Федеральное агентство воздушного транспорта
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Кафедра высшей математики
К.К.Кислов

Математика
(Статистика, корреляция и регрессия)

Пособие
по выполнению контрольных
домашних заданий по математической статистике (часть2)
для студентов II курса
всех специальностей
дневного обучения

Москва-2009

ББК 517

П 44

Рецензент: канд. физ.-мат. наук А.А.Савченко.

Кислов К.К.

К93 Данное пособие издаётся в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины “Высшая математика” по учебному плану для студентов II курса всех специальностей дневного обучения, утверждённому в 2008г.

В пособии приведено 27 вариантов домашних заданий в виде выборок двумерных случайных величин. Дан пример выполнения домашнего задания.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры. Протокол № 11 от 12.05.2009 и методического совета протокол № 5 от22.05.2009.

Содержание

Введение……………………………………………………………………………4

1. Зависимость случайных величин. Корреляция.
   Линии регрессии ………………………………………………………………4
2. Выборочные уравнения регрессии. Статистическая
   обработка наблюдений …………………………………………………………7
3. Пример выполнения домашнего задания …..……………………………..16
4. Выборки из генеральной совокупности (X, Y) …….…………………... 26
5. Приложение …………………………………………….……………………. 38

Введение

Теория корреляции – раздел математической статистики, изучающий стохастическую (вероятностную) зависимость оценки условного математического ожидания одной случайной величины от значения других случайных величин, входящих в систему.

Теория корреляции опирается на основные соотношения законов распределения систем случайных величин, в которых рассматривают вопросы зависимости случайных величин друг от друга.

Основное применение, которое находит теория корреляции, относится к решению задач обоснованного прогноза, то есть указания пределов, в которых с наперед заданной надежностью будут содержаться исследуемые значения признаков, если другие признаки системы получат определенные значения.

В методическом указании приведены 28 выборок объемом 50, извлеченных из генеральных совокупностей, в которых системы случайных величин распределен предположительно по нормальному закону.

Целью домашнего задания является определение параметров двумерного распределения выборки, уравнения регрессии Y на X, проверки гипотезы о существовании зависимости между признаками X и Y выборки и проверки гипотезы о нормальном распределении системы (X, Y).

Даны рекомендации по выполнению контрольных домашних заданий.

1. Зависимость случайных величин. Корреляция. Линии регрессии

В практике применения теории вероятностей сталкиваются с задачами, в которых результат исследования описывается двумя и более случайными величинами, образующими систему и обозначаемую (X, Y) в случае двух случайных величин X и Y.

Систему случайных величин (X, Y) можно толковать как случайную точку или случайный вектор с координатами X и Y.

В качестве закона распределения вероятности для непрерывной системы случайных величин выступает плотность распределения.

Если обозначить плотность распределения первой случайной величины X, входящей в систему, через $f_1(x)$, а второй – через $f_2(y)$, тогда

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f(y/x) = f_2(y)\cdot f(x/y),$$

где $f(x/y)$ - условная плотность распределения случайной величины X;

$f(y/x)$ - условная плотность распределения случайной величины Y;

x/y - переменная величина x при фиксированном определенном значении y.

Случайная величина Y называется независимой от случайной величины X, если $f(y/x) = f_2(y)$.

Если же $f(y/x) \neq f_2(y)$, тогда Y зависит от X.

Для независимых непрерывных случайных величин плотность распределения системы равна произведению плотностей распределения отдельных величин, входящих в систему, т.е.

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Вероятностная или стохастическая зависимость величин X и Y означает то, что, зная значения случайной величины X, нельзя указать точно значение Y, а можно указать закон распределения Y, зависящий от значения случайной величины X.

Случайные величины X и Y системы (X,Y) характеризуются числовыми характеристиками:

математическими ожиданиями M[X] = m_x и M[Y] = m_y;

дисперсиями D[X]=M[(X -m_x)^2], D[Y]=M[(Y - m_y)^2];

корреляционным моментом («моментом связи») K_{xy}=M[(X - m_x)(Y - m_y)].

M[X] и M[Y] – геометрически означают координату центра рассеивания системы (X,Y) на плоскости x0y.

D[X] и D[Y] – характеризуют степень рассеивания точки (X,Y) в направлении осей 0x и 0y соответственно.

Корреляционный момент K_{xy} характеризует помимо рассеивания величин X и Y еще и связь между ними. Если $K_{xy} \neq 0$, то это является <u>*признаком наличия зависимости*</u> между X и Y.

Из $K_{xy}=M[(X-m_x)(Y-m_y)]$ видно, что K_{xy} корреляционный момент характеризует не только зависимость величин, но и их рассеивание. Действительно, если, например, одна из величин (X,Y) весьма мало отклоняется от своего математического ожидания (почти не случайна), то корреляционный момент будет мал, какой бы тесной зависимостью ни были связаны величины X и Y. Поэтому для характеристики связи X и Y в чистом виде применяется коэффициент корреляции

$$r = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

который является безразмерной величиной и может принимать значения от -1 до +1. Здесь $\sigma_x = \sqrt{D[x]}$ и $\sigma_y = \sqrt{D[y]}$ - средние квадратические отклонения величин X и Y.

<u>*Для независимых случайных величин коэффициент корреляции*</u> равен нулю.

Случайные величины, для которых r = 0 называются некоррелированными. Некоррелированность случайных величин (r=0) системы (X,Y) не означает их независимость. Могут быть случаи, когда некоррелированные случайные величины будут зависимыми. Однако коррелируемость X и Y означает их вероятностную зависимость.

Из условия зависимости случайных величин X и Y

$$f(y/x) \neq f(y)$$

следует, что условное математическое ожидание случайной величины Y является функцией значений x случайной величины X

$$M[Y/x] = \varphi(x),$$

которая называется регрессией Y на X.

График функции $M[Y/x] = \varphi(y)$ называется кривой регрессии Y на X.

Аналогично, $M[X / y] = \psi(y)$ называется регрессией случайной величины X на Y.

На практике наиболее часто встречаются системы (X,Y) закон распределения которых является нормальным. Этот закон имеет вид:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \cdot e^{-\frac{Q(x,y)}{2}},$$

где $$Q(x,y) = \frac{1}{1-r^2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right];$$

m_x, m_y - математические ожидания случайных величин X и Y соответственно;

σ_x, σ_y - средние квадратические отклонения величин X и Y;

r - коэффициент корреляции.

Путем преобразования нормального закона распределения можно показать, что теоретическая линия регрессии величин Y на X является уравнение *прямой,*

$$M[X / y] = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x + m_y - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x,$$

а среднее квадратическое отклонение условного распределения

$$\sigma_{Y/x} = \sigma_y\sqrt{1-r^2}.$$

Аналогично, регрессия X на Y является прямой

$$M[X / y] = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y + m_x - r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}m_y.$$

2. Выборочное уравнение регрессии. Статическая обработка наблюдений

Пусть над случайными величинами X и Y проделано n независимых наблюдений, в результате которых получены n пар значений: $(x_1, y_1, (x_2 . y_2) ... (x_n, y_n)$. Эта совокупность значений называется выборкой из генеральной совокупности.

Рассмотрим задачу определения одной случайной величины Y по данным значений другой, т.е. задачу оценивания значения ненаблюдаемой случайной величины Y по данному значению $\boldsymbol{x}$.

Пусть $\hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})$ (игрек с «крышкой») – <u>*оценка*</u> значения величины $\boldsymbol{y}$ при данных $\boldsymbol{x}$. Ошибка этой оценки $\hat{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{Y}$ представляет собой случайную величину. Точность оценки $\hat{\boldsymbol{y}}$ целесообразно характеризовать средним квадратом ошибки при данном значении $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}[(\hat{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{Y})^2 / \boldsymbol{x}].$$

Средний квадрат ошибки $\hat{\boldsymbol{y}}$ будет минимальным, если принять за $\hat{\boldsymbol{y}}$ математическое ожидание случайной величины Y при данном $\boldsymbol{x}$:

$$\hat{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}[\boldsymbol{Y} / \boldsymbol{x}].$$

Зависимость оценки $\hat{\boldsymbol{y}}$ величины Y от $\boldsymbol{x}$ в этом случае представляет собой регрессию Y на X.

Таким образом, оптимальной оценкой зависимости Y от $\boldsymbol{x}$ служит регрессия Y на $\boldsymbol{x}$.

Для нормального закона распределения вероятностей системы (X,Y) оптимальным прогнозом величины Y по данным значений $\boldsymbol{x}$ будет прогноз по регрессии

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \bar{\boldsymbol{r}} \frac{\boldsymbol{S_u}}{\boldsymbol{S_x}} \boldsymbol{x} + \bar{\boldsymbol{y}} - \bar{\boldsymbol{r}} \frac{\boldsymbol{S_y}}{\boldsymbol{S_x}} \bar{\boldsymbol{x}} ,$$

где $S_y \approx \sigma_y; S_x \approx \sigma_x; r \approx r, \bar{x} \approx m_x; \bar{y} \approx m_y$ - оценки соответствующих параметров распределения.

Оценивание по теоретической регрессии возможно только в том случае, когда теоретическая регрессия известна. Если она неизвестна или определяемая ею зависимость слишком сложна для практической реализации, то приходится искать оценку зависимости случайной величины Y от X в некотором ограниченном классе функций $\varphi(x)$- линейные функции или многочлены второй или более высокой степени.

Таким образом, уравнение

$$\hat{y}(x) = \varphi_в(x)$$

называется выборочным уравнением регрессии Y на X, где $\varphi_в(x) = Ax + B$ либо $\varphi_в(x) = Ax^2 + Bx + C$ и т.д.

В основу определения коэффициентов A, B, C и т.д. положен метод наименьших квадратов. «Наилучшая» оценка этих коэффициентов обращает в минимум сумму квадратов уклонений наблюдаемых значений y_i от вычисленных при тех же значениях x_i значений $\hat{y}(x_i) = Ax_i + B$, т.е.

$$F(A,B) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - A_{x_i} - B)^2 = \min .$$

Минимум функции F(A, B) достигается при решении системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial A} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial B} = 0. \end{cases}$$

В результате решения этой системы получим:

$$A = \bar{r}\frac{S_y}{S_x}; \quad B = \bar{y} - \bar{r}\frac{S_y}{S_x}\bar{x} .$$

Уравнение оцениваемой прямой имеет вид:

$$\hat{y} = \bar{r}\frac{S_y}{S_x}x + \bar{y} - \bar{r}\frac{S_y}{S_x}\bar{x}$$

и называется уравнением линейной регрессии Y на X. Это уравнение совпадает с уравнением регрессии нормального закона распределения вероятностей.

По методу наименьших квадратов можно находить оценку параметров линии регрессии при нелинейной регрессии, например, для

$$\hat{y} = Ax^2 + Bx + C .$$

Оценки параметров A, B, C находятся из условия минимума функции

$$F(A,B,C)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-Ax_i^2-Bx_i-C)^2=\min .$$

Коэффициент $\boldsymbol{A=\bar{r}\frac{S_y}{S_x}}$ в уравнении линейной регрессии называется выборочным коэффициентом регрессии. Он характеризует угол наклона прямой регрессии. Если А>0, то с увеличением x значение y также возрастает, в то время как при А<0 y с возрастанием x убывает.

Статистическая обработка наблюдений (данных выборки) сводится к вычислению параметров выборки $\boldsymbol{\bar{x},\bar{y},S_x^2,S_y^2,\bar{r}}$ по формулам:

$$\boldsymbol{\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}}\ ;$$

$$\boldsymbol{\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}}\ ;$$

$$\boldsymbol{S_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}\ ;$$

$$\boldsymbol{S_y^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n-1}}\ ;$$

$$\boldsymbol{\bar{r}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{(n-1)\cdot S_x\cdot S_y}}\ .$$

Для облегчения процесса вычисления параметров выборки, интервалы изменения x и y выборки разбивают на $k\approx 5\lg n$ частичных интервалов, составляют корреляционную таблицу и производят вычисления. Такой способ вычисления параметров нецелесообразен, т.к. он вносит дополнительные ошибки вычисления параметров. Например, вычисленное значение коэффициента корреляции $\boldsymbol{\bar{r}}$ в рассматриваемом далее примере при разбиении на 8 интервалов (объем выборки – 50) равно – 0,466. Значения коэффициента корреляции, вычисленные без разбиения на интервалы по вышеприведенным формулам, равно – 0,548, т.е. ошибка вычисления составила ~15%.

В работе Р.Шторм «Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества» статистически показано влияние длины частичных интервалов на коэффициент корреляции. Коэффициент корреляции тем меньше, чем больше длина частичных интервалов, т.е. чем грубее группирование.

Для вычисления параметров распределения выборки составляется табл. 1.

Первая строка таблицы – это номера элементов выборки, вторая и третья строки содержат варианты признаков X и Y соответственно. Суммируя варианты второй и третьей строки, находят суммы $\sum_{i=1}^{n} x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} y_i$ и вычисляют значения $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Четвертая строка таблицы содержит элементы $x_i - \bar{x}$. Пятая - $y_i - \bar{y}$. Шестая и седьмая строки таблицы позволяют вычислить дисперсии S_x^2 и S_y^2. Восьмая строка таблицы служит для вычисления коэффициента корреляции $\bar{r}$.

Для облегчения вычисления параметров табл. 1 разбивается на подтаблицы, содержащие по десять вариантов выборки. Для выборки объема 50 таких подтаблиц будет пять.

Таблица 1

(подтаблица 1)

1.	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
2.	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	$\sum_{i=1}^{10} x_i$
3.	y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	$\sum_{i=1}^{10} y_i$
4.	$x_i - \bar{x}$	$x_1 - \bar{x}$	$x_2 - \bar{x}$	…							$x_{10} - \bar{x}$	-
5.	$y_i - \bar{y}$	$y_1 - \bar{y}$	$y_2 - \bar{y}$	…							$y_{10} - \bar{y}$	-
6.	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_1 - \bar{x})^2$	$(x_2 - \bar{x})^2$	…							$(x_{10} - \bar{x})^2$	$\sum_{i}^{10} (x_i - \bar{x})^2$
7.	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_1 - \bar{y})^2$	$(y_{2i} - \bar{y})^2$	…							$(y_{10} - \bar{y})^2$	$\sum_{i}^{10} (y_i - \bar{y})^2$
8.	$(x_i - \bar{x}) *$ $(y_i - \bar{y})$	k_1	k_2	…							k_{10}	$\sum_{i}^{10} k_i$

В табл.1 введено обозначение:

$$k_i = (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

Доверительные интервалы для параметров генеральной совокупности при надежности γ и выборке объема n вычисляются по зависимостям:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{S_x}{\sqrt{n}} < m_x < \bar{x} + t_\gamma \frac{S_x}{\sqrt{n}};$$

$$\bar{y} - t_\gamma \frac{Sy}{\sqrt{n}} < m_y < \bar{y} + t_\gamma \frac{S_y}{\sqrt{n}};$$

$$S_x(1 - q_{\gamma n}) < \sigma_x < S_x(1 + q_{\gamma n});$$

$$S_y(1 - q_{\gamma n}) < \sigma_y < S_y(1 + q_{\gamma n});$$

$$\bar{r} - t_\gamma \frac{1 - (\bar{r})^2}{\sqrt{n}} < r < \bar{r} + t_\gamma \frac{1 - (\bar{r})^2}{\sqrt{n}}.$$

где t_γ определяется по таблицам распределения Стьюдента – табл. 2 Приложения;

$q_{\gamma n}$ - определяется по таблицам распределения Пирсона – табл. 3 Приложения.

Для выборки объема n=50 и доверительной вероятности γ = 0,95 значения $t_{0,95}$ = 2,01 и $q_{0,95;50}$ = 0,21.

В случае если выборочный коэффициент корреляции $\bar{r} \neq 0$ и т.к. выборка отобрана случайно, то возникает необходимость при заданном уровне значимости α проверки нулевой гипотезы $H_0 : r = 0$ - о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности. Если нулевая гипотеза отвергается, то это означает, что выборочный коэффициент корреляции $\bar{r}$ значимо отличается от нуля, а X и Y коррелированны, т.е. связаны линейной зависимостью

$$\hat{y} = \bar{r}\frac{S_y}{S_x}x + \bar{y} - \bar{r}\frac{S_y}{S_x}\bar{x}.$$

В качестве критерии проверки нулевой гипотезы принимается случайная величина

$$T = \frac{\bar{r}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - (\bar{r})^2}},$$

имеющая распределение Стьюдента с $k = n - 2$ степенями свободы.

Для проверки нулевой гипотезы $H_0 : r = 0$ вычисляется выборочное значение критерия

$$T_в = \frac{\bar{r}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(\bar{r})^2}}$$

и из таблицы критических точек распределения Стьюдента по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n-2$ находится критическая точка $t_{кр}(\alpha, k)$. Например, $t_{кр}(0{,}05;48) = 2{,}01$ при объеме выборки n = 50.

Если $|T_в| > t_{кр}$ - нулевая гипотеза отвергается, т.е. выборочный коэффициент корреляции $\bar{r}$ значимо отличается от нуля, $r \neq 0$ и X и Y – коррелированны.

Если $|T_в| < t_{кр}$ - коэффициент корреляции генеральной совокупности $r = 0$ и X и Y – некоррелированы.

Предполагая, что система (X,Y) имеет нормальное распределение, проверим эту гипотезу.

В сечениях поверхности нормального распределения плоскостями, параллельными плоскостями *x0y* получаются эллипсы, уравнения проекций которых на плоскость *x0y* имеют вид:

$$\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r_{xy}\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} = const \, .$$

Центр эллипса (рис.1) находится в точке с координатами (m_x, m_y), оси симметрии эллипса составляют с осью *0x* углы, определяемые уравнением:

$$tg2\alpha = \frac{2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \, .$$

Это уравнение имеет два значения углов - α_1 и α_2, различающиеся на $\frac{\pi}{2}$.

Ориентация эллипса относительно координатных осей находится в прямой зависимости от коэффициента корреляции r_{xy} системы (X,Y).

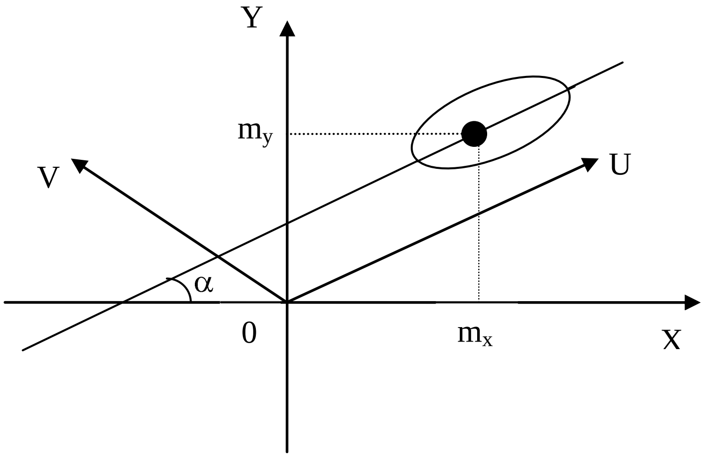

Рис.1.

Значения угла α в зависимости от знака r_{xy} и соотношения величин σ_x и σ_y представлены в табл. 2.

Таблица 2.

σ / r_{xy}	$\sigma_x < \sigma_y$	$\sigma_x > \sigma_y$
$r_{xy} < 0$	$\alpha = \frac{1}{2} arctg \frac{2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} - 90^\circ$ $\sin\alpha < 0; \cos\alpha > 0$	$\alpha = \frac{1}{2} arctg \frac{2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$ $\sin\alpha < 0; \cos\alpha > 0$
$r_{xy} > 0$	$\alpha = \frac{1}{2} arctg \frac{2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} + 90^\circ$ $\sin\alpha > 0; \cos\alpha > 0$	$\alpha = \frac{1}{2} arctg \frac{2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$ $\sin\alpha > 0; \cos\alpha > 0$

При определении угла α следует учитывать нечетность функции $arctgZ$, т.е. $arctg(-Z) = -arctgZ$.

Уравнение эллипса рассеивания принимает простой вид в системе *u0v*

$$\frac{(U - m_U)^2}{\sigma_U^2} + \frac{(V - m_V)^2}{\sigma_V^2} = \lambda^2 .$$

Если координатные оси $0x$ и $0y$ повернуть вокруг начала координат на угол α,тогда полученные новые координатные оси $0u$ и $0v$ будут параллельны главным осям эллипса рассеивания. При этом случайные величины (U,V) оказываются некоррелированными и независимыми, т.е.

$$f(U,V)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u}\cdot e^{-\frac{(U-m_U)^2}{2\sigma_U^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}\cdot e^{-\frac{(U-m_V)^2}{2\sigma_V^2}}.$$

Таким образом, проверка гипотезы о нормальном законе распределения системы (X,Y) сводится к проверке гипотезы о законе распределения независимых случайных величин U и V.

В системе $u0v$ координаты случайной точки (X,Y) будут:

$$\begin{cases} U = X\cos\alpha + Y\sin\alpha, \\ V = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \end{cases}$$

Параметры распределения системы (U,V) определяются по зависимостям:

$$\begin{aligned} m_u &= m_x\cos\alpha + m_y\sin\alpha, \\ m_v &= -m_x\sin\alpha + m_y\cos\alpha, \\ D_u &= D_x\cos^2\alpha + D_y\sin^2\alpha + 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y\sin\alpha\cos\alpha, \\ D_v &= D_x\sin^2\alpha + D_y\cos^2\alpha - 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y\sin\alpha\cos\alpha. \end{aligned}$$

Исходя из приведенных зависимостей, проверка гипотезы о нормальном распределении системы (X,Y) проводится по следующей схеме:

1. Определяют угол α из уравнения

$$\boldsymbol{tg2\alpha=\frac{2r_{xy}S_xS_y}{S_x^2-S_y^2}},$$

где $\boldsymbol{S_x, S_y, r_{xy}}$ - параметры выборки системы (X,Y).

2. Вычисляют варианты выборки системы (U,V) – (U_1,V_1), (U_2,V_2), …,(U_n,V_n) по уравнениям :

$$\begin{cases} U_i = x_i\cos\alpha + y_i\sin\alpha, \\ V_i = -x_i\sin\alpha + y_i\cos\alpha. \end{cases}$$

где (x_i,y_i) - варианты выборки системы (X,Y).

3. Определяют параметры выборки системы (U,V) :

$$\begin{cases} \bar{U} = \bar{x}\cos\alpha + \bar{y}\sin\alpha, \\ \bar{V} = -\bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha, \\ S_u^2 = S_x^2\cos^2\alpha + S_y^2\sin^2\alpha + 2\bar{r}_{xy}S_xS_y\sin\alpha\cos\alpha, \\ S_v^2 = S_x^2\sin\alpha + S_y^2\cos^2\alpha - 2\bar{r}_{xy}S_xS_y\sin\alpha\cos\alpha. \end{cases}$$

4. Производят для каждого из признаков U и V проверку гипотезы о их нормальном распределении по выборочному критерию Пирсона :

$$\boldsymbol{\chi_в^2 = \sum_{i=1}^{S}\frac{(m_i - m_{iT})^2}{m_{iT}}},$$

где $\boldsymbol{S \approx 5\lg n}$ - число интервалов признаков U и V;

m_i - число вариант выборки признака в i-ом интервале;

$\boldsymbol{m_{iT} = P_{iT}\cdot n}$ - число теоретических вариант признака в i-ом интервале.

Здесь n - объем выборки; $\boldsymbol{P_{iT}}$ - теоретическая вероятность попадания случайной точки (U,V) в интервал ($\boldsymbol{U_{i-1}, U_i}$), вычисляемая по формуле:

$$\boldsymbol{P_{iT} = \Phi\cdot\left(\frac{U_i - m_u}{S_u}\right) - \Phi\cdot\left(\frac{U_{i-1} - m_u}{S_u}\right)}.$$

5. По таблице критических точек распределения Пирсона для заданного уровня значимости $\boldsymbol{\alpha}$ и числу степеней свободы k=S-3 находится критическая точка $\boldsymbol{\chi_{кр}^2(\alpha, k)}$ (табл. 4 Приложения).

Если для каждого из признаков U и V выполняются неравенства:

$$\boldsymbol{\chi_в^2(u) < \chi_{кр}^2(\alpha, k)} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\chi_в^2(v) < \chi_{кр}^2(\alpha, k)},$$

тогда нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении признаков U и V и, следовательно, системы (X,Y).

Если $\boldsymbol{\chi_в^2(u) > \chi_{кр}^2(\alpha, k)}$ или $\chi_в^2(v) > \chi_{кр}^2(\alpha, k)$ - гипотеза о нормальном распределении системы (X,Y) отвергается.

2. Пример выполнения домашнего задания

Дана выборка (табл. 3) системы признаков (X,Y), состоящая из 50 пар вариант (x_i,y_i). Следует определить параметры выборки $\boldsymbol{\bar{x}, \bar{y}, S_x, S_y, \bar{r}}$ и интервальные оценки параметров при доверительной вероятности 0,95, записать выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X и X на Y, проверить гипотезу о коррелированности признаков X и Y и гипотезу о нормальном распределении системы (X,Y).

Таблица 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	18,600	25,512	27,471	32,781	21,828	25,116	31,155	32,647	23,016	28,263
y_i	-0,155	0,523	-0,983	-2,432	3,019	-2,814	0,028	0,521	4,475	2,581

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	36,069	17,501	22,832	24,734	23,836	21,807	23,129	27,202	30,794	16,705
y_i	-10,034	3,839	-0,940	-4,398	-1,916	5,501	0,488	-3,345	-3,896	8,973

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	20,393	25,678	28,425	19,728	23,553	26,170	30,320	26,537	28,581	22,104
y_i	-4,780	-6,908	-7,099	4,808	-1,619	-2,694	-4,702	-3,910	-4,525	1,768

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	22,677	24,268	28,370	32,017	20,591	24,685	28,984	33,347	25,703	27,294
y_i	7,672	0,035	-2,934	-3,988	1,400	1,902	-1,378	0,071	1,662	1,131

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	30,370	28,998	32,470	31,480	34,980	26,665	23,525	24,501	30,886	26,636
y_i	-8,520	0,559	-8,132	2,461	-4,638	3,175	3,217	5,508	6,039	6,625

Составляется таблица расчетов параметров распределения выборки (табл. 4). По второй строке таблицы вычисляется среднее значение $\overset{=}{x}$, по третьей - $\overset{=}{y}$ и эти значения применяются для заполнения четвертой и пятой строк.

Таблица 4

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum_{1}^{10}$
x_i	18,600	25,512	27,471	32,781	21,828	25,116	31,155	32,647	23,016	28,263	266,386
y_i	-0,155	0,523	-0,983	-2,432	3,019	-2,814	0,028	0,521	4,475	2,581	-1,923
x_i-26,420	-7,820	-0,908	1,051	6,361	-4,595	-1,304	4,735	6,247	-3,404	1,843	
y_i+0,511	0,356	-0,012	-0,472	-1,921	3,622	-2,303	0,539	-4,700	4,986	3,092	
$(x_i$-26.420$)^2$	61,150	0,824	1,105	40,466	21,114	1,700	22,420	38,776	11,566	3,397	202,518
$(y_i$+0,511$)^2$	0,127	0,000	0,223	3,690	13,118	5,304	0,291	22,090	24,860	9,560	80,263
$(x_i$-26.420$)\times(y_i$+0,511$)$	-0,983	0,050	-0,496	-12,219	-16,643	3,003	2,584	-29,267	-16,972	5,698	-65,285

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\sum_{11}^{20}$
x_i	36,069	17,501	22,832	24,734	23,836	21,807	23,129	27,202	30,794	16,765	244,669
y_i	-10,034	3,839	-0,940	-4,398	-1,916	5,501	0,488	-3,345	-3,896	8,973	-5,728
x_i-26,420	9,649	-8,919	-3,988	-1,686	-2,584	-4,613	-3,391	0,782	4,374	-9,655	
y_i+0,511	-9,523	4,350	-0,429	-3,787	-1,405	6,012	0,999	-2,834	-3,385	9,484	
$(x_i$-26.420$)^2$	93,103	79,549	12,878	2,842	6,677	21,280	11,499	0,611	19,131	93,219	340,791

$(y_i+0,511)^2$	90,687	18,922	0,184	15,166	1,974	36,144	0,998	8,032	11,458	89,946	273,461
$(x_i-26.420)\times(y_i+0,511)$	-95,762	-36,184	1,711	6,553	3,630	-27,733	-3,390	-2,216	-14,806	-91,568	-259,761

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	$\sum_{21}^{30}$
x_i	20,393	25,678	28,425	19,728	23,553	26,170	30,320	26,537	28,581	22,104	251,486
y_i	-4,880	-6,908	-7,099	4,808	-1,619	-2,694	-4,702	-3,510	-4,525	1,768	-29,66
x_i-26,420	-6,027	-3,574	2,005	-6,892	-2,867	-0,25	3,904	0,117	2,161	-4,316	
y_i+0,511	-4,269	-3,569	-6,588	5,319	-1,108	-2,183	2,880	-3,399	-4,014	2,279	
$(x_i-26.420)^2$	36,324	12,773	4,020	47,501	8,219	0,062	15,241	0,014	4,670	18,628	145,457
$(y_i+0,511)^2$	18,224	12,738	43,402	2,829	1,228	4,765	8,294	11,553	16,321	5,194	150,213
$(x_i-26.420)\times(y_i+0,511)$	25,729	12,755	-13,207	-35,595	3,488	0,546	11,243	-0,398	-8,730	-9,837	-14,006

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	$\sum_{40}^{31}$
x_i	22,677	24,261	28,390	32,017	20,591	24,685	28,984	33,347	25,703	27,294	267,949

y_i	7,672	0,035	-2,934	-3,988	1,400	1,902	-1,378	0,071	1,662	1,131	5,573
x_i-26,420	-3,743	-2,159	1,970	5,597	-5,829	-1,735	2,564	6,927	-0,717	0,874	
y_i+0,511	8,183	0,546	-2,423	-3,477	1,911	2,413	-0,867	0,582	2,173	1,642	
$(x_i-26.420)^2$	14,010	4,661	3,881	31,326	33,977	3,010	6,574	47,983	0,514	0,764	146,701
$(y_i+0,511)^2$	66,961	0,298	5,871	12,089	3,652	5,822	0,752	0,338	4,722	2,696	103,201
$(x_i-26.420)\times(y_i+0,511)$	-30,629	-1,179	-4,773	-19,461	-11,139	-4,187	-2,223	4,031	-1,558	1,435	-69,683

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	$\sum_{50}^{41}$
x_i	30,370	28,998	32,470	31,480	34,980	26,665	23,525	24,501	30,886	26,636	290,511
y_i	-8,520	0,559	-8,132	2,461	-4,638	3,175	3,217	5,508	6,039	6,625	6,294
x_i-26,420	3,95	2,578	6,050	5,060	8,560	0,245	-2,895	-1,919	4,466	0,216	
y_i+0,511	-8,009	1,070	-7,621	2,972	4,127	3,086	3,728	6,019	6,550	7,136	
$(x_i-26.420)^2$	15,602	6,646	36,602	25,607	73,274	0,060	8,381	3,683	19,945	0,047	189,847
$(y_i+0,511)^2$	64,144	1,145	58,080	8,833	17,024	13,586	13,898	36,228	42,902	50,922	306,762
$(x_i-26.420)\times(y_i+0,511)$	-31,635	2,758	-46,107	15,038	-35,327	0,903	-10,792	-11,550	29,252	1,541	-85,919

По данным табл. 4 вычисляют:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{1}^{50} x_i}{50} = \frac{1320,83}{50} = 26,420; \bar{y} = \frac{\sum_{1}^{50} x_i}{50} = \frac{-25,456}{50} = -0,511;$$

$$S_x^2 = \frac{\sum_{1}^{50} (x_i - 26,420)^2}{49} = \frac{1025,31}{49} = 20,924; S_x = 4,574;$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{1}^{50} (y_i - 0,511)^2}{49} = \frac{913,90}{49} = 18,651; S_y = 4,319;$$

$$\bar{r} = \frac{\sum_{1}^{50} (x_i - 26,420)(y_i + 0,511)}{49 \cdot S_x \cdot S_y} = \frac{-494,654}{49 \cdot 4,574 \cdot 4,319} = -0,511.$$

Доверительные интервалы для параметров генеральной совокупности при надежности $\gamma = 0,95$ и выборке объема $n = 50$ вычисляются по зависимостям, приведенным в разделе 2. По табл. 2 Приложения определяется $t_{0,95} = 2,01$ и по табл. 3 Приложения определяется $q_{0,9550} = 0,21$.

В результате получим:

$$26,42 - 2,01 \cdot \frac{4,574}{\sqrt{50}} < m_x < 26,42 + 2,01 \cdot \frac{4,574}{\sqrt{50}}$$

или $25,12 < m_x < 27,72$.

Аналогично,

$$-1,74 < m_y < 0,72;$$
$$3,61 < \sigma_x < 5,53;$$
$$3,41 < \sigma_y < 5,22;$$
$$-0,721 < r < -0,301.$$

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ и $n = 50$, проверяют гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции r генеральной совокупности нормальной двумерной случайной величины (X,Y). Для этого вычисляются значения критерия

$$T_в = \frac{\bar{r}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\bar{r}^2}} = \frac{-0,511\sqrt{48}}{\sqrt{1-(-0,511)^2}} = -4,12 .$$

По табл. 2 Приложения находится критическая точка $t_{кр}$ при уровне значимости α = 0,05 и числе степеней свободы $n-2$=48 , равная $t_{кр}=0,21$. Так как $|T_в|=4,12>t_{кр}=2,01$, то гипотеза о равенстве нулю коэффициента корреляции r генеральной совокупности отвергается и случайные величины X и Y коррелированны и, следовательно, связаны линейной зависимостью. Прямая регрессии Y на X выражается уравнением

$$\hat{y}=\bar{r}\frac{S_y}{S_x}x+\bar{y}-\bar{r}\frac{S_y}{S_x}\bar{x}=-0,511\cdot\frac{4,319}{4,574}\cdot x-0,511+0,511\cdot\frac{4,319}{4,574}\cdot 26,42=-0,482\cdot x+12,24 .$$

Выборочное уравнение прямой регрессии X на Y имеет вид:

$$\hat{x}=\bar{r}\frac{S_x}{S_y}y+\bar{x}-\bar{r}\frac{S_x}{S_y}\bar{y}=-0,541y+26,15 .$$

Прямая линия регрессии Y на X свидетельствует о тенденции увеличения $\hat{y}$ с уменьшением значений признака X.

Проверим гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности системы случайных величин (X,Y).

1. Определяем угол поворота α осей $0x$ и $0y$ из уравнения:

$$tg2\alpha=\frac{2r\cdot S_x\cdot S_y}{S_x^2-S_y^2}=-\frac{2\cdot 0,511\cdot 4,574\cdot 4,319}{20,924-18,657}=-8,88 .$$

Так как $r<0, S_x>S_y$, получим (таблица 2):

$$\alpha=\frac{1}{2}\cdot(-arctg8,88)=-41,75^\circ;$$

$$\sin\alpha=\sin(-41,75^\circ)=-0,666;\cos\alpha=\cos(-41,75^\circ)=0,746$$

Система уравнений преобразования координат имеет вид:

$$\begin{cases}U=0,746x-0,666y,\\ V=0,666x+0,746y.\end{cases}$$

2. Определяем параметры выборки системы (U,V):

$$\bar{U} = 0,746 \cdot 26,42 + 0,666 \cdot 0,511 = 20,050;$$

$$\bar{V} = 0,666 \cdot 26,42 - 0,746 \cdot 0,511 = 17,219;$$

$$S_u^2 = 20,924 \cdot (0,746)^2 + 18,651 \cdot (-0,666)^2 + 2 \cdot 0,511 \cdot 4,574 \cdot 4,319 \cdot 0,666 \cdot 0,746 = 29,960;$$

$$S_v^2 = 20,924 \cdot (-0,666)^2 + 18,651 \cdot (0,746)^2 - 2 \cdot 0,511 \cdot 4,574 \cdot 4,319 \cdot 0,666 \cdot 0,746 = 9,626;$$

$$S_u = 5,473; S_v = 3,102.$$

3. Проведем пересчет выборки системы признаков (X,Y) в выборку в системе (U,V) по зависимостям:

$$U_i = 0,746 x_i - 0,666 y_i;$$
$$V_i = 0,666 x_i + 0,746 y_i.$$

Результаты расчетов представлены в табл. 5.

Таблица 5

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_i	13,979	19,380	21,148	26,074	14,272	20,611	23,223	24,008	14,189	19,365
V_i	12,275	16,605	17,634	20,024	16,794	14,632	20,776	22,137	18,671	20,951

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
U_i	33,591	10,462	17,659	21,381	19,058	12,603	16,929	22,521	25,567	6,529
V_i	16,543	14,523	14,509	13,196	14,450	18,631	15,700	15,626	17,608	17,862

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
U_i	18,398	23,758	25,934	11,504	18,649	21,317	25,751	22,401	24,335	15,312
V_i	10,019	11,953	13,640	16,729	14,403	15,424	16,691	14,762	15,664	16,044

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
U_i	11,806	18,073	23,133	26,541	14,428	17,148	22,540	24,830	18,067	19,606
V_i	20,830	16,108	16,724	18,354	14,762	17,063	18,281	22,268	18,366	19,024

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
U_i	28,332	21,260	29,640	21,845	29,105	17,777	15,406	14,608	19,018	15,457
V_i	13,876	19,735	15,564	22,007	19,842	20,132	18,072	20,431	25,081	25,686

4. Признаки U и V некоррелированы, поэтому проверяют гипотезу о нормальном распределении каждого признака по выборочному критерию Пирсона:

$$\chi_в^2 = \sum_{i=1}^{S} \frac{(m_i - m_{iT})^2}{m_{iT}} .$$

В табл. 6 и 7 представлены результаты расчета критерия Пирсона. Минимальные и максимальные значения вариант U_i и V_i определены из табл.5. Шаги изменения вариант будут:

$$\Delta U = \frac{33,591 - 6,529}{8} = 3,383;$$

$$\Delta V = \frac{25,081 - 10,019}{8} = 1,883.$$

В третью строку табл. 6 и 7 занесены варианты табл. 5 в виде штрихов, значения которых при последовательном переборе вариант этой таблицы попадают в соответствующий интервал.

В пятой и шестой строках представлены соответствующие значения

$$Z_i = \frac{U_i - \bar{U}}{S_U} \quad \text{и} \quad Z_i = \frac{V_i - \bar{V}}{S_V} .$$

Таблица 6

i	1	2	3	4	5	6	7	8
(U_{i-1}, U_i)	6,529 9,912	9,912 13,295	13,295 16,678	16,678 20,061	20,061 23,444	23,444 26,827	26,827 30,210	30,210 33,593
штрихи	|	||||	||||| |||	||||| ||||| |||	||||| ||||| |	|||| |||||	|||	|
m_i	1	4	8	13	11	9	3	1
Z_{i-1}	-∞	-1,852	-1,234	-0,616	0,002	0,620	1,238	1,856
Z_i	-1,852	-1,234	-0,616	0,002	0,620	1,238	1,856	+∞
$P_{i-1\ T}$	-0,5	-0,468	-0,3914	-0,2311	0,080	0,2324	0,3921	0,4683
$P_{i\ T}$	-0,468	-0,3914	-0,2311	0,080	0,2324	0,3921	0,4683	0,5000
$m_{i\ T}$	1,60	3,83	8,02	15,57	7,62	8,00	3,81	1,58
$\chi_{вi}^2$	0,225	0,08	0,000	0,424	1,500	0,125	0,172	0,36

$$\chi_в^2 = \sum_{1}^{8} \chi_{вi}^2 = \mathbf{2,45} .$$

Таблица 7

i	1	2	3	4	5	6	7	8
(V_{i-1},V_i)	10,019 11,902	11,902 13,785	13,785 15,668	15,668 17,551	17,551 19,434	19,434 21,317	21,317 23,200	23,200 25,083
штрихи	|	||||	||||| |||||	||||| ||||| |	||||| ||||| |	||||| |||	||||	|
m_i	1	4	10	11	11	8	4	1
Z_{i-1}	-∞	-1,714	-1,107	-0.500	0,107	0,714	1,321	1,928
Z_i	-1,714	-1,107	-0,500	0,107	0,714	1,321	1,928	+∞
$P_{i-1\ T}$	-0,5000	-0,4567	-0,3659	-0,1915	0,0426	0,2624	0,4067	0,4731
$P_{i\ T}$	-0,4567	-0,3659	-0,1915	0,0426	0,2624	0,4067	0,4731	0,5000
$m_{i\ T}$	2,16	4,54	8,72	11,71	10,99	7,21	3,32	1,34
$\chi^2_{\textit{в}i}$	1,840	0,064	0,188	0,044	0	0,086	0,133	0,088

$$\chi^2_{\textit{в}} = \sum_1^8 \chi^2_{\textit{в}i} = \mathbf{2{,}45}\ .$$

5. По табл. 4 Приложения для уровня значимости, например, $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = 8 - 3 = 5$ находится критическая точка $\chi^2_{\textit{кр}}(0{,}05{,}5) = 11{,}1$.

Так как $\chi^2_{\textit{в}} < \chi^2_{\textit{кр}} = 11{,}1$ для признаков U и V – нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности случайных величин U и V и, следовательно, системы (U,V).

Выводы

В результате обработки случайной выборки из генеральной совокупности системы случайных величин (X,Y) получено:

1. Система случайных величин (X,Y) имеет закон нормального распределения вероятностей.

2. Случайные величины X и Y коррелированны и зависимы. При уменьшении значений случайной величины X средние значения случайной величины Y увеличиваются. Уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет оценку:

$$\hat{y} = 12{,}24 - 0{,}482x\ .$$

3. Параметры системы (X,Y) генеральной совокупности имеют оценки:

$$m_x \approx 26{,}42; \quad m_y \approx -0{,}511; \quad \sigma_x \approx 4{,}574; \quad \sigma_y \approx 4{,}319; \quad r \approx -0{,}511.$$

4.Выборки из генеральной совокупности (X,Y)

Выборка 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	3.144	2.771	2.277	0.860	6.411	4.007	3.322	-1.904	7.740	5.881
y_i	0.274	7.189	2.280	14.465	3.413	8.915	12.832	14.311	4.693	9.940

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-6.734	3.546	2.374	-1.098	-2.873	8.801	3.788	-0.144	-0.596	12.308
y_i	17.670	1.215	4.423	6.355	9.690	3.414	4.731	8.839	12.411	-1.574

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	-1,48	-3.594	-3.792	7.461	1.679	0.606	-1.331	-0.627	-1.225	5.068
y_i	1,95	7.267	10.095	0.621	5.15	7.767	12.004	8.127	10.128	3.701

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	10.9	3.335	0.278	-0.617	4.7	5.202	1.942	3.329	4.962	4.431
y_i	4.353	5.987	10.052	13.624	2.208	6.262	10.602	15.024	7.38	8.871

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	-5.221	3.741	-4.832	5.761	-1.353	6.475	6.517	8.805	9.339	9.926
y_i	12.987	10.605	14.047	13.057	16.692	8.262	5.062	6.184	12.463	8.243

Выборка 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	7.886	14.802	16.767	22.084	11.052	24.332	20.451	21.95	12.312	17.552
y_i	5.298	5.623	6.09	7.532	1.989	4.393	5.065	10.297	0.646	2.519

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	25.356	8.911	12.128	14.016	17.345	11.103	12.425	16.498	20.083	6.125
y_i	15.125	-0.866	6.033	9.505	11.944	-0.496	4.605	8.452	8.996	-3.901

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	9.689	14.95	17.729	8.317	12.85	15.466	19.624	15.827	17.877	11.4
y_i	9.887	11.994	12.185	0.986	6.726	7.787	9.802	9.01	9.618	3.339

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	11.966	13.542	17.736	21.307	9.88	13.981	18.294	22.643	15,03	16.59
y_i	-2.572	5.086	8.133	9.017	3.7	3.205	6.458	5.062	3.431	3.976

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	19.666	18.287	21.766	20.763	24.305	15.984	12.814	13.742	20.182	15.933
y_i	13.613	4.542	13.224	2.639	9.753	1.925	1.883	-0.366	-0.946	-1.533

Выборка 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	-3.255	-3.63	-4.125	-5.546	0.018	-2.393	-3.079	-8.304	1.348	-0.52
y_i	3,142	3.78	5.78	11.056	-0.01	5.505	9.423	10.929	1.277	6.531

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-13,134	2.854	-4.04	-7.498	-9.273	2.408	-2.612	-6.551	-7.003	5.915
y_i	14.259	-2.195	1.022	2.924	6.283	-0.01	1.319	5.428	8.991	-4.989

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	-7.88	-9.994	-10.192	1.001	-4.179	-5.794	-7.731	-7.028	-7.625	-1.332
y_i	-1.417	3.851	6.608	-2.789	1.744	4.36	8.588	4.723	6.771	0.294

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	4.501	-3.065	-6.126	-7.017	-1.7	-1.198	-4.458	-3.036	-1.438	-1.976
y_i	0.938	2.451	6.63	10.208	-1.219	2.875	7.195	11.544	3.893	5.477

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	-11.621	-2.541	-11.128	-0.639	-7.753	0.076	0.188	2.401	2.939	3.532
y_i	8.56	7.188	10.66	9.67	13.206	4.855	1.645	2.698	9.076	4.834

Выборка 4

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	11.229	18.131	20.089	25.407	14.355	27.645	23.767	25.272	15.635	20.881
y_i	7.255	7.623	6.096	9.532	3.989	6.393	7.065	12.304	2.652	4.519

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	28.695	12.221	15.451	17.353	20.66	14.425	15.748	19.821	23413	9.447
y_i	17.141	1.14	8.04	11.498	13.944	1.599	6.612	10.444	10.996	-1.908

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	13.01	18.265	21.037	11.654	16.172	18.788	22.946	19.149	21.2	14.722
y_i	11.88	13.98	14.192	2.285	8.719	9.794	11.802	11.017	11.625	5.332

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	15.295	16.879	21.058	24.636	13.216	17.303	21.624	25.969	18.375	19.913
y_i	-0.527	7.065	10.126	11.017	5.707	5.198	8.458	7.029	5.478	5.969

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	22.988	21.617	25.089	24.1	27.641	19.283	16.144	17.12	23.504	19.255
y_i	15.621	6.541	15.232	4.639	11.76	3.925	3.883	1.632	1.061	0.475

Выборка 5

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	4.988	4.547	4.117	2.682	8.211	5.827	5.128	-0.104	9.548	7.681
y_i	13.451	20.359	22.318	27.628	16.583	22.105	26.002	27.501	17.863	23.11

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-4.934	11.074	4.16	0.722	-1.053	10.601	5.588	1.77	1.204	14.108
y_i	30.916	14.405	17.679	19.581	22.88	16.654	17.976	22.07	25.641	11.676
i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

x_i	0.32	-1.794	-1.922	9.221	3.481	2.406	0.498	1.183	0.575	6.868
y_i	15.24	20.508	23.265	13.81	18.333	20.96	25.197	21.377	23.428	16.951

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	12.772	5.135	2.067	1.183	6.5	7.002	3.743	5.164	6.762	6.224
y_i	17.524	19.108	23.294	26.864	15.438	19.532	23.852	28.201	20.55	22.148

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	-3.421	5.666	-3.032	7.561	0.447	8.295	8.41	10.608	11.139	11.711
y_i	25.217	23.852	27.312	26.327	29.863	21.512	18.279	19.348	25.733	21.498

Выборка 6

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	16.328	23.423	25.202	30.527	19.552	32.807	28.886	30.385	20.747	25.994
y_i	-1.845	-1.449	-1.013	0.435	-5.026	-2.714	-2.028	3.204	-6.448	-4.581

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	33.8	17.397	20.572	22.48	25.8	19.538	20.86	24.933	28.454	14.49
y_i	8.034	-7.947	-1.063	2.384	4.844	-7.501	-2.488	1.344	1.896	-10.944

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	18.124	23.392	26.22	16.759	21.284	23.908	28.059	24.262	26.312	19.852
y_i	2.78	4.894	5.092	-6.108	-0.381	0.687	2.702	1.917	2.525	-3.745

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	20.408	22.002	26.171	29.748	18.322	22.416	27.636	31.078	23.434	25.032
y_i	-9.672	-2.042	1.027	1.917	-3.4	-3.902	-0.642	-2.071	-3.662	-3.124

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	20.101	26.729	30.201	29.218	32.747	24.396	21.263	22.197	28.617	24.36
y_i	6.52	-2.559	6.132	-4.468	2.653	-5.157	-5.21	-7.473	-8.039	-8.625

Выборка 7

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	-0.065	-0.383	-0.885	2.209	3.252	0.852	0.168	-5.064	4.588	2.721
y_i	5.711	12.572	14.529	19.896	8.811	14.355	18.213	19.762	10.075	15.321

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-9.899	6.092	-0.79	-4.257	-6.031	5.657	0.636	-3.303	-3.755	9.136
y_i	23.128	6.653	9.892	11.794	15.133	8.867	10.189	14.262	17.854	3.868

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	-4.691	-6.753	-6.962	4.242	-1.485	-2.553	-4.561	-3.776	-4.384	1.909
y_i	7.453	12.728	15.478	6.062	10.613	13.23	17.387	13.59	15.641	9.164

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	7.743	0.177	-2.892	-3.776	1.541	2.001	-1.216	0.212	1.802	1.273
y_i	9.787	11.321	15.507	19.077	7.651	11.787	16.065	20.407	12.743	14.354
i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

x_i	-8.372	0.742	-7.99	2.602	-4.511	3.316	3.388	5.642	6.18	6.76
y_i	17.423	16.058	19.53	18.54	22.076	13.725	10.485	11.561	17.946	13.703

Выборка 8

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	9.874	16.79	18.748	24.066	13.014	26.332	22.439	23.931	14.386	19.54
y_i	0.054	0.421	0.898	2.337	-3.213	-0.807	-0.122	5.102	-4.542	-2.683

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	27.322	10.911	14.11	16.012	19.35	13.103	14.427	18.472	22.082	8.113
y_i	9.918	-6.062	0.838	4.296	6.774	-5.623	-0.52	3.25	3.794	-9.117

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	11.682	16.938	19.696	10.317	14.85	17.447	21.123	17.808	19.858	13.381
y_i	4.671	6.791	6.985	-4.202	1.506	2.292	4.6	3.815	4.423	-1.87

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	13.966	15.549	19.717	23.307	11.868	15.982	20.239	24.624	16.98	18.571
y_i	-7.76	-0.097	2.924	3.815	-1.502	-2.004	1.256	-0.178	-1.764	-1.233

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	21.647	20.275	23.747	22.75	26.321	17.942	14.803	15.778	22.163	17.94
y_i	8.418	-0.661	8.03	-2.543	4.579	-3.277	-3.319	-5.589	-6.141	-6.727

Выборка 9

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	-0.455	-0.823	-1.282	-2.739	2.811	0.407	-0.288	-5.505	4.14	2.281
y_i	1.003	7.916	9.875	15.139	4.14	9.605	13.559	14.959	5.428	10667

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-10.334	5.65	-1.24	-4.698	-6.473	5.201	0.188	-3.666	-4.196	8.708
y_i	18.473	1.945	5.136	7.139	10.423	4.14	5.539	9.585	13.198	-0.86

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	-5.08	-7.194	-7.4	3.811	-1.92	-3.002	-4.931	-4.224	-4.825	1.462
y_i	2.682	8.012	10.741	1.352	5.883	8.505	12.728	8.868	10.911	4.342

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	7.301	-0.265	-3.326	-4.217	1.103	1.603	-1.658	-0.236	1.36	0.834
y_i	5.078	6.591	10.77	14.348	2.923	7.015	11.332	15.684	8.035	9.617

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	-8.8	0.239	-8.432	2.161	-4.953	2.875	2.967	5.201	5.739	6.325
y_i	12.774	11.402	14.874	13.884	17.42	9.069	5.83	6.812	13.29	9.041

Выборка 10

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	7.13	14.045	16.003	21.323	10.269	23.572	19.688	21.28	11.549	16.796
y_i	0.355	0.723	1.183	2.639	-2.911	-0.507	0.178	5.404	-4.248	-2.381
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

x_i	24.602	8.151	11.365	13267	16.681	10.34	11.662	15.735	19.345	5.326
y_i	10.233	-5.761	1.14	4.598	7.044	-5.301	-0.288	3.544	4.096	-8.808

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	8.925	14.193	16.951	7.557	12.086	14.703	18.86	15.063	17.113	10.638
y_i	4.987	7.094	7.285	-3.91	1.826	2.894	4.902	4.117	4.725	-1.568

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	11.239	12.793	16.979	20.55	9.124	13.218	17.538	21.88	14.242	15.827
y_i	-7.444	0.165	3.233	4.117	-1.214	-1.702	1.558	0.129	-1.462	-0.924

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	18.903	17531	21.003	20.027	23.548	15.2	12.058	13.034	19.419	15.169
y_i	8.721	-0.359	8.332	-2.232	4.853	-2.982	-3.017	-5.308	-5.839	-6.425

Выборка 11

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.245	-0.133	-0.583	-2.049	3.511	1.107	0.428	0.428	4.848	2.981
y_i	15.801	22.716	24.675	29.992	18.94	24.445	28.358	29.836	20.22	25.467

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-9.641	6.354	-0.54	-3.998	-5.773	5.901	0.888	-2.995	-3.496	9.415
y_i	33.273	16.751	20.036	21.938	25.223	19.011	20.305	24.355	28.027	14.04

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	-4.38	-6.494	6.692	4.501	-1.219	-2.294	-4.902	-3.517	-4.125	2.178
y_i	17.597	22.864	25.622	16.252	20.757	23.374	27.531	23.734	25.785	19.208

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	8.072	0.435	-2.577	-3.524	1.793	2.302	-0.958	0.471	2.062	1.531
y_i	19.881	21.564	25.565	29.228	17.787	21.888	26.209	30.551	22.907	24.498

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	-8.12	0.959	-7.732	2.861	-4.248	3.575	3.617	5.908	6.439	7.025
y_i	27.574	26.102	29.673	28.684	32.146	23.795	20.599	21.605	28.09	23.833

Выборка 12

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	12.377	19.287	21.245	26.507	15.511	28.818	24.922	26.428	16.791	22.037
y_i	-0.145	0.223	0.683	2.139	-3.382	-1.011	-0.328	4.904	-4.748	-2.881

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	29.844	13.391	16.607	18.509	21.827	15.581	16.903	20.97	24.569	10.603
y_i	9.726	-6.262	0.640	4.098	6.544	-5.801	-0.788	3.044	3.596	-9.312

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

x_i	14.167	19.435	22.193	12.803	17.328	19.944	24.102	20.305	22.355	15.878
y_i	4.48	6.587	6.792	-4.398	1.319	2.394	4.402	3.617	4.225	-2.018

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	16.451	18.035	22.214	25.792	14.394	18.459	22.78	27.121	19.477	21.068
y_i	-7.972	-0.355	2.726	3.617	-1.629	-2.202	1.058	-0.471	-1.962	-1.431

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	24.144	22.773	26.216	25.254	28.79	20.439	17.3	18.275	24.689	20.411
y_i	8.22	-0.859	7.86	-2.761	4.353	-3.475	-3.517	-5.808	-6.339	-6.925

Выборка 13

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.345	-0.023	-0.483	-1.939	3.611	1.207	0.528	-4.704	4.948	3.081
y_i	21.586	28.501	30.46	35.777	24.725	30.235	34.144	35.643	26.005	31.252

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-9.604	6.454	-0.44	-3.892	-5.673	6.001	0.988	-2.944	-3.396	9.508
y_i	38.987	22.521	25.821	27.723	31.013	24.796	26.118	30.128	33.734	19.728

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	-4.277	-6.394	-6.591	4.601	-1.119	-2.196	-4.132	-3.417	-4.025	2.268
y_i	23.389	28.65	31.407	21.947	26.542	29.159	33.31	29.509	31.57	25.093

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	8.172	0.535	-2.526	-3.417	1.9	2.402	-0.858	0.571	2.191	1.637
y_i	25.639	27.25	31.428	35.006	23.58	27.674	31.894	36.336	28.692	30.283

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	-8.021	1.059	-7.632	2.961	-4.153	3.675	3.787	6.008	6.539	7.125
y_i	33.359	31.88	35.759	34.496	38.004	29.654	26.428	27.49	33.875	29.625

Выборка 14

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	25.699	32.614	34.573	39.898	28.838	42.135	38.257	39.755	30.118	35.365
y_i	0.455	0.826	1.283	2.739	-2.811	-0.408	0.272	5.504	-4.155	-2.281

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	43.171	26.711	29.934	31.917	35.147	28.903	30.224	34.296	37.837	23.931
y_i	10.334	-5.661	1.298	4.795	7.144	-5.195	-0.201	3.652	4.198	-8.797

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	27.495	32.763	25.529	26.117	30.656	33.272	37.43	33.633	35.683	29.206
y_i	5.08	7.196	7.392	-3.808	1.919	2.994	5.073	4.217	4.825	-1.468

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	29.786	31.363	35.54	39.12	27.682	31.887	36.108	40.449	32.805	34.396
y_i	-7.379	0.265	3.326	4.217	-1.109	-1.602	1.652	0.23	-1.362	-0.831
i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

x_i	37.472	36.1	39.572	38.582	42.118	33.767	30.627	31.603	38.059	33.739
y_i	8.82	-0.259	8.431	-2.161	4.953	-2.875	-2.917	-5.208	-5.739	-6.332

Выборка 15

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	28.344	35.26	37.229	42.536	31.483	44.764	40.903	42.395	32.764	38.011
y_i	0.258	0.626	1.086	2.542	-2.994	-0.607	0.075	5.297	-4.345	-2.482

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	45.866	29.341	32.587	34.489	37.747	31.555	32.877	36.95	40.542	26.57
y_i	10.087	-5.861	1.036	4.488	6.944	-5.398	-0.385	3.448	4.021	-8.905

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	30.07	35.408	38.173	28.717	33.301	35.918	40.075	36.278	38.329	31.852
y_i	4.854	6.997	7.188	-4.006	1.722	2.797	4.805	4.02	4.628	-1.665

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	32.425	33.978	38.158	41.756	3.351	34.432	38.753	43,,095	35.444	37.041
y_i	-7.569	0.088	3.098	4.02	-1.29	-1.8	1.46	0.028	-1.559	-1.029

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	40.117	38.746	42.218	41.238	44.763	36.412	33.273	34.149	40.627	36.384
y_i	8.624	-0.506	8.234	-2.367	4.714	-3.072	-3.114	-5.405	-5.928	-6.522

Выборка 16

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	32.268	39.183	41.142	46.467	35.473	48.735	44.826	46.325	36.787	41.934
y_i	-0.046	0.32	0.78	2.238	-3.313	-0.907	-0.23	5.002	-4.65	-2.783

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	49.74	33.812	36.503	38.405	31.746	35.478	36.815	40.88	44.466	30.5
y_i	9.52	-6.161	0.738	4.196	6.644	-5.99	-0.69	3.135	3.694	-9.21

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	34.464	39.339	42.13	39.717	37.225	39.841	44.02	40.202	42.252	35.775
y_i	4.577	6.699	6.89	-4.308	1.417	2.492	4.5	3.715	4.323	-1.97

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	36.348	37.939	42.111	45.688	34.262	38.356	42.676	47.043	39.384	40.965
y_i	-7.874	-0.22	2.824	3.715	-1.616	-2.104	1.156	-0.278	-1.864	-1.333

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	44.041	42.669	46.141	45.151	48.687	40.336	37.196	38.172	44.557	40.398
y_i	8.318	-0.76	7.929	-2.663	4.451	-3.377	-3.419	-5.71	-6.24	-6.828

Выборка 17

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	-0.352	-0.725	-1.213	-2.642	2.909	0.507	-0.174	-5.406	4.246	2.403
y_i	31.031	37.981	39.841	45.187	34.195	39.705	43.653	45.092	35.472	40.698

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-10.239	5.754	-1.14	-4.598	-6.373	5.299	0.286	-3.646	-4.103	8.967
y_i	48.46	32.005	35.217	37.133	40.483	34.205	35.528	39.601	43.193	29.227

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	-4.947	-7.036	-7.302	3.901	-1.821	-2.896	-4.88	-4.119	-4.727	1.566
y_i	32.747	38.059	40.824	31.411	35.952	38.568	42.78	38.929	40.979	34.502

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	7.47	-0.167	-3.265	-4.119	1.202	1.703	-1.56	-0.131	1.45	0.936
y_i	35.175	36.659	40.867	44.416	32.989	37.083	41.404	45.745	38.102	39.7

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	-8.722	0.353	-8.334	2.259	-4.855	2.973	3.095	5.306	5.837	6.431
y_i	42.768	41.393	44.868	43.878	47.414	39.063	35.924	36.902	43.287	39.035

Выборка 18

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	20.185	27.086	29.045	34.326	23.31	36.635	32.794	34.228	24.589	29.861
y_i	0.555	0.923	1.383	2.832	-2.704	-0.303	0.372	5.604	-4.048	-2.181

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	37.643	27.211	24.406	26.308	29.647	23.38	24.731	28.776	32.368	18.398
y_i	10.434	-5.565	1.34	4.798	7.244	-5.101	-0.06	3.744	4.296	-8.601

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	21.289	27.234	29.992	20.617	25.127	27.743	31.901	28.104	30.155	23.678
y_i	5.18	7.294	7.492	-3.708	2.019	3.094	5.102	4.317	4.925	-1.368

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	24.25	25.834	30.056	37.634	22.164	26.259	30.622	34.921	27.277	28.868
y_i	-7.272	0.372	3.426	4.317	-1.002	-1.502	1.758	0.329	-1.262	-0.731

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	31.994	30.572	34.044	33.072	36.589	28.238	25.099	26.075	32.46	28.249
y_i	8.921	-0.165	8.524	-2.068	5.053	-2.782	-2.817	-5.068	-5.639	-6.211

Выборка 19

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.944	0.572	0.075	-1.339	4.211	1.807	1.128	-4.104	5.548	3.681
y_i	36.299	43.327	45.173	50.491	39.539	45.025	48.886	50.457	40.799	45.965

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

x_i	-8.934	7.054	0.159	-3.298	-5.073	6.601	1.588	-2.344	-2.796	10.108
y_i	53.772	37.327	40.549	42.438	45.803	39.51	40.832	44.957	48.497	34.532

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	-3.68	-5.794	-5.992	5.201	-0.519	-1.594	-3.602	-2.817	-3.425	2.868
y_i	38.095	43.37	46.121	36.741	41.256	43.872	48.13	44.233	46.284	39.807

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	8.772	1.135	-1.94	-2.86	2.5	3.002	-0.258	1.171	2.762	2.231
y_i	40.479	41.963	46.156	49.762	38.293	42.387	46.708	51.049	43.405	44.997

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	-7.42	1.659	-7.032	3.561	-3.553	4.275	4.387	6.608	7.139	7.718
y_i	48.072	46.701	50.173	49.183	52.718	44.367	41.228	42.203	48.589	44.346

Выборка 20

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	27.896	34.885	36.844	42.167	31.109	44.439	40.528	41.991	32.489	37.636
y_i	1.255	1.623	2.083	3.574	-2.011	0.393	1.028	6.34	-3.348	-1.481

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	45.442	29.067	32.235	34.152	37.442	31.202	32.575	36.567	40.202	26.207
y_i	11.134	-4.823	2.069	5.559	7.901	-4.588	0.614	4.496	4.908	-7.908

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	29.766	35.042	37.756	28.401	32.92	35.543	39.7	35.903	37.954	31.477
y_i	5.88	7.994	8.227	-3.008	2.795	3.794	5.802	5.017	5.625	-0.668

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	32.05	33.634	37.756	41.39	29.964	33.916	38.378	42.72	35.076	36.074
y_i	-6.572	1.065	4.17	5.07	-0.314	-0.809	2.458	1.03	-0.562	-0.038

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	39.743	38.371	41.322	40.853	44.389	36.038	32.828	33.874	40.259	36.01
y_i	9.62	0.541	9.232	-1.36	5.753	-2.075	-2.188	-4.408	-4.939	-5.525

Выборка 21

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1.958	1.577	1.046	-0.339	5.211	2.806	2.211	-3.104	6.548	4.681
y_i	36.235	43.282	45.208	50.458	39.496	45.012	49.078	50.414	40.686	45.942

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-7.934	8.054	1.159	-2.298	-4.073	7.63	2.588	-1.344	-1.796	11.108
y_i	53.739	37.295	40.503	42.405	45.787	39.449	40.8	44.872	48.464	34.5

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

x_i	-2.68	-4.815	-4.992	6.202	0.481	-0.594	-2.502	-1.817	-2.425	3.995
y_i	38.063	43.31	46.089	36.697	41.224	43.88	48.198	44.2	46.251	39.748

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	9.772	2.135	-0.926	-1.817	3.502	4.002	0.742	2.171	3.762	3.231
y_i	40.347	41.931	46.11	49.688	38.262	42.355	46.675	51.017	43.373	44.964

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	-6.42	2.659	-6.032	4.561	-2.553	5.275	5.317	7.608	8.135	8.725
y_i	48.08	46.668	50.24	49.15	52.686	44.335	41.195	42.171	48.559	44.307

Выборка 22

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	36.037	42.882	44.911	50.228	39.176	52.435	48.595	50.094	40.456	45.703
y_i	-0.914	-0.602	-0.117	1.339	-4.204	-1.807	-1.128	4.104	-5.548	-3.681

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	53.509	37.012	40.272	42.174	45.446	39.247	40.557	44.642	48.234	34.269
y_i	8.934	-7.061	-0.152	3.298	5.744	-6.601	-1.596	2.244	2.796	-10.108

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	37.833	43.101	45.929	36.418	40.994	43.61	47.768	43.97	46.021	39.505
y_i	3.68	5.794	5.926	-5.208	0.519	1.594	3.602	2.817	3.452	-2.868

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	40.017	41.701	45.88	49.458	38.031	42.127	46.445	50.777	43.143	44.734
y_i	-8.772	-1.135	1.926	2.817	-2.519	-3.002	0.258	-1.171	-2.762	-2.231

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	47.81	46.538	49.91	48.813	52.456	44.105	40.979	41.941	48.326	44.077
y_i	7.42	-1.659	7.032	-3.554	3.553	-4.257	-4.289	-6.608	-7.139	-7.725

Выборка 23

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	-2.255	2.616	-3.168	-4.539	1.012	-1.393	-2.072	-7.311	2.348	0.481
y_i	9.312	16.221	18.191	23.504	12.452	-18.005	21.871	23.363	13.792	18.979

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-12.1333	3.852	-3.06	-6.498	-8.273	3.401	-1.612	-5.444	-5.996	6.908
y_i	26.785	10.305	13.548	15.45	18.782	12.503	13.845	17.911	21.51	7.545

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	-6.88	-8.994	-9.192	2.005	-3.719	-4.787	-6.802	-6.017	-6.625	-0.332
y_i	11.109	16.376	19.134	9.692	14.269	16.878	21.043	17.246	19.297	12.89

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

x_i	5.572	-2.065	-5.059	-6.089	-0.703	-0.162	-3.458	-2.029	-0.438	-0.976
y_i	13.392	14.976	19.085	22.663	11.307	15.454	19.721	24.063	16.419	18.017

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	-10.621	-1.541	-10.232	0.361	-6.753	1.075	1.117	3.408	3.939	4.511
y_i	21.086	19.714	23.185	22.196	25.731	17.381	14.141	15.217	21.602	17.352

Выборка 24

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	31.87	28.785	40.744	46.016	35.03	48.335	44.428	45.927	36.418	41.565
y_i	2.355	2.723	3.183	4.639	-0.911	-1.493	2.172	7.404	-2.219	-0.452

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	49.342	32.911	36.105	38.008	41.347	35.08	36.402	40.457	44.067	30.102
y_i	12.234	-3.762	3.16	6.598	9.044	-3.301	1.712	5.544	6.096	-6.808

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	33.737	38.934	41.683	32.317	36.827	39.442	43.6	39.803	41.854	35.377
y_i	7.051	9.094	9.304	-1.908	3.802	4.894	6.902	6.117	6.725	0.432

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	35.95	37.534	41.713	45.291	33.864	37.951	42.278	46.62	38.976	40.567
y_i	-5.472	2.165	5.226	6.117	0.802	0.305	3.558	2.129	0.538	1.069

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	43.643	42.271	45.743	44.753	48.289	39.938	36.798	37.767	44.166	39.924
y_i	10.72	1.641	10.332	-0.261	6.853	-0.975	-1.017	-3.315	-3.846	-4.411

Выборка 25

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	-1.648	-2.023	2.483	-3.939	1.611	-0.793	-1.472	-6.705	2.947	1.081
y_i	21.247	28.155	30.114	35.432	24.38	29.905	33.798	35.297	25.66	30.906

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-11.533	4.454	-2.44	-5.898	-7.673	4.001	-1.012	-4.944	-5.396	7.515
y_i	38.713	22.205	25.476	27.378	30.683	24.451	25.773	29.845	33.438	19.403

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	-6.28	-8.394	8.592	2.601	-3.119	-4.194	-6.102	-5.417	-6.025	0.268
y_i	23.036	28.304	31.016	21.664	26.197	28.813	32.971	29.174	31.224	24.74

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	6.172	-1.465	-4.556	-5.417	-0.102	0.402	-2.858	-1.429	0.162	-0.369
y_i	25.32	26.904	31.012	34.661	23.234	27.328	31.649	35.99	28.347	29.938

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

x_i	-10.02	-0.934	-9.632	0.961	-6.153	1.675	1.717	4.008	4.539	5.132
y_i	33.013	31.647	35.114	34.124	37.659	29.308	26.169	27.145	33.476	29.234

Выборка 26

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	27.582	34.497	36.456	41.766	30.721	44.035	40.14	41.632	32.072	37.248
y_i	3.455	3.823	4.283	5.732	0.189	2.593	3.272	8.511	-1.148	0.719

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	45.054	28.611	31.817	33.719	37.047	30.792	32.114	36.187	39.779	25.764
y_i	13.333	-2.661	4.24	7.698	10.144	-2.201	2.812	6.644	7.225	-5.659

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	29.378	34.645	37.41	28.017	32.531	35.155	39.342	35.515	37.566	31.089
y_i	8.08	10.194	10.402	-0.808	4.919	5.994	7.931	7.217	7.825	1.532

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	31.662	33.246	37.361	41.002	29.576	33.67	37.991	42.332	34.788	36.279
y_i	-4.372	3.265	6.249	7.217	1.902	1.391	4.658	3.229	1.638	2.162

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	39.355	37.983	41.455	40.465	44.001	35.65	32.51	33.486	39.871	35.621
y_i	11.82	2.741	11.431	0.839	7.953	0.125	0.083	-2.208	-2.739	-3.329

Выборка 27

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	4.244	3.883	3.417	1.96	7.511	5.107	4.428	-0.804	8.848	6.981
y_i	21.766	28.782	30.64	35.958	24.906	30.505	34.417	35.923	26.286	31.532

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	-5.634	10.354	3.46	0.002	-1.713	9.901	4.888	1.055	0.504	13.417
y_i	39.239	22.803	36.002	27.904	31.283	24.981	26.306	30.372	33.964	20.012

i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	-0.38	-2.494	-2.697	8.503	2.781	1.706	-0.202	0.483	-0.125	6.146
y_i	23.562	28.83	31.588	22.212	26.723	29.339	33.597	29.702	31.751	25.252

i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_i	12.072	4.436	1.344	0.483	5.814	6.319	3.042	4.471	6.062	5.531
y_i	25.846	27.43	31.638	35.187	23.774	27.872	33.175	36.516	28.873	30.464

i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_i	-4.12	4.959	-3.732	6.86	-0.253	7.568	7.617	9.908	10.439	11.096
y_i	33.539	32.168	35.64	34.65	38.185	29.841	26.695	27.671	34.056	29.877

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,0000	0004	0008	0012	0016	0020	0024	0028	0032	0036
0,01	0040	0044	0048	0052	0056	0060	0064	0068	0072	0076
0,02	0080	0084	0088	0092	0096	0100	0104	0108	0112	0116
0,03	0120	0124	0128	0132	0136	0140	0144	0148	0152	0156
0,04	0160	0164	0168	0171	0175	0179	0183	0187	0191	0195
0,05	0199	0203	0207	0211	0215	0219	0223	0227	0231	0235
0,06	0239	0243	0247	0251	0255	0259	0263	0267	0271	0275
0,07	0279	0283	0287	0291	0295	0299	0303	0307	0311	0315
0,08	0319	0323	0327	0331	0335	0339	0343	0347	0351	0355
0,09	0359	0363	0367	0370	0374	0378	0382	0386	0390	0394
0,10	0398	0402	0406	0410	0414	0418	0422	0426	0430	0434
0,11	0438	0442	0446	0450	0454	0458	0462	0466	0470	0474
0,12	0478	0482	0486	0489	0493	0497	0501	0505	0509	0513
0,13	0517	0521	0525	0529	0533	0537	0541	0545	0549	0553
0,14	0557	0561	0565	0569	0572	0576	0580	0584	0588	0592
0,15	0596	0600	0604	0608	0612	0616	0620	0624	0628	0632
0,16	0636	0640	0643	0647	0651	0655	0659	0663	0667	0671
0,17	0675	0679	0683	0687	0691	0695	0699	0702	0706	0710
0,18	0714	0718	0722	0726	0730	0734	0738	0742	0746	0750
0,19	0753	0757	0761	0765	0769	0773	0777	0781	0785	0789
0,20	0793	0797	0800	0804	0808	0812	0816	0820	0824	0828
0,21	0832	0836	0839	0843	0847	0851	0855	0859	0863	0867
0,22	0871	0875	0878	0882	0886	0890	0894	0898	0902	0906
0,23	0910	0913	0917	0921	0925	0929	0933	0937	0941	0944
0,24	0948	0952	0956	0960	0964	0968	0972	0975	0979	0983
0,25	0987	0991	0995	0999	1003	1006	1010	1014	1018	1022
0,26	1026	1030	1033	1037	1041	1045	1049	1053	1057	1060
0,27	1064	1068	1072	1076	1080	1083	1087	1091	1095	1099
0,28	1103	1106	1110	1114	1118	1122	1126	1129	1133	1137
0,29	1141	1145	1149	1152	1156	1160	1164	1168	1171	1175
0,30	1179	1183	1187	1191	1194	1198	1202	1206	1210	1213
0,31	1217	1221	1225	1229	1232	1236	1240	1244	1248	1251
0,32	1255	1259	1263	1267	1270	1274	1278	1282	1285	1289
0,33	1293	1297	1301	1304	1308	1312	1316	1319	1323	1327
0,34	1331	1334	1338	1342	1346	1350	1353	1357	1361	1365
0,35	1368	1372	1376	1380	1383	1387	1391	1395	1398	1402
0,36	1406	1410	1413	1417	1421	1424	1428	1432	1436	1439
0,37	1443	1447	1451	1454	1458	1462	1465	1469	1473	1477
0,38	1480	1484	1488	1491	1495	1499	1503	1506	1510	1514
0,39	1517	1521	1525	1528	1532	1536	1539	1543	1547	1551
0,40	1554	1558	1562	1565	1569	1573	1576	1580	1584	1587

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,41	0,1591	1595	1598	1602	1606	1609	1613	1617	1620	1624
0,42	1628	1631	1635	1639	1642	1646	1649	1653	1657	1660
0,43	1664	1668	1671	1675	1679	1682	1686	1689	1693	1697
0,44	1700	1704	1708	1711	1715	1718	1722	1726	1729	1733
0,45	1736	1740	1744	1747	1751	1754	1758	1762	1765	1769
0,46	1772	1776	1780	1783	1787	1790	1794	1798	1801	1805
0,47	1808	1812	1815	1819	1823	1826	1830	1833	1837	1840
0,48	1844	1847	1851	1855	1858	1862	1865	1869	1872	1876
0,49	1879	1883	1886	1890	1893	1897	1901	1904	1908	1911
0,50	1915	1918	1922	1925	1929	1932	1936	1939	1943	1946
0,51	1950	1953	1957	1960	1964	1967	1971	1974	1978	1981
0,52	1985	1988	1992	1995	1999	2002	2006	2009	2013	2016
0,53	2019	2023	2026	2030	2033	2037	2040	2044	2047	2051
0,54	2054	2057	2061	2064	2068	2071	2075	2078	2082	2085
0,55	2088	2092	2095	2099	2102	2106	2109	2112	2116	2119
0,56	2123	2126	2129	2133	2136	2140	2143	2146	2150	2153
0,57	2157	2160	2163	2167	2170	2174	2177	2180	2184	2187
0,58	2190	2194	2197	2201	2204	2207	2211	2214	2217	2221
0,59	2224	2227	2231	2234	2237	2241	2244	2247	2251	2254
0,60	2257	2261	2264	2267	2271	2274	2277	2281	2284	2287
0,61	2291	2294	2297	2301	2304	2307	2311	2314	2317	2320
0,62	2324	2327	2330	2334	2337	2340	2343	2347	2350	2353
0,63	2357	2360	2363	2366	2370	2373	2376	2379	2383	2386
0,64	2389	2392	2396	2399	2402	2405	2409	2412	2415	2418
0,65	2422	2425	2428	2431	2434	2438	2441	2444	2447	2451
0,66	2454	2457	2460	2463	2467	2470	2473	2476	2479	2483
0,67	2486	2489	2492	2495	2498	2502	2505	2508	2511	2514
0,68	2517	2521	2524	2527	2530	2533	2536	2540	2543	2546
0,69	2549	2552	2555	2558	2562	2565	2568	2571	2574	2577
0,70	2580	2583	2587	2590	2593	2596	2599	2602	2605	2608
0,71	2611	2615	2618	2621	2624	2627	2630	2633	2636	2639
0,72	2642	2645	2649	2652	2655	2658	2661	2664	2667	2670
0,73	2673	2676	2679	2682	2685	2688	2691	2694	2697	2700
0,74	2704	2707	2710	2713	2716	2719	2722	2725	2728	2731
0,75	2734	2737	2740	2743	2746	2749	2752	2755	2758	2761
0,76	2764	2767	2770	2773	2776	2779	2782	2785	2788	2791
0,77	2794	2796	2799	2802	2805	2808	2811	2814	2817	2820
0,78	2823	2826	2829	2832	2835	2838	2841	2844	2847	2849
0,79	2852	2855	2858	2861	2864	2867	2870	2873	2876	2879
0,80	2881	2884	2887	2890	2893	2896	2899	2902	2905	2907
0,81	2910	2913	2916	2919	2922	2925	2927	2930	2933	2936
0,82	2939	2942	2945	2947	2950	2953	2956	2959	2962	2964
0,83	2967	2970	2973	2976	2979	2981	2984	2987	2990	2993
0,84	2995	2998	3001	3004	3007	3009	3012	3015	3018	3021
0,85	3023	3026	3029	3032	3034	3037	3040	3043	3046	3048

Ф(x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,86	0,3051	3054	3057	3059	3062	3065	3068	3070	3073	3076
0,87	3078	3081	3084	3087	3089	3092	3095	3098	3100	3103
0,88	3106	3108	3111	3114	3117	3119	3122	3125	3127	3130
0,89	3133	3135	3138	3141	3143	3146	3149	3151	3154	3157
0,90	3159	3162	3165	3167	3170	3173	3175	3178	3181	3183
0,91	3186	3189	3191	3194	3196	3199	3202	3204	3207	3210
0,92	3212	3215	3217	3220	3223	3225	3228	3230	3233	3236
0,93	3238	3241	3243	3246	3248	3251	3254	3256	3259	3261
0,94	3264	3266	3269	3272	3274	3277	3279	3282	3284	3287
0,95	3289	3292	3295	3297	3300	3302	3305	3307	3310	3312
0,96	3315	3317	3320	3322	3325	3327	3330	3332	3335	3337
0,97	3340	3342	3345	3347	3350	3352	3355	3357	3360	3362
0,98	3365	3367	3370	3372	3374	3377	3379	3382	3384	3387
0,99	3389	3392	3394	3396	3399	3401	3404	3406	3409	3411
1,00	3413	3416	3418	3421	3423	3426	3428	3430	3433	3435
1,01	3438	3440	3442	3445	3447	3449	3452	3454	3457	3459
1,02	3461	3464	3466	3468	3471	3473	3476	3478	3480	3483
1,03	3485	3487	3490	3492	3494	3497	3499	3501	3504	3506
1,04	3508	3511	3513	3515	3518	3520	3522	3525	3527	3529
1,05	3531	3534	3536	3538	3541	3543	3545	3547	3550	3552
1,06	3554	3557	3559	3561	3563	3566	3568	3570	3572	3575
1,07	3577	3579	3581	3584	3586	3588	3590	3593	3595	3597
1,08	3599	3602	3604	3606	3608	3610	3613	3615	3617	3619
1,09	3621	3624	3626	3628	3630	3632	3635	3637	3639	3641
1,10	3643	3646	3648	3650	3652	3654	3656	3659	3661	3663
1,11	3665	3667	3669	3671	3674	3676	3678	3680	3682	3684
1,12	3686	3689	3691	3693	3695	3697	3699	3701	3703	3706
1,13	3708	3710	3712	3714	3716	3718	3720	3722	3724	3726
1,14	3729	3731	3733	3735	3737	3739	3741	3743	3745	3747
1,15	3749	3751	3753	3755	3757	3760	3762	3764	3766	3768
1,16	3770	3772	3774	3776	3778	3780	3782	3784	3786	3788
1,17	3790	3792	3794	3796	3798	3800	3802	3804	3806	3808
1,18	3810	3812	3814	3816	3818	3820	3822	3824	3826	3828
1,19	3830	3832	3834	3836	3838	3840	3842	3843	3845	3847
1,20	3849	3851	3853	3855	3857	3859	3861	3863	3865	3867
1,21	3869	3871	3872	3874	3876	3878	3880	3882	3884	3886
1,22	3888	3890	3891	3893	3895	3897	3899	3901	3903	3905
1,23	3907	3908	3910	3912	3914	3916	3918	3920	3921	3923
1,24	3925	3927	3929	3931	3933	3934	3936	3938	3940	3942
1,25	3944	3945	3947	3949	3951	3953	3954	3956	3958	3960
1,26	3962	3963	3965	3967	3969	3971	3972	3974	3976	3978
1,27	3980	3981	3983	3985	3987	3988	3990	3992	3994	3996
1,28	3997	3999	4001	4003	4004	4006	4008	4010	4011	4013
1,29	4015	4016	4018	4020	4022	4023	4025	4027	4029	4030
1,30	4032	4034	4035	4037	4039	4041	4042	4044	4046	4047

Φ(x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,31	0,4049	4051	4052	4054	4056	4057	4059	4061	4062	4064
1,32	4066	4067	4069	4071	4072	4074	4076	4077	4079	4081
1,33	4082	4084	4086	4087	4089	4091	4092	4094	4096	4097
1,34	4099	4100	4102	4104	4105	4107	4108	4110	4112	4113
1,35	4115	4117	4118	4120	4121	4123	4125	4126	4128	4129
1,36	4131	4132	4134	4136	4137	4139	4140	4142	4143	4145
1,37	4147	4148	4150	4151	4153	4154	4156	4157	4159	4161
1,38	4162	4164	4165	4167	4168	4170	4171	4173	4174	4176
1,39	4177	4179	4180	4182	4183	4185	4186	4188	4189	4191
1,40	4192	4194	4195	4197	4198	4200	4201	4203	4204	4206
1,41	4207	4209	4210	4212	4213	4215	4216	4218	4219	4221
1,42	4222	4223	4225	4226	4228	4229	4231	4232	4234	4235
1,43	4236	4238	4239	4241	4242	4244	4245	4246	4248	4249
1,44	4251	4252	4253	4255	4256	4258	4259	4261	4262	4263
1,45	4265	4266	4267	4269	4270	4272	4273	4274	4276	4277
1,46	4279	4280	4281	4283	4284	4285	4287	4288	4289	4291
1,47	4292	4294	4295	4296	4298	4299	4300	4302	4303	4304
1,48	4306	4307	4308	4310	4311	4312	4314	4315	4316	4318
1,49	4319	4320	4322	4323	4324	4325	4327	4328	4329	4331
1,50	4332	4333	4335	4336	4337	4338	4340	4341	4342	4344
1,51	4345	4346	4347	4349	4350	4351	4352	4354	4355	4356
1,52	4357	4359	4360	4361	4362	4364	4365	4366	4367	4369
1,53	4370	4371	4372	4374	4375	4376	4377	4379	4380	4381
1,54	4382	4383	4385	4386	4387	4388	4389	4391	4392	4393
1,55	4394	4395	4397	4398	4399	4400	4401	4403	4404	4405
1,56	4406	4407	4409	4410	4411	4412	4413	4414	4416	4417
1,57	4418	4419	4420	4421	4423	4424	4425	4426	4427	4428
1,58	4429	4431	4432	4433	4434	4435	4436	4437	4439	4440
1,59	4441	4442	4443	4444	4445	4446	4448	4449	4450	4451
1,60	4452	4453	4454	4455	4456	4458	4459	4460	4461	4462
1,61	4463	4464	4465	4466	4467	4468	4470	4471	4472	4473
1,62	4474	4475	4476	4477	4478	4479	4480	4481	4482	4483
1,63	4484	4486	4487	4488	4489	4490	4491	4492	4493	4494
1,64	4495	4496	4497	4498	4499	4500	4501	4502	4503	4504
1,65	4505	4506	4507	4508	4509	4510	4511	4512	4513	4514
1,66	4515	4516	4517	4518	4519	4520	4521	4522	4523	4524
1.67	4525	4526	4527	4528	4529	4530	4531	4532	4533	4534
1,68	4535	4536	4537	4538	4539	4540	4541	4542	4543	4544
1,69	4545	4546	4547	4548	4549	4550	4551	4552	4552	4553
1,70	4554	4555	4556	4557	4558	4559	4560	4561	4562	4563
1,71	4564	4565	4566	4566	4567	4568	4569	4570	4571	4572
1,72	4573	4574	4575	4576	4576	4577	4578	4579	4580	4581
1,73	4582	4583	4584	4585	4585	4586	4587	4588	4589	4590
1,74	4591	4592	4592	4593	4594	4595	4596	4597	4598	4599
1,75	4599	4600	4601	4602	4603	4604	4605	4605	4606	4607

Φ(x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,76	0,4608	4609	4610	4610	4611	4612	4613	4614	4615	4616
1,77	4616	4617	4618	4619	4620	4621	4621	4622	4623	4624
1,78	4625	4625	4626	4627	4628	4629	4630	4630	4631	4632
1,79	4633	4634	4634	4635	4636	4637	4638	4638	4639	4640
1,80	4641	4641	4642	4643	4644	4645	4645	4646	4647	4648
1,81	4649	4649	4650	4651	4652	4652	4653	4654	4655	4655
1,82	4656	4657	4658	4658	4659	4660	4661	4662	4662	4663
1,83	4664	4664	4665	4666	4667	4667	4668	4669	4670	4670
1,84	4671	4672	4673	4673	4674	4675	4676	4676	4677	4678
1,85	4678	4679	4680	4681	4681	4682	4683	4683	4684	4685
1,86	4686	4686	4687	4688	4688	4689	4690	4690	4691	4692
1,87	4693	4693	4694	4695	4695	4696	4697	4697	4698	4699
1,88	4699	4700	4701	4701	4702	4703	4704	4704	4705	4706
1,89	4706	4707	4708	4708	4709	4710	4710	4711	4712	4712
1,90	4713	4713	4714	4715	4715	4716	4717	4717	4718	4719
1,91	4719	4720	4721	4721	4722	4723	4723	4724	4724	4725
1,92	4726	4726	4727	4728	4728	4729	4729	4730	4731	4731
1,93	4732	4733	4733	4734	4734	4735	4736	4736	4737	4737
1,94	4738	4739	4739	4740	4741	4741	4742	4742	4743	4744
1,95	4744	4745	4745	4746	4746	4747	4748	4748	4749	4749
1,96	4750	4751	4751	4752	4752	4753	4754	4754	4755	4755
1,97	4756	4756	4757	4758	4758	4759	4759	4760	4760	4761
1,98	4761	4762	4763	4763	4764	4764	4765	4765	4766	4766
1,99	4767	4768	4768	4769	4769	4770	4770	4771	4771	4772
2,00	4772	4773	4774	4774	4775	4775	4776	4776	4777	4777
2,01	4778	4778	4779	4779	4780	4780	4781	4782	4782	4783
2,02	4783	4784	4784	4785	4785	4786	4786	4787	4787	4788
2,03	4788	4789	4789	4790	4790	4791	4791	4792	4792	4793
2,04	4793	4794	4794	4795	4795	4796	4796	4797	4797	4798
2,05	4798	4799	4799	4800	4800	4801	4801	4802	4802	4803
2,06	4803	4803	4804	4804	4805	4805	4806	4806	4807	4807
2,07	4808	4808	4809	4809	4810	4810	4811	4811	4811	4812
2,08	4812	4813	4813	4814	4814	4815	4815	4816	4816	4816
2,09	4817	4817	4818	4818	4819	4819	4820	4820	4820	4821
2,10	4821	4822	4822	4823	4823	4824	4824	4824	4825	4825
2,11	4826	4826	4827	4827	4827	4828	4828	4829	4829	4830
2,12	4830	4830	4831	4831	4832	4832	4832	4833	4833	4834
2,13	4834	4835	4835	4835	4836	4836	4837	4837	4837	4838
2,14	4838	4839	4839	4839	4840	4840	4841	4841	4841	4842
2,15	4842	4843	4843	4843	4844	4844	4845	4845	4845	4846
2,16	4846	4847	4847	4847	4848	4848	4848	4849	4849	4850
2,17	4850	4850	4851	4851	4851	4852	4852	4853	4853	4853
2,18	4854	4854	4854	4855	4855	4856	4856	4856	4857	4857
2,19	4857	4858	4858	4858	4859	4859	4860	4860	4860	4861
2,20	4861	4861	4862	4862	4862	4863	4863	4863	4864	4864

$\Phi(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,21	0,4864	4865	4865	4866	4866	4866	4867	4867	4867	4868
2,22	4868	4868	4869	4869	4869	4870	4870	4870	4871	4871
2,23	4871	4872	4872	4872	4873	4873	4873	4874	4874	4874
2,24	4875	4875	4875	4876	4876	4876	4876	4877	4877	4877
2,25	4878	4878	4878	4879	4879	4879	4880	4880	4880	4881
2,26	4881	4881	4882	4882	4882	4882	4883	4883	4883	4884
2,27	4884	4884	4885	4885	4885	4885	4886	4886	4886	4887
2,28	4887	4887	4888	4888	4888	4888	4889	4889	4889	4890
2,29	4890	4890	4890	4891	4891	4891	4892	4892	4892	4892
2,30	4893	4893	4893	4894	4894	4894	4894	4895	4895	4895
2,31	4896	4896	4896	4896	4897	4897	4897	4897	4898	4898
2,32	4898	4899	4899	4899	4899	4900	4900	4900	4900	4901
2,33	4901	4901	4901	4902	4902	4902	4903	4903	4903	4903
2,34	4904	4904	4904	4904	4905	4905	4905	4905	4906	4906
2,35	4906	4906	4907	4907	4907	4907	4908	4908	4908	4908
2,36	4909	4909	4909	4909	4910	4910	4910	4910	4911	4911
2,37	4911	4911	4912	4912	4912	4912	4912	4913	4913	4913
2,38	4913	4914	4914	4914	4914	4915	4915	4915	4915	4916
2,39	4916	4916	4916	4916	4917	4917	4917	4917	4918	4918
2,40	4918	4918	4918	4919	4919	4919	4919	4920	4920	4920
2,41	4920	4920	4921	4921	4921	4921	4922	4922	4922	4922
2,42	4922	4923	4923	4923	4923	4923	4924	4924	4924	4924
2,43	4925	4925	4925	4925	4925	4926	4926	4926	4926	4926
2,44	4927	4927	4927	4927	4927	4928	4928	4928	4928	4928
2,45	4929	4929	4929	4929	4929	4930	4930	4930	4930	4930
2,46	4931	4931	4931	4931	4931	4931	4932	4932	4932	4932
2,47	4932	4933	4933	4933	4933	4933	4934	4934	4934	4934
2,48	4934	4934	4935	4935	4935	4935	4935	4936	4936	4936
2,49	4936	4936	4936	4937	4937	4937	4937	4937	4938	4938
2,50	4938	4938	4938	4938	4939	4939	4939	4939	4939	4939
2,51	4940	4940	4940	4940	4940	4940	4941	4941	4941	4941
2,52	4941	4941	4942	4942	4942	4942	4942	4942	4943	4943
2,53	4943	4943	4943	4943	4944	4944	4944	4944	4944	4944
2,54	4945	4945	4945	4945	4945	4945	4946	4946	4946	4946
2,55	4946	4946	4946	4947	4947	4947	4947	4947	4947	4948
2,56	4948	4948	4948	4948	4948	4948	4949	4949	4949	4949
2,57	4949	4949	4949	4950	4950	4950	4950	4950	4950	4950
2,58	4951	4951	4951	4951	4951	4951	4951	4952	4952	4952
2,59	4952	4952	4952	4952	4953	4953	4953	4953	4953	4953
2,60	4953	4954	4954	4954	4954	4954	4954	4954	4954	4955
2,61	4955	4955	4955	4955	4955	4955	4956	4956	4956	4956
2,62	4956	4956	4956	4956	4957	4957	4957	4957	4957	4957
2,63	4957	4957	4958	4958	4958	4958	4958	4958	4958	4958
2,64	4959	4959	4959	4959	4959	4959	4959	4959	4960	4960
2,65	4960	4960	4960	4960	4960	4960	4960	4961	4961	4961

$\Phi(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,66	0,4961	4961	4961	4961	4961	4962	4962	4962	4962	4962
2,67	4962	4962	4962	4962	4963	4963	4963	4963	4963	4963
2,68	4963	4963	4963	4964	4964	4964	4964	4964	4964	4964
2,69	4964	4964	4964	4965	4965	4965	4965	4965	4965	4965
2,70	4965	4965	4966	4966	4966	4966	4966	4966	4966	4966
2,71	4966	4966	4967	4967	4967	4967	4967	4967	4967	4967
2,72	4967	4967	4968	4968	4968	4968	4968	4968	4968	4968
2,73	4968	4968	4969	4969	4969	4969	4969	4969	4969	4969
2,74	4969	4969	4969	4970	4970	4970	4970	4970	4970	4970
2,75	4970	4970	4970	4970	4971	4971	4971	4971	4971	4971
2,76	4971	4971	4971	4971	4971	4972	4972	4972	4972	4972
2,77	4972	4972	4972	4972	4972	4972	4972	4973	4973	4973
2,78	4973	4973	4973	4973	4973	4973	4973	4973	4973	4974
2,79	4974	4974	4974	4974	4974	4974	4974	4974	4974	4974
2,80	4974	4975	4975	4975	4975	4975	4975	4975	4975	4975
2,81	4975	4975	4975	4975	4976	4976	4976	4976	4976	4976
2,82	4976	4976	4976	4976	4976	4976	4976	4977	4977	4977
2,83	4977	4977	4977	4977	4977	4977	4977	4977	4977	4977
2,84	4977	4978	4978	4978	4978	4978	4978	4978	4978	4978
2,85	4978	4978	4978	4978	4978	4978	4979	4979	4979	4979
2,86	4979	4979	4979	4979	4979	4979	4979	4979	4979	4979
2,87	4979	4980	4980	4980	4980	4980	4980	4980	4980	4980
2,88	4980	4980	4980	4980	4980	4980	4980	4981	4981	4981
2,89	4981	4981	4981	4981	4981	4981	4981	4981	4981	4981
2,90	4981	4981	4981	4982	4982	4982	4982	4982	4982	4982
2,91	4982	4982	4982	4982	4982	4982	4982	4982	4982	4982
2,92	4982	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983
2,93	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4984
2,94	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984
2,95	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4985	4985
2,96	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985
2,97	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4986
2,98	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986
2,99	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986
3,00	4987	4987	4987	4987	4987	4987	4987	4987	4987	4987

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
3,000—3,023	0,4987	3,139—3,174	0,4992	3,390—3,480	0,4997
3,024—3,048	0,4988	3,175—3,215	0,4993	3,481—3,615	0,4998
3,049—3,075	0,4989	3,216—3,263	0,4994	3,616—3,890	0,4999
3,076—3,105	0,4990	3,264—3,320	0,4995	3,891—∞	0,5
3,106—3,138	0,4991	3,321—3,389	0,4996		

Таблица 2

Двусторонние границы *T*-распределения: значения t_γ, определяемые уравнением $\int_{-t_\gamma}^{t_\gamma} s_k(t)\,dt = \gamma$

k \ γ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	142	289	445	617	0,816	1,061	1,336	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	137	277	424	584	765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	134	271	414	569	741	941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	132	267	408	559	727	920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	131	265	404	553	718	906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	130	263	402	549	711	896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	130	262	399	546	706	889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	129	261	398	543	703	883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	129	260	397	542	700	879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	129	260	396	540	697	876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	128	259	395	539	695	873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	128	259	394	538	694	870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	128	258	393	537	692	868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	128	258	393	536	691	866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	128	258	392	535	690	865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	128	257	392	534	689	863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	127	257	392	534	688	962	1,067	1,330	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922

Таблица 3

Двусторонние границы χ^2-распределения: значения ε_α, определяемые уравнением

$$\int\limits_{k/(1+\varepsilon_\gamma)^2}^{k/(1-\varepsilon_\gamma)^2_+} p_k(z)\,dz = \gamma \text{ *)}$$

k \ α	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,568	906	1,602	2,946	6,923				
2	367	473	0,678	1,125	2,086	3,400	5,857	8,500	
3	290	370	482	0,730	1,270	1,932	3,000	4,200	9,00
4	248	306	398	563	0,941	1,382	2,056	2,700	5,00
5	221	277	348	475	738	1,104	1,594	2,000	3,80
6	200	251	308	416	623	0,918	1,306	1,650	3,00
7	185	232	290	380	576	800	1,143	1,393	2,50
8	173	216	269	354	516	713	0,986	1,225	2,05
9	162	202	252	329	476	650	889	1,094	1,75
10	153	192	239	304	442	596	814	0,980	1,50
12	140	176	218	276	388	527	700	840	1,30
14	130	162	290	252	357	468	620	740	1,14
16	122	150	188	236	325	422	564	671	1,02
18	115	143	177	223	297	390	500	600	0,92
20	108	136	168	210	282	370	480	567	85
25	096	122	148	187	247	317	408	485	70
30	088	111	137	172	226	281	369	425	60
35	085	101	127	156	207	261	347	400	56
40	076	095	119	146	193	242	312	375	52
45	071	089	112	139	184	228	288	350	48
50	068	084	105	133	174	212	270	311	45
60	062	077	095	122	155	193	242	283	40
70	057	072	088	112	145	180	222	250	37
80	054	067	082	103	138	167	200	236	35
90	051	063	078	096	131	151	192	220	32
100	048	060	074	092	125	146	184	200	30
150	040	050	060	075	096	125	146	167	0,225
200	034	042	053	065	084	100	133	144	190
250	031	038	048	058	076	091	115	135	175
500	022	028	031	041	054	064	077	085	125
1000	016	019	025	037	044	047	056	059	080

*) $(1-\varepsilon_\gamma)_+ = \max(1-\varepsilon_\gamma,\ 0)$.

Таблица 4

Значения χ^2_β, удовлетворяющие равенству $\int\limits_{\chi^2_\alpha}^{\infty} \psi_r(u)du = \alpha$,

где $\psi_r(u)$ – плотность распределения "хи-квадрат" с r степенями свободы

r \ α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,64	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9

Таблица 5

Тригонометрические функции

$x°$	x (радианы)	$\sin x$	$\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{ctg}\, x$	$\cos x$		
0	0,0000	0,0000	0,0000	∞	1,0000	1,5708	90
1	0,0175	0,0175	0,0175	57,29	0,9998	1,5533	89
2	0,0349	0,0349	0,0349	28,64	0,9994	1,5359	88
3	0,0524	0,0523	0,0524	19,08	0,9986	1,5184	87
4	0,0698	0,0698	0,0699	14,30	0,9976	1,5010	86
5	0,0873	0,0872	0,0875	11,43	0,9962	1,4835	85
6	0,1047	0,1045	0,1051	9,514	0,9945	1,4661	84
7	0,1222	0,1219	0,1228	8,144	0,9925	1,4486	83
8	0,1396	0,1392	0,1405	7,115	0,9903	1,4312	82
9	0,1571	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	1,4137	81
10	0,1745	0,1736	0,1763	5,671	0,9848	1,3963	80
11	0,1920	0,1908	0,1944	5,145	0,9816	1,3788	79
12	0,2094	0,2079	0,2126	4,705	0,9781	1,3614	78
13	0,2269	0,2250	0,2309	4,331	0,9744	1,3439	77
14	0,2443	0,2419	0,2493	4,011	0,9703	1,3265	76
15	0,2618	0,2588	0,2679	3,732	0,9659	1,3090	75
16	0,2793	0,2756	0,2867	3,487	0,9613	1,2915	74
17	0,2967	0,2924	0,3057	3,271	0,9563	1,2741	73
18	0,3142	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	1,2566	72
19	0,3316	0,3256	0,3443	2,904	0,9455	1,2392	71
20	0,3491	0,3420	0,3640	2,747	0,9397	1,2217	70
21	0,3665	0,3584	0,3839	2,605	0,9336	1,2043	69
22	0,3840	0,3746	0,4040	2,475	0,9272	1,1868	68
23	0,4014	0,3907	0,4245	2,356	0,9205	1,1694	67
24	0,4189	0,4067	0,4452	2,246	0,9135	1,1519	66
25	0,4363	0,4226	0,4663	2,145	0,9063	1,1345	65
26	0,4538	0,4384	0,4877	2,050	0,8988	1,1170	64
27	0,4712	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	1,0996	63
28	0,4887	0,4695	0,5317	1,881	0,8829	1,0821	62
29	0,5061	0,4848	0,5543	1,804	0,8746	1,0647	61
30	0,5236	0,5000	0,5774	1,732	0,8660	1,0472	60
31	0,5411	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	1,0297	59
32	0,5585	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	1,0123	58
33	0,5760	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	0,9948	57
34	0,5934	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	0,9774	56
35	0,6109	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	0,9599	55
36	0,6283	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	0,9425	54
37	0,6458	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	0,9250	53
38	0,6632	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	0,9076	52
39	0,6807	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	0,8901	51
40	0,6981	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	0,8727	50
41	0,7156	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	0,8552	49
42	0,7330	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	0,8378	48
43	0,7505	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	0,8203	47
44	0,7679	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	0,8029	46
45	0,7854	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	0,7854	45
		$\cos x$	$\mathrm{ctg}\, x$	$\mathrm{tg}\, x$	$\sin x$	x (радианы)	$x°$