

Содержание

1. Цель задания.....	4
2. Содержание задания.....	4
3. Исходные данные.....	5
4. Методические указания.....	5
5. Оформление отчета.....	8
ПРИЛОЖЕНИЕ 1.....	9
ПРИЛОЖЕНИЕ 2.....	11
ПРИЛОЖЕНИЕ 3.....	12
ПРИЛОЖЕНИЕ 4.....	14
Литература.....	28

1. Цель задания

В результате выполнения настоящего задания студент должен:

- изучить основные методы анализа спектральных характеристик детерминированных сигналов, применяемых в телекоммуникационных системах;
- приобрести навыки по расчету и анализу спектральных характеристик и параметров детерминированных сигналов: амплитудно-частотных и фазочастотных спектров (ЧАС и ФЧС) и энергетических спектров;
- приобрести навыки выполнения инженерных расчетов по определению частотных характеристик сигналов цепей с помощью персональной ЭВМ.

2. Содержание задания

Для данных одиночного сигнала $x_0(t)$, периодического сигнала $x(t)$, периодического дискретного (дискретизированного) сигнала $x_\tau(t)$ и пачки импульсов $x_\Pi t$ рассчитать и построить их спектральные (частотные) характеристики. Для этого необходимо:

- 1) выписать индивидуальные исходные данные;
- 2) изобразить временные диаграммы одиночного $x_0(t)$ и периодического $x(t)$ сигналов, а также пачки импульсов $x_\Pi t$ и обозначить их параметры;
- 3) записать аналитические выражения для сигналов $x_0(t)$, $x(t)$, и $x_\Pi t$ с учетом их реальных параметров;
- 4) рассчитать и изобразить АЧС, ФЧС и энергетический спектр одиночного сигнала $x_0(t)$;
- 5) рассчитать и изобразить АЧС и ФЧС периодического сигнала $x(t)$ и пачки импульсов $x_\Pi t$;
- 6) по амплитудному критерию на заданном уровне определить активную ширину спектра $\Delta\Omega_{\alpha Smax}$ сигналов $x_0(t)$ и $x(t)$;
- 7) в соответствии с теоремой Котельникова произвести дискретизацию одиночного сигнала $x_0(t)$ с помощью заданной дискретизирующей последовательности $d_\Pi(t)$ и изобразить временную диаграмму полученного дискретного (дискретизированного) сигнала $x_\tau(t)$;
- 8) найти и построить АЧС дискретизированного сигнала и рассмотреть влияние на него изменений интервала дискретизации, формы и параметров дискрета.

При выполнении расчетов по указанным пунктам обязательно представить:

- теоретическое обоснование, расчетные формулы в общем виде;
- расчетные формулы в численном виде;
- таблицы расчетных значений;
- графики.

3. Исходные данные

1. Временные диаграммы воздействующих на цель одиночного $x_0(t)$ и периодического $x(t)$ сигналов, а также пачки импульсов $x_{\Pi}(t)$ приведены в приложении 1. Периодический сигнал и пачка импульсов представляют собой повторяющийся одиночный сигнал так, что

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(t - nT_{\Pi}), \quad x_{\Pi}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x_0(t - nT_{\Pi}).$$

Диаграммы дискретизирующих последовательностей

$$d_{\Pi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_0(t - nT)$$

приведены в приложении 2.

2. В приложении 3 приведена таблица, в которой указываются номера заданных сигналов в дискретизирующих последовательностях и все их параметры. Номер варианта каждому студенту определяет преподаватель.

4. Методические указания

При расчете спектральных характеристик заданных сигналов целесообразно начать с нахождения спектральной функции (преобразования Фурье) $S_{x_0}(j\omega)$ одиночного сигнала $x_0(t)$. Спектральные характеристики остальных заданных сигналов могут быть рассчитаны по $S_{x_0}(j\omega)$ на основании известных свойств и теорем преобразования Фурье.

Выписать из таблицы приложения 3 исходные данные, касающиеся сигналов $x_0(t)$, $x(t)$ и $x_{\Pi}(t)$.

При построении временных диаграмм для сигнала $x(t)$ можно ограничиться 1,5...2 периодами повторения. Для сигнала $x_{\Pi}(t)$ следует изобразить все N импульсов, входящих в пачку, показав пунктирной линией огибающую пачки $x_0(t)$.

При записи аналитических выражений для сигналов $x_0(t)$, $x(t)$ и $x_{\Pi}(t)$ необходимо правильно описать одиночный сигнал $x_0(t)$. Например, для сигнала № 9 приложения 1 можно записать:

$$x_0(t) = U \left(1 - \frac{2}{t_u} t \right) \text{rect} \frac{t - 0,5t_u}{t_k}. \quad (1)$$

Тогда

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(t - nT_{\Pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U \left[1 - \frac{2}{t_u} (t - nT_{\Pi}) \right] \text{rect} \frac{t - nT_{\Pi} - 0,5t_u}{t_u}, \quad (2)$$

$$x_{\Pi}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x_0(t - nT_{\Pi}) \quad (3)$$

или

$$x_{\Pi}(t) = x(t) \cdot x_{ог}(t), \quad (4)$$

где $x_{ог}(t) = \text{rect} \frac{t - 0,5NT_{\Pi}}{NT}$ – огибающая пачки импульсов. (5)

Основой для построения АЧС и ФЧС сигнала $x_0(t)$ служит **спектральная функция** $S_{x_0}(j\omega)$, которая может быть получена на основании аналитического описания сигнала (1). Для ее определения следует воспользоваться свойствами преобразования Фурье и спектральными функциями типовых сигналов.

После этого АЧС сигнала $x_0(t)$ находится как модуль

$$S_{x_0}(\omega) = S_{x_0}(\omega) = S_{x_0}(i\omega),$$

а ФЧС – как аргумент

$$\varphi_{x_0}(\omega) = \arg S_{x_0}(\omega)$$

спектральной функции $S_{x_0}(\omega) = S_{x_0}(i\omega)$.

Энергетический спектр сигнала $x_0(t)$ в области частот $0 \leq \omega < \infty$ определяется по формуле

$$W(\omega) = \frac{1}{\pi} S_{x_0}^2(\omega).$$

Спектральная энергетическая плотность в бесконечной области частот $-\infty < \omega < \infty$

$$W'(\omega) = \frac{1}{2} W(\omega) = \frac{1}{2\pi} S_{x_0}^2(\omega).$$

При построении графиков функций $S_{x_0}(\omega)$, $\varphi_{x_0}(\omega)$ и $W(\omega)$ достаточно рассчитать их значения в диапазоне частот $0 \leq \omega \leq \Delta\Omega_{asmax}$ с шагом по аргументу $\Delta\omega \leq 2\pi/T_{\Pi}$.

Расчеты следует производить на ПЭВМ. Программы вычислений и таблицы расчетных значений приводятся в отчете.

Спектр периодического сигнала $x(t)$ является линейчатым (дискретным по частоте), причем амплитуду C_{km} и фазу ψ_k его k -й составляющей можно определить по формулам:

$$C_{km} = \frac{2}{T_{\Pi}} \left| \dot{S}_{x_0}(k\Omega) \right| = \frac{2}{T_{\Pi}} S_{x_0}(k\Omega), \quad (6)$$

$$\psi_k = \text{Arg} \dot{S}_{x_0}(k\Omega) = \psi_{x_0}(k\Omega), \quad (7)$$

где $\Omega = 2\pi/T_{\Pi}$ – частота повторения сигнала $x(t)$,

$S_{x_0}(k\Omega) = S_{x_0}(\omega)|_{\omega=k\Omega}$ – спектральная функция одиночного сигнала $x_0(t)$ (сигнала на периоде).

Из формул (6) и (7) следует, что график АЧС периодического сигнала $x(t)$ может быть получен из АЧС одиночного сигнала (сигнала на периоде) $x_0(t)$ дискретизацией по оси абсцисс с шагом $\Omega = 2\pi/T_{\Pi}$ и изменением масштаба по оси ординат на величину $2/T_{\Pi}$. График ФЧС периодического

сигнала получается из графика функции $\Psi_{x_0}(\omega)$ дискретизацией по частоте с шагом $\Omega = 2\pi/T_{\Pi}$.

График АЧС сигнала $x_{\Pi}(t)$, состоящего из N импульсов $x_0(t)$, легко построить, если рассматривать его как прямоугольный импульс $x_{0Г}(t)$ длительностью NT_{Π} , дискретизированный последовательностью

$$d_{\Pi} t = x t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0 t - nT_{\Pi} ,$$

и пользоваться методикой, приведенной в настоящих методических указаниях для построения АЧС сигнала $x_{\tau} t$.

Активную ширину спектра $\Delta\Omega_{asm\max}$ сигналов $x_0(t)$ и $x t$ следует определить графически, проведя на графиках их АЧС прямую линию, соответствующую уровню αS_{max} , где α – заданный коэффициент; S_{max} – максимальное значение АЧС.

По теореме Котельникова (см. приложение 4) **период дискретизации** следует выбрать из соотношения

$$T \leq \frac{\pi}{\Delta\Omega_{\max}} . \quad (8)$$

Для дискретизирующих последовательностей №№ 2,3,4 и 5 (см. приложение 2) вид модуляции (АИМ1 или АИМ2) и параметры дискрета (t_u , α или β) выбираются произвольно, но так, чтобы выполнялись условия

$$t_u \ll T, \alpha \ll \frac{1}{T}, \beta \ll \frac{1}{T} . \quad (9)$$

При построении временной диаграммы сигнала $x_{\tau} t$ достаточно ограничиться 1,5...2 периодами повторения дискретизируемого сигнала.

Из теоретических сведений, касающихся спектров дискретизированных (дискретных) сигналов следует (см. приложение 4), что **АЧС дискретных сигналов** могут быть построены по формулам:

для δ – модуляции

$$S_{T\delta}(\omega) = \frac{1}{T} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}_{x_0}(\omega - k \frac{2\pi}{T}) \right| ; \quad (10)$$

для АИМ 1

$$S_{T1}(\omega) = \frac{1}{T} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}_{u_0}(k \frac{2\pi}{T}) \dot{S}_{x_0}(\omega - k \frac{2\pi}{T}) \right| ; \quad (11)$$

для АИМ 2

$$S_{T2}(\omega) = \frac{S_{u_0}(\omega)}{T} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}_{x_0}(\omega - k \frac{2\pi}{T}) \right| = S_{u_0}(\omega) S_{T\delta}(\omega) . \quad (12)$$

Как следует из формул (11),(12), для точного построения АЧС сигналов, дискретизированных последовательностями №№ 2,3,4 и 5 (см. приложение 2), необходимо кроме известной спектральной функции сигнала $S_{x_0}(j\omega)$ знать

также спектральную функцию дискрета $S_{u0}(j\omega)$. Для ее определения можно воспользоваться таблицей спектральных функций сигналов.

При построении графиков функций $S_{T\delta} \omega$, $S_{T1} \omega$ и $S_{T2} \omega$ достаточно рассчитать их значение в диапазоне частот $0 \leq \omega \leq 4\pi/T$ с шагом $\Delta\omega \leq 2\pi/T_n$. АЧС дискрета $S_{u0}(\omega)$ на том же графике следует показать пунктирной линией.

Расчеты также следует производить на ПЭВМ. Программы расчета и таблицы расчетных значений необходимо привести в отчете.

5. Оформление отчета

Отчет по домашнему заданию оформляется на одной стороне листов писчей бумаги формата А4, сброшюрованных затем в тетрадь.

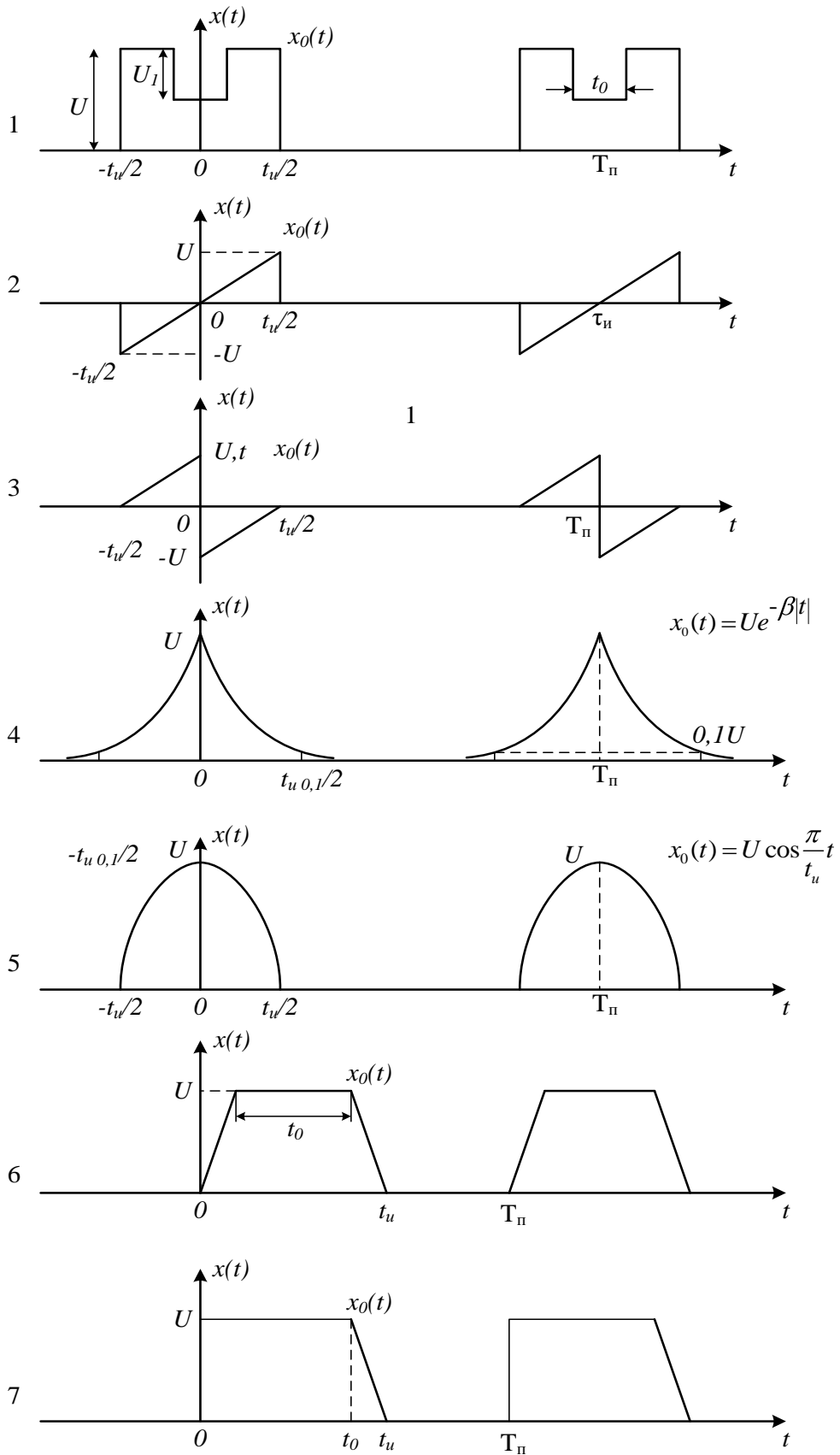
Изложение текста, проведение расчетов, оформление таблиц и приложений должны производиться в соответствии с требованиями ГОСТ 2.105 и ГОСТ 2.106.

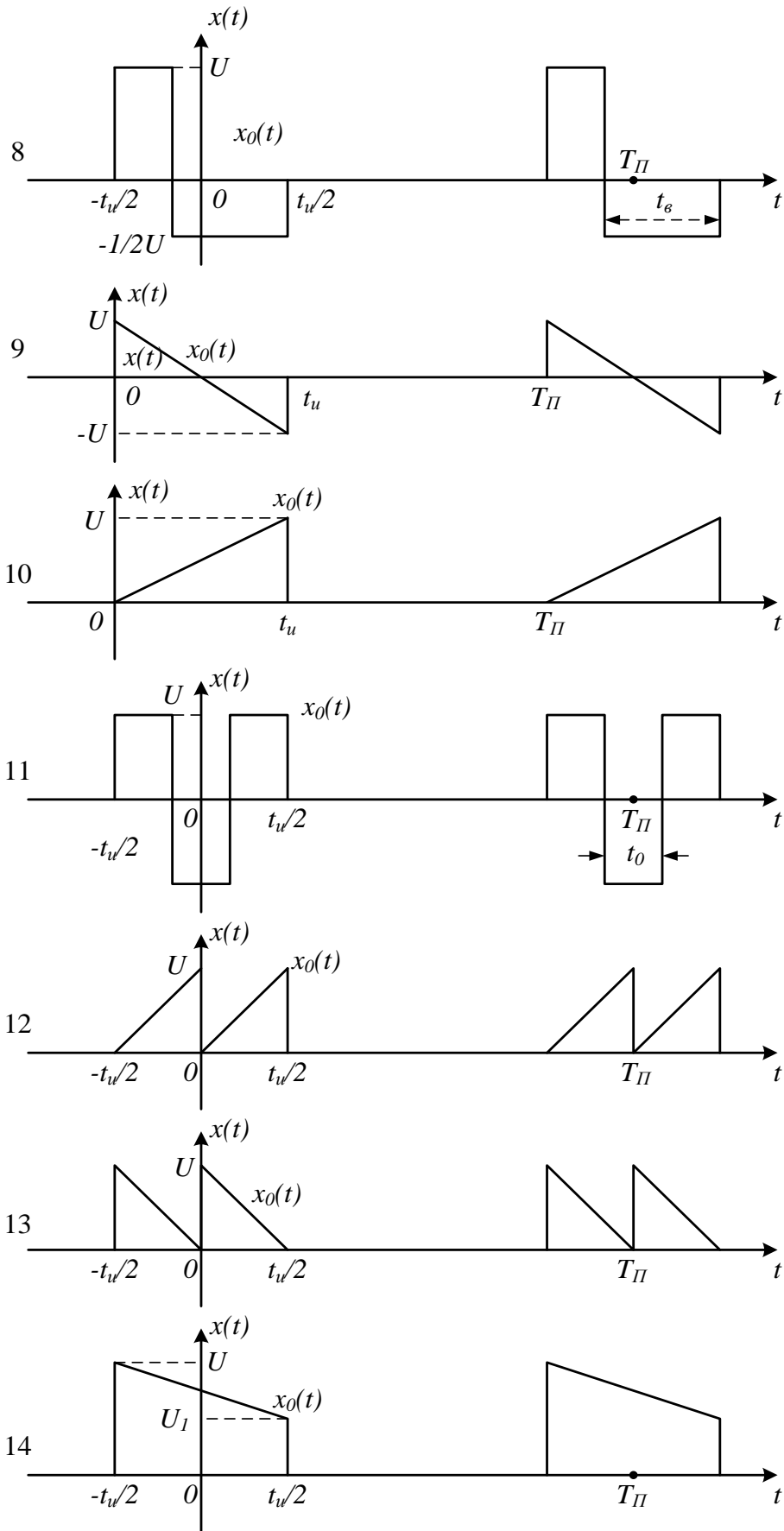
Иллюстрированный материал (графики, векторные диаграммы и т.д.) выполняется на миллиметровой бумаге твердыми цветными карандашами или шариковой ручкой тонкими линиями с указанием всех точек, полученных в результате расчетов.

Разрешается использование таблиц и графиков, полученных на печатающем устройстве, если они будут оформлены надлежащим образом (сделаны необходимые надписи и пояснения, обозначены оси координат, точки на графиках аккуратно соединены цветными линиями и т.п.).

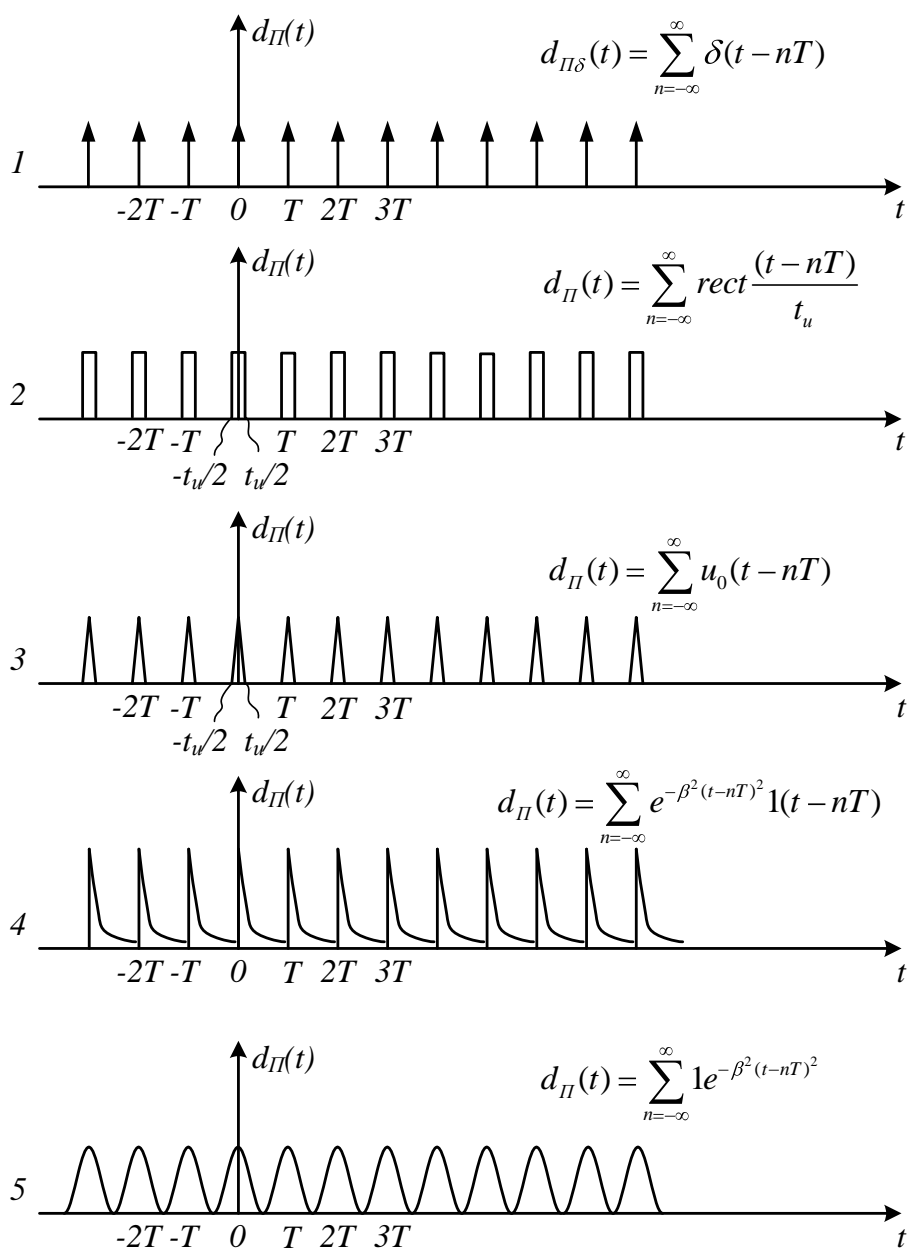
Полностью оформленный отчет представляется на проверку преподавателю. После проверки, правильно выполненные отчеты зачитываются, о чем сообщается студенту. Отчеты, в которых содержатся неверные результаты, незавершенные или небрежно выполненные материалы, возвращаются для устранения недостатков.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1
Сигналы





ПРИЛОЖЕНИЕ 2
Дискретизирующие последовательности



ПРИЛОЖЕНИЕ 3
Исходные данные

№ п.п.	Сигнал п. 2.1	Параметры сигнала								
		U, I В, А	U ₁ , I ₁ В, А	t _н , мкс	t ₀ , мкс	β, 1/с	T _п , мкс	α	N	d _п (t) п. 2.2
1	1	10	5	3	1		15	0,1	5	1
2	2	5		1,2			12	0,2	6	2
3	3	16		1			15	0,2	4	3
4	4	10				5·10 ³	15	0,1	5	4
5	5	12		0,8			16	0,1	4	5
6	6	14		1	0,5		12	0,2	5	1
7	7	8		0,6	0,3		7,2	0,1	6	2
8	8	10		2,1	1,4		21	0,1	5	3
9	9	5		0,7			8,4	0,2	4	4
10	10	8		1,4			14	0,2	6	5
11	11	15		2,1	0,7		21	0,2	4	1
12	12	10		2			20	0,1	5	2
13	13	6		1,6			16	0,2	6	3
14	14	10	6	1			15	0,2	5	4
15	1	15	10	2,1	0,7		20	0,1	4	5
16	2	4		0,8			16	0,1	6	1
17	3	20		2			14	0,2	5	2
18	4	15				8·10 ³	12	0,2	4	3
19	5	14		1,2			24	0,3	4	4
20	6	12		1,4	0,4		14	0,3	5	5
21	7	9		0,8	0,5		8	0,2	6	1
22	8	8		2,4	1,2		24	0,1	5	2
23	9	15		1,2			12	0,1	4	3
24	10	12		0,8			9,6	0,1	7	4
25	11	14		1,2	0,6		12	0,2	6	5
26	12	7		1,2			8,4	0,2	5	1
27	13	12		1,4			14	0,1	4	2
28	14	14	7	1,2			12	0,1	3	3
29	1	8	4	1,5	0,5		12	0,1	5	4
30	2	2		1,2			9,6	0,2	6	5
31	3	5		1			15	0,2	5	1
32	4	10				10 ⁶	12	0,2	3	2
33	5	7		1,4			14	0,2	4	3
34	6	8		1,5	0,5		18	0,1	5	4

№ п.п.	Сигнал п. 2.1	Параметры сигнала								
		U, I В, А	U ₁ , I ₁ В, А	t _н , мкс	t ₀ , мкс	β, 1/с	T _п , мкс	α	N	d _п (t) п. 2.2
35	7	10		1	0,5		15	0,1	4	5
36	8	6		3	2		30	0,1	6	1
37	9	12		1,1			11	0,1	5	2
38	10	9		1,5			15	0,1	6	3
39	11	13		1,8	0,6		18	0,2	4	4
40	12	4		2,4			24	0,2	5	5
41	13	8		2			20	0,2	5	1
42	14	12	8	0,8			9,6	0,2	5	2
43	1	5	3	2,4	0,6		24	0,3	4	3
44	2	10		1,6			16	0,3	4	4
45	3	4		1,5			18	0,3	4	5
46	4	6				8·10 ³	15	0,3	6	1
47	5	8		1,2			12	0,3	6	2
48	6	9		0,8	0,2		10	0,2	6	3
49	7	11		0,9	0,45		9	0,2	3	4
50	8	12		1,2	0,8		12	0,2	4	5
51	9	7		0,8			9,6	0,3	5	1
52	10	5		1,1			11	0,3	6	2
53	11	12		1,2	0,8		12	0,3	4	3
54	12	9		1,4			14	0,1	3	4
55	13	6		1,2			14,4	0,1	5	5
56	14	15	10	0,5			7	0,1	4	1
57	1	12	8	1,8	0,6		15	0,2	6	2
58	2	4,2		0,75			7,5	0,2	3	3
59	3	12		0,6			4,8	0,2	4	4
60	4	7				8·10 ³	16	0,1	5	5
61	5	12		1			14	0,1	4	1
62	6	8		1,4	0,4		16,8	0,2	6	2
63	7	12		1,4	0,7		14	0,2	4	3
64	8	14		1,8	1,2		18	0,3	5	4
65	9	6		2			24	0,3	5	5
66	10	5		3			30	0,1	5	1
67	11	10		0,9	0,6		9	0,1	4	2
68	12	7		0,8			9,6	0,1	5	3
69	13	15		1,4			14	0,1	6	4

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Спектральные характеристики непрерывных и дискретных сигналов

1. Расчет и построение спектров периодических и одиночных сигналов

Математически сигналы представляют собой функции одной или нескольких независимых переменных. Обычно одной из независимых переменных является время. Независимая переменная может быть как непрерывной, так и дискретной. Соответственно различают сигналы в непрерывном времени (их называют непрерывными или аналоговыми сигналами) и сигналы в дискретном времени, т.е. сигналы, которые определены в дискретные моменты времени. Их называют дискретными сигналами. В настоящем контрольном домашнем задании производится анализ и тех и других сигналов.

Математический аппарат анализа и синтеза, передачи и обработки сигналов основан на разложении сигналов по типовым или базисным функциям времени. Наибольшее распространение получили разложения сигналов по ортогональным базисным системам функций. Существует большое число ортогональных систем базисных функций. В качестве базисных функций могут использоваться тригонометрические функции (для периодических сигналов – тригонометрические функции кратных аргументов), полиномы Эрмита, Лежандра, Чебышева, функции Бесселя, Лагерра, Уолша и другие. Выражение сигнала бесконечным рядом ортогональных составляющих математически представляет собой обобщенный ряд Фурье

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(t), \quad (1)$$

где $\varphi_n(t)$ – ортогональная составляющая сигнала; C_n – коэффициент разложения.

Применение в качестве ортогональных составляющих тригонометрических функций представляет основу гармонического или спектрального анализа и синтеза сигналов. Периодический сигнал $x(t)$ с периодом T может быть представлен рядом Фурье по системе тригонометрических функций кратных аргументов

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\Omega t + B_k \sin k\Omega t, \quad (2)$$

или

$$x(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos(k\Omega t + \psi_k), \quad (3)$$

где $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, T – период сигнала $x(t)$; C_{km} – амплитуда; $\psi_k = \arg C_{km}$ – начальная фаза k -й составляющей;

$$\dot{C}_{km} = C_{km} e^{j\psi_k} = \frac{2}{T} \int x(t) e^{-jk\Omega t} dt = 2 \dot{S}_{x0} k\Omega ; \quad (4)$$

$$\dot{S}_{x0} k\Omega = \dot{S}_{x0} \omega \Big|_{\omega=k\Omega} = \int_T x(t) e^{-j\omega t} dt ,$$

при $\omega = k\Omega$, $S_{x0}(\omega)$ – спектральная функция, определяемая сигналом на периоде $x_0 t$.

Начальная фаза

$$\Psi_k = \arg S_{x0}(\omega) \Big|_{\omega=k\Omega} = \Psi_s(\omega) \Big|_{\omega=k\Omega} .$$

Совокупность амплитуд, начальных фаз и частот гармонических составляющих называют соответственно амплитудно-частотным спектром (АЧС) и фазочастотным спектром (ФЧС) сигнала (рис.1 и 2).

На рис. 1а и 2а показаны АЧС и ФЧС периодического сигнала с разложением сигнала в области положительных частот (действительный ряд Фурье(3)), а на рис.1б и 2б показаны АЧС и ФЧС с разложением в области частот $-\infty < \omega < \infty$ комплексный ряд Фурье 7 .

Спектры периодических сигналов являются дискретными. Спектры же непериодических (одиночных) сигналов являются сплошными. Они описываются спектральной функцией $S_{x0}(\infty)$, которая определяется по заданному сигналу $x_0(t)$ с помощью преобразования Фурье (прямого)

$$\dot{S}_{x0} \omega = \int_{-\infty}^{\infty} X_0(t) e^{-j\omega t} dt = F X_0(t) . \quad (5)$$

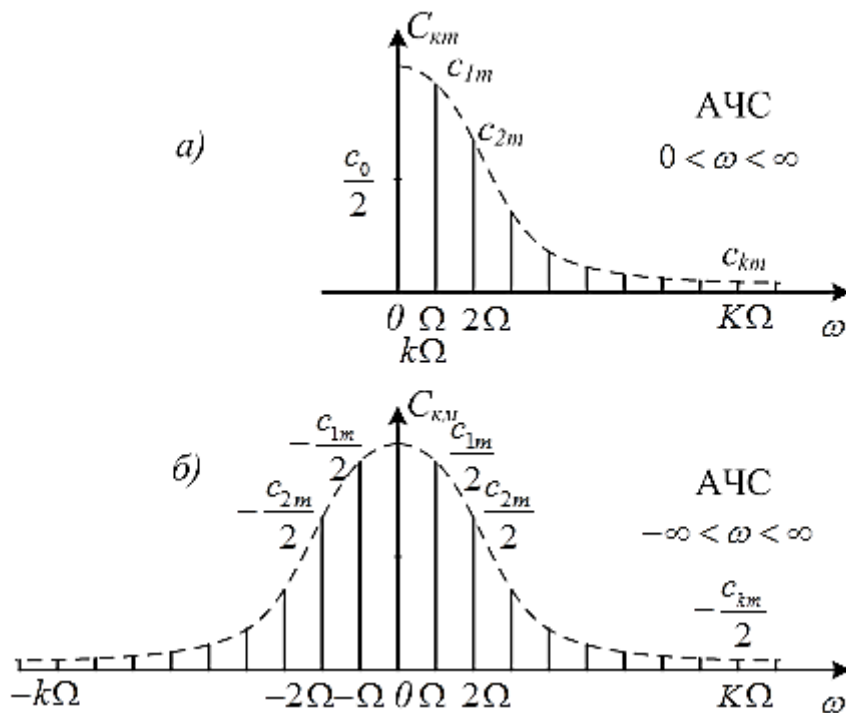


Рис. 1

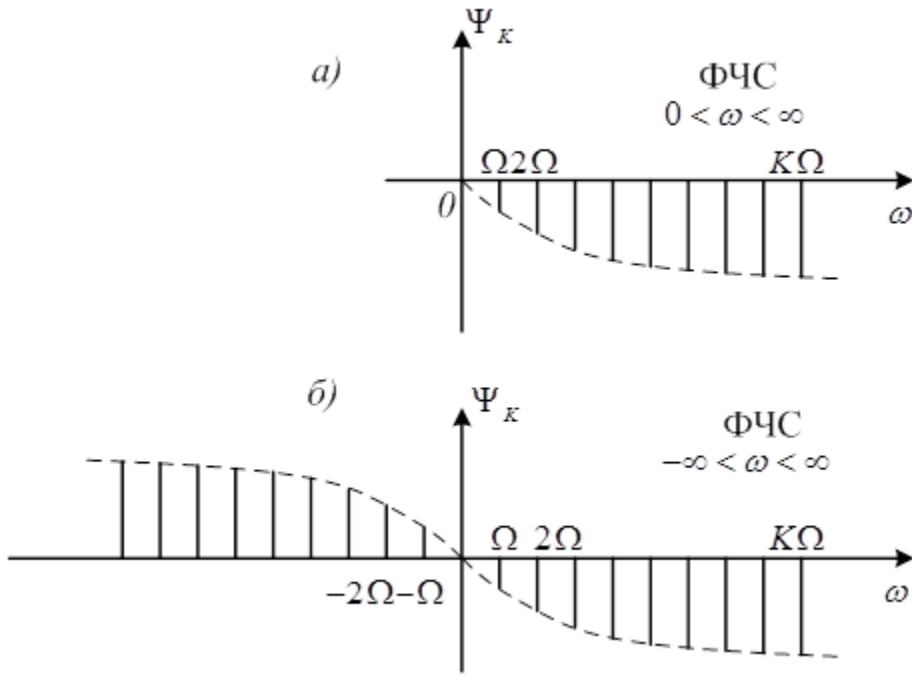


Рис. 2

Функция $S_{x_0} \omega$ называется преобразованием Фурье функции $x_0(t)$. Однозначно с ним связано обратное преобразование Фурье (интеграл Фурье), позволяющее по спектральной функции $S_{x_0}(\omega)$ найти сигнал:

$$x_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{x_0}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}\{\dot{S}_{x_0}(\omega)\}. \quad (6)$$

Функция $x_0 t$ называется обратным преобразованием Фурье функции $S_{x_0} \omega$.

Для одиночных сигналов интеграл Фурье (6) играет роль, подобную той, которую для периодических сигналов представляет тригонометрический ряд Фурье в действительной форме (3) или в комплексной:

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_{km} e^{jk\Omega t}. \quad (7)$$

С некоторыми допущениями обратное преобразование Фурье (6) можно рассматривать как сумму бесконечного числа гармонических составляющих с частотами ω и сколько угодно малыми амплитудами:

$$\delta C_f = S 2\pi f \delta f.$$

Поэтому для непериодических сигналов в качестве амплитудно-частотного спектра рассматривается не совокупность амплитуд составляющих, а закон распределения плотности амплитуд:

$$S 2\pi f = \frac{\delta C_f}{\delta f}.$$

Плотность амплитуд – это модуль спектральной функции. Она является конечной величиной. Зависимость аргумента спектральной функции от частоты $\psi_s \omega = \arg S(\omega)$ представляет собой фазочастотный спектр одиночного сигнала.

Если сигнал представляет собой то, то модель спектральной функции (плотность амплитуд) сигнала измеряется в амперах на герц, т.е.

$$[S_i(2\pi f)] = \frac{A}{\Gamma_{ц}}, \text{ а в случае напряжения } x(t) = u(t) [S_i(2\pi f)] = \frac{B}{\Gamma_{ц}}.$$

В настоящем задании рекомендуется синтезировать периодический сигнал по заданному одиночному сигналу. Поэтому прежде следует определить все частотные функции и характеристики непериодического (одиночного) сигнала, а затем перейти к анализу синтезированного периодического сигнала

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(t - nT). \quad (8)$$

В этом случае спектральной функцией периодического процесса на периоде будет спектральная функция, найденная в задании для одиночного сигнала $S_{x_0}(\omega)$.

Разложение периодического сигнала $x(t)$ на гармонические составляющие и определение его АЧС и ФЧС производится по формулам (3), (4) и (7).

Чтобы представить графически АЧС периодического сигнала, достаточно построить график зависимости модуля спектральной функции по сигналу на периоде $S_{x_0}(\omega)$, указать по оси частот точки $k\Omega$ и выбрать в них дискретные значения $S_{x_0}(k\Omega)$. Изменить масштаб по оси ординат в $2F$ раз.

В результате будут получены ординаты $S_{x_0}(k\Omega) \cdot 2F = C_{km}$, которые являются амплитудами составляющих. Модуль спектральной функции $S_{x_0}(\omega)$ по сигналу на периоде выступает в качестве огибающей АЧС. Компоненты ФЧС представляют собой дискретные значения аргумента спектральной функции $\psi_s \omega$ на частотах $k\Omega$. Функция $\psi_s \omega$ является огибающей ФЧС периодического сигнала (рис. 2).

Энергетический спектр периодического сигнала подобно его АЧС является дискретным и представляет собой совокупность энергий и частот гармонических составляющих. Энергия вычисляется за определенный временной интервал, чаще за период T сигнала $x(t)$. При разложении сигналов во всей области частот $-\infty < \omega < \infty$ полная энергия периодического сигнала за период T составляет

$$W_T \frac{T}{4} \sum_k C_{km}^2 = \gamma \frac{T}{4} [2FS(k\Omega)^2] = \gamma F \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{x_0}^2(k\Omega) \quad (9)$$

или при разложении сигнала в области частот $-\infty \leq \omega < \infty$

$$W_T = \gamma F S_{x_0}^2(0) + \gamma F \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{x_0}^2(k\Omega). \quad (10)$$

Коэффициент пропорциональности γ измеряется в омах, если процесс $x(t)=i(t)$ – ток, либо в сименсах, если $x(t)=u(t)$ – напряжение.

При построении энергетических спектров можно принять $\gamma = 1$ Ом или $\gamma = 1$ См в зависимости от того, каким физическим явлением представлен сигнал $x(t)$, либо рассматривать нормированную величину

$$\frac{W_T}{\gamma} = F \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^2 k\Omega = \gamma F \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^2 k\Omega, \text{ при } \gamma=1 \text{ Ом (1 См)}, \quad (11)$$

которая представляет собой разложение не энергии, а величины, численно равной энергии, отнесенной к нагрузке в 1 Ом (1 См).

Для непериодических сигналов энергетической характеристикой является спектральная плотность энергии, выражаемая функцией

$$W 2\pi f = S^2 2\pi f .$$

Спектральная плотность энергии представляет собой зависимость от частоты величины, численно равной энергии сигнала, заключенной в полосе частот в 1 Гц и отнесенной к нагрузке 1 Ом (1 См). Функция $W 2\pi f$ и её графические представления рассматриваются как энергетические спектры непериодических сигналов.

Полная же энергия непериодического сигнала согласно теореме Релея (равенства Персеваля) определяется путем интегрирования функции (сигнала) $x^2(t)$ во времени или интегрирования функции $S^2(2\pi f)$ по частоте

$$W = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \gamma^2 \int_0^{\infty} S_x^2 2\pi f df . \quad (12)$$

Для графического представления энергетического спектра непериодического сигнала достаточно возвести в квадрат его АЧС, либо найти (аналитически) квадрат модуля спектральной функции $S^2(2\pi f)$ и построить его график.

Для построения энергетических спектров периодических сигналов можно воспользоваться разложениями (11) и (9). Согласно этим результатам, прежде следует построить график квадрата модуля спектральной функции, найденной по сигналу на периоде $S_{x_0}^2(\omega)$. Затем по оси частот указать точки, кратные частоте повторения $k\Omega$, и выбрать в них дискретные значения $S_{x_0}^2(k\Omega)$. Умножить найденные значения на F .

2. Расчет и построение спектров дискретных сигналов

Дискретными сигналами называют такие процессы, которые определены лишь для дискретных значений или выборок $x(t_n)$, заданных для определенных моментов времени t_n (рис.3а). Нельзя считать, что при других значениях t , кроме t_n , дискретная функция принимает нулевые значения. В этих точках она просто не определена.

Такая последовательность дискретных значений некоторой физической величины $x(t_n)$, или просто последовательность чисел может рассматриваться

не как функция дискретных значений времени t , а как функция номера отсчета n (рис. 3б). Такая дискретная функция (множество $\{x(n)\}=\{xn\}$) определена только для целых n . Для краткости иногда все множество (последовательность) обозначают просто $x(t_n)$ или $x(n)$ есть выборка – отсчет для t_n или n -й член последовательности.

Дискретные сигналы могут быть порождены дискретными во времени процессами, и тогда они являются отображением дискретных сообщений. Часто дискретные сигналы получаются из аналоговых (непрерывных – континуальных) сигналов путем дискретизации (квантования по времени). Аналоговые сигналы являются носителем непрерывных сообщений. В свою очередь дискретные сигналы могут быть преобразованы в аналоговые.

Примеры дискретных сигналов, полученных путем дискретизации аналоговых сигналов $x(t)$, показаны на рис. 4-6. В данных примерах время квантуется равномерно; $t=nT$, где T – интервал (период или шаг) дискретизации (квантования по времени). Точки t_n , в которых определена дискретная функция, могут распределяться и неравномерно. В первом примере (рис. 4) в качестве дискретизирующей функции $d_n(t)$ используется непериодическая последовательность – функций $d_{n\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, а в других двух – периодическая последовательность прямоугольных импульсов

$$d_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_0(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{rect}(t - nT)}{t_u}. \quad (13)$$

Последовательность $d_n(t)$ может быть составлена из импульсов любой формы. Как правило, длительность импульсов-дискретов значительно меньше интервала дискретизации.

Математически дискретизированный (дискретный) сигнал $x_T(t)$ может быть представлен в виде произведения аналогового сигнала $x(t)$ и дискретизирующей последовательности $d_n t$

$$x_T(t) = x(t)d_n(t).$$

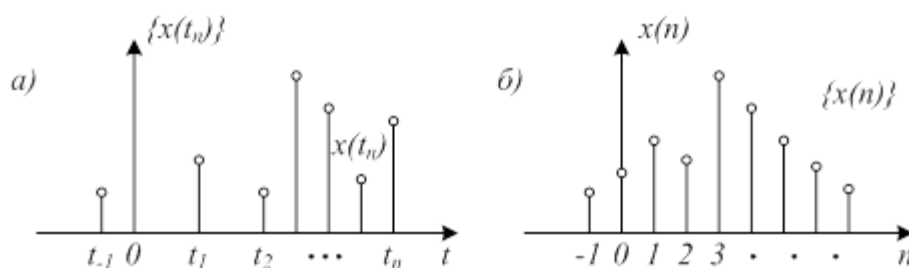


Рис. 3

В случае $d_{n\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ дискретизированный сигнал (см. свойства δ -функции) (рис. 4в)

$$x_{T\delta}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT). \quad (14)$$

Интегрируя выражение (14), получим множество (последовательность) дискретных отчетов (выборок) аналогового сигнала для $t=nT$ (рис. 4г):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) = \{x(nT)\}. \quad (15)$$

Это неограниченная последовательность. Чаще рассматриваются конечные последовательности (множества):

$$\{x(nT)\} = \sum_{n=N_1}^{N_2} x(nT). \quad (16)$$

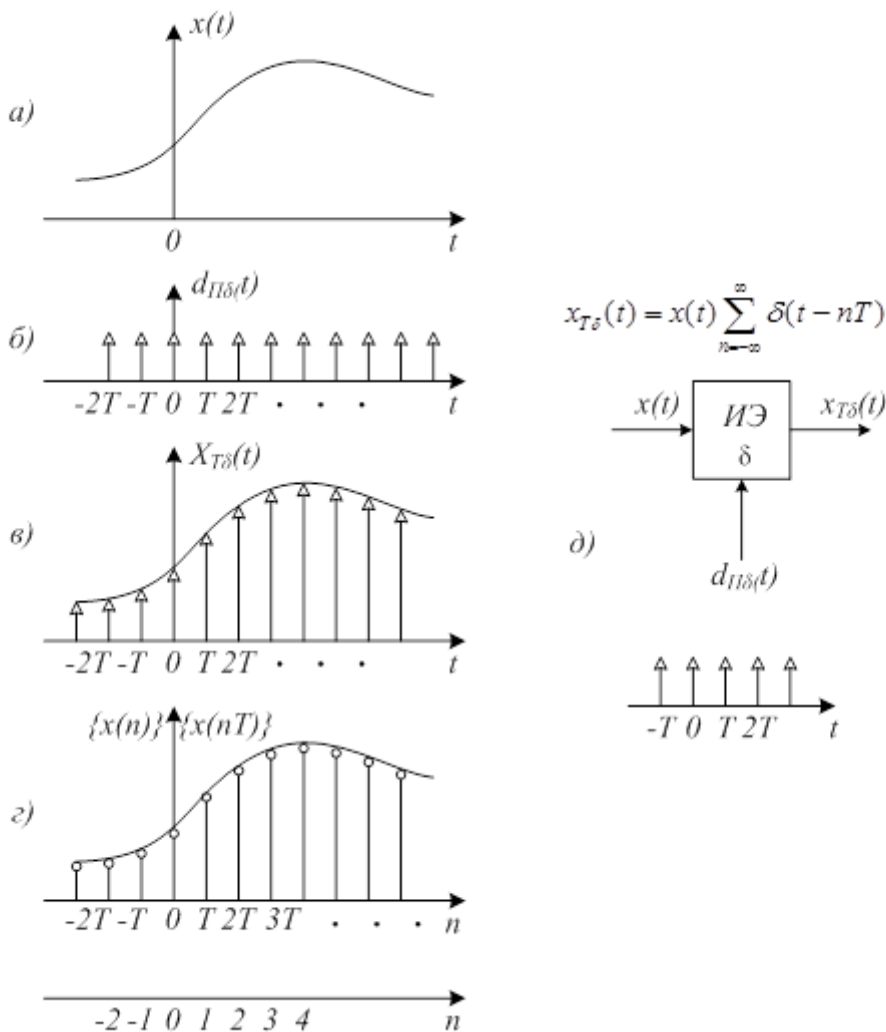


Рис. 4

Наряду с выражением (16), используется и такая запись конечных последовательностей:

$$x(nT), N1 \leq n \leq N2.$$

Последовательность вида (15), (16), т.е. функции, значения которых определены только для дискретных равноотстоящих друг от друга значений независимой переменной, называют также решетчатыми функциями. Например, пусть имеется непрерывная функция $x(t) = Ae^{at}$. Тогда последовательность или решетчатая функция для сигнала $x(t)$ будет представлена так:

$$\{x(nT)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Ae^{anT} \text{ или } x(nT) = Ae^{anT}, -\infty < n < \infty.$$

Функциональная схема дискретизатора, выполняющего операцию (14), показана по рис. 4д. Основу такого дискретизатора составляет идеальный импульсный элемент (ИЭ).

Процесс дискретизации непрерывного сигнала $x(t)$ последовательностью импульсов конечной длительности (например, вида (13) может быть выполнен с помощью амплитудно-импульсной модуляции первого рода (АИМ1, рис. 5) или второго рода (АИМ2, рис. 6).

АИМ1 называют также АИМ без запоминания, а АИМ2 – АИМ с запоминанием.

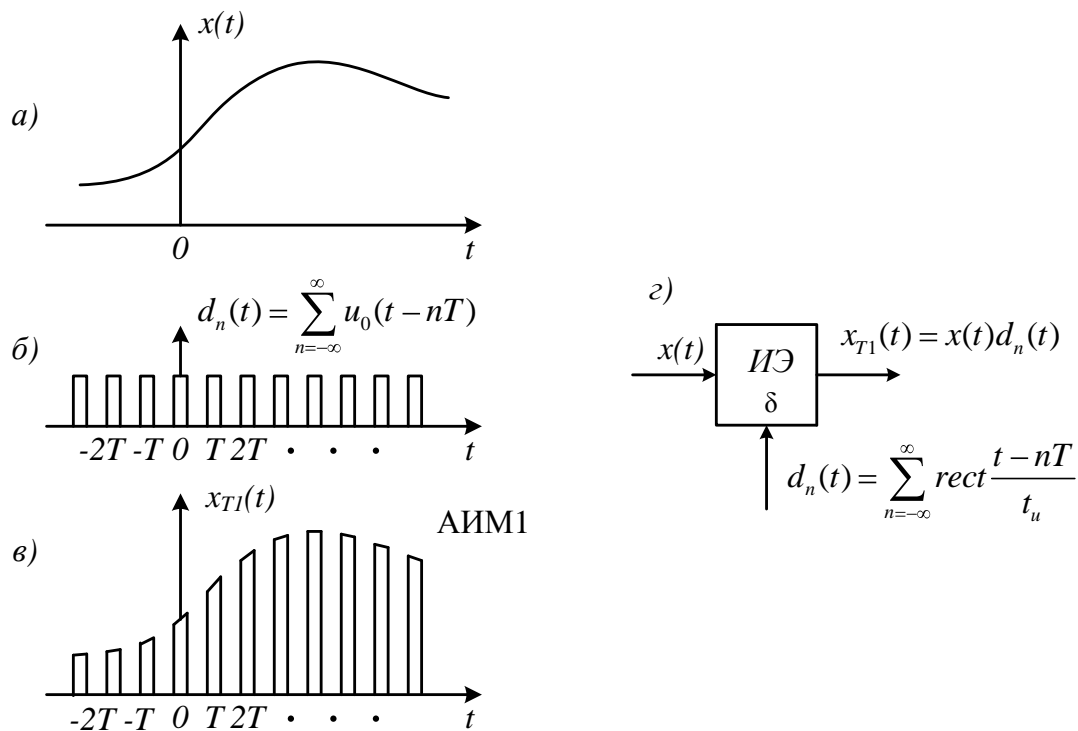


Рис. 5

Функциональная схема дискретизатора с АИМ1, представляющего собой импульсный модулятор, показана на рис. 5г. Дискретизированный (дискретный) с помощью АИМ2 сигнал (рис. 6в) имеет следующий вид:

$$x_{T1}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_0(t - nT) . \quad (17)$$

В этом процессе дискретизируемая непрерывная функция $x(t)$ выступает в качестве огибающей импульсной последовательности $d_n(t)$ (13).

Дискретизированный с помощью АИМ2 сигнал (рис. 6в) может быть записан так:

$$x_{T2}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) u_0(t - nT) . \quad (18)$$

Отличительной особенностью такого процесса дискретизация является то, что привязка дискретизирующей последовательности $d_n(t)$ к непрерывной функции $x(t)$ происходит только в точках отсчета $t=nT$.

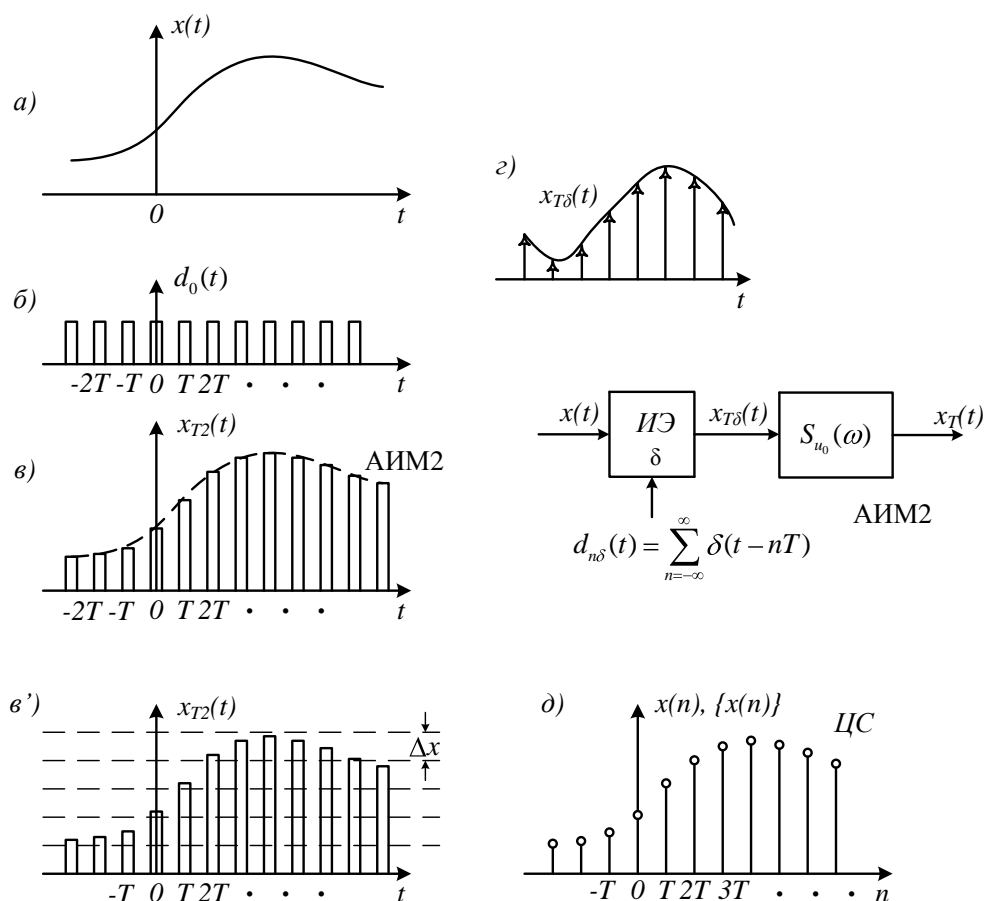


Рис. 6

Применительно к $d_n(t)$ из импульсов прямоугольной формы (13)

$$x_{T2}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\text{rect}(t - nT)}{t_u} \quad (19)$$

высота каждого n -го импульса, определяемая соответствующей выборкой $x(nT)$, остается неизменной в течение длительности импульса (дискрета) t_u .

Функциональная схема дискретизатора с АИМ2 представлена на рис. 6.

С уменьшением длительности дискретизирующих импульсов и, в частности при $t_0 \rightarrow 0$, процесс дискретизации как на основе выражения (17), так и выражения (18) приводит к решетчатой функции непрерывного сигнала $x(t)$.

Если в дискретном по времени сигнале произвести квантование по уровню (рис. 6в) и представить отсчеты функции (выборки) в цифровой форме (каждому уровню квантования соответствует определенный разряд в виде числа), то будет получена последовательность чисел (числовая последовательность) $x(n)=x_n$ (рис. 6д), которую называют цифровым сигналом.

Преобразование Фурье (спектральная функция) сигнала (14), дискретизированного последовательностью δ -функций, $S_{T\delta}(\omega) = F\{x_{T\delta}(t)\}$ приводится к следующему виду:

$$\dot{S}_{T\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}_K\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right). \quad (20)$$

Как видно, спектральная функция (спектр) дискретизированного последовательностью функций непрерывного сигнала $x(t)$ является непрерывной и периодической функцией частоты ω с периодом $\frac{2\pi}{T} = \Omega$. На рис.7 представлены графически модули спектральных функций исходного непрерывного сигнала $S_x(\omega)$ (а) и дискретизированного $S_{T\delta}(\omega)$ (б). Компонентами спектральной функции дискретного сигнала $S_{T\delta}(\omega)$ является повторяющаяся с периодом $\frac{2\pi}{T}$ спектральная функция исходного непрерывного сигнала $S_k(\omega)$, будучи умноженной на $1/T$.

Из рассмотрения спектра дискретного сигнала легко найти условия, определяющие выбор интервала дискретизации по времени T . Если предположить, что спектр исходного непрерывного сигнала $x(t)$ ограничен частотой ω_B , то при

$$\frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_B \quad \text{или} \quad T \leq \frac{\pi}{\omega_B} \quad (21)$$

компоненты (лепестки) спектральной функции дискретного сигнала не перекрываются, а следовательно, любой компонент функции $S_{T\delta}(\omega)$ может быть выделен с помощью П-образного фильтра и тем самым по дискретному сигналу восстановлен исходный непрерывный сигнал. Эти положения составляют содержание известной теоремы Котельникова (просто теоремы отсчетов), играющей фундаментальную роль в теории управления и связи. Она широко используется во многих других теоретических исследованиях.

В реальных условиях в качестве дискретизирующих последовательностей могут использоваться последовательности различных по форме импульсов. Это могут быть последовательности импульсов прямоугольной экспоненциальной, косинусоидальной и любой иной формы.

Преобразования Фурье (спектральная функция) сигнала x_{T1} выражение (17), дискретизированного с помощью АИМ1, имеет вид

$$\dot{S}_{T1} \omega = F \left\{ x t \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_0 t - nT \right\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}_{u_0} \left(k \frac{2\pi}{T} \right) \dot{S}_{x\delta} \left(\omega - k \frac{2\pi}{T} \right), \quad (22)$$

где $S_k \omega = F\{x t\}$ – спектральная функция непрерывного сигнала $x(t)$; $S_1 \omega = F\{u_0 t\}$ – спектральная функция импульса (дискрета).

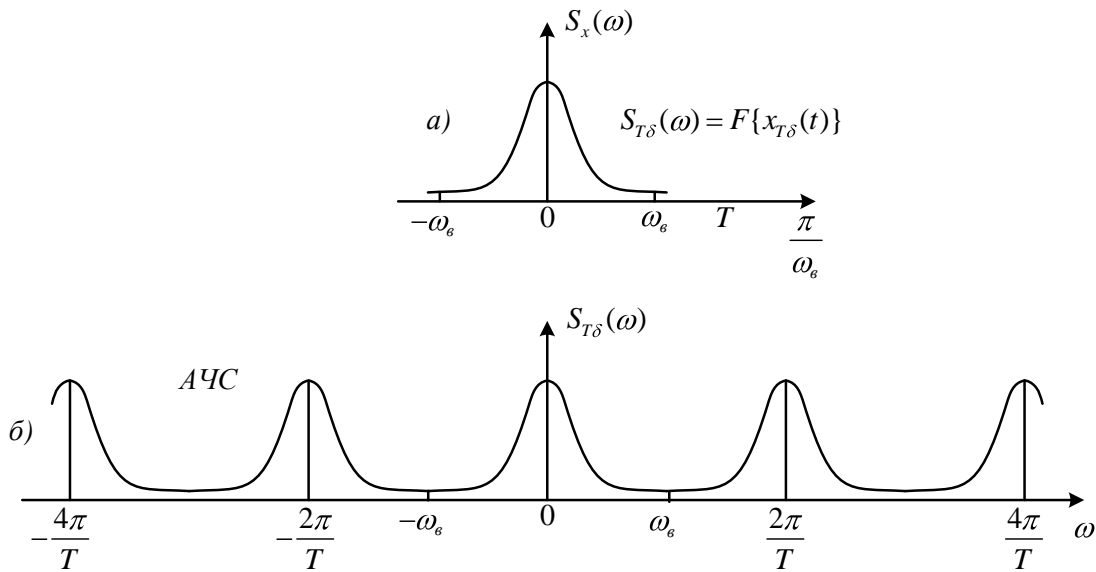


Рис. 7

Модули спектральных функций $S_x(\omega)$ и $S_{T1}(\omega)$ выражение (22) представлены на рис. 8.

Спектральная функция дискретизированного посредством АИМ1 сигнала (дискретизирующие импульсы $u_0(t - nT)$ конечной длительности) – функция непрерывная относительно ω , но не периодическая. Компоненты спектральной функции (22) изменяются по закону дискретных отсчетов (выборок) спектральной функции $S_{u_0}(\omega)$ в точках $k \frac{2\pi}{T}$, т.е. выборками

$S_{u_0} \left(k \frac{2\pi}{T} \right)$. Каждый компонент выражения (22) с множителем $\frac{1}{T} S_{u_0} \left(k \frac{2\pi}{T} \right)$ повторяет спектральную функцию исходного непрерывного сигнала $x(t)$, т.е.

$$\frac{1}{T} \dot{S}_{u_0} \left(k \frac{2\pi}{T} \right) \dot{S}_x \left(\omega - k \frac{2\pi}{T} \right).$$

Такие компоненты функции (22) чередуются по частоте с интервалом $\frac{2\pi}{T}$.

Преобразование Фурье (спектральная функция) сигнала $x_{T2}(t)$ (22), дискретизированного посредством АИМ2, запишется так:

$$S_{T2}(\omega) = F \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) u_0(t - nT) \right\} = \frac{\dot{S}_{u0}(\omega)}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}_x \left(\omega - k \frac{2\pi}{T} \right). \quad (23)$$

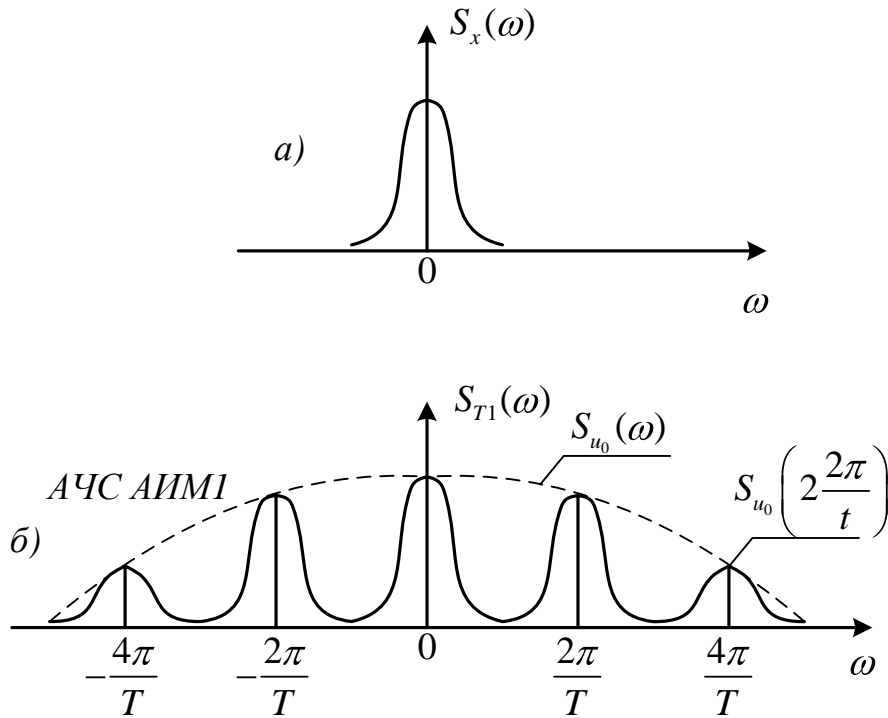


Рис. 8

С учетом выражения (20) этот результат можно представить в виде

$$\dot{S}_{T2}(\omega) = \dot{S}_{u0}(\omega) \dot{S}_{T\delta}(\omega).$$

Здесь $\dot{S}_{T\delta}(\omega)$ – функция периодическая, а $\dot{S}_{u0}(\omega)$ – непериодическая. Следовательно, спектр дискретизированного посредством АИМ2 сигнала, как и в случае АИМ1, непериодический. Спектральная функция дискрета выражение (23) играет роль огибающей. Функция $\dot{S}_{T2}(\omega)$ – непрерывная относительно ω . Графики модулей $S_x(\omega)$ и S_{T2} (спектры) приведены на рис. 9.

Выбор интервала дискретизации T непрерывного сигнала $x(t)$ при АИМ1 и АИМ2 производится, как и в случае дискретизации последовательностью – функций, из условия (21) (согласно теореме отсчетов). При неограниченных спектрах дискретизируемых непрерывных сигналов $S_x(\omega)$ (ограниченному по времени сигналу соответствует неограниченный спектр) при любом конечном T

отдельные компоненты спектральных функций $S_t \omega$ перекрываются. Очевидно, что с уменьшением интервала T степень перекрытия также уменьшается, а значит, будут уменьшаться искажения сигнала при восстановлении. Эти искажения называют ошибками дискретизации. При неограниченных спектрах $S_x \omega$ выбор интервала дискретизации T производится обычно по различным критериям, например, из условия перекрытия компонентов функции $S_t \omega$ на определенном уровне ($0,1S_{x \max}$; $0,2S_{x \max}$ и т.д.) заданного уровня ошибок дискретизации и т.д.

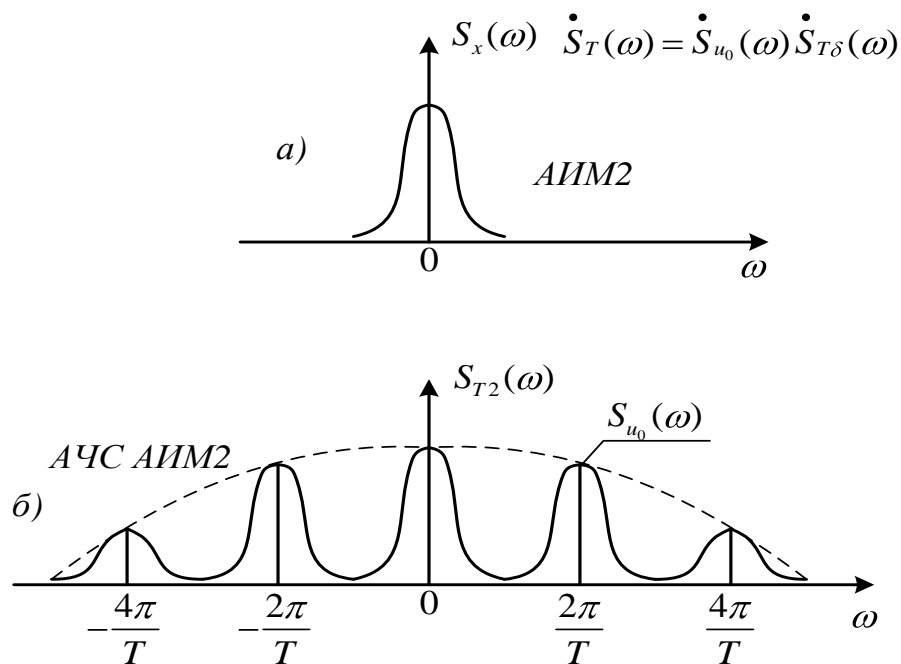


Рис. 9

С уменьшением длительности t_u дискрета u_0 происходит расширение его спектра и неравномерность в распределении компонентов спектральных функций (22) и (23) уменьшается. Например, при $\frac{2\pi}{t_0} \gg \omega$, практически можно считать $S_{u_0}(\omega)$ постоянной величиной для компонентов функций (22), (23), примыкающих к началу координат ($\omega = 0$).

Из выражения (23) легко представить один из способов синтеза сигнала $x_{T2}(t)$ (18), дискретизированного посредством АИМ2. Он заключается в том, что прежде производится синтезирование дискретного сигнала $x_\delta(t)$, а оно выполняется с помощью идеального импульсного элемента (ИЭ), и затем полученный сигнал $x_\delta(t)$ следует пропустить через линейный фильтр с комплексной частотной характеристикой $K_\Phi(j\omega) = S_{u_0}(\omega)$. Функциональная схема такого дискретизатора и приведена на рис. 6г.

При решении различных задач, связанных с воздействием на дискретные системы сигналов, дискретизированных посредством АИМ2, часто линейный фильтр с характеристикой $S_{u_0}(\omega)$ включают в систему.

Образуется так называемая приведенная система с комплексной частотной характеристикой $K(j\omega)S_{u_0}(\omega)$, где $K(j\omega)$ – характеристика заданной системы.

Входным воздействием такой приведенной системы становится в место сигнала АИМ2 процесс $x_\delta(t)$. А если спектр дискрета $u_0(t)$ достаточно широкий в сравнении с полосой пропускания заданной системы $[K(j\omega)]$, то функцию $S_{u_0}(\omega)$ вообще можно исключить из рассмотрения.

Приведенные из теории дискретных функций (сигналов) сведения помогут в выполнении той части настоящего домашнего задания, которая посвящена расчетам и построению спектров дискретных сигналов, а также ограниченных периодических последовательностей $x_0(t)$, указанных в индивидуальных заданиях, т.е. пачек импульсов.

При анализе спектральных характеристик пачек импульсов можно поступить так. Считать пачку импульсов дискретизированным (дискретным) сигналом: импульсы в пачке – дискретизирующими (дискретами), а дискретизируемой непрерывной функцией $x_{or}(t)$ – огибающую пачки. В данном случае огибающей будет являться прямоугольная функция длительностью $T_c = NT_n$:

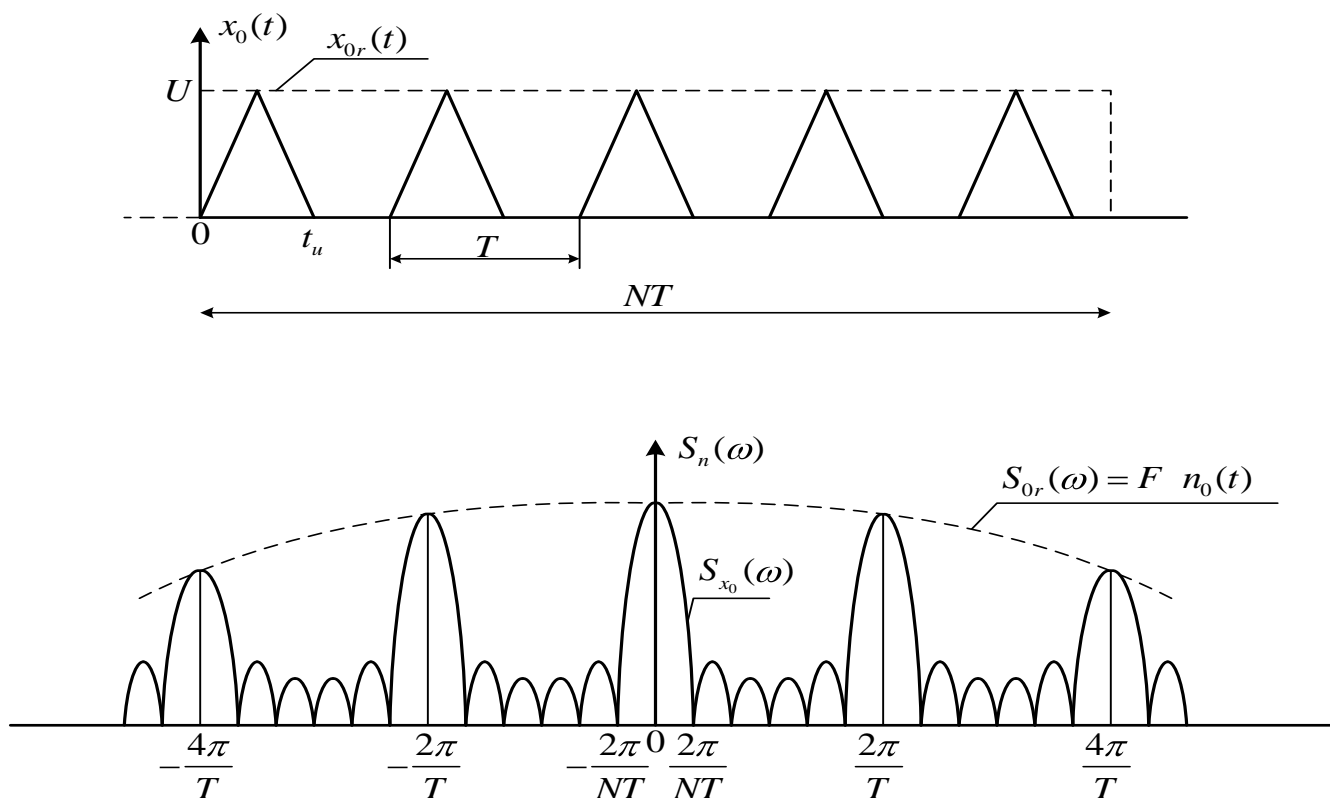


Рис. 10

$$x_{\text{ор}}(t) = \text{rect} \frac{t - 0.5NT_{\Pi}}{NT_{\Pi}},$$

где T_{Π} – период повторения импульсов $x_0(t)$, а N – число импульсов в пачке. Так будет образован дискретный сигнал (рис. 10):

$$x_T(t) = \text{rect} \frac{t - 0.5NT_{\Pi}}{NT_{\Pi}} \sum_{n=0}^{N-1} x_0(t - nT_{\Pi}) = \sum_{n=0}^{N-1} \text{rect} \frac{t - 0.5NT_{\Pi}}{NT_{\Pi}} x_0(t - nT_{\Pi}). \quad (24)$$

Найти и рассмотреть все характеристики такой пачки и проанализировать их связь с параметрами пачки: числом и формой импульсов в пачке, длительностью пачки и т.д.

Литература

1. Богданович П.Ф. Радиотехнические цепи и сигналы. Часть II. Детерминированные сигналы и их преобразование линейными цепями: конспект лекций. - Ставрополь, 1993.
2. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М: Радио и связь, 1986.
3. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М: Высшая школа, 1988.