МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

1. УЧЕБНЫЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Исследование операций и системный анализ» изучается на 4 курсе заочного обучения по специальности (направлению подготовки) 162300 «Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей».

Учебным планом по дисциплине предусмотрены: общий объём учебных часов на дисциплину - 144 ч., из них: самостоятельная работа – 134 часа., лекции – 6 часов, лабораторные работы – 4 часа, контрольная работа, экзамен.

2. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель дисциплины «Исследование операций и системный анализ» - дать студентам необходимые знания и привить практические навыки по методам исследования операций и системного анализа в приложении к задачам, решаемым воздушным транспортом и его эксплуатационными предприятиями.

В результате изучения дисциплины студенты должны знать:

основные подходы применения методов системного анализа, используемых при решении организационных, технических и эксплуатационных задач на воздушном транспорте;

методы анализа организационно-технических систем и оценку их эффективности;

вероятностно-статистические методы анализа систем;

методы теории массового обслуживания, ориентированные на решение задач воздушного транспорта.

метод сетевого планирования. Порядок построения и расчета сетевого графика. Способы оптимизации плана комплекса работ.

Должны уметь практически применять методы исследования операций и системного анализа, в том числе с применением ЭВМ.

Приобрести опыт оценки случайных параметров организационно-технических систем и их элементов, проверки статистических гипотез и оценки систем технического обслуживания и ремонта авиационной техники как систем массового обслуживания.

3. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

При самостоятельном изучении материала по данному курсу студенты должны работать с литературными источниками, указанными в настоящих методических указаниях. При использовании литературы надо учитывать, что ряд аналогичных вопросов излагается в нескольких источниках, их сравнение и осмысливание позволит более глубоко изучить материал изучаемой темы.

Рекомендуется вести конспекты изучаемой литературы.

Каждый студент должен выполнить контрольную работу, по которой имеются специальные методические указания, помещенные во второй части настоящего пособия. По контрольной работе проводится индивидуальное собеседование.

Качество изучения проверяется умением правильно и полно отвечать на вопросы самопроверки, приведенные в конце каждого раздела программы.

При изучении отдельных вопросов рекомендуется подбирать соответствующие примеры из опыта работы воздушного транспорта и его эксплуатационных предприятий.

4. ПРОГРАММА И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. Теория систем и системный анализ

1.1 Основы системного анализа. Методология системного подхода. Системный подход – детище XX столетия. Понятия – эмерджентность системы, синергетический эффект. Понятия - «цель» и «задача». Сущность системного подхода. Формирование системного мышления.

1.2 Понятие «система». Система - как объект исследования и управления. Система - как средство достижения цели. Система - как понятие модели. Формальные типы моделей. Модель «черного ящика». Модель состава системы. Модель структуры системы. Модель структурной схемы системы. Классификация систем. Примеры систем воздушного транспорта и их краткая характеристика.

1.3 Понятия «эффективность» и «качество» систем. Цель и результат операции. Эффективность операции. Факторы, влияющие на эффективность операций. Качество как потенциальная эффективность операции. Качество как совокупность внутренних свойств системы. Подходы к выбору критериев эффективности и показателей качества. Количественные и качественные показатели. Аддитивные и мультипликативные преобразования частных показателей. Критерии эффективности. Критерии оптимальности. Критерии пригодности.

1.4 Задачи выбора и задачи оптимизации. Однокритериальные и многокритериальные задачи оптимизации. Критерий эффективности и целевая функция. Обобщенный показатель эффективности. Метод последовательных уступок. Подход, выделяющий главный (доминирующий) показатель. Множество Парето. Оптимальность по Парето.

Методические указания по первому разделу дисциплины

При изучении этого раздела необходимо уяснить основные понятия теории систем и системного анализа, осознать относительность понятий «система» и «подсистема». Рекомендуется проанализировать встречающиеся в практике работы студента примеры систем воздушного транспорта.

Особое внимание обратить на уяснение понятий эффективность и качество. Рекомендуется рассмотреть показатели эффективности и качества, применяемые к работе воздушного транспорта. Необходимо учитывать, что показатели эффективности играют роль критериев сравнения альтернатив в процессе принятия управленческих решений. В связи с этим вместо термина «показатель» очень часто используют термин «критерий». Такая замена правомерна, если под критерием понимать именно критерий сравнения альтернатив, а не критерий эффективности операции. Однако, чтобы не возникало путаницы, когда речь идет об измерении эффективности, лучше всегда использовать термин «показатель».

Литература: [1], с. 3--19, [2], с. 10-72, 215-225; [5], с. 9-38.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулировать и пояснить основные понятия: система, структура систем, подсистема, большая и сложная система.
2. Привести примеры систем воздушного транспорта и дать их краткую характеристику.
3. Что означает эффективность системы и показатели качества систем?
4. Привести примеры показателей эффективности и качества из области деятельности воздушного транспорта и его эксплуатационных предприятий.

Раздел 2. Вероятностно-статистические методы анализа систем и их элементов

1.1 Статистическая обработка данных. Основные задачи, решаемые статистическими методами. Определение закона распределения случайной величины по выборочным статистическим данным. Проверка правдоподобия гипотез. Полные и усеченные выборки. Определение параметров законов распределения по данным выборок.

1.2. Постановка задачи статистической проверки гипотез. Статистическая гипотеза. Процедура проверки гипотезы. Нулевая (нуль-гипотеза H_0) и альтернативная гипотезы H_1. Уровень значимости. Определение видов законов распределения по статистическим данным. Критерии согласия. Критерий *хи*-квадрат (критерий согласия Пирсона).

1.3. Статистический приемочный контроль. Сплошной и выборочный контроль. План статистического приемочного контроля (план контроля). Одноступенчатый, двухступенчатый, многоступенчатый и последовательный контроль.

Оперативная характеристика плана контроля. Приемочный уровень качества. Браковочный уровень качества. Риск поставщика (изготовителя) α. Риск заказчика (потребителя) β. Статистический контроль с использованием биноминального и пуассоновского распределения. Метод последовательного анализа (подход Вальда).

Методические указания по второму разделу дисциплины

Основными вопросами этого раздела являются вопросы вероятностно-статистических методов анализа систем, основанных на результатах наблюдений. Рекомендуется ознакомиться с применяемыми на практике в предприятии методами. Существенное значение имеет уяснение сущности критериев согласия и их практичебское использование для анализа результатов наблюдения.

Литература: [1], с. 29-50.

Вопросы для самопроверки

1. Что означают полные и усеченные выборки? Привести примеры из области анализа надежности элементов авиационной техники.
2. Какие критерии согласия вы знаете? Как их применять на практике?
3. Сущность статистических методов контроля качества партии.

Раздел 3. Анализ систем методами исследований операций

3.1. Исследование операций как методологическая основа теории принятия управленческих решений. Краткая характеристика основных методов исследования операций и их применения. Типовые прикладные задачи исследования операций. Разработка оптимального плана производства. Транспортная задача. Задача о коммивояжере. Сетевой анализ проектов. Метод CPM. Сетевой анализ проектов. Метод PERT.

3.2. Марковские случайные процессы. Виды марковских случайных процессов. Марковская цепь. Размеченный граф состояний. Марковские процессы с дискретным состоянием и непрерывным временем. Правила составления уравнений Колмогорова. Предельные вероятности состояний. Полумарковские процессы. Вложенная цепь Маркова.

3.3 Компоненты систем массового обслуживания. Классификация систем массового обслуживания. Замкнутая и разомкнутая СМО. Показатели качества обслуживания СМО. Анализ систем массового обслуживания с отказами. Система M/M/I/0 – одноканальная СМО с отказами. Система M/M/n/0 – многоканальная СМО с отказами. Анализ систем массового обслуживания с ожиданием. Системы M/M/1/m и M/M/1/∞ – одноканальные системы с ожиданием. Система M/M/n/m – многоканальная система с ожиданием. Применение теории массового обслуживания для решения задач технического обслуживания и ремонта техники.

3.4. Методы математического программирования. Линейное, нелинейное и динамическое программирование и методы их решения.

3.5. Метод сетевого планирования. Расчет параметров сетевого графика. Основные параметры сетевого графика: продолжительность пути, критический путь; ранний срок свершения события, поздний срок свершения события; резерв времени свершения события; полный резерв времени работы; полный резерв времени пути; коэффициент напряженности пути. Оптимизация сетевых графиков.

Методические указания по третьему разделу дисциплины

Раздел охватывает основные методы исследования операций. При изучении методов математического программирования следует уяснить сущность линейного, нелинейного и динамического программирования и уметь применять их к планированию работ на предприятии. Следует глубоко уяснить сущность марковских и полумарковских процессов, имея в виду, что процессы технического обслуживания и ремонта могут быть достаточно полно описаны моделями марковских и полумарковских процессов. Сказанное применимо также и к вопросам теории массового обслуживания.

Обратить внимание на порядок расчета параметров сетевого графика.

Контрольная работа по дисциплине включает задачи по определению вероятности состояния с помощью уравнений Колмогорова и задач с использованием методов теории массового обслуживания. Необходимые теоретические сведения содержаться в методических указаниях по выполнению контрольной работы.

Литература: [1], с. 51-80, [5], с. 51-111, 210-269, 286-316.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулировать постановку задачи линейного, нелинейного и динамического программирования.
2. Что такое марковские и полумарковские процессы? Привести примеры из практики своей работы.
3. Какие имеются системы массового обслуживания? Привести примеры из практики своей работы.
4. Какие задачи решаются методом сетевого планирования?

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Целью контрольной работы по дисциплине «Исследование операций и системный анализ» является закрепление студентами навыков численного анализа марковских случайных процессов с помощью уравнений Колмогорова и навыков решения задач с использованием методов теории массового обслуживания.

Подбор задач осуществлен применительно к практическим ситуациям, возникающим на воздушном транспорте и его эксплуатационных предприятиях.

Краткие теоретические сведения, необходимые для выполнения контрольной работы изложены в виде методических рекомендаций, помещенных в приложении.

Варианты задания даются для каждой задачи. Номер варианта определяется по сумме двух последних цифр зачетной книжки студента. Если сумма оказывается больше общего числа вариантов, то номер варианта определяется по последней цифре суммы.

Контрольная работа должна быть оформлена в соответствии со следующими требованиями:

- объем расчетно-пояснительной записки – 10-15 страниц формата А4;
- записка пишется от руки разборчиво, темными чернилами, с полями для пометок рецензента и подписывается исполнителем работы;
- допускается использование электронного варианта, распетанного на принтере. При наборе на ЭВМ текст набирается шрифтом Times New Roman. Размер шрифта 12пт или 14пт. Интервал – 1,5;
- страницы должны быть сброшюрованы и пронумерованы;
- титульный лист оформляется согласно Приложению 1.

Пояснительная записка состоит из:

- титульного листа;
- технического задания (формулировка задания, исходные данные, необходимые расчетные зависимости);
- основной части, включающей решение поставленных задач (необходимые пояснения решения задачи, расчеты, схемы, пояснения к схемам);
- выводы по результатам решения каждой задачи;
- список использованных источников.

В тексте пояснительной записки необходимо выделять заголовки разделов и подразделов, абзацы; формулы, схемы и графики должны быть пронумерованы и снабжены пояснительными надписями.

Схемы следует выполнять на отдельном листе того же формата, что и пояснительная записка.

2. ТЕХНИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Контрольная работа состоит из двух контрольных заданий:

- первого задания, состоящего из трех задач по определению вероятностей состояний случайного процесса с помощью уравнения Колмогорова;
- второго задания, состоящего из трех задач с использованием методов теории массового обслуживания.

Теоретические сведения, необходимые для решения задач, приведены в Приложениях 2 и 3.

2.1 Контрольное задание № 1

А. Исходя из содержания задачи, установить возможные состояния системы и построить размеченный граф состояний.

Б. Составить по размеченному графу состояний систему дифференциальных уравнений Колмогорова и затем – систему алгебраических уравнений для финальных вероятностей состояний.

В. Путем решения системы алгебраических уравнений определить финальные вероятности состояний исследуемой системы.

Задача № 1.1

Состояние технического устройства (ТУ) непрерывно контролируется в процессе эксплуатации. В любой момент времени ТУ может выйти из строя. В случае возникновения отказа немедленно осуществляется восстановление его готовности. И поток отказов и поток восстановления – простейшие.

Параметр потока отказа - λ., среднее время восстановления – t_{cp}, интенсивность восстановления – $\mu = \dfrac{1}{t_{cp}}$

Рассчитать и построить графики зависимостей вероятности состояния готовности к работе (исправного состояния) – P_r от времени восстановления (времени восстановления отказов) - t_{cp} при различных значениях параметра потока отказов - λ..

Значения величины λ. и t_{cp} для различных вариантов приведены в табл. 1.1

Таблица 1.1

№№ вар.	λ., 1/ч	t_{cp}, ч	№№ вар.	λ., 1/ч	t_{cp}, ч
1.	10^{-2} 10^{-4}	2,4,6, 8,10	6.	10^{-3} 10^{-5}	2,4,6, 8,10
2.	10^{-3} 10^{-5}	1,3,5, 7,9,	7.	10^{-2} 10^{-4}	1,3,5, 7,9
3.	10^{-3} 10^{-5}	2,4,6, 8,10	8.	10^{-3} 10^{-5}	2,4,6, 8,10
4.	10^{-2} 10^{-4}	1,3,5, 7,9	9.	10^{-3} 10^{-5}	1,3,5, 7,9
5.	10^{-2} 10^{-4}	2,4,6, 8,10	10.	10^{-2} 10^{-4}	2,4,6, 8,10

Задача № 1.2

На борту самолета находится агрегат, который может отказать. Поток отказов - ω. Отказ обнаруживается только в процессе регламентного технического обслуживания. Среднее время между техническими обслуживаниями равно $T_{ср}$., среднее время технического обслуживания $T_{то}$. Среднее время обнаружения неисправности равно $T_{он} = [T_{ср} - (T_{ср}^{-1} + \omega)^{-1}]$.

Определить финальные вероятности состояний агрегата. Значение величин ω, $T_{ср}$ и $T_{то}$. для различных вариантов приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

№№ вариантов	ω, 1/ч	$T_{то}$, ч	$T_{ср}$,лет
1	10^{-4}	2,0	0,8
2	10^{-5}		
3	10^{-6}		
4	10^{-7}		
5	10^{-4}	4,0	1,0
6	10^{-5}		
7	10^{-6}		
8	10^{-7}		
9	10^{-4}	6,0	1,0
10	10^{-5}		
11	10^{-6}		
12	10^{-7}		

Задача № 1.3

Техническое устройство (ТУ) подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ. Отказ обнаруживается не сразу, а через случайное время, распределенное по показательному закону с параметром υ. Как только отказ обнаружен, производится осмотр ТУ, в результате которого она либо направляется в ремонт (вероятность этого P), либо списывается и заменяется новым. Время осмотра - показательное с параметром γ, время ремонта - показательное с параметром μ, время замены списанного ТУ новым - показательное с параметром χ. Найти финальные вероятности состояний ТУ и определить, какую долю времени в среднем ТУ будет работать нормально и какую долю времени, в среднем ТУ будет работать с необнаруженным отказом (давать брак).

Значения параметров для различных вариантов указаны в табл. 1.3.

Таблица 1.3.

N вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ, 1/ч	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01
υ, 1/ч	1,0	2,0	1,0	0,2	1,0	2,0	1,0	2,0	1,0	2,0
P	0,8	0,8	0,8	0,8	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8
γ, 1/ч	10,0	10,0	10,0	10,0	5,0	5,0	6,0	66,0	4,0	4,0
μ, 1/ч	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,2	0,2	0,2	0,2
χ, 1/ч	2,0	2,0	0,5	0,5	2,0	2,0	0,5	0,5	1,0	1,0

2.3 Контрольная работа № 2

А. Исходя из содержания задачи, установить тип системы массового обслуживания по характеру входящего потока, распределению времени обслуживания, числу обслуживающих приборов, длины очереди.

Б. Установить, какие характеристики рассматриваемой СМО должны быть определены и, пользуясь приведенными в Приложении справочными формулами, определить их характеристики.

В. Сделать выводы по результатам расчетов.

Задача № 2.1

Авиационная касса имеет два окошка, в каждом из которых продаются авиабилеты в два пункта: в Саратов и в Волгоград. Потоки пассажиров, приобретающих билеты в Саратов и Волгоград, одинаковы по интенсивности, которая равна λ_0. Среднее время обслуживания пассажира (продажа ему билета) $t_{об}$. Поступило рационализаторское предложение: для уменьшения длин очередей и времени пребывания в них (в интересах пассажиров) сделать обе кассы специализированными: в первой продавать билеты только в Саратов, а во второй - только в Волгоград. Считая потоки простейшими, проверить разумность такого рацпредложения для значений параметров λ_0 и $t_{об}$, приведенных в табл.2.1.

Таблица 2.1.

N вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_0, 1/мин	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55
$t_{об}$, 1/мин	0,45	0,9	1,3	1,8	2,5	0,5	1,0	1,5	2	2,5

Задача № 2.2

Авиационная техническая база (АТБ) имеет одно место для технического обслуживания самолетов, которые прибывают на обслуживание случайным образом, и если их не могут сразу обслужить, они становятся в очередь. На длину очереди ограничений нет.

Промежутки времени t между двумя последовательными прибытиями самолетов удовлетворяют экспоненциальному закону с параметром λ. Время обслуживания на АТБ также имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Значения λ и μ приведены в табл. 2.2. Определить:

вероятность простоя АТБ - P_o,

среднюю длину очереди - $\bar{r}$,

среднее время нахождения в очереди - $\bar{t}_{ож}$,

общее время обслуживания в АТБ - $\bar{t}_{сист}$.

Таблица 2.2

N вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ, 1/сутки	1	2	3	4	5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
μ, 1/час	0,1	0,1	0,15	0,2	0,25	0,15	0,15	0,15	0,2	0,25

Задача № 2.3

В АТБ в ангаре имеется n мест для технического обслуживания самолетов и перед ангаром m стоянок для ожидания обслуживания. Поток прибывающих на обслуживание самолетов - пуассоновский с параметром λ, время технического обслуживания - случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону с параметром μ. Для вариантов значений n, m, λ и μ, приведенных в табл. 2.3, определить:

вероятность простоя АТБ – P_0,

вероятность того, что прибывающему самолету будет отказано в обслуживании $P_{отк}$,

среднее число занятых мест обслуживания - $\bar{z}$,

среднее число самолетов, стоящих в очереди на обслуживании - $\bar{r}$,

среднее время ожидания в очереди - $\bar{t}_{ож}$,

общее время, затраченное на обслуживание - $\bar{t}_{сист}$.

Таблица 2.3

N вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
m	3	4	5	6	2	3	4	5	1	2	3	4
λ, 1/сутки	3,5	4,5	5,5	6,5	2,5	3,5	4,5	5,5	1,5	2,5	3,5	4,5
μ, 1/час	0,15	0,2	0,25	0,3	0,15	0,15	0,2	0,25	0,15	0,15	0,15	0,2

Приложение 1

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБ
+РАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**» **(МГТУ ГА)**

Кафедра технической эксплуатации летательных аппаратов и авиадвигателей

«КР проверена»
____
(зачтена, не зачтена)
____
(степень, звание, Ф.И.О.)
____
(подпись, дата)

Рецензент
____
(степень, звание, Ф.И.О.)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к контрольной работе по дисциплине
«Исследование операций и системный анализ»

____
(шифр КР)

Контрольную работу выполнил
студент ___________________
(Ф.И.О.)
____
(подпись) (дата)

Приложение 2

Методические рекомендации по выполнению контрольного задания № 1

Рассматривается марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывная цепь Маркова).

При рассмотрении случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем, удобно представлять переходы системы S из состояния в состояние как происходящие под влиянием некоторых потоков событий. Плотности вероятностей перехода получают смысл интенсивностей λ_{ij} соответствующих потоков событий (переход скачком из состояния S_i в состояние S_j).

Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем удобно изображать размеченным графом состояний. Пример размеченного графа состояний приведен на рис. 2.1.

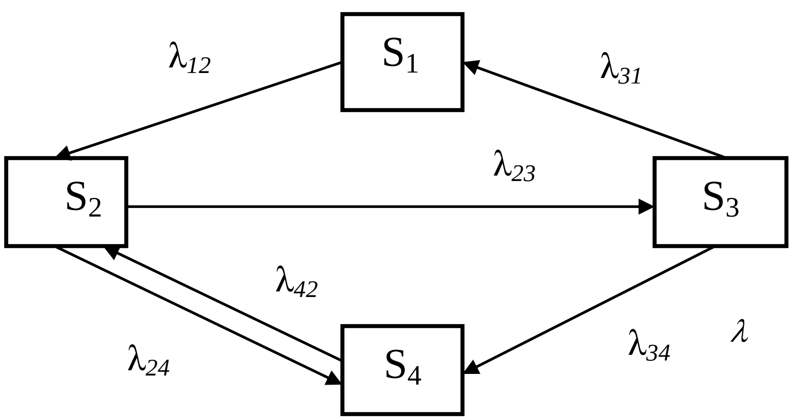

Рис. 2.1 Граф состояний системы

Пусть система имеет конечное число состояний $S_1, S_2, \ldots S_n$.

Вероятности этих состояний $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_n(t),$ (2.1)

где $P_i(t)$ – вероятность того, что система S в момент времени t находится в состоянии S_i.

Очевидно, что любого t

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1.$$

Для нахождения вероятностей (2.1) необходимо решить систему дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова), имеющих вид:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji}(t) P_j(t) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t) P_i(t); \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Величина $\lambda_{ij} P_i(t)$ называется потоком вероятности перехода из состояния S_i в состояние S_j.

Уравнения Колмогорова составляют по размеченному графу состояний системы, пользуясь следующим правилом:

- скорость изменения вероятности (производная) каждого состояния равна алгебраической сумме произведений интенсивности потока, переводящего систему по данному направлению, на вероятность того состояния, откуда осуществляется переход.
- мнемоническое правило:

– знак «-», если стрелка из данного состояния;

– знак «+», если стрелка в данное состояние.

Для размеченного графа состояний рис.2.1, уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda_{12} p_1(t) + \lambda_{31} p_3(t); \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda_{23} p_2(t) - \lambda_{24} p_2(t) + \lambda_{12} p_1(t) + \lambda_{42} p_4(t); \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = -\lambda_{31} p_3(t) - \lambda_{34} p_3(t) + \lambda_{23} p_2(t); \\ \dfrac{dp_4(t)}{dt} = -\lambda_{42} p_4(t) + \lambda_{24} p_4(t) + \lambda_{34} p_3(t). \end{cases}$$

Для решения системы уравнений Колмогорова необходимо задать начальное распределение вероятностей $P_0(0)$, $P_1(0)$. …, $P_n(0)$.

Как правило, за исключением особенно простых систем, решение возможно получить лишь численными методами.

Интегрирование этих уравнений при известном начальном состоянии системы даст искомые вероятности состояний как функции времени.

Возникает вопрос, как будет вести себя система при $t \to \infty$?

Существуют ли пределы функций $P_1(t)$, $P_2(t)$, … , $P_i(t)$, … , $P_n(t)$?

Если эти пределы существуют, то соответствующие вероятности состояний называются предельными вероятностями состояний (или «финальными», т.е. конечными).

Если предельные вероятности существуют, то в этом состоянии имеет место установившийся режим, для которого производные будут равны нулю.

В этом случае система дифференциальных уравнений Колмогорова превращается в систему алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} -\lambda_{12}P_1 + \lambda_{31}P_3 = 0 \\ -\lambda_{31}P_3 - \lambda_{34}P_3 + \lambda_{12}P_1 + \lambda_{42}P_4 = 0 \\ -\lambda_{31}P_3 - \lambda_{34}P_3 + \lambda_{23}P_2 = 0 \\ -\lambda_{42}P_4 + \lambda_{24}P_4 + \lambda_{34}P_3 = 0 \end{cases} \qquad (2.2)$$

Совместно с нормирующим условием $\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1$ эти уравнения дают возможность вычислить все предельные вероятности состояний P_1, P_2, …, P_i…., P_n

Финальные вероятности состояний определяются решением линейных алгебраических уравнений. Одно из уравнений системы 2.2 можно исключить (целесообразно исключить самое громоздкое) и решать систему известными методами алгебры.

В этом предельном режиме каждая финальная вероятность может быть истолкована как среднее относительное время пребывания системы в данном состоянии.

Приложение 3

Методические рекомендации по выполнению контрольного задания № 2

Системы массового обслуживания (СМО) классифицируются по характеру входящего потока $П_{вх}$, распределению времени обслуживания $t_{обсл}$, числу обслуживающих приборов $N_{пр}$ и емкость накопителя (длина очереди) $E_{нак}$.

В настоящем задании используются СМО с пуассоновским входящим потоком и экспоненциальным временем обслуживания, одноканальные ($N_{пр} = 1$) и многоканальные ($N_{пр} = n$) СМО, системы без ожидания ($E_{нак} = 0$), с ожиданием с ограниченной длиной очереди ($E_{нак} = m$) и без ограничения длины очереди ($E_{нак} = \infty$).

Показателями эффективности или показателями производительности СМО являются те характеристики, которые представляют интерес для пользователя и самой СМО.

Такими основными характеристиками являются:

- вероятность простоя СМО – $P_{\text{о}}$ (все каналы обслуживания свободны, заявок нет),

- вероятность отказа в обслуживании – $P_{\text{отк}}$ или доля из общего числа требований, которым будет отказано в обслуживании (все каналы обслуживания и все места в очереди для СМО с ограниченной очередью заняты). Заявка может получить отказ из-за занятости всех каналов и мест ожидания (если есть накопитель) или из-за превышения максимального времени ожидания;

- среднее число занятых мест обслуживания - $\bar{z}$ (число работающих мастеров, занятых телефонов и т.п. для многоканальной системы);

- длина очереди - $\bar{r}$ т.е. количество заявок, ожидающих обслуживания;

- время ожидания в очереди - $\bar{t}_{ож}$,

- общее время пребывания заявок в системе – $\bar{t}_{сист}$ (в очереди и под обслуживанием).

Важнейшим параметром системы является отношение входящего потока заявок λ к интенсивности обслуживания μ

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Другими словами, величина ρ представляет собой среднее число каналов, которое должно быть для обслуживания в единицу времени всех поступающих заявок.

Важно понимать, что все эти величины носят среднестатистический характер, то есть реализуются «в среднем» при продолжительном времени устойчивой работы системы массового обслуживания.

Расчетные формулы для определения основных характеристик СМО различных типов приведены в табл.3.1.

Таблица 3.1

Расчетные формулы основных характеристик СМО

№№ пп	Характеристики СМО	Типы СМО			
		M/M/1/m	M/M/1/∞ (ρ < 1)	M/M/n/m	M/M/n/∞
1	2	3	4	5	6
1	Вероятность простоя (СМО свобод-на) – $\mathbf{P_o}$	$\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$	1-ρ	$\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\frac{\frac{\rho}{n}-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1-\frac{\rho}{n}}\right]^{-1}$	$\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho^{n+1}}{(1-\rho)}\right]^{-1}$
2	Вероятность отказа – $\mathbf{P_{отк}}$	$\frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$	0	$\frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}P_0$	0
3	Относительная пропускная способность – **q**	1- $\frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$	1	1 - $\frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}P_0$	1
4	Абсолютная пропускная способность – **A**	$\lambda\, q$	λ	$\lambda\, q$	q
5	Среднее число занятых каналов - $\bar{Z}$	-	-	A/μ	$\bar{Z}$ = A/μ = λ/μ = ρ

Продолжение таблицы 3.1

1	2	3	4	5	6
6	Длина очереди - $\bar{r}$	$\dfrac{\rho^2\left[1-\rho^m(m+1-m\rho)\right]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}$	$\dfrac{\rho^2}{1-\rho}$	$\cdot\dfrac{\rho^{n+1}}{n!n}\cdot\dfrac{1-(\frac{\rho}{n})^m(m+1+m\frac{\rho}{n})}{(1-\frac{\rho}{n})^2}P_0$	$\dfrac{\rho^{n+1}}{n\,n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}P_0$
7	Среднее число заявок под обслуживанием - ϖ	$\dfrac{\rho-\rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}$	ρ	A/μ	$\bar{z}$ = A/μ = λ/μ = ρ
8	Общее число заявок в системе - $\bar{k}$	$\bar{r}+\varpi$	$\dfrac{\rho}{1-\rho}$	$\bar{r}+\bar{z}$	$\bar{r}+\bar{z}$
9	Среднее время ожидания - $\bar{t}_{ОЖ}$	$\dfrac{\bar{r}}{\lambda}$	$\dfrac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}$	$\dfrac{\bar{r}}{\lambda}$	$\dfrac{\bar{r}}{\lambda}$
10	Общее время пребывания в системе - $\bar{t}_{СИСТ}$	$\dfrac{\bar{r}}{\lambda}+\dfrac{q}{\mu}$	$\dfrac{1}{\mu}\dfrac{1}{(1-\rho)}$	$\dfrac{\bar{r}}{\lambda}+\dfrac{q}{\mu}$	$\dfrac{\bar{r}}{\lambda}+\dfrac{q}{\mu}$

Литература

Основная

1. Кабков В.П. Исследование операций и системный анализ. Учебное пособие. – М.: МГТУ ГА, 2005. – 95с.

Дополнительная

2. Волкова В.Н., Денисов А.А. Теория систем и системный анализ. Учебник для бакалавров. – М.: Москва, «Юрайт», 2012. – 678с.
3. Голубев И.С. и др. Исследование операций в ГА. - М.: Транспорт, 1980.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Сов. Радио, 1972.
5. Партыка Т.Л., Попов И.И. Математические методы. Учебник. – М.: Москва, «Издательство «Форум-Инфра», 2007. – 463с.