравнения имеет вид $y=e^{-3x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+0,5e^{2x}$.

Ответ: $y=e^{-3x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+0,5e^{2x}$.

Типовая задача №7Б. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-5y'+6y=2e^{3x}.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-5k+6=0$ имеет корни $k_1=3$ и $k_2=2$. Значит, общее решение однородного уравнения записывается в виде $y_{о.о.}=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}$. Заметим, что первый из корней характеристического уравнения совпадает с коэффициентом показателя степени функции в правой части. Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_{ч.н.}=Axe^{3x}$. Тогда $y'_{ч.н.}=Ae^{3x}(1+3x)$, $y''_{ч.н.}=Ae^{3x}(6+9x)$. Подстановка в уравнение приводит к равенству $6A+9Ax-5A-15Ax+6Ax\ \cdot e^{3x}=2e^{3x}$, откуда $A=2$. Таким образом, общее решение заданного уравнения имеет вид: $y=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}+2xe^{3x}$.

Ответ: $y=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}+2xe^{3x}$.

Типовая задача №7В. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+y=2\cos x-8x\sin x.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2+1=0$ имеет корни $k_1=i$ и $k_2=-i$. Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид $y_{о.о.}==C_1\cos x+C_2\sin x$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_{ч.н.}=x\ \ (ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x$. Вычислим производные первого и второго порядка этой функции:

$$y'_{ч.н.}=\ cx^2+(2a+d)x+b\ \cos x+\ -ax^2+(2c-b)x+d\ \sin x\ ,$$

$$y''_{ч.н.}=\ -ax^2+(4c-b)x+2a+2d\ \cos x+\ -cx^2-(4a+d)x+2c-2b\ \sin x.$$

Подставив их в исходное уравнение, получим соотношение

$$(4cx+2a+2d)\cos x+(-4ax+2c-2b)\sin x=2\cos x-8x\sin x.$$

Это равенство должно выполняться для всех x, что с учетом линейной независимости функций $\cos x$ и $\sin x$ возможно лишь при выполнении условий:

$$\begin{cases} 4cx+2a+2d=2 \\ -4ax+2c-2b=-8x \end{cases}, \quad \begin{cases} -4a=-8 \\ 2c-2b=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4c=0 \\ 2a+2d=2 \end{cases},$$

откуда $a=2$, $b=0$, $c=0$, $d=-1$.

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид:

$$y_{ч.н.}=(2x^2\cos x-\sin x),$$

а общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+2x^2\cos x-\sin x.$$

Ответ: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+2x^2\cos x-\sin x$.

Типовая задача №8. Решить задачу Коши:

$$y''-10y'+21y=50\sin x,\ y(0)=2,\ \ y'(0)=13.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-10k+21=0$ имеет корни $k_1=3$ и $k_2=7$. Значит, общее решение однородного уравнения $y''-10y'+21y=0$ записывается в виде $y_{о.о.}=C_1e^{3x}+C_2e^{7x}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_{ч.н.}=A\cos x+B\sin x$, где A и B – неопределенные коэффициенты. Для их определения вычислим $y'_{ч.н.}=-A\sin x+B\cos x$, $y''_{ч.н.}=-A\cos x-B\sin x$ и подставим в исходное уравнение.

Тогда получим

$$-A\cos x-B\sin x-10(-A\sin x+B\cos x)+21(A\cos x+B\sin x)=50\sin x,$$

$$(20A-10B)\cos x+(20B+10A-50)\sin x=0.$$

Это равенство должно выполняться для всех x, что с учетом линейной независимости функций $\cos x$ и $\sin x$ возможно лишь при выполнении условий: $\begin{cases} 20A-10B=0 \\ 20B+10A-50=0 \end{cases}$. Значит, $A=1,\ B=2$. Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид: $y=C_1e^{3x}+C_2e^{7x}+\cos x+2\sin x$.

Для решения задачи Коши найдем производную $y'=3C_1e^{3x}+7C_2e^{7x}-\sin x+2\cos x$. Подставив начальные условия для y и y', получим систему $\begin{cases} 2=C_1+C_2+1 \\ 13=3C_1+7C_2+2 \end{cases}$, откуда $C_1=-1, C_2=2$.

Ответ: $y=-e^{3x}+2e^{7x}+\cos x+2\sin x$.

ЗАДАЧИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 6 по теме «Ряды»

Задача № 9. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

9.1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln^3 n}$

9.2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

9.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

9.4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n(n+1)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n\cdot 2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n}$

9.5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\sin\frac{1}{n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{4^n}$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln^2 n}$

9.6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!\cdot 2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3}$

9.7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n^2}$

9.8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n^2+1}{1+n^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n+1}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot e^{-n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[4]{n}}$

9.9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3+5n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{8^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^n$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{\sqrt{n^3}}$

9.10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n\cdot 3^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9+n^2}$

Задача № 10. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

10.1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ **10.6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$

10.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$ **10.7.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln n}$

10.3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n}{3n-1}$ **10.8.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{n+1}$

10.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

10.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[4]{n}}$

10.9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \sin \frac{\pi}{n}$

10.10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \frac{1}{n!}$

Задача № 11. Найти область сходимости степенного ряда

11.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n}}{n}$

11.2. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n} \cdot (x-2)^{n}$

11.3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n} \cdot (x+2)^{n}}{n}$

11.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n}}{4^{n}}$

11.5. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n} \cdot (x+1)^{n}$

11.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n} \cdot x^{n}}{3^{n}}$

11.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n}}{n \cdot 3^{n}}$

11.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{n}}{\sqrt{n+1}}$

11.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n}}{\sqrt{n} \cdot 2^{n}}$

11.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n}}{n^{2}}$

Задача № 12. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

12.1. $\int_{0}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

12.2. $\int_{0}^{1} \cos x^2 \, dx$

12.3. $\int_{0}^{1} \frac{1-\cos x}{x} dx$

12.4. $\int_{0}^{0,25} \frac{\sin x}{x} dx$

12.5. $\int_{0}^{0,5} \frac{\sin 2x}{x} dx$

12.6. $\int_{0}^{0,5} e^{-\frac{x^2}{4}} dx$

12.7. $\int_{0}^{0,5} \frac{dx}{1+x^3}$

12.8. $\int_{0}^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^{2} dx$

12.9. $\int_{0}^{0,2} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$

12.10. $\int_{0}^{1} \sin(x^3) \, dx$

Задача № 13. Данную функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в данном интервале. Построить график функции $f(x)$ и график суммы ряда Фурье.

13.1. $f(x) = x, \quad -2 < x < 2.$

13.2. $f(x) = |x| + 1, \quad -\pi < x < \pi.$

13.3. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{при } 0 \le x < \pi. \end{cases}$

13.4. $f(x) = 2x + 1, \quad -1 < x < 1.$

13.5. $f(x) = 2x + 3, \quad -\pi < x < \pi.$

13.6. $f(x) = x, \quad -5 < x < 5.$

13.7. $f(x) = |x|, \quad -3 < x < 3.$

13.8. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } -\pi < x \le 0 \\ 1 & \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

13.9. $f(x) = x + 1, \quad -\pi < x < \pi.$

13.10. $f(x) = 1 - x, \quad -\pi < x < \pi.$

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 6

Тема «Ряды»

Типовая задача № 9. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 + 2n + 3}{2n^3 + n^2 + 5}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5n+1}{3n-2}\right)^n$ г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$

Решение. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 + 2n + 3}{2n^3 + n^2 + 5}$. Для исследования ряда применим *второй признак сравнения*: Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = A$. Тогда, если $A \ne 0$ и $A \ne \infty$, то оба ряда либо сходятся либо расходятся одновременно.

Для сравнения возьмём гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$; таким образом,

$$a_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{2n^3 + n^2 + 5}, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2 + 2n + 3)\cdot n}{2n^3 + n^2 + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 3n}{2n^3 + n^2 + 5} = \frac{1}{2} = A.$$

Получили $A \neq 0$, $A \neq \infty$. Значит, данный ряд расходится, так как расходится гармонический ряд.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. Применим *признак Даламбера*: Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ и $q < 1$, то ряд сходится, а при $q > 1$ – расходится.

Здесь $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^n}$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

(использован второй замечательный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,7$).

Таким образом, $q = \frac{1}{e} < 1$, значит, данный ряд сходится.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+1}{3n-2}\right)^n$. Применим *признак Коши*: Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ и $q < 1$, то ряд сходится, а при $q > 1$ – расходится.

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n+1}{3n-2}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+1}{3n-2} = \frac{5}{3}$; то есть, $q = \frac{5}{3} > 1$, значит, данный ряд расходится.

г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Применим *интегральный признак Коши*: Если функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает на промежутке $[1, +\infty)$,

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Вычислим $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln \ln x \Big|_{2}^{\infty} = \infty$. Интеграл расходится, значит, и данный ряд тоже (по интегральному признаку).

Ответ: а) ряд расходится; б) ряд сходится; в) ряд расходится; г) ряд расходится.

Типовая задача №10. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать, абсолютно или условно.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$$

Решение. Ряд знакочередующийся. Для его исследования применим *признак Лейбница:* Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$, где $a_n > 0$, монотонно убывают по абсолютной величине ($a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$) и стремятся к нулю ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$), то ряд сходится.

Здесь $\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{\ln 4} > \ldots$, так как функция $f(x) = \ln x$ монотонно возрастает при $x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$. Значит, данный ряд сходится по признаку Лейбница.

Рассмотрим ряд из абсолютных величин $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Этот ряд расходится по признаку сравнения. В самом деле, $\ln x < x$ при $x > 0$, то есть $\ln n < n$, откуда $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ ($n = 2, 3, \ldots$). Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармонический) расходится, а члены ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ больше, чем соответствующие члены гармонического ряда. Значит, ряд из абсолютных величин расходится. Таким образом, данный ряд сходится условно.

Ответ: ряд сходится условно.

Типовая задача №11. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot (x+2)^n.$$

Решение. Найдём радиус сходимости данного степенного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

Тогда интервал сходимости может быть найден из неравенства $|x+2| < R$, то есть: $|x+2|<1,\ -1<x+2<1,\ -3<x<-1.$

Таким образом, интервал сходимости данного ряда $-3<x<-1.$

Исследуем сходимость ряда в концах интервала.

1) $x=-1.$ Ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot 1^n=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}$. Этот ряд расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ (здесь $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$).

2) $x=-3$. Ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot(-1)^n$. Этот ряд также расходится, так как его члены тоже не стремятся к нулю.

Ответ: область сходимости данного ряда есть интервал $(-3;\,-1)$.

Типовая задача №12 . Вычислить интеграл $\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Используем основное разложение функции e^x по формуле Тейлора:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots;$$

$$\text{тогда }\ e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots$$

Подставим этот ряд в подынтегральную функцию и почленно проинтегрируем:

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx=\int_0^{1/2}\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{2^5\cdot 10}-\frac{1}{2^7\cdot 42}+\ldots$$

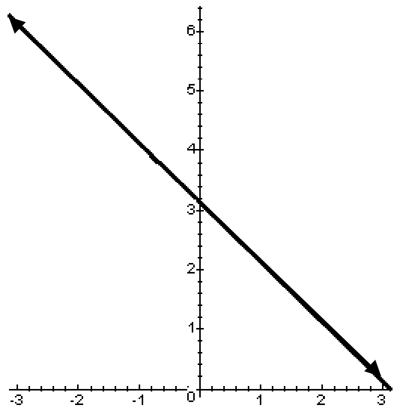
Получили знакочередующийся ряд. Если для приближённого вычисления интеграла взять 3 первых члена, то по теореме Лейбница ошибка δ будет меньше первого из отброшенных членов, то есть $\delta<\frac{1}{2^7\cdot 42}<0{,}001.$

Значит, $\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{320}=\frac{443}{960}=0{,}461\ldots$

Ответ: с точностью до 0,001 данный интеграл равен 0,461.

Типовая задача №13. Разложить функцию $f(x)=\pi-x$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\ \pi)$. Построить график функции и график суммы ряда Фурье.

Решение. График функции $f(x)=\pi-x$ на данном интервале имеет вид:



Ряд Фурье функция $f(x)$ на интервале $(-\pi,\ \pi)$ имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Найдём коэффициенты ряда:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}(\pi^2+\pi^2)=2\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi-x}{n}\sin nx\ \Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=$$

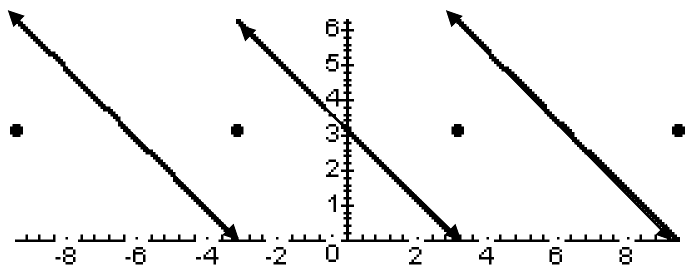
$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi-x}{n}\cos nx\ \Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x-\pi}{n}\cos nx\ \Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n^2}\sin nx\ \Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{n}\cos\pi n=\frac{2}{n}(-1)^n.$$

Ответ: Ряд Фурье данной функции имеет вид $f(x)=\pi+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx.$

График суммы ряда Фурье изображён на рисунке.



ЗАДАЧИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 7

по темам «Теория вероятностей» и «Математическая статистика »

Задача №14.

14.1. Студент знает ответ на 20 теоретических вопросов из 30 и сможет решить 30 задач из 50. Определить вероятность того, что студент полностью ответит на билет, который состоит из двух теоретических вопросов и одной задачи.

14.2. Из 50 вопросов экзамена студент подготовил 40. Найти вероятность того, что из двух заданных ему вопросов студент знает ровно один.

14.3. Из 20 деталей, среди которых 8 высшего качества, случайным образом выбираются на сборку 5. Какова вероятность того, что среди них окажется 3 детали высшего качества?

14.4. Из коробки, в которой находятся 12 карандашей и 8 ручек, наугад вынимают два предмета. Найти вероятность того, что вынуты ручка и карандаш.

14.5. Имеется 6 деталей первого сорта, 5 – второго сорта, 4 – третьего сорта. Какова вероятность того, что среди 3 случайно выбранных деталей окажутся детали всех сортов?

14.6. В книжной лотерее разыгрывается пять книг. Всего в урне имеется 20 билетов. Первый подошедший к урне вынимает четыре билета. Определить вероятность того, что два из этих билетов окажутся выигрышными.

14.7. В группе из 12 человек четверо имеют спортивные разряды. Случайным образом группа разбивается на две команды с одинаковым числом участников. Определить вероятность того, что в каждой команде окажется равное число разрядников.

14.8. На складе телеателье имеется пятнадцать кинескопов, причём десять из них изготовлены московским, а остальные – львовским заводами. Найти вероятность того, что среди пяти наудачу взятых кинескопов окажется три кинескопа, изготовленных московским заводом.

14.9. Среди десяти люминесцентных ламп имеется одна негодная. Определить вероятность того, что среди шести случайно выбранных ламп все окажутся годными.

14.10. На шести карточках разрезной азбуки написаны буквы А, В, К, М, О, С. Перемешанные карточки вынимают наудачу по одной и располагают в одну линию. Какова вероятность того, что получится слово « МОСКВА»?

Задача №15.

15.1. Среди изготовляемых рабочим деталей в среднем 4% брака. Какова вероятность того, что среди взятых на испытание 5 деталей будут ровно две бракованные детали?

15.2. Три прибора испытываются на надёжность. Вероятности выхода из строя каждого прибора равны соответственно 0,1; 0,2; 0,3. Найти вероятность того, что два прибора выйдут из строя.

15.3. Для сигнализации о пожаре установлены два независимо работающих датчика. Вероятности того, что при пожаре датчик сработает, равны для первого и второго соответственно 0,9 и 0,95. Определить вероятность того, что при пожаре сработает хотя бы один датчик.

15.4. В магазин вошли восемь покупателей. Найти вероятность того, что три из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого из покупателей равна 0,3.

15.5. Прибор, работающий в течение суток, состоит из трёх узлов, каждый из которых, независимо от других, может за это время выйти из строя; при этом неисправность хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. Вероятность безотказной работы в течение суток для первого, второго и третьего узла соответственно равна 0,9; 0,95 и 0,85. Определить вероятность того, что в течение суток прибор выйдет из строя.

15.6. В среднем 10% автомобилей, производимых заводом, имеют брак. Для контроля из партии автомобилей взяли 5 машин. Найти вероятность того, что среди них будут ровно три машины без брака.

15.7. Оптовая база снабжает 6 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4 независимо от заявок других магазинов. Найти вероятность получения в день четырёх заявок.

15.8. Над изготовлением изделия работают последовательно трое рабочих. Первый рабочий допускает брак с вероятностью 0,05; второй – с вероятностью 0,01 и третий – с вероятностью 0,03. Найти вероятность того, что при изготовлении изделия будет допущен брак.

15.9. Из орудия произведено 5 выстрелов по объекту с вероятностью попадания в каждом выстреле 0,4. Найти вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого требуется не менее двух попаданий.

15.10. Рабочий обслуживает 10 одинаковых станков. Вероятность того, что в течение часа станок потребует регулировки, равна 1/3. Какова вероятность того, что в течение часа рабочему придётся регулировать 4 станка?

Задача №16.

16.1. На складе имеется 20 телефонных аппаратов корейского производства и 30 – немецкого. В среднем, 5% корейских аппаратов и 2% немецких имеют брак. 1) Найти вероятность того, что случайно выбранный аппарат бракованный. 2) Случайно выбранный аппарат бракованный. С какой вероятностью этот аппарат был немецким?

16.2. Упаковка конфет производится двумя автоматами с одинаковой производительностью. Доля брака, допускаемого первым автоматом, равна 5%, а вторым автоматом – 7 %. Найти вероятность того, что наудачу взятая упаковка окажется бракованной. 2) Наудачу взятая упаковка оказалась бракованной. С какой вероятностью эта упаковка произведена первым автоматом?

16.3. Из 10 стрелков три стрелка попадают в мишень с вероятностью $0{,}8$, пять стрелков – с вероятностью $0{,}7$, два стрелка – с вероятностью $0{,}6$. 1) Найти вероятность того, что случайно выбранный стрелок попал в цель. 2) Случайно выбранный стрелок попал в цель. С какой вероятностью этот стрелок принадлежит второй группе?

16.4. В сеансе одновременной игры в шахматы с гроссмейстером играют 10 перворазрядников, 15 второразрядников и 20 третьеразрядников. Вероятность того, что перворазрядник выиграет у гроссмейстера равна $0{,}2$, для второразрадника эта вероятность равна $0{,}1$, а для третьеразрядника $-0{,}05$.
1) Найти вероятность того, что случайно выбранный участник выиграет.
2) Случайно выбранный участник выиграл. С какой вероятностью это был третьеразрядник?

16.5. В цехе фабрики 30% продукции производится на первом станке, на втором – 25%, а остальная продукция – на третьем станке. Первый станок дает 1% брака, второй – 2%, третий – 3%. 1) Найти вероятность того, что случайно выбранная единица продукции оказалась бракованной. 2) Случайно выбранная единица продукции оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она произведена на третьем станке.

16.6. В специализированную больницу поступают больные с тремя болезнями: в среднем 50% больных с первой болезнью, 30% – со второй, 20% – с третьей.

Вероятности излечения первой, второй и третьей болезни равны $0,7$, $0,8$, $0,9$ соответственно. 1) Найти вероятность того, что поступивший в больницу больной выздоровел. 2) Поступивший в больницу больной выздоровел. Найти вероятность того, что он болел первой болезнью.

16.7. По каналу связи с вероятностью $0,4$ передается сигнал «0», и с вероятностью $0,6$ передается сигнал «1». Из-за помех возможны ошибки. Вероятность принять «1», когда передавался сигнал «0» равна $0,05$. Вероятность принять «0», когда передавался сигнал «1»равна $0,1$. 1) Найти вероятность приема сигнала «1». 2) Принят сигнал «1». Найти вероятность того, что действительно передавался сигнал«1».

16.8. В первой урне содержится 5 белых и 6 черных шаров, во второй урне содержится 5 белых и 3 черных шара. Из первой урны наугад вынимают один шар и перекладывают его во вторую урну. Затем из второй урны вынимают один шар. 1) Найти вероятность того, что этот шар белый. 2) Вынутый шар оказался белым. Найти вероятность того, что из первой урны во вторую был переложен черный шар.

16.9. Из деталей высокого качества собирается 60% всех телевизоров, при этом вероятность работы без поломок телевизора в течение времени T равна $0,95$. Для телевизора, собранного из обычных деталей, эта вероятность равна $0,7$.
1) Найти вероятность того, что наугад выбранный телевизор проработает без поломок в течение времени T. 2) Найти вероятность того, что телевизор, проработавший без поломок в течение времени T, собран из деталей высокого качества.

16.10. ОТК проводит контроль выпускаемых приборов. Приборы содержат скрытые дефекты с вероятностью $0,15$. При проверке наличие дефекта обнаруживается с вероятностью $0,9$. Кроме того, с вероятностью $0,05$ исправный прибор может быть ошибочно признан дефектным. При обнаружении дефекта прибор бракуется. 1) Найти вероятность того, что наугад выбранный прибор будет забракован. 2) Найти вероятность того, что забракованный прибор действительно имеет дефект.

Задача №17. Дан закон распределения дискретной случайной величины.
1) Найти вероятность p.
2) Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.
3) Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

17.1.

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,2	0,1	p	0,3	0,2

17.6.

x_i	-2	-1	1	3	4
p_i	0,3	0,1	0,2	p	0,1

17.2.

x_i	0	1	3	5	6
p_i	0,1	0,3	p	0,2	0,1

17.3.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	p	0,1	0,2	0,3

17.4.

x_i	3	4	5	6	7
p_i	0,2	0,1	p	0,2	0,3

17.5.

x_i	0	2	4	6	8
p_i	0,25	p	0,1	0,15	0,3

17.7.

x_i	1	2	4	6	8
p_i	0,2	0,3	0,1	0,2	p

17.8.

x_i	-2	2	3	5	6
p_i	0,2	0,4	p	0,2	0,1

17.9.

x_i	2	4	5	7	8
p_i	0,1	0,2	p	0,3	0,2

17.10.

x_i	-1	1	2	4	6
p_i	0,2	0,3	0,3	p	0,1

Задача №18. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$.

1) Найти плотность вероятности $f(x)$.

2) Построить графики функции распределения и плотности вероятности.

3) Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4) Найти вероятность события $X > M(X)$.

18.1.
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 0 \\ 2x-x^2 & \text{при } 0<x\le 1 \\ 1 & \text{при } x>1 \end{cases}$$

18.2.
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le -1 \\ 1-x^2 & \text{при } -1<x\le 0 \\ 1 & \text{при } x>0 \end{cases}$$

18.3.
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le -1 \\ x^3+1 & \text{при } -1<x\le 0 \\ 1 & \text{при } x>0 \end{cases}$$

18.6.
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 2 \\ (x-2)^2 & \text{при } 2<x\le 3 \\ 1 & \text{при } x>3 \end{cases}$$

18.7.
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 1 \\ \dfrac{x^2-x}{2} & \text{при } 1<x\le 2 \\ 1 & \text{при } x>2 \end{cases}$$

18.8.
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 1 \\ \dfrac{x^2-1}{8} & \text{при } 1<x\le 3 \\ 1 & \text{при } x>3 \end{cases}$$

18.4.
$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 1\\ (x-1)^2 & \text{при } 1<x\le 2\\ 1 & \text{при } x>2\end{cases}$$

18.9.
$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0\\ x^3 & \text{при } 0<x\le 1\\ 1 & \text{при } x>1\end{cases}$$

18.5.
$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 2\\ \dfrac{x^2-4}{32} & \text{при } 2<x\le 6\\ 1 & \text{при } x>6\end{cases}$$

18.10.
$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0\\ \dfrac{x^2}{9} & \text{при } 0<x\le 3\\ 1 & \text{при } x>3\end{cases}$$

Задача №19. Пусть X – случайная величина, распределённая по нормальному закону с параметрами a и σ.

1) Записать формулу плотности вероятности $f(x)$ случайной величины X.

2) Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

3) Найти вероятность $P(\alpha < X < \beta)$.

19.1. $a=1$, $\sigma=2$, $\alpha=1$, $\beta=3$.
19.2. $a=10$, $\sigma=3$, $\alpha=12$ $\beta=14$.
19.3. $a=20$, $\sigma=2$, $\alpha=15$, $\beta=20$.
19.4. $a=5$, $\sigma=2$, $\alpha=4$, $\beta=6$.
19.5. $a=8$, $\sigma=3$, $\alpha=9$, $\beta=10$.
19.6. $a=2$, $\sigma=2$, $\alpha=1$, $\beta=5$;
19.7. $a=3$, $\sigma=2$, $\alpha=2$, $\beta=10$.
19.8. $a=5$, $\sigma=4$, $\alpha=4$, $\beta=12$.
19.9. $a=7$, $\sigma=2$, $\alpha=5$, $\beta=10$.
19.10. $a=3$, $\sigma=2$, $\alpha=1$, $\beta=4$.

Задача №20. Данные наблюдений случайной величины X представлены в виде интервального статистического ряда. Первая строка таблицы – интервалы наблюдавшихся значений случайной величины X, вторая – соответствующие им частоты. Требуется:

1. Построить гистограмму относительных частот.
2. Вычислить числовые характеристики выборки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, исправленную выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение.
3. Предполагая, что исследуемая случайная величина X распределена по нормальному закону, найти параметры нормального закона, записать плотность вероятности случайной величины X и построить ее график (график выравнивающей кривой) на одном чертеже с гистограммой, вычисляя значения плотности в серединах интервалов.
4. Найти теоретические частоты нормального распределения. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить по критерию согласия Пирсона (хи-квадрат) гипотезу о нормальном законе распределения.
5. Найти с надежностью (доверительной вероятностью) $\gamma = 0{,}95$ интервальную оценку параметра $a = M(X)$ случайной величины.

20.1

Интервалы	(3; 7)	(7; 11)	(11; 15)	(15; 19)	(19; 23)	(23; 27)	(27; 31)	(31; 35)
Частоты	1	5	28	53	62	36	12	3

20.2.

Интервалы	(20; 26)	(26; 32)	(32; 38)	(38; 44)	(44; 50)	(50; 56)	(56; 62)	(62; 68)
Частоты	1	4	20	43	60	44	23	5

20.3.

Интервалы	(4; 7)	(7; 10)	(10; 13)	(13; 16)	(16; 19)	(19; 22)	(22; 25)	(25; 28)
Частоты	5	20	43	59	48	19	5	1

20.4.

Интервалы	(5; 9)	(9; 13)	(13; 17)	(17; 21)	(21; 25)	(25; 29)	(29; 33)	(33; 37)
Частоты	3	10	33	55	53	31	12	3

20.5.

Интервалы	(2; 8)	(8; 14)	(14; 20)	(20; 26)	(26; 32)	(32; 38)	(38; 44)	(44; 50)
Частоты	3	10	30	51	56	24	20	6

20.6.

Интервалы	(1; 5)	(5; 9)	(9; 13)	(13; 17)	(17; 21)	(21; 25)	(25; 29)	(29; 33)
Частоты	1	6	21	50	63	42	15	2

20.7.

Интервалы	(10; 20)	(20; 30)	(30; 40)	(40; 50)	(50; 60)	(60; 70)	(70; 80)	(80; 90)
Частоты	1	3	20	39	70	36	10	1

20.8.

Интервалы	(3; 8)	(8; 13)	(13; 18)	(18; 23)	(23; 28)	(28; 33)	(33; 38)	(38; 43)
Частоты	1	6	20	53	66	41	11	2

20.9.

Интервалы	(5; 12)	(12; 19)	(19; 26)	(26; 33)	(33; 40)	(40; 47)	(47; 54)	(54; 61)
Частоты	4	9	37	49	55	37	6	3

20.10.

Интервалы	(2; 6)	(6; 10)	(10; 14)	(14; 18)	(18; 22)	(22; 26)	(26; 30)	(30; 34)
Частоты	1	8	26	50	58	38	15	4

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 7

Тема «Теория вероятностей»

События. Классическое определение вероятности

Случайным событием называется событие, которое при выполнении одних и тех же условий может произойти или нет. Случайные события обозначаются буквами A, B, C и так далее.

Событие, которое обязательно наступает в данном эксперименте, называется *достоверным.* Событие, которое заведомо не наступает в данном эксперименте, называется *невозможным.*

Суммой двух событий A, B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из них, то есть произошло A или B, или оба вместе.

Произведением двух событий A и B называется событие $C = AB$, состоящее в одновременном появлении и события A и события B.

Два события A и B называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же эксперименте (испытании).

Противоположным для события A называется событие $\overline{A}$, состоящее в том, что событие A не произошло. События A и $\overline{A}$ являются несовместными.

События $A_1, A_2, ..., A_k$ образуют *полную группу*, если в результате эксперимента обязательно произойдет хотя бы одно из них.

Пусть результат эксперимента можно представить в виде полной группы событий (исходов) $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, которые попарно несовместны и равновозможны. Эти исходы называют элементарными событиями. Множество всех элементарных событий называется пространством элементарных событий и обозначается $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$.

Пусть событие A происходит при осуществлении каких-то m элементарных исходов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m$ из множества Ω. Тогда вероятность события A равна отношению числа m исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу n всех равновозможных, попарно несовместных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность достоверного события равна единице, вероятность невозможного события равна нулю, а для всех остальных событий A выполнено неравенство $0 < P(A) < 1$. Таким образом, вероятность любого случайного события A удовлетворяет неравенству $0 \le P(A) \le 1$. Вероятности события A его противоположного события $\overline{A}$ связаны соотношением

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Вероятность события B, вычисленная в предположении, что некоторое другое событие A произошло, называется *условной вероятностью* и обозначается $P(B|A)$.

События A и B называются *независимыми*, если появление события A не влияет на вероятность события B, то есть $P(B|A)=P(B)$.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема 1. Если события A и B несовместны, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Теорема 2. Если события A и B совместны, то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Теорема 3. Если события A и B независимы, то $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Теорема 4. Если события A и B зависимы, то

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B).$$

Типовая задача № 14А. На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы О, П, Р, С, Т. Перемешанные карточки вынимаются наудачу по одной и располагаются в одну линию. Какова вероятность того, что получится слово «спорт»?

Решение. Искомую вероятность события A (получилось слово «спорт») определим по формуле

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число благоприятных исходов, n – общее число возможных исходов. В данном случае, $n = 5!$ – число перестановок из 5 элементов. Благоприятным исходам отвечает одно слово «спорт», то есть $m = 1$. Таким образом,

$$P(A)=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}.$$

Ответ: $\frac{1}{120}$.

Замечание. $n!$ –это произведение натуральных чисел от 1 до n.
В частности $5!= 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$.

Типовая задача № 14Б. Группа спортсменов из 15 юношей и 5 девушек выбирает по жребию спортивную команду из 4 человек. Какова вероятность того, что в составе этой команды окажутся два юноши и две девушки?

Решение. Испытание состоит в том, что из 20 человек выбирают 4 человека. Так как выборка состоит из 20 элементов по 4, и порядок их расположения не учитывается, то мы имеем дело с числом сочетаний. Поэтому общее число исходов $n = C_{20}^{4}$. Событие A состоит в том, что в составе выбранных окажутся 2 юноши и 2 девушки. Двух юношей из пятнадцати можно выбрать C_{15}^{2} способами, и после каждого такого выбора двух девушек из 5 можно выбрать

C_5^2 способами, то есть число благоприятных исходов равно $m = C_{15}^2 \cdot C_5^2$. Таким образом, искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{15}^2 \cdot C_5^2}{C_{20}^4} = \frac{70}{323} \approx 0{,}217\,.$$

Ответ: $0{,}217$.

Замечание. Если множество M содержит n различных элементов, то подмножества этого множества, каждое из которых содержит m элементов ($m \le n$), называются сочетаниями из n элементов по m. Число таких подмножеств обозначают символом C_n^m и вычисляют по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$.

Формула Бернулли

Пусть производится n независимых одинаковых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p. Тогда вероятность того, что событие A в этих n испытаниях появится k раз, обозначают $P_n(k)$ и вычисляют по *формуле Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}\ ,\quad \text{где } q = 1 - p\,.$$

Типовая задача № 15А. Игральную кость бросают четыре раза. Какова вероятность того, что шестёрка выпадет ровно 3 раза?

Решение. Применяем формулу Бернулли.

В данном случае, $n = 4$, $k = 3$, $p = \dfrac{1}{6}$, $q = \dfrac{5}{6}$, откуда искомая вероятность будет

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{324} \approx 0{,}015\,.$$

Ответ: $0{,}015$.

Типовая задача № 15Б. Первый стрелок поражает мишень с вероятностью 0,6, второй – с вероятностью 0,5, третий – с вероятностью 0,3. Выстрелили все трое. Найти вероятность того, что: а) в мишень попал ровно один стрелок;
б) мишень поражена.

Решение. Обозначим через A_1 событие, состоящее в том, что первый стрелок попал в мишень, $\overline{A_1}$ – противоположное ему событие, т. е. что первый стрелок промахнулся; A_2, $\overline{A_2}$, A_3, $\overline{A_3}$ – соответствующие события для второго и третьего стрелков соответственно. Все эти события независимы; по условию, вероятности событий A_1, A_2, A_3 равны $P(A_1)=0{,}6$, $P(A_2)=0{,}5$, $P(A_3)=0{,}3$, откуда

$$P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=0{,}4,\ P(\overline{A_2})=0{,}5,\ P(\overline{A_3})=0{,}7.$$

а) Обозначим через B событие, состоящее в том, что попал ровно один стрелок; тогда

$$B=A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3,$$

где все слагаемые в правой части – события несовместные; поэтому искомая вероятность

$$P(B)=0{,}6\cdot0{,}5\cdot0{,}7+0{,}4\cdot0{,}5\cdot0{,}7+0{,}4\cdot0{,}5\cdot0{,}3=0{,}41.$$

б) Обозначим через C событие, состоящее в том, что мишень поражена; это означает, что попал или один, или два, или все три стрелка. Рассмотрим противоположное событие $\overline{C}$; оно состоит в том, что не попал ни один стрелок. Таким образом, $\overline{C}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$, откуда

$$P(\overline{C})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})=0{,}4\cdot0{,}5\cdot0{,}7=0{,}14;$$

значит, $P(C)=1-P(\overline{C})=0{,}86$ – искомая вероятность.

Ответ: а) $0,41$; б) $0,14$.

Типовая задача № 15В. В ящике 50 кубиков, из которых 5 неокрашенных. Наудачу последовательно извлекаются 3 кубика. Определить вероятность того, что все извлечённые кубики окрашены.

Решение. Обозначим события:

A_1 – первый извлечённый кубик окрашен;

A_2 – второй извлечённый кубик окрашен;

A_3 – третий извлечённый кубик окрашен.

Их условные вероятности находим по формуле классического определения вероятности:

$$P(A_1)=\frac{45}{50};\ P_{A_1}(A_2)=\frac{44}{49};\ P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{43}{48}.$$

Обозначим через D событие, состоящее в том, что все три извлечённых кубика окрашены. Это событие можно представить в виде произведения $D=A_1A_2A_3$. Тогда вероятность его найдём по теореме 4

$$P(D)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{1419}{1960}\approx0{,}724.$$

Ответ: $0,724$.

Формула полной вероятности. Формула Байеса

Если событие A может произойти вместе с одним из событий H_1, H_2, ..., H_n, образующих полную группу несовместных событий, то есть события H_i попарно несовместны и $P(H_1)+P(H_2)+...+P(H_n)=1$, тогда вероятность события A можно вычислить по *формуле полной вероятности*

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)+...$$
$$...+P(H_n)\cdot P(A|H_n)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A|H_i).$$

Условная вероятность события H_i в предположении, что событие A произошло, определяется по так называемой *формуле Байеса*

$$P(H_i\,|\,A)=\frac{P(AH_i)}{P(A)}=\frac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A|H_i)\cdot P(H_i)},\quad i=1,\,2,\,...,\,n.$$

Вероятности $P(H_i\,|\,A)$, вычисленные по формуле Байеса, часто называют вероятностями гипотез.

Типовая задача задания №16. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 студента подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – удовлетворительно и один – плохо. Имеется 20 вопросов, из которых отлично подготовленный студент может ответить на все, хорошо подготовленный – на 16, удовлетворительно подготовленный – на 10, а плохо подготовленный – на 5.

а) Найти вероятность того, что наугад вызванный студент ответит на три заданных вопроса;

б) Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент плохо подготовлен, и ему просто повезло с вопросами.

Решение. а) Обозначим через A событие, заключающееся в том, что студент ответит на три произвольно заданных вопроса. Это событие может произойти при реализации одной из гипотез: H_1 – студент подготовлен отлично, H_2 – хорошо, H_3 – удовлетворительно, H_4 – плохо. Эти гипотезы образуют полную группу попарно несовместных событий, и их вероятности равны

$$P(H_1)=0{,}3\ ;\ P(H_2)=0{,}4\ ;\ P(H_3)=0{,}2\ ;\ P(H_4)=0{,}1.$$

Эти вероятности априорные, то есть вычисленные до проведения опыта. Условные вероятности $P(A/H_i)$ (i=1, 2, 3, 4) находим, используя классическое определение вероятности:

$$P(A/H_1)=\frac{C_{20}^3}{C_{20}^3}=1; \qquad P(A/H_2)=\frac{C_{16}^3}{C_{20}^3}=\frac{28}{57}\approx 0{,}491;$$

$$P(A/H_3)=\frac{C_{10}^3}{C_{20}^3}=\frac{2}{19}\approx 0{,}105; \qquad P(A/H_4)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{1}{114}\approx 0{,}009.$$

Вероятность события A находим по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(H_i)\cdot P(A/H_i)\approx 0,3\cdot 1+0,4\cdot 0,491+0,2\cdot 0,105+0,1\cdot 0,009\approx 0,518.$$

б) По условию, событие A произошло; определим тогда вероятность реализации гипотезы H_4 , то есть послеопытную (или апостериорную) вероятность $P(H_4/A)$, которую находим по формуле Байеса:

$$P(H_4/A)=\frac{P(H_4)\cdot P(A/H_4)}{P(A)}=\frac{1}{591}\approx\frac{0{,}1\cdot 0{,}009}{0{,}518}\approx 0{,}002.$$

Ответ: а) $0,518$; б) $0,002$.

Случайные величины

Дискретная случайная величина и её характеристики

Случайную величину (сокращенно СВ), имеющую конечное или счетное множество возможных значений, называются *дискретной*.

Закон распределения дискретной случайной величины – соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, обычно задается в виде ряда распределения или таблицы распределения

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

, где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$

а также графически в виде многоугольника распределения или функцией распределения $F(x)=P\ \ X<x\ \ =\sum_{x_i<x} p_i.$

График функции распределения $F(x)$ дискретной СВ имеет ступенчатый вид.

Важнейшие свойства $F(x)$:

1) $F(x)$ — неубывающая функция своего аргумента;

2) $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$;

3) $\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$.

Числовыми характеристиками случайной величины X являются математическое ожидание $M[X]$, дисперсия $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

Математическое ожидание дискретной случайной величины X , заданной конечным рядом распределения, вычисляется по формуле

$$M[X]=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i.$$

$M[X]$ представляет собой среднее ожидаемое значение случайной величины.

Дисперсией СВ X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания, то есть

$$D[X]=M\left[(X-M[X])^2\right]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M[X])^2p_i,$$

или
$$D[X]=M\left[X^2\right]-(M[X])^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-(M[X])^2.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$ определяется формулой

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}.$$

Типовая задача №17. Закон распределения дискретной случайной величины X задан в виде таблицы

x_i	1	2	3	5	6
p_i	0,2	0,1	0,4	p	0,1

Найти: 1) вероятность p ; 2) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график; 3) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение: 1) Согласно свойству закона распределения сумма всех вероятностей равна единице. Имеем $0,2+0,1+0,4+p+0,1=1,$ поэтому $p=0,2.$
Следовательно, закон распределения имеет вид:

x_i	1	2	3	5	6
p_i	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

2) Функция распределения $F(x)$ случайной величины X равна

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\ \ x\le 1 \\ 0,2 & при\ \ 1<x\le 2 \\ 0,2+0,1=0,3 & при\ \ 2<x\le 3 \\ 0,3+0,4=0,7 & при\ \ 3<x\le 5 \\ 0,7+0,2=0,9 & при\ \ 5<x\le 6 \\ 0,9+0,1=1 & при\ \ x>6. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ имеет ступенчатый вид и представлен на рис.1.

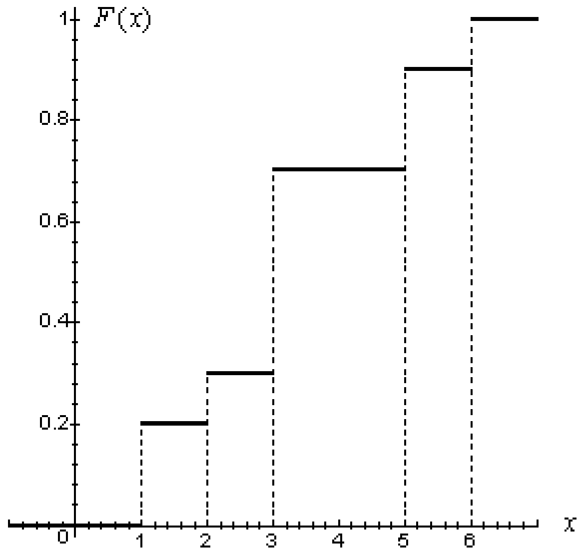


Рис.1. График функции распределения

3) $M[X]=1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}4+5\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}1=3{,}2;$
$D[X]=1^2\cdot 0{,}2+2^2\cdot 0{,}1+3^2\cdot 0{,}4+5^2\cdot 0{,}2+6^2\cdot 0{,}1-3{,}2^2=2{,}56;$
$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=1{,}6.$

Непрерывная случайная величина

Случайная величина X называется *непрерывной,* если все её возможные значения непрерывно заполняют целый интервал (α,β) или, более точно, её функция распределения $F(x)=P(X<x)$, непрерывная на (α,β) , кусочно-дифференцируемая функция с производной $F'(x)$. Непрерывную СВ удобно задавать функцией плотности вероятности $f(x)$, которая связана с интегральной функцией распределения соотношением

$$F'(x)=f(x).$$

Свойства функции плотности вероятности:

1) $f(x)\geq 0$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1.$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет некоторое значение на интервале $(a;b)$, определяется формулой

$$P(a<X<b)=\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Математическое ожидание вычисляется по формуле

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx.$$