

Содержание

Введение	4
1. Основы теории оптического излучения	8
1.1 Электромагнитное излучение.....	9
1.2 Когерентность.....	11
1.3 Фотонная структура поля.....	13
2. Лучевая и электромагнитная теории распространения света	18
2.1 Моды.....	18
2.2 Дифракция.....	23
2.3 Гауссовы пучки.....	26
2.4 Оптико-геометрическое приближение.....	28
3. Оптические линзовые волноводы и резонаторы	31
3.1 Линзовые волноводы.....	31
3.2 Лазерные резонаторы.....	34
4. Физические основы взаимодействия квантовых систем с электромагнитным полем	45
4.1 Уравнение Шредингера.....	46
4.2 Энергетический спектр состояний.....	47
4.3 Однофотонные квантовые переходы.....	50
4.4. Населенность энергетических уровней.....	52
5. Лазерные усилители	57
5.1 Усилители бегущей волны.....	57
5.2 Резонаторные усилители.....	61
6. Лазерные генераторы	65
6.1 Условия самовозбуждения и существования стационарного режима.....	65
6.2 Спектр излучения.....	68
6.3 Переходные процессы в генераторе.....	71
6.4 Генераторы с нестационарными параметрами.....	74
Литература.....	80

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая и оптическая электроника – это область науки и техники, предметом которой является исследование и применение квантовых явлений индуцированного, когерентного взаимодействия излучения с веществом для генерации, усиления и спектрального преобразования когерентного электромагнитного излучения оптического диапазона длин волн с последующим их широким использованием.

В становлении квантовой электроники выдающуюся роль сыграли советские ученые во главе с академиками, лауреатами Ленинской и Нобелевской премий, Героями Социалистического Труда Н.Г. Басовым и А.М. Прохоровым, разработавшими основные идеи и принципы усиления и генерирования электромагнитных колебаний в квантовых приборах.

Конструкторами квантовых приборов успешно решены сложнейшие инженерные задачи, связанные с освоением оптического диапазона электромагнитных волн: создание устройств для генерации, усиления, спектрального преобразования оптического излучения, устройств для модуляции, передачи на большие расстояния и детектирования оптических сигналов.

Широкое применение квантовых приборов в различных областях науки и техники обусловлено получением больших мощностей и узкого спектра излучения генераторов, возможностью остронаправленной передачи электромагнитной энергии, концентрации ее в малых объемах, эффективным использованием в системах передачи, приема, хранения и обработки большого объема информации.

Возникновение и развитие квантовой и оптической электроники стало возможным благодаря глубокому пониманию явлений, протекающих при взаимодействии электромагнитного излучения с рабочей средой квантового прибора.

Взаимодействие электромагнитного поля с рабочей средой может быть рассмотрено с помощью классической, полуклассической и квантовой теорий. Ту или иную математическую модель описания работы квантовых приборов выбирают в зависимости от требуемой степени точности расчета эффектов, возникающих при взаимодействии излучения с веществом.

В классической теории описание электромагнитного поля основывается на уравнениях Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}; \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{j} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}; \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}; \\ \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

где \mathbf{D} и \mathbf{E} – векторы индукции и напряженности электрического поля; \mathbf{B} и \mathbf{H} – векторы индукции и напряженности магнитного поля; ρ – объемная плотность электрического заряда; \mathbf{j} – вектор плотности тока проводимости.

Эффект взаимодействия излучения со средой учитывают с помощью макроскопических параметров ε , μ и σ , представляющих собой соответственно электрическую и магнитную проницаемости среды и ее удельную проводимость.

В зависимости от степени электропроводности среды подразделяют на проводники ($\sigma \rightarrow \infty$), диэлектрики ($\sigma = 0$) и полупроводники ($0 < \sigma < \infty$). Среду называют парамагнитной, если $\mu > 1$, и диамагнитной, если $\mu < 1$.

Диэлектрическая проницаемость большинства сред больше единицы.

Если свойства среды не зависят от направления векторов поля, то такую среду считают изотропной, в противном случае ее называют анизотропной. Для анизотропной среды векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} , \mathbf{D} и \mathbf{E} уже не параллельны, как для изотропной. Используют понятие неоднородной среды, для которой параметры ε , μ являются функциями пространственных координат.

Введем понятие вектора намагниченности среды

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 \chi_m \mathbf{H} \quad (\text{B.4})$$

и вектора поляризуемости среды

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \chi_a \mathbf{E}, \quad (\text{B.5})$$

где μ_0 и ε_0 – магнитная и электрическая постоянные; χ_m , χ_a – абсолютная магнитная и диэлектрическая восприимчивости. Магнитная и диэлектрическая восприимчивости связаны с магнитной и диэлектрической проницаемостями среды соотношениями

$$\mu = 1 + \chi_m; \quad \varepsilon = 1 + \chi_a. \quad (\text{B.6})$$

В полуклассической теории рабочую среду рассматривают уже как квантовый объект – ансамбль взаимодействующих частиц. Поведение микросистем в пространстве и времени описывают волновой функцией Ψ , являющейся решением уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi, \quad (\text{B.7})$$

где $h = 2\pi \cdot \hbar$ – постоянная Планка; H – линейный оператор Гамильтона (квантовый аналог суммы кинетической и потенциальной энергии микросистемы).

Воздействие электромагнитного поля, описываемого классической теорией, на среду характеризуется оператором возмущения, учитывающим изменение поведения микросистемы под действием поля.

Строгое и последовательное рассмотрение задачи о взаимодействии электромагнитного поля с рабочей средой возможно только при квантовом подходе к описанию поля и вещества.

В квантовой теории электромагнитное поле квантуется путем введения соответствующих операторов, действующих на функции \mathbf{E} и \mathbf{H} . Квантование электромагнитного поля позволяет рассматривать его как ансамбль частиц-фотонов. Взаимодействие фотонов с микросистемой определяют при решении уравнения Шредингера с оператором H , в котором имеются члены, описывающие взаимное воздействие фотонов и микрочастиц.

Изучение взаимодействия электромагнитного излучения с веществом является необходимым для понимания процессов, приводящих к усилению электромагнитного излучения, принципов работы и создания приборов квантовой и оптической электроники [1].

Приборами квантовой и оптической электроники называют электронные приборы, принцип действия которых основан на явлении вынужденного излучения при взаимодействии электромагнитного поля оптического диапазона длин волн с электронами, входящими в состав микросистем (атомов, молекул и т. д.).

Ансамбль микросистем, в котором электромагнитное поле вызывает вынужденное излучение электронов, является рабочей средой квантового прибора. Взаимодействуя с рабочей средой, электромагнитное поле усиливается за счет вынужденного излучения электронов. Таким образом, рабочая среда квантового прибора служит для преобразования подводимой к ней извне энергии в энергию электромагнитного поля.

Основными функциями таких приборов являются усиление, генерирование и спектральное преобразование электромагнитных полей.

Классификацию квантовых приборов проводят [1]:

1) по спектральному диапазону работы (квантовые приборы оптического диапазона с $\lambda < 1$ мм – лазеры и квантовые приборы СВЧ-диапазона с длиной волны излучения $\lambda > 1$ мм – мазеры);

2) по агрегатному состоянию рабочей среды (газовые, полупроводниковые, жидкостные, твердотельные лазеры или мазеры).

Любой квантовый прибор (рис. 1) состоит из активной среды, в которой происходит вынужденное излучение, приводящее к усилению, генерированию или спектральному преобразованию электромагнитного поля, и устройства накачки, преобразующего энергию от внешнего источника в энергию,

необходимую для возбуждения электронов в рабочей среде. Для увеличения эффективности взаимодействия электромагнитного поля с лазерной активной средой, накопления энергии излучения могут быть использованы устройства формирования электромагнитного поля с заданными спектральными свойствами. Для формирования поля используют различного рода резонансные структуры и устройства управления лазерным излучением, осуществляющие требуемое изменение пространственных, временных и спектральных характеристик электромагнитного поля.



Рис. 1. Структурная схема квантового прибора

Устройство формирования электромагнитного поля – резонатор является необходимым элементом цепи обратной связи, определяющим режим работы и основные характеристики квантового генератора.

Хотя любое устройство, использующее принципы квантовой электроники, можно рассматривать как преобразователь энергии (электрической, электромагнитной, химической или любой другой) в энергию электромагнитного поля, приборы квантовой электроники занимают особое место среди подобных преобразователей.

Преобразование какой-либо энергии в энергию электромагнитного поля в квантовых приборах производится согласованно (когерентно) во времени и пространстве под действием вынуждающего излучения. Такой характер преобразования возможен лишь при условии, что процессы вынужденного когерентного излучения преобладают над идущими параллельно обратными процессами поглощения энергии электромагнитного поля. Для создания генераторов когерентного излучения дополнительно необходимо обеспечить положительную обратную связь, поместив рабочее вещество внутри резонатора. При условии, что усиление в активной среде способно компенсировать неизбежные потери электромагнитного поля в резонаторе, индуцированное излучение будет поддерживать поле в резонаторе незатухающим.

1. Основы теории оптического излучения

Вся теория электромагнитного поля может быть сведена к четырем векторным соотношениям, связывающим векторы \mathbf{D} – индукции электрического поля, \mathbf{B} – индукции магнитного поля, \mathbf{E} – напряженности электрического поля, \mathbf{H} – напряженности магнитного поля, образующего систему уравнений Максвелла.

Первое уравнение связывает изменение во времени величины \mathbf{D} с пространственным изменением магнитного поля \mathbf{H} , которые нельзя рассматривать как независимые компоненты. Это уравнение представляет собой по сути закон Ампера. Размерность величины $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D})$ такая же, как размерность тока, приходящегося на единицу площади. Это ток смещения, который существует наряду с током проводимости. В диэлектриках ток проводимости (омический ток) равен нулю и ток смещения является единственным током.

Второе уравнение связывает изменение во времени магнитной индукции \mathbf{B} с пространственным изменением поля \mathbf{E} . Это уравнение представляет собой по сути закон Фарадея.

Из стационарных уравнений Максвелла следует, что изменение электрической индукции в малом элементе объема зависит от плотности зарядов. Поток электрической индукции должен начинаться и заканчиваться на зарядах, поэтому при отсутствии зарядов поток индукции, входящий в малый элемент объема, равен выходящему потоку индукции [2].

Поток магнитной индукции, входящий в малый элемент объема, всегда равен выходящему потоку индукции, что является следствием того, что в природе нет изолированных магнитных полюсов. Уравнение $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ представляет собой другую форму записи закона Ома.

Электрическое поле электромагнитной волны играет более важную роль, чем магнитное, поскольку большинство оптических эффектов связаны с электрическим полем.

Волновое уравнение для напряженности электрического поля приводит к решениям в виде плоских волн, имеющих непрерывный спектр временных и пространственных частот.

Каждое решение волнового уравнения отождествляется собственным колебанием или модой.

Для свободного пространства моды – плоские волны.

Пользуясь методом ряда и интеграла Фурье, характеризующим принцип суперпозиции простейших гармонических колебаний – плоских волн, можно описать сколь угодно сложную пространственно-временную зависимость поля, как для детерминированных, так и для случайных функций.

При ограничении степеней свободы распространения электромагнитных волн пространственное распределение поля мод изменяется, а спектр мод становится дискретным.

Это фундаментальное свойство позволило объяснить квантовый характер и фотонную структуру электромагнитного поля.

1.1. Электромагнитное излучение

Волновая электромагнитная теория основана на уравнениях Максвелла (В.1)-(В.3). Электромагнитные волны возбуждаются при движении зарядов и распространяются в среде со скоростью $v = \varepsilon\mu^{-0,5}$. Для вакуума $v=c=3\cdot 10^8$ м/с.

Совместное решение уравнений Максвелла сводится к приведению их к двум уравнениям, каждое из которых содержит только одну неизвестную величину $-E$ или H . Такие уравнения называют волновыми уравнениями.

При отсутствии пространственного заряда ($\rho = 0$) и сторонних ЭДС волновые уравнения имеют вид

$$\nabla^2 E = \mu \left[\sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right]; \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 H = \mu \left[\sigma \frac{\partial H}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \right]; \quad (1.2)$$

$$\nabla^2 = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}. \quad (1.2^*)$$

Плоские волны

Рассмотрим решения волновых уравнений, которые приводят к синусоидальному изменению в каждой точке пространства и во времени с частотой ω со волновых векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . Например,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t + \mathbf{k}\mathbf{r}, \quad (1.3)$$

где \mathbf{k} – волновой вектор, причем

$$\mathbf{k} = \omega \varepsilon\mu^{0,5}, \quad (1.4)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор, компонентами которого являются координаты точки наблюдения.

Вид поверхности равных фаз определяют из соотношения

$$\mathbf{k}_x x + \mathbf{k}_y y + \mathbf{k}_z z = \text{const},$$

где $\mathbf{k}_x x + \mathbf{k}_y y + \mathbf{k}_z z = \mathbf{k}^2$ представляет собой уравнение плоскости.

Направление распространения плоской волны совпадает с направлением волнового вектора.

Основные свойства плоских волн: 1) электромагнитные волны в свободном пространстве поперечны, т. е. векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны

направлению распространения волны; 2) векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} взаимно перпендикулярны, а отношение их амплитуд в непроводящей среде равно $\mu \varepsilon^{0,5}$. Волны, подчиняющиеся зависимости типа (1.3), называют линейно поляризованными. Для них направление векторов \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 в пространстве и времени постоянно. Плоскость, проходящую через направление векторов \mathbf{E} и \mathbf{k} , считают плоскостью поляризации.

У большинства естественных источников излучения направления векторов \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 беспорядочно меняют ориентацию в пространстве. Такое излучение называют естественным или неполяризованным. Поляризацию считают эллиптической, если конец вектора \mathbf{E} в плоскости, перпендикулярной \mathbf{k} , описывает эллипс за период колебания. Такая поляризация происходит в том случае, когда в направлении вектора \mathbf{k} распространяются две волны со сдвигом фаз относительно друг друга. Если сдвиг фаз $\varphi = \pi/2$, а амплитуды волн одинаковы, то суммарное колебание имеет круговую поляризацию.

Направление вращения вектора \mathbf{E} зависит от φ . Если $0 < \varphi < \pi$, то вращение происходит по часовой стрелке, и такое излучение называют правополяризованным, если $\pi < \varphi < 2\pi$, то излучение считают левополяризованным.

Энергия электромагнитного излучения

В непроводящей среде средняя плотность энергии излучения

$$W_{cp} = 0,5\varepsilon E^2 + 0,5\mu H^2, \text{ Дж м}^3. \quad (1.5)$$

Энергия, проходящая через единицу площади в единицу времени, пропорциональна $\mathbf{v}W$. Соответственно мощность излучения, переносимую через поверхность S , определяют как

$$M = \int_S \mathbf{v}W_{cp} dS, \text{ Вт}. \quad (1.6)$$

Мощность излучения связана с интенсивностью излучения зависимостью

$$J = \frac{M}{S} \text{ Вт/м}^2. \quad (1.7)$$

Спектр излучения

Произвольную временную функцию $f(t)$, описывающую электромагнитный сигнал, при условии, что энергия сигнала конечна, можно представить в виде суперпозиции синусоидальных колебаний с помощью интегрального преобразования Фурье:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (1.8)$$

Функция $F(\omega)$ представляет собой временной спектр функции $f(t)$. Функция $f(t)$ может быть получена из функции $F(\omega)$ путем обратного преобразования:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.9)$$

Более общее интегральное выражение для волн типа (1.3) имеет вид

$$f(t, x, y, z) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y F(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \omega) e^{-i[\omega t - \mathbf{k}_x x - \mathbf{k}_y y - \mathbf{k}_z z]}. \quad (1.10)$$

Величины \mathbf{k}_x , \mathbf{k}_y , \mathbf{k}_z называют пространственными частотами. Они обратны пространственным периодам волны соответственно по осям x , y , z :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_x &= 2\pi \cos \frac{\Theta_x}{\lambda}; \quad \mathbf{k}_y = 2\pi \cos \frac{\Theta_y}{\lambda}; \\ \mathbf{k}_z &= 2\pi \cos \frac{\Theta_z}{\lambda}; \quad \mathbf{k}_x^2 + \mathbf{k}_y^2 + \mathbf{k}_z^2 = \mathbf{k}_0^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Направляющие косинусы вектора \mathbf{k} ($\cos\theta_x$, $\cos\theta_y$, $\cos\theta_z$) характеризуют направление распространения плоских волн типа (1.3), поэтому разложение (1.10) представляет собой не только выражение для синусоидальных волн всевозможных частот, но и для плоских волн, распространяющихся в любых направлениях.

1.2. Когерентность

Когерентность первого порядка

Если функцию $f(t)$ рассматривают как случайную эргодическую функцию времени, то ее спектральные свойства описывают с помощью энергетического спектра

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^{+T} f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2, \quad (1.12)$$

где T – время наблюдения.

Обратное преобразование Фурье функции $\Phi(\omega)$ является автокорреляционной функцией $f(t)$:

$$\Gamma_1(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t + \tau) f^*(t) dt, \quad (1.13)$$

где τ – временная задержка; знак «*» означает комплексное сопряжение.

Функцию $\Gamma_1(\tau)$ называют функцией когерентности первого порядка. Сигнал $f(t)$ является монохроматичным, если

$$\Gamma_1(\tau) = |a|^2 e^{i\omega_0 \tau}, \quad \Phi(\omega) = 2\pi |a|^2 \delta_D(\omega - \omega_0),$$

где δ_D – дельта функции Дирака.

Если энергетический спектр сигнала $f(t)$ ограничен интервалом $\Delta\omega \ll \omega_0$, то сигнал является квазимонохроматическим с функцией временной когерентности:

$$\Gamma_1(\tau) = a(\tau)e^{i\omega_0\tau}.$$

Если функция $f(t)$ задана в интервале $\{-t_0, t_0\}$ (рис. 1.1а), то ее энергетический спектр не ограничен (рис. 1.1б), а функция когерентности ограничена интервалом, равным $2t_0$ (рис. 1.1в). Временную задержку, при которой функция когерентности падает в заданное число раз, называют временем когерентности τ_k .

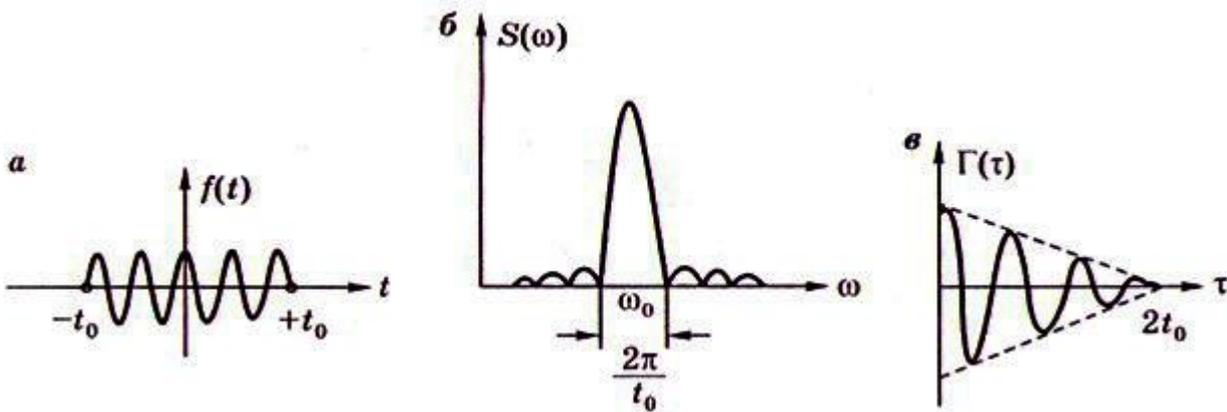


Рис. 1.1. Зависимости: а – исходной функции времени; б – ее энергетического спектра; в – функции временной когерентности

Длина когерентности $l_k = c\tau_k$, где τ_k – время когерентности. Если точка наблюдения переменна, то оптическое поле является функцией от r и t . По аналогии с (1.13) функцию взаимной корреляции $f(r_1, t)$ и $f(r_2, t)$ называют функцией пространственной когерентности:

$$\Gamma_1(r_1, r_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(r_1, t) f(r_2, t) dt.$$

Преобразование Фурье функции $\Gamma_1(\tau)$ относительно τ определяет энергетический пространственный спектр, называемый диаграммой направленности излучения:

$$\Phi(k) = F \left[\Gamma_1(\tau) \right] = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(r) e^{ikr} dr \right|^2.$$

Плоский или телесный угол, внутри которого распространяется заданное количество энергии излучения, характеризующее ширину диаграммы направленности излучения, называют энергетической расходимостью излучения.

Корреляционную функцию для временных функций $f(r_1, t+\tau)$ и $f(r_2, t)$

$$\Gamma_1(r_1, r_2, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(r_1, t + \tau) f^*(r_2, t) dt$$

называют функцией взаимной когерентности. На практике удобнее пользоваться нормированным коэффициентом, называемым степенью когерентности процесса:

$$\gamma_k(r_1, r_2, \tau) = \frac{\Gamma_1(r_1, r_2, \tau)}{\Gamma_1(r_1, r_1, 0) \Gamma_1(r_2, r_2, 0)},$$

причем $0 < \gamma_k < 1$. Процесс считают полностью когерентным, если $\gamma_k = 1$, и полностью некогерентным, если $\gamma_k = 0$. Необходимо отметить, что полностью когерентные и полностью некогерентные процессы являются математической абстракцией, как, впрочем, и идеальное монохроматическое колебание.

Когерентность второго порядка

Корреляционные свойства световых полей могут быть обнаружены при измерениях автокорреляционных функций интенсивности светового поля:

$$\Gamma_2(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} J(t + \tau) J(t) dt. \quad (1.14)$$

Функцию $\Gamma_2 \tau$ называют корреляционной функцией второго порядка; она характеризует корреляцию значений интенсивности излучения J в какой-либо точке пространства в зависимости от τ . Корреляционная функция (1.14) представляет собой частный случай корреляционной функции более общего вида

$$\Gamma_2(r_1, r_2, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} J(r_1, t + \tau) J(r_2, t) dt$$

которая характеризует корреляцию интенсивности излучения поля J в двух различных точках пространства в зависимости от τ .

1.3. Фотонная структура поля

Квантование поля излучения

Квантование поля излучения необходимо для объяснения многих экспериментов, в которых для получения информации о световом поле производят детектирование и счет отдельных фотонов. Квантование поля предполагает изменение энергии поля излучения только дискретным образом. Удобнее перейти от классического описания энергии поля (1.5) к квантовому, основываясь на представлении электромагнитного поля в виде системы стоячих волн в замкнутой полости резонатора [2]. Выберем замкнутую полость резонатора в виде куба с ребром $L \gg \lambda$.

Из граничных условий для стенок полости следует, что проекции волнового вектора \mathbf{k} могут принимать ряд дискретных значений:

$$\mathbf{k}_x = \frac{2\pi m}{L}, \mathbf{k}_y = \frac{2\pi n}{L}, \mathbf{k}_z = \frac{2\pi q}{L}, \quad (1.15)$$

где m, n, q – целые числа.

Таким образом, световое поле представляют в виде набора волн, распространяющихся в различных направлениях. Из соотношения (1.15) следует, что каждому разрешенному значению волнового вектора $\mathbf{k}_s = \omega_s/c$ в \mathbf{k} -пространстве соответствует объем, равный $[2\pi/L]^3$. Определим число N_q возможных разрешенных колебаний поля с частотами, для которых $|\mathbf{k}_s|$ лежит в пределах от 0 до \mathbf{k} . Для этого необходимо объем сферы в \mathbf{k} -пространстве $\frac{4}{3}\pi\mathbf{k}^3$ разделить на объем $[2\pi/L]^3$, приходящийся на каждое разрешенное значение \mathbf{k} , и умножить на два, так как возможны два одинаковых значения \mathbf{k} , отвечающих ортогональным поляризациям:

$$N_q = \frac{\omega^3}{3\pi^2 c^3} L^3.$$

Спектральная плотность состояний поля

$$p(\omega) = \frac{1}{L^3} \frac{dN}{d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}. \quad (1.16)$$

Выражение (1.16) показывает, что спектральная плотность p ω состояний поля в объеме не зависит от размеров полости резонатора. Энергия поля

$$W = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2] dV, \quad (1.17)$$

где интеграл берется по объему полости V . С учетом дискретного характера состояний поля (1.15) выберем выражения для \mathbf{E} и \mathbf{H} в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_s &= c\mathbf{q}_s \left[\frac{1}{L^3} \right]^{1/2} \mathbf{k}_s e_s \cos \mathbf{k}_s r, \\ \mathbf{E}_s &= -\mathbf{e}_s \mathbf{q}_s \left[\frac{1}{L^3} \right]^{1/2} \sin \mathbf{k}_s r, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где \mathbf{k}_s – волновой вектор одного из состояний поля; \mathbf{e}_s – единичный вектор, определяющий плоскость поляризации, \mathbf{q}_s – функция времени, описывающая электромагнитное поле в резонаторе и удовлетворяющая уравнению $\ddot{q}_s + \omega_s^2 q_s = 0$.

Подставляя E_s из (1.18) в выражение (1.17), получим

$$\begin{aligned} \int \mathbf{E}_s^2 dV &= \dot{q}_s^2, \\ \int \mathbf{E}_s \mathbf{E}_r dV &= 0, \text{ при } s \neq r. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$\int_V \mathbf{H}_s^2 dV = \omega_s^2 q_s^2,$$

а интеграл произведения $\mathbf{H}_s \mathbf{H}_r = 0$ равен нулю. Таким образом,

$$W = 0,5 \sum_s [\dot{q}_s^2 + \omega_s^2 q_s^2].$$

Это выражение для энергии имеет такой же вид, как и для системы гармонических осцилляторов. Для механических систем в соответствии с методом Гамильтона

$$\dot{q}_s = p_s, p_s = -\omega_s^2 q_s.$$

Откуда

$$W = \sum_s W_s = 0,5 \sum_s [p_s^2 + \omega_s^2 q_s^2].$$

Перейдем теперь к рассмотрению квантовой теории электромагнитного поля, предположив, что результаты квантово-механического рассмотрения распространяются и на осцилляторы, представляющие поле излучения, т. е. q_s подчиняется волновому уравнению. Для этого необходимо p_s и q_s заменить операторами \hat{p}_s и \hat{q}_s , инвариантными относительно выбора представления, т. е. подчиняющимися перестановочным соотношениям:

$$\hat{p}_s \hat{q}_s - \hat{q}_s \hat{p}_s = -i\hbar \sum_s \left(\frac{\partial p}{\partial p_s} \frac{\partial q}{\partial q_s} - \frac{\partial p}{\partial q_s} \frac{\partial q}{\partial p_s} \right).$$

В q_s представлении \hat{q}_s — оператор умножения, а

$$\hat{p}_s = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_s}.$$

Тогда линейный оператор Гамильтона электромагнитного поля

$$\hat{H} = \sum 0,5 p_s^2 + q_s^2,$$

а уравнение Шредингера (В.7)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum 0,5 \hat{p}_s^2 + \omega_s^2 \hat{q}_s^2 \psi, \quad (1.19)$$

где ψ — волновая функция, описывающая электромагнитное поле в резонаторе. Произвольное решение уравнения (1.19) может быть представлено в виде суперпозиции собственных функций ψ_s линейного оператора Гамильтона:

$$\hat{H} \psi_s = W_{sn} \psi_s,$$

когда

$$W_{sn} = \sum_s W_s U_\phi + 0,5 \hbar \omega_s \quad (1.20)$$

— собственные значения энергии поля, где U_ϕ — число фотонов.

Таким образом, собственные значения энергии электромагнитного поля могут быть только дискретными величинами, причем разность соседних состояний равна $\hbar \omega_s$. Следовательно, утверждение Планка о квантовом

характере изменения энергии электромагнитного поля не находится в противоречии с волновой природой света.

Формула Планка

Используя решение (1.20), согласно которому для каждого типа колебаний с частотой ω_s возможны значения энергии $0, W_s, \dots, u_\phi W_s, \dots$, где $W_s = \hbar\omega_s$, отношения вероятностей того, что данный тип колебаний обладает энергией $0, W_s, 2W_s, \dots$, имеют вид

$$1: e^{-W_s/kT}: e^{-2W_s/kT}: \dots,$$

где k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура среды. Среднее значение энергии типа колебаний W_s

$$W_{Scp} = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} sW_s e^{-sW_s/kT}}{\sum_{s=0}^{\infty} e^{-sW_s/kT}}.$$

Используя формулу для суммы геометрической прогрессии, получим

$$W_{Scp} = \frac{W_s}{e^{W_s/kT} - 1} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (1.21)$$

Умножая число типов колебаний, приходящееся на единицу объема (1.16), на среднюю энергию одного типа колебания электромагнитного поля (1.21), найдем плотность энергии в единичном диапазоне частот:

$$p_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (1.22)$$

(закон излучения Планка).

Вопросы для самопроверки

1. Покажите на примере функции Гаусса, что произведение длительности импульса на ширину его спектра есть величина постоянная.

2. На практике модуль степени когерентности γ_k определяют по видности V_γ , интерференционной картины:

$$|\gamma_k| = V_\gamma = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{\max} + J_{\min}} \cdot \frac{2\sqrt{J_1 J_2}}{J_1 + J_2}.$$

J_{\max} и J_{\min} – интенсивности света в максимуме и минимуме интерференционной картины, получаемой при интерференции двух световых пучков с интенсивностью J_1 и J_2 . Для определения модуля степени временной когерентности обычно используют двухлучевой интерферометр, в котором один из интерферирующих пучков задерживается на время τ относительно другого (рис. 1.2а). Для определения модуля степени пространственной когерентности применяют интерферометр, в котором интерферируют световые пучки от двух отверстий в непрозрачном экране, причем расстояние между отверстиями

может изменяться (рис. 1.2б). Составьте оптическую схему для измерения модуля степени взаимной когерентности.

3. Составьте оптическую схему для измерения степени когерентности второго порядка.

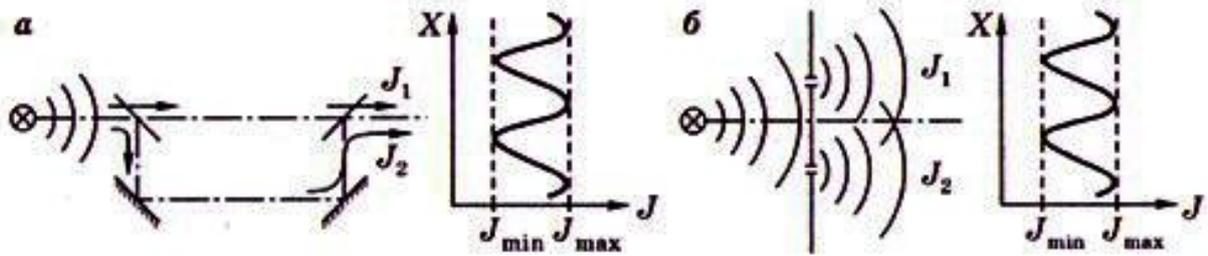


Рис.1.2 Оптические схемы для измерения степени когерентности по видимости интерференционной картины: а – временной степени когерентности; б – пространственной степени когерентности.

2. Лучевая и электромагнитная теории распространения света

Геометрическая оптика является мощным инструментом, используемым для описания распространения оптического излучения в сложных оптических системах. Геометрическая оптика основана на физическом принципе наименьшего времени – принципе Ферма, основная идея которого заключается в том, что свет распространяется от одной точки пространства до другой по пространственной траектории, требующей для прохождения света минимального времени [3].

Следствиями принципа Ферма являются законы отражения и преломления света, распространения его в среде с постоянным или неоднородным в пространстве показателем преломления.

Наиболее современная теория геометрической оптики, разработанная Гамильтоном, имеет важные аналогии в аналитической механике. Согласно классической механике частицы движутся вдоль определенных траекторий. Траектории материальных частиц в поле сил совпадают с траекториями лучей в неоднородной оптической среде. В однородной оптической среде свет распространяется по прямой.

Уравнения геометрической оптики, приводящие к лучевому описанию распространения света, могут быть выведены и из волнового уравнения, при условии, что $\lambda \rightarrow 0$, т. е. пренебрежения дифракционными эффектами. Однако для большинства задач оптики пренебрежение дифракционными эффектами недопустимо, особенно для объектов, сравнимых по размеру с длиной волны оптического излучения.

Волновая теория распространения света, основанная на принципах Гюйгенса, Френеля и Кирхгофа, позволяет решать практически все задачи, связанные с дифракцией и интерференцией. Основная идея принципа Гюйгенса заключается в том, что электромагнитное поле на некотором расстоянии от источника волн может быть представлено в виде суперпозиции элементарных сферических волн, испускаемых каждой точкой поверхности источника, а поле, полученное на некотором расстоянии, в свою очередь является новым источником элементарных сферических волн.

2.1. Моды

Общее решение волнового уравнения (1.1) было построено для случая, когда ε и μ постоянны. Если ε является функцией координат (для оптических сред обычно $\mu = \text{const}$), то выражение для плоских волн (1.10) уже не будет решением волнового уравнения. Однако общее решение и в этом случае можно найти, пользуясь разложениями, но уже по модам неоднородной структуры оптической среды.

Мода неоднородной структуры оптической среды – решение волнового уравнения для этой структуры – собственное колебание электромагнитного поля, характеризующееся определенной частотой и характерным распределением поля в пространстве. Каждой моде соответствует собственное значение, являющееся постоянным комплексным числом, определяющим затухание и фазовые набегии моды.

Граничные условия

Общий тип граничных условий соответствует кусочно-однородному распределению диэлектрической проницаемости. При этом тангенциальные компоненты полей **E** и **H** должны быть непрерывны на границе раздела сред. В случае неоднородных структур без скачкообразного изменения ε решение волнового уравнения ищут в виде поля, исчезающего в бесконечности и ограниченного в конечной области пространства. Соблюдение этих требований приводит к направляемым структурой модам. Требование конечности поля в бесконечности приводит к модам излучения.

Плоские волны, описываемые выражением (1.3), рассматривают как моды в среде $\varepsilon = \text{const}$. При этом постоянная распространения, являющаяся собственным значением (1.1), может быть выбрана произвольной, следовательно, пространственный спектр будет непрерывен. Плоские волны типа (1.10), распространяющиеся в любых направлениях, содержат и не распространяющиеся (затухающие) волны. Для затухающих волн соответствующая компонента волнового вектора поля, например k_z (1.11), чисто мнимая. Плоские волны типа (1.3) являются также и модами простейшей неоднородной структуры, представляющей собой две полубесконечные граничащие среды с различными диэлектрическими проницаемостями.

Пространственный спектр в этом случае является непрерывным спектром распространяющихся и затухающих волн.

Отражение и преломление волн

Возбуждение границы раздела сред плоскими волнами приводит к их отражению и преломлению, описываемым выражениями

$$\rho_E = \frac{k_{1x} - k_{2x}}{k_{1x} + k_{2x}}; \tau_E = \frac{2k_{1x}}{k_{1x} + k_{2x}}; \\ \rho_H = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 k_{1x}} - \sqrt{\varepsilon_1 k_{2x}}}{\sqrt{\varepsilon_2 k_{1x}} + \sqrt{\varepsilon_1 k_{2x}}}; \tau_H = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_{1x}}}{\sqrt{\varepsilon_2 k_{1x}} + \sqrt{\varepsilon_1 k_{2x}}}, \quad (2.1)$$

где

$$k_{1z} = k_{2z} = k_{3z}; k_y = 0; \\ k_{1x} = \frac{\omega^2 \varepsilon_1 \mu - k_{1z}^2}{\omega^2 \varepsilon_1 \mu} = n_{1x} k_1; \quad (2.2) \\ k_{2x} = \frac{\omega^2 \varepsilon_2 \mu - k_{2z}^2}{\omega^2 \varepsilon_2 \mu} = n_{2x} k_2;$$

$$k_{3x} = -k_{1x} = n_{3x}k_1.$$

Соотношения (2.2) определяют направление отраженных и преломленных волн, а выражения (2.1) – коэффициенты амплитудного отражения ρ_E , ρ_H и пропускания τ_E , τ_H .

Индекс указывает на то, какой из векторов лежит в плоскости падения xz .

Анализируя соотношения (2.1) и (2.2), можно показать, что при падении волны из среды более плотной ($n_1 > n_2$), когда $\sin\theta_1 \geq n_2/n_1 = \sin\theta_n$, наблюдается полное внутреннее отражение, когда падающая волна полностью отражается, а преломленная затухает.

Коэффициент отражения ρ_E $\theta_B = 0$. Угол $\theta_B = \arctg n_2/n_1$ известен как угол Брюстера (рис. 2.1).

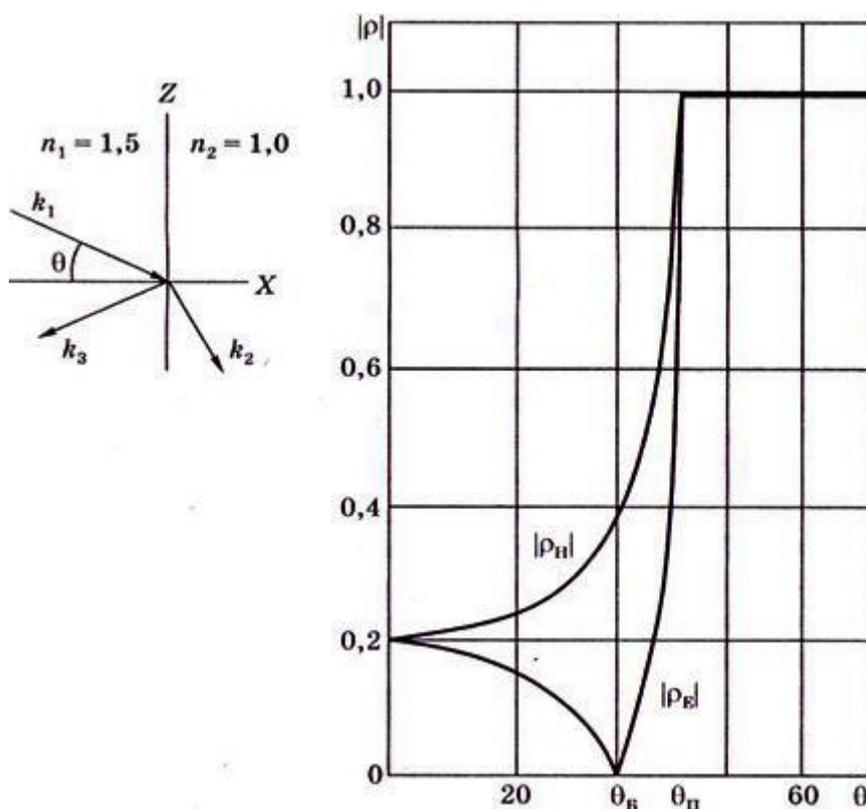


Рис. 2.1. Зависимость модуля амплитудного коэффициента отражения $|\rho|$ от угла падения θ плоской волны из более плотной среды $n_1 = 1,5$ в менее плотную $n_2 = 1,0$

Моды диэлектрического волновода

Наиболее простой структурой, способной направить электромагнитные волны, является плоский диэлектрический волновод, представляющий собой трехслойную структуру, причем показатель преломления центрального слоя больше показателей преломления обрамляющих сред.

Существование направляемых мод объясняется тем, что плоские волны внутри волновода при своем распространении последовательно отражаются от границ раздела под углами полного внутреннего отражения, причем вне волновода поле спадает экспоненциально.

Стоячие волны, которые образуются внутри волновода, могут иметь различную поляризацию (ориентацию векторов \mathbf{E} и \mathbf{H}).

В свободном пространстве электромагнитные волны поперечно поляризованы, т. е. векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} расположены в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Электромагнитные волны, направляемые волноводом, могут иметь проекцию векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} на направление распространения (ось z). Если продольную составляющую имеет вектор \mathbf{E} , то моду называют электрической и обозначают \mathbf{E} или ТМ. Для ТМ моды существуют две компоненты электрического поля E_z и E_x и одна магнитного H_y . В магнитных модах продольную составляющую имеет вектор \mathbf{H} ; такую моду обозначают \mathbf{H} или ТЕ. В модах ТЕ имеются компоненты H_z , H_x и E_y . Поперечные моды обозначают ТЕМ.

Каждая мода характеризуется индексами m , n , q , определяющими симметрию поля относительно координатных осей. Индексы m , n , q – целые положительные числа, указывающие количество нулей в распределении поля по координатным осям. Относительно плоскости симметрии волновода волны могут быть симметричными (четными) и несимметричными (нечетными).

Для четных направляемых ТМ мод распределение поля имеет вид

$$E_x \sim H_y \sim \begin{cases} \cos k_{1x} x e^{i \omega t + k_z z}, & |x| < d; \\ \cos k_{1x} d e^{-k_{2x} |x| - d} e^{i \omega t + k_z z}, & |x| > d. \end{cases} \quad (2.3)$$

Для нечетных направляемых ТМ мод без учета фазового множителя

$$E_x \sim H_y \sim \begin{cases} \sin k_{1x} x, & |x| < d; \\ \sin k_{1x} d e^{-k_{2x} |x| - d}, & |x| > d, \end{cases} \quad (2.4)$$

где

$$k_{1x}^2 = n_1^2 k_0^2 - k_z^2; \quad k_{2x}^2 = k_z^2 - n_2^2 k_0^2; \\ k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad n_1 < n_2 > n_3,$$

d – ширина диэлектрического волновода.

Собственные значения для волн типа (2.3) могут быть получены при учете условий на границах раздела сред:

$$\operatorname{tg} k_{2x} d = -\frac{n_2^2}{n_1^2} \cdot \frac{k_{1x}}{k_{2x}}; \quad k_{2x} d^2 + k_{1x} d^2 = n_2^2 - n_1^2 k_0^2 d^2. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) показывает, что система направляемых волн диэлектрического волновода имеет дискретный спектр. Кроме направляемых мод, диэлектрический волновод имеет и моды излучения. Моды излучения не затухают вне волновода. Они соответствуют распространению плоских волн внутри волновода под углами, меньшими углов полного внутреннего отражения. Поэтому эти волны, преломляясь на границах раздела, излучаются в обрамляющие среды, не затухая при удалении от границ раздела.

Моды излучения имеют непрерывный спектр. Диапазон значений k_z для мод непрерывного спектра

$$0 < k_z < n_2 k_0,$$

а для направляемых мод дискретного спектра

$$n_2 k_0 > k_z > n_1 k_0.$$

Существует еще один диапазон изменения k_z , соответствующий затухающим модам. Такие моды затухают в направлении Z , т. е. $k_z = -i|k_z|$. Затухающие моды непрерывного спектра существуют в диапазоне $0 < k_z < \infty$.

Моды плоского диэлектрического волновода E_n ортогональны друг другу, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_n(x) E_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1, & m = n, \end{cases} \quad (2.5^*)$$

поэтому любое произвольное распределение поля можно выразить в виде суперпозиции мод. Например, распределение поля по оси y можно записать в виде суммы по модам дискретного спектра и интеграла по всем модам непрерывного спектра:

$$E_y = \sum_m C_m E_{my} + \int_0^{\infty} q(k_{1x}) E_y(k_{1x}, x) dk_{1x}. \quad (2.6)$$

Коэффициенты разложения C_m и $q(k_{1x})$ представляют собой амплитуды дискретной и непрерывной части спектра и могут быть найдены с помощью соотношений ортогональности.

Таким образом, для простейшей направляющей структуры (диэлектрического слоя) получен полный набор мод дискретного и непрерывного спектра, которые можно использовать при решении задачи возбуждения структуры произвольным полем.

Рассмотренная направляющая структура могла ограничивать распространение поля лишь по одной координате. Ограничение поля и по другой координате приводит к увеличению числа направляемых структурой мод. На рис. 2.2а показан диэлектрический волновод, ограничивающий электромагнитное поле по координатам x и y . Распределение напряженности электрического поля по координатам x и y для простейшей направляемой моды дано на рис. 2.2бв.

В средах с комплексным показателем преломления возможно существование направляемых мод, связанное не с эффектами полного внутреннего отражения, а с эффектами поддержания направляемых мод за счет различного затухания в зависимости от направления распространения излучения.

В средах с комплексным показателем преломления возможно существование направляемых мод, связанное не с эффектами полного внутреннего отражения, а с эффектами поддержания направляемых мод за счет

различного затухания в зависимости от направления распространения излучения.

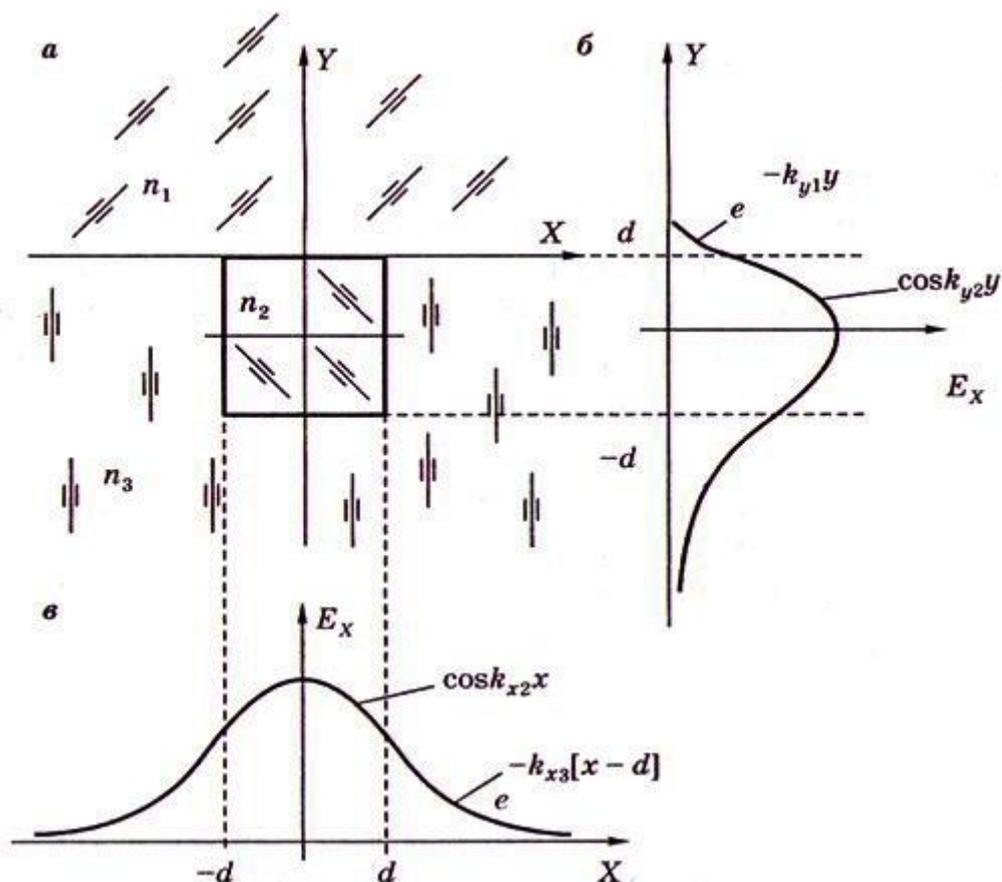


Рис. 2.2 Схема диэлектрического волновода (а) и распределение напряженности электрического поля в поперечном направлении для простейшей направляемой моды TM_{00} (б, в)

В средах с плавным уменьшением показателя преломления от оси волновода также возможно существование направляемых мод, связанное с отклонением оптического излучения, распространяющегося в среде с градиентом показателя преломления в поперечном сечении, к оси волновода.

2.2. Дифракция

Дифракция – это явление, характеризующее изменение направления распространения волн при возбуждении структур конечных размеров [4].

Постановка дифракционных задач

В задачах дифракции предполагается наличие источника излучения, поле излучения которого известно. Разлагая выражение для поля излучения по полному набору мод заданной структуры среды, ищут коэффициенты разложения – амплитуды этих мод. Однако существует лишь ограниченное

число структур, для которых известны полные наборы мод. Вместе с тем для большинства практических задач необходимо знать поле излучения на расстояниях, не только больших длины волны излучения λ , но и больших размеров возбуждаемой структуры. Тогда можно ограничиться рассмотрением только мод излучения (внешние задачи дифракции), а затухающие и направляемые моды рассматривать при решении внутренних задач дифракции.

Функция Грина

Существуют два подхода к решению задач дифракции. Первый основан на использовании решения волнового уравнения в виде (1.3), т. е. в виде плоских волн, второй предполагает, наряду с волновым уравнением (1.1), рассмотрение волнового уравнения,

$$\nabla^2 G_{\Gamma} + k^2 G_{\Gamma} = \delta_{\text{д}}(r - r'), \quad (2.7)$$

справедливого при наличии монохроматического излучения. Дельта-функция в правой части описывает излучение точечного источника, расположенного в точке r' с координатами (x', y', z') . Функцию $G_{\Gamma} = G(x, y, z, x', y', z')$ называют функцией Грина. Ее физический смысл – отклик системы на точечный источник. Функция Грина в свободном пространстве

$$G_{\Gamma} = \frac{1}{4\pi r} e^{ikr}, \quad (2.8)$$

где $r = \sqrt{x - x' \text{ }^2 + y - y' \text{ }^2 + z - z' \text{ }^2}$ (рис. 2.3).

Уравнение (2.8) – уравнение сферической волны, так как поверхность равных фаз определяют из соотношения $kr = \text{const}$, следовательно, $r = \text{const}$ – это сферическая поверхность.

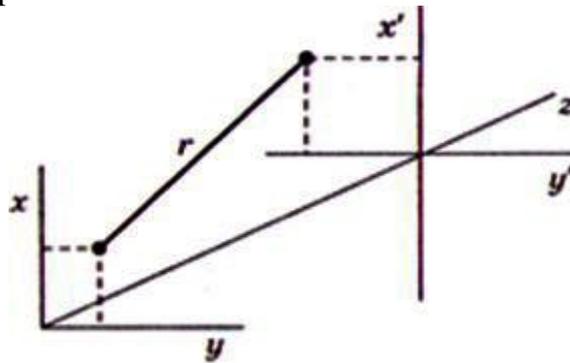


Рис. 2.3. Геометрические соотношения при расчете дифракции

Рассмотрим первый подход к задачам дифракции. Функция $F(k_x, k_y)$ в (1.10) представляет собой угловой спектр падающей волны в плоскости xu . Обратное преобразование $F(k_x, k_y)$ позволяет получить распределение поля $f(x, y)$ в плоскости xu . Кирхгофом были введены приближенные граничные условия, которые заключаются в том, что функция $f(x, y)$ умножается на функцию $\tau_E(x, y)$, характеризующую амплитудные и фазовые изменения волны при

дифракции. Например, ограничивающее отверстие в экране не возмущает падающее на отверстие S поле, а на поверхности экрана равно нулю, т. е. $\tau_E(x, y) = 1$ при $(x, y) \in S$ и $\tau_E(x, y) = 0$ в остальных точках. Применяя теорему свертки анализа Фурье, выражение для углового спектра дифрагированных волн можно записать в виде

$$F_D(k'_x, k'_y) = T_E(k'_x - k_x, k'_y - k_y) dk'_x dk'_y, \quad (2.9)$$

где $T_E(k_x, k_y)$ – преобразование Фурье $\tau_E(x, y)$.

Таким образом, пространственное ограничение волны приводит к уширению углового спектра возбуждающего поля. Подставляя (2.9) в (1.10), получают выражение для дифрагированного поля:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y F_D(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}. \quad (2.10)$$

Приближение Гюйгенса-Кирхгофа

Второй подход к задачам дифракции основан на разложении поля не по плоским, а по сферическим (2.8) волнам:

$$f(x, y, z) = \frac{i}{\lambda} \int_S f(x', y', z') \frac{e^{ikr}}{r} dS. \quad (2.11)$$

Это приближение известно как приближение Гюйгенса. Возможно упрощение дифракционного интеграла (2.11), когда апертура, ограничивающая поле, мала по сравнению с расстоянием r . В этих условиях используют разложение $1/r$ в ряд, ограничиваясь двумя членами ряда (параболическое приближение),

$$r = z' - z + \frac{1}{2} \frac{x'^2 + y'^2}{z' - z}. \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (2.11) и заменяя r в знаменателе на $z' - z$, получают

$$f(x, y, z) = \frac{i}{\lambda} \int_S f(x', y', z') \frac{\exp\left[ik\left[z' - z + \frac{x'^2 + y'^2}{2(z' - z)}\right]\right]}{z' - z} dx' dy'. \quad (2.13)$$

Дифракционный интеграл (2.13) рассматривают для описания дифракции Френеля – поля в ближней зоне дифракции.

Если член $x'^2 + y'^2$ в показателе экспоненты пренебрежимо мал, что наблюдается на расстояниях, много больших размеров структуры, то имеет место дифракция Фраунгофера – поля в дальней зоне дифракции:

$$f(x, y, z) = \frac{i}{\lambda(z' - z)} \exp(ik(z' - z)) \exp\left(\frac{ik}{2(z' - z)}(x^2 + y^2)\right) \times \\ \times \int_S f(x', y', z') \exp\left[i\frac{k}{z' - z}(xx' + yy')\right] dx' dy'.$$

Отметим, что дифракционный интеграл при дифракции Фраунгофера – с точностью до фазовых множителей преобразование Фурье от поля за оптической структурой.

2.3. Гауссовы пучки

Анализ выражения (2.10) показывает, что в свободном пространстве могут распространяться электромагнитные поля, угловой спектр которых сосредоточен вблизи общего направления распространения. Наибольший интерес представляют поля, распределение амплитуд и фаз в каждом поперечном (направлению распространения) сечении остаются подобными, т. е. меняется лишь масштаб амплитудного распределения и кривизна волнового фронта. Такие поля называют пучками. Для нахождения распределения полей, соответствующего пучкам, обратимся к дифракционному интегралу (2.13). Сравним выражение (2.13) с интегральным соотношением

$$i^n \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] H_n y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[ixy - \frac{x^2}{2}\right] H_n x dx. \quad (2.14)$$

Функцию

$$H_n x = (-1)^n \exp[x^2] \frac{d^n}{dx^n} \exp[-x^2] \quad (2.15)$$

называют полиномом Эрмита.

Простейшие полиномы Эрмита имеют вид

$$\left. \begin{aligned} H_0(x) &= 1; \\ H_1(x) &= 2x; \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \end{aligned} \right\}. \quad (2.16)$$

Сравнение (2.14) и (2.13) показывает, что для свободного пространства пучки описываются функциями

$$f(x, y, z) = \frac{\omega_0}{\omega} H_n\left(\sqrt{2\frac{x}{\omega}}\right) H_m\left(\sqrt{2\frac{y}{\omega}}\right) \times \exp\left\{i\left[kz - (m+n+1) \arctg\left(\frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2}\right) + \frac{\pi r^2}{\lambda b}\right]\right\} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2}\right], \quad (2.17)$$

где $m, n=0, 1, 2, \dots$

Полученное выражение характеризует пучки Эрмита-Гаусса.

Для простейшего полинома Эрмита функция (2.17) в плоскости $z=0$ представляет функцию Гаусса

$$f(x, y, 0) = \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2}\right].$$

Параметр ω_0 характеризует радиус пучка, который равен расстоянию, на котором функция f уменьшается в e раз. Пучок Гаусса в плоскости $z = 0$ имеет плоский фазовый фронт, который изменяет свою кривизну при удалении от этой плоскости (рис. 2.4).

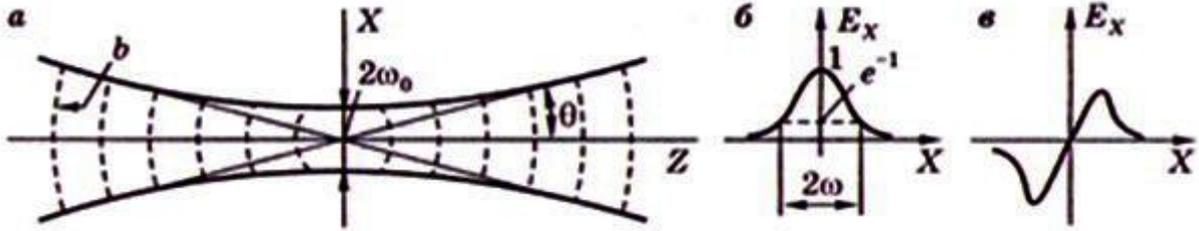


Рис. 2.4. Распределение поля, характеризующее пучки Эрмита-Гаусса:

а – сплошные линии характеризуют размер гауссова пучка в поперечном сечении, пунктир – поверхности равной фазы; б – гауссово распределение амплитуды поля для низшей моды TEM_0 при произвольном z ; в – распределение амплитуды поля для моды TEM_1 при произвольном z

В выражении (2.17) введены обозначения:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right)^2 \right]} \quad (2.18)$$

- радиус Гауссова пучка на произвольном расстоянии z от положения каустики пучка;

$$b = z \left[1 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] \quad (2.19)$$

- радиус кривизны волнового фронта Гауссова пучка на произвольном расстоянии z от положения каустики пучка.

Радиус кривизны фазового фронта определяется выражением (2.19). Радиус гауссова пучка для произвольного z находят из выражения (2.18), справедливого для всех z , несмотря на ограничения (2.12). Выражение (2.17) можно записать в более компактной форме, если ввести комплексные параметры пучка:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{b(z)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)}; \quad (2.20)$$

$$p_r = \arctg \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right) + i \ln \left[\frac{\omega_0}{\omega z} \right].$$

С учетом этих обозначений

$$f(x, y, z) = -i \left(p_r + \frac{\pi x^2 + y^2}{\lambda q} \right) e^{ikz}. \quad (2.21)$$

Параметр q с учетом (2.19) и (2.20) имеет вид

$$q = z + i \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}. \quad (2.22)$$

2.4. Оптико-геометрическое приближение

Пренебрежение дифракционными эффектами в оптических структурах, размеры которых гораздо больше длины волны излучения, позволяет для описания процессов распространения пучков пользоваться приближенными методами геометрической оптики.

Основные уравнения геометрической оптики могут быть выведены из волнового уравнения (1.1). Решение волнового уравнения ищут в виде

$$E = E_0(x, y, z) \exp -ik_0 \varphi(x, y, z) \exp i\omega t. \quad (2.23)$$

Это решение позволяет отделить быстрые фазовые изменения $k_0 \varphi(x, y, z)$ от более медленных изменений амплитуды $E_0(x, y, z)$.

Уравнение Эйконала

Для коротких волн ($\lambda \rightarrow 0$) при подстановке (2.23) в (1.1)

$$\nabla \varphi^2 = \frac{k^2}{k_0^2} = n^2, \quad (2.24)$$

где

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}.$$

Уравнение (2.24) известно как уравнение Эйконала. Поверхности постоянных фаз $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ определяют фазовые фронты поля излучения, которые перпендикулярны направлению распространения поля в виде лучей.

Уравнение луча

Чтобы получить уравнение луча, необходимо найти градиент от обеих частей выражения (2.24):

$$\frac{d}{ds} \nabla \varphi = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dr}{ds} \right) \nabla n. \quad (2.25)$$

Уравнение (2.25) – уравнение луча, который определяется вектором \mathbf{r} , проведенным из некоторой точки ко всем точкам светового луча, и расстоянием s , измеренным вдоль луча.

Для многих практических задач пользуются приближенным уравнением луча

$$\frac{d}{dz} \left(n \frac{dr}{dz} \right) = \nabla n, \quad (2.26)$$

которое справедливо, если лучи образуют малые углы θ с оптической осью z такие, что $\operatorname{tg}\theta \approx \sin\theta \approx \theta$ (параксиальное приближение).

Уравнение (2.26) показывает, что в однородной среде световые лучи – прямые линии.

На границе сред с различными диэлектрическими проницаемостями направление отраженных и преломленных лучей совпадает с направлениями отраженных и преломленных волн, полученных в волновом приближении (2.1). В параксиальном приближении для однородных сред с показателями преломления n_1 и n_2 направление преломления определяется законом $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$.

Вопросы для самопроверки

1. На транспарант с коэффициентом пропускания

$$\tau_E = \exp -i \frac{k}{2f_l} x^2 + y^2$$

падает сферическая волна. Покажите, что в параболическом приближении (2.12), когда волна описывается функцией

$$f(x, y) = \exp i \frac{k}{2r} x^2 + y^2,$$

поле после транспаранта представляет собой плоскую волну при $r = f_l$.

2. Получите выражение для дифракционного интеграла (2.13) при дифракции в зоне Фраунгофера (дальней зоне).

3. Рассчитайте поле при дифракции на прямоугольной щели размером $2a$ в области Фраунгофера.

4. Используя зависимость (2.18), определите радиус гауссова пучка $\omega(z)$ в дальней зоне, где

$$z \gg \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}.$$

Покажите, что $\omega(z)$ может быть вычислено по выражению

$$\omega(z) \approx \frac{z\lambda}{\pi\omega_0}.$$

5. Воспользуйтесь формулами (2.22) для расчета прохождения гауссова пучка через линзу с фокусным расстоянием f_l . Покажите, что для гауссова пучка, минимальный радиус которого ω_{01} находится на расстоянии L_1 от фокусирующей линзы (рис. 2.5), положение поля с минимальным радиусом ω_{02} за линзой может быть вычислено по формуле

$$L_2 = f_l + \frac{L_1 - f_l}{1 - \frac{L_1 - f_l}{f_l} \frac{\pi\omega_{01}^2}{\lambda}},$$

а минимальный радиус пучка на расстоянии L_2 – по выражению

$$\omega_{02} = \frac{1}{\omega_{01}^2} \left[1 - \frac{L_1}{f_l} \right]^2 + \frac{1}{f_l^2} \frac{\pi\omega_{01}^2}{\lambda} \approx \frac{\lambda f_l}{\pi\omega_{01}}.$$

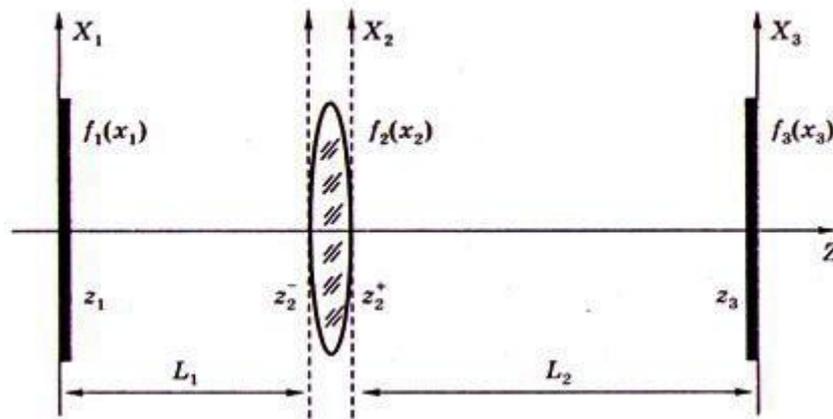


Рис. 2.5

6. Покажите, что через круглую апертуру радиусом a проходит лишь часть полной мощности M_0 гауссова пучка моды TEM_{00} , определяемой зависимостью

$$M_a = M_0 \left(1 - \exp \left(-\frac{2a^2}{\omega^2(z)} \right) \right),$$

где $\omega(z)$ – радиус гауссова пучка на апертуре. Какая доля полной мощности проходит через круглую апертуру при $a = \omega(z)$?

3. Оптические линзовые волноводы и резонаторы

Основная идея, лежащая в основе расчета мод линзового волновода и резонатора, заключается в том, что для периодических структур электромагнитные поля в поперечных оптической оси сечениях, отстоящих друг от друга на величину периода, для собственных мод должны быть подобны [5].

Подобие означает сохранение функции амплитудно-фазового распределения поля в выбранных сечениях с точностью до комплексной постоянной. Математическая формулировка задач расчета волноводов и резонаторов – отыскание неизвестных распределений электромагнитных полей (собственных функций – мод) и комплексных постоянных (собственных чисел), удовлетворяющих таким требованиям. Для резонаторов добавляется дополнительное требование – кратности двум π фазового набегу электромагнитной волны при полном обходе резонатора – условие положительной обратной связи.

Моды оптических волноводов и резонаторов обычно образуют полный набор ортогональных функций, по которому можно разложить любое поле, возбуждающее волновод или резонатор. Другими словами, оптические волноводы и резонаторы представляют собой пространственно-временные фильтры, которые можно эффективно возбудить только на собственных частотах и собственными модами.

3.1. Линзовые волноводы

Линзовый волновод – периодическая структура, образованная последовательным соединением оптических идентичных систем (подобным рассмотренным выше). Такая периодическая структура способна воспроизводить первоначальное распределение поля на входе системы после каждого периода с точностью до комплексного множителя, действительная часть которого характеризует ослабление волны за счет неизбежных потерь, а мнимая часть характеризует фазовый набег волны. Электромагнитные поля, которые воспроизводятся после прохождения периода волновода, являются модами этого волновода. Отсутствие ограничений на величину фазового набегу волны на периоде волновода приводит к тому, что линзовый волновод не обладает резонансными свойствами и характеризуется непрерывным спектром частот.

Преобразование поля с помощью линзы

Прохождение волны через линзу эквивалентно умножению распределения поля перед линзой $f(x, y, z)$ на фазовый множитель

$$f(x, y, z^+) = f(x, y, z^-) \exp\left[-i \frac{k}{2f_l} r^2\right]. \quad (3.1)$$

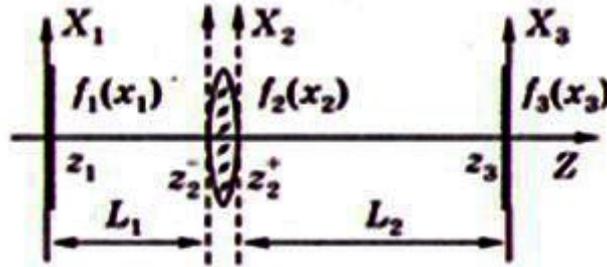


Рис. 3.1. Схема преобразования когерентного электромагнитного поля с помощью простой линзовой системы

Рассмотрим преобразование распределения поля из входной плоскости z_1 перед линзой в плоскость z_3 , после линзы (рис. 3.1), расположенной в плоскости z_2 .

Прохождение поля из плоскости z_1 в плоскость z_2 описывают дифракционным интегралом (2.13):

$$f(x, y, z_2^-) = \frac{\exp i \frac{\pi}{2}}{\lambda L_1} \exp ikL_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, y_1, z_1) \exp\left\{i \frac{k}{2L_1} [x_1 - x_2]^2 + [y_1 - y_2]^2\right\} dx_1 dy_1. \quad (3.2)$$

После прохождения полем линзы в соответствии с (3.1)

$$f(x_2, y_2, z_2^+) = f(x_2, y_2, z_2^-) \exp\left[-i \frac{k}{2f_l} (x_2^2 + y_2^2)\right]. \quad (3.3)$$

В плоскости z_2

$$f(x_2, y_2, z_3) = \frac{\exp i \frac{\pi}{2}}{\lambda L_2} \exp ikL_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_2, y_2, z_2^+) \exp\left\{i \frac{k}{2L_2} [x_3 - x_2]^2 + [y_3 - y_2]^2\right\} dx_2 dy_2. \quad (3.4)$$

где $L_1 = z_2 - z_1$; $L_2 = z_3 - z_1$.

Подставляя (3.3) и (3.4) в (3.2), получают зависимость входного поля от выходного. В общем случае произвольно расположенных входных и выходных плоскостей получающееся выражение весьма громоздко.

Условия получения изображения

Рассмотрим случай, когда

$$\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} = \frac{1}{f_l}, \quad (3.5)$$

что соответствует условию получения линзой изображения. С точностью до фазового множителя

$$f(x_3, y_3) \sim f\left(-\frac{L_1}{L_2}x_1, -\frac{L_1}{L_2}y_1\right). \quad (3.5)$$

При выполнении условия (3.5) поля изображения и объекта одинаковы, однако изображение объекта воспроизведено перевернутым в масштабе L_1/L_2 .

Преобразование Фурье

Рассмотрим случай, когда $L_1 = L_2 = f_l$. Тогда

$$f(x_3, y_3, z_3) = \frac{\exp\left[i\left(2kf_l + \frac{\pi}{2}\right)\right]}{2\lambda f_l} \int_{-\infty}^{+\infty} \times \quad (3.6)$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, y_1, z_1) \exp\left[i\frac{k}{f_l} x_1 x_3 + y_1 y_3\right] dx_1 dy_1.$$

Интеграл, стоящий в правой части (3.6), представляет собой преобразование Фурье для входного поля, следовательно, линза способна осуществлять двумерное преобразование Фурье.

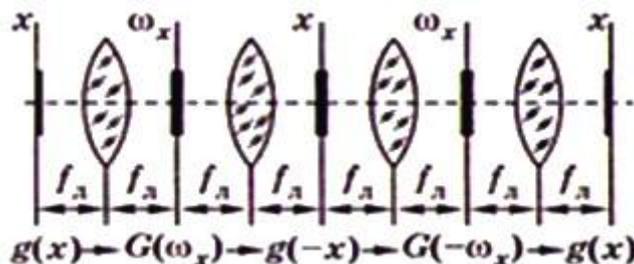


Рис. 3.2. Оптическая схема конфокального линзового волновода

Если повторно производить преобразование Фурье идентичной линзой, у которой входная плоскость совпадает с выходной плоскостью первой линзы, то в выходной плоскости второй линзы вновь получим изображение исходного поля. Таким образом, можно сделать вывод о том, что последовательность идентичных линз, расположенных на расстоянии $2f_l$ друг от друга, способна передавать некоторое распределение электромагнитного поля при сохранении структуры поля. Такую конфигурацию линзового волновода (рис. 3.2) называют конфокальной (софокусной).

3.2. Лазерные резонаторы

Оптический резонатор – колебательная система, предназначенная для накопления энергии электромагнитных колебаний оптического диапазона длин волн на определенных резонансных частотах и определенных пространственных конфигурациях электромагнитного поля, т. е. для формирования пространственно-временного спектра излучения и накопления оптических полей за счет пространственно-временной фильтрации [5].

В оптическом диапазоне резонаторы в подавляющем большинстве случаев – открытые резонаторы, в которых формируются высокодобротные моды только в небольшом телесном угле вблизи оптической оси. Это связано с тем, что линейные размеры резонатора много больше длины волны излучения, и в направлении оптической оси резонатора его размеры больше, чем в поперечном направлении. Для нахождения мод оптического резонатора с помощью дифракционного интеграла находят преобразование поля при полном обходе его световой волной, а затем ставят условие, что преобразованное поле $f(x, y)$ после полного обхода резонатора совпадает с исходным $f(x, y)$ с точностью до постоянной σ . В итоге записывается интегральное уравнение

$$f(x, y) = \sigma \iint f(x_1, y_1) h(x_1, y_1, x, y) dx_1 dy_1 \quad (3.7)$$

для нахождения неизвестной функции $f(x, y)$ – распределения поля в выбранном сечении резонатора – собственной функции интегрального уравнения (моды данного резонатора) и нахождения собственного числа σ . Функция $h(x_1, y_1, x, y)$ – ядро интегрального уравнения. Физический смысл функции $h(x_1, y_1, x, y)$ – отклик системы на δ -функцию Дирака, или, другими словами, $h(x, y)$ – это распределение поля при полном обходе резонатора, если начальным распределением поля являлся точечный источник света.

Собственные функции интегрального уравнения образуют набор ортогональных функций $f_{m,n,q}(x, y)$, где $m, n, q = 0, 1, 2, \dots$ – целые числа, характеризующие число нулей в распределении поля по соответствующей оси координат x, y, z . При $m, n = 0$ собственные функции, отличающиеся только продольным индексом q , это продольные моды резонатора, моды, характеризующиеся распространением вблизи оси пучка – оси z . При $m, n > 0$ собственные функции характеризуют поперечные (угловые) моды, которые распространяются под углами к оптической оси резонатора (чем больше поперечный индекс моды, тем больше углы).

Собственные значения (собственные числа) интегрального уравнения образуют дискретный набор от $\sigma_{m,n,q}$ комплексных чисел. Действительная часть собственного значения $\text{Re} \ln \sigma_{m,n,q}$ характеризует затухание поля $\gamma_{m,n,q}$ при полном обходе резонатора за счет неизбежных потерь света при дифракции на оптических элементах резонатора, за счет потерь, связанных с поглощением и рассеянием света, за счет потерь, связанных с полезным выводом

накопленной энергии из резонатора. Мнимая часть собственного значения $\text{Im } \ln \sigma_{m,n,q} = 2\pi q$ характеризует условие резонанса и определяет собственные частоты резонатора $\omega_{m,n,q}$.

Геометрия резонатора обуславливает структуру мод, поэтому она подбирается в соответствии с конфигурацией её активной среды и условиями наиболее эффективного взаимодействия поля со средой. Резонатор накапливает энергию электромагнитного поля источника излучения тем в большей степени, чем меньше потери энергии в нём.

Затухание энергии в резонаторе вследствие потерь определяется через добротность Q :

$$W = W_0 \exp\left(-\frac{\omega t}{Q}\right). \quad (3.8)$$

Добротность резонатора является интегральной характеристикой и вычисляется как отношение накопленной энергии к энергии, теряемой резонансной системой за единицу времени:

$$Q = \frac{2\pi L}{\lambda} \frac{1}{\gamma}, \quad (3.9)$$

Где L – длина резонатора, а величина $\gamma \ll 1$ характеризует суммарные потери в резонаторе вследствие дифракции, рассеяния излучения на элементах резонатора и вывода излучения из резонатора за счет небольшого пропускания его зеркал.

Дифракционные потери – потери электромагнитной энергии в резонаторе из-за дифракции на краях зеркал. Такие потери растут при уменьшении размеров зеркал и по мере приближения к неустойчивой геометрии резонатора. Наименьшими дифракционными потерями обладают низшие моды, так как для них поле на краю зеркал меньше, чем для высших мод.

Потери, обусловленные аберрациями резонатора, т. е. перекосом зеркал, отступлением от правильной формы поверхности зеркал, оптической неоднородностью среды и оптических элементов резонатора, являются разновидностью дифракционных потерь, поскольку способствуют выводу энергии из резонатора при дифракции излучения на этих оптических неоднородностях.

Нерезонансные потери – обычно распределенные потери, связанные с нерезонансным поглощением, рассеянием в среде, заполняющей резонатор.

Потери на излучение связаны с полезным выводом энергии из резонатора.

Зная добротность, можно вычислить ширину резонансной кривой $\Delta\omega_p = \omega/Q$ и постоянную времени затухания поля в резонаторе (время жизни фотона в резонаторе) $T_p = Q/\omega$.

Моды конфокального резонатора

Решения (3.20), полученные для конфокального линзового волновода, имеют большое значение для теории лазерных резонаторов.

Конфокальному линзовому волноводу можно поставить в соответствие конфокальный резонатор, образованный двумя одинаковыми сферическими зеркалами, расположенными на расстоянии $L = 2f_3$, где f_3 – фокусное расстояние сферического зеркала (рис. 3.3).

Электромагнитное поле, распространяясь между зеркалами резонатора и попеременно отражаясь от них, повторяет структуру поля линзового конфокального волновода. Однако, в отличие от волновода, в резонаторе образуется стоячая электромагнитная волна. Это приводит к дискретному спектру частот, тогда как у волновода спектр частот непрерывен. Условие образования стоячей волны:

$$\text{Im} \ln \gamma_{m,n} = \pi q, \quad (3.10)$$

где $q = 0, 1, 2, \dots$

Найдем собственные частоты резонатора:

$$\omega_{m,n,q} = \frac{\pi c}{2L} (2q + m + n + 1). \quad (3.11)$$

Дифракция поля на краях зеркал приводит к потере мощности при каждом проходе волны и потери

$$\gamma_{\text{дифф}} = 1 - \text{Re} \ln \gamma_{m,n}. \quad (3.12)$$

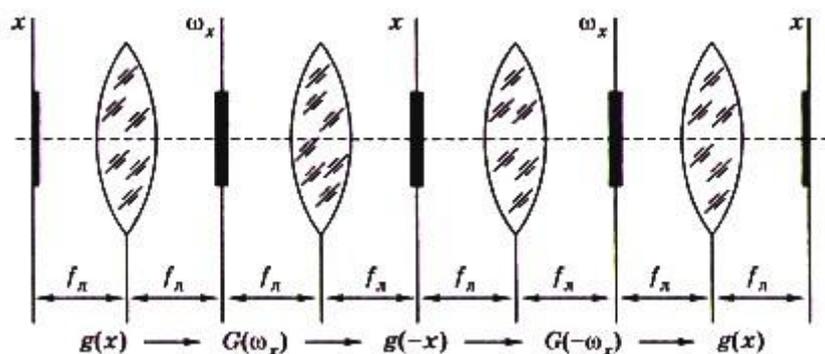


Рис. 3.3. Оптическая схема конфокального резонатора

Моды неконфокального резонатора

На практике часто пользуются неконфокальными резонаторами, образованными двумя сферическими зеркалами, имеющими различные радиусы кривизны b_1 и b_2 (рис. 3.4).

В зависимости от радиусов кривизны зеркал и расстояния между ними резонаторы могут накапливать энергию электромагнитного поля, поддерживая поля, сосредоточенные или не сосредоточенные вблизи оси резонатора. В первом случае резонаторы называют устойчивыми, характеризующимися

малым дифракционным затуханием поля. В неустойчивых резонаторах дифракционное затухание поля велико.

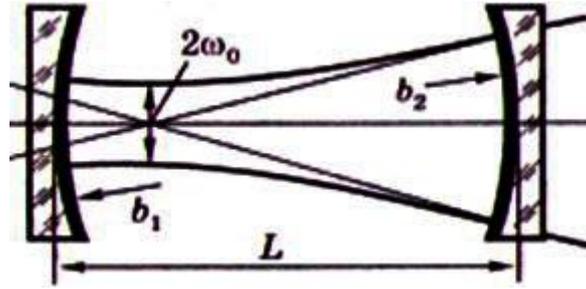


Рис. 3.4. Оптическая схема устойчивого неконфокального резонатора

Условие устойчивости резонатора:

$$|g_1 g_2| = \left| \left(1 - \frac{L}{b_1} \right) \left(1 - \frac{L}{b_2} \right) \right| < 1, \quad (3.13)$$

где $g_1 = 1 - L/b_1$; $g_2 = 1 - L/b_2$. Распределение поля в неконфокальных устойчивых резонаторах (рис. 3.4) можно рассчитать, если воспользоваться выражениями раздела 2, в котором было показано, что пучки Эрмита-Гаусса, распространяясь в свободном пространстве, изменяют лишь радиус пучка и кривизну сферического волнового фронта. Располагая зеркала резонатора таким образом, чтобы кривизна зеркала совпадала с кривизной фронта пучка, можно получить гауссово распределение поля в произвольном устойчивом резонаторе. При этом радиусы гауссова пучка на зеркалах

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\lambda}{\pi} b_{1,2} \sqrt{L} \left[\frac{b_{2,1} - L}{b_{1,2} - L} \frac{1}{b_1 + b_2 - L} \right]^{1/2}, \quad (3.14)$$

а собственные частоты резонатора

$$\omega_{m,n,q} = \frac{\pi c}{L} \left\{ q + \frac{1}{\pi} (m+n+1) \arccos \left[\left(1 - \frac{L}{b_1} \right) \times \left(1 - \frac{L}{b_2} \right) \right]^{-1/2} \right\}. \quad (3.15)$$

Анализ решений интегральных уравнений показывает, что характеристики оптического резонатора зависят от обобщенных параметров резонатора:

$$g_1 = 1 - \frac{L}{b_1}; \quad g_2 = 1 - \frac{L}{b_2}; \quad C_1 = \frac{2\pi a_1^2}{\lambda L}; \quad C_2 = \frac{2\pi a_2^2}{\lambda L},$$

где b , $2a$ – радиус кривизны и диаметр зеркала; L – расстояние между зеркалами.

Для качественной оценки дифракционных потерь в резонаторе можно воспользоваться двумя параметрами g_1 и g_2 . Если каждому резонатору поставить в соответствие точку на плоскости с координатами g_1 , g_2 , то области малых дифракционных потерь (незаштрихованные области на рис. 3.5) соответствует условие $0 < g_1 g_2 < 1$, а области больших дифракционных

потерь (заштрихованные области на рис. 3.5) условие $g_1 g_2 < 0$; $g_1 g_2 > 1$. Отметим, что ранее в зависимости от выполнения этих условий резонаторы классифицировались на устойчивые и неустойчивые.

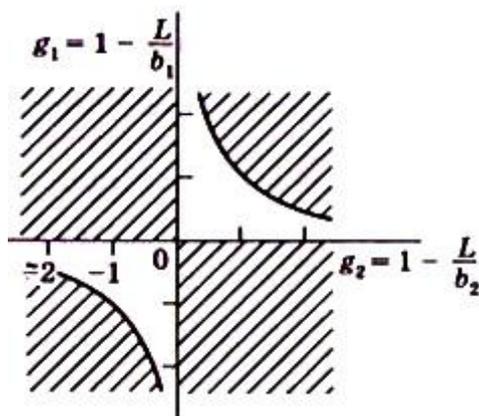


Рис. 3.5 Диаграмма устойчивости резонаторов

Конфокальный резонатор ($b_1 = b_2 = L$) на диаграмме устойчивости характеризуется точкой в начале координат $g_1 = g_2 = 0$ и имеет малые дифракционные потери. Однако при разработке оптической схемы резонатора необходимо учитывать, что конфокальный резонатор находится на границе устойчивой и неустойчивой областей и небольшие изменения параметров резонатора могут привести к резкому возрастанию потерь. Резонатору с плоскопараллельными отражателями на диаграмме устойчивости соответствует точка с координатами $g_1 = g_2 = 1$ также лежащая на границе устойчивости. Аналогичным свойством обладает концентрический резонатор

$$g_1 = g_2 = -1; (b_1 = b_2 = 2L).$$

Селекция поперечных мод

С числом поперечных мод лазера связаны такие важные характеристики излучения, как пространственная и временная когерентности. Зависимость степени пространственной когерентности $\gamma_k r$ от числа мод t приближенно может быть оценена выражением

$$\gamma_k r = \frac{\sin \frac{\pi m r}{4 a n}}{m \sin \frac{\pi r}{4 a n}},$$

где r – расстояние между точками наблюдения; $2a$ – диаметр зеркала; n – показатель преломления.

Аналогичное выражение можно получить для временной когерентности:

$$|\gamma_k \tau| = \frac{\sin 0,5 m \Delta \omega_m \tau}{m \sin 0,5 m \Delta \omega_m \tau}, \quad (3.16)$$

где $\Delta \omega_m$ – частотный интервал между поперечными модами.

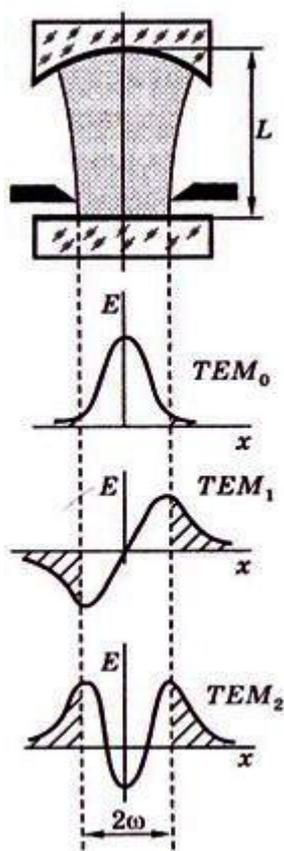


Рис. 3.6. Схема селекции поперечных мод в оптическом резонаторе с помощью диафрагмы

Нетрудно убедиться, что пространственная и временная когерентности быстро падают при увеличении числа мод, поэтому важнейшей технической задачей является создание одномодовых лазеров.

Методы селекции поперечных мод основаны на разработке резонаторов, обеспечивающих высокую добротность только для одной моды в пределах линии усиления активной среды. Используя различное распределение поля в поперечном направлении для поперечных мод, можно значительно снизить добротность всех мод, кроме одной, за счет увеличения дифракционных потерь. Увеличение дифракционных потерь подавляемых мод осуществляют диафрагмированием, т.е. ограничением области распространения поля для всех мод, кроме выделяемой (рис. 3.6). Если выделяемая мода TEM_{00q} , то селекцию мод высших порядков производят путем уменьшения числа Френеля за счет уменьшения размеров отражателей или его диафрагмирования, увеличения длины резонатора или уменьшения диаметра активного элемента. Кроме того, существуют методы селекции поперечных мод, основанные на использовании отражателей с повышенной угловой селективностью. Поперечные моды иногда называют угловыми, подчеркивая тот факт, что направление максимума излучения моды зависит от номеров ее поперечных индексов.

Призмленные отражатели, работающие вблизи критического угла полного внутреннего отражения, имеют резко выраженную зависимость коэффициента отражения от угла падения излучения, а поэтому успешно используются в твердотельных лазерах для селекции поперечных мод.

Селекция продольных мод

Увеличение числа продольных мод в излучении лазера вызывает уменьшение временной когерентности излучения. Для большинства случаев применения лазеров требуется излучение на одной частоте, что можно получить, если условия самовозбуждения выполняются лишь для одной, имеющей большую добротность моды.

Частотный интервал $\Delta\omega_q$ между продольными модами определяется расстоянием L между отражателями: $\Delta\omega_q = \pi c/nL$, поэтому уменьшением L можно добиться условия, когда $\Delta\omega_q$ станет больше полосы усиления активной

среды. Однако при использовании коротких резонаторов невозможно получить большую выходную мощность излучения.

Наиболее распространены методы селекции продольных мод, основанные на применении высокоселективных отражателей или фильтров.

Примером высокоселективных по частоте отражателей или фильтров могут служить многолучевые, двухлучевые интерферометры, двухлучевые интерферометры с поглощающим или рассеивающим свет передним зеркалом. Выбор того или иного метода селекции продольных мод зависит от способа изготовления селектора, величины потерь, вносимых в выделяемую моду, и стабильности параметров селектора во времени.

Синтез оптических резонаторов

Основной задачей теории оптических резонаторов является отыскание структуры мод и соответствующих им частот и потерь, если известна геометрия оптической структуры резонатора. Эта задача была сведена к задаче определения собственных функций и значений интегрального уравнения. Было выяснено, что собственные функции, соответствующие собственным значениям, взаимно ортогональны и описывают распределение поля мод на отражателях, а собственные значения интегрального уравнения образуют дискретную последовательность, позволяющую вычислить спектр частот и потерь мод.

Представляют интерес и обратные задачи – задачи синтеза оптической структуры резонатора по известному спектру собственных значений и по собственным функциям – модам резонатора. Задачи синтеза резонатора возникают при необходимости иметь для практических приложений резонатор с требуемыми модовыми и спектральными характеристиками.

Синтез амплитудно-фазового корректора

Разобьем задачу синтеза резонатора на две. Сначала по заданной конфигурации поля найдем оптическую структуру тонкого амплитудно-фазового корректора, т. е. определим поперечную геометрию резонатора, а затем по заданному спектру моды синтезируем продольную геометрию резонатора.

Ранее показано, что для расчета оптические линзовые волноводы и резонаторы могут быть представлены в виде периодической последовательности оптических элементов. Рассмотрим случай, когда искомая оптическая структура образована периодической последовательностью амплитудно-фазовых корректоров, расположенных на расстоянии L друг от друга. Тогда электромагнитное поле в стационарном режиме также должно периодически повторяться в сечениях на расстоянии L .

Запишем это условие для сечений, непосредственно расположенных за амплитудно-фазовыми корректорами

$$f(x_1, y_1) = g(x_1, y_1) \frac{i}{\lambda L} \exp(ikL) \int_S f(x, y) \times \exp\left[i \frac{k}{2L} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\right] dx dy, \quad (3.17)$$

где $f(x, y)$ – заданная функция, описывающая конфигурацию поля; $g(x_1, y_1)$ – искомая функция пропускания амплитудно-фазового корректора; S – область интегрирования, на которой задана квадратично-интегрируемая функция $f(x, y)$ из класса ортогональных функций на S .

Согласно (3.17) выражение для искомого пропускания амплитудно-фазового корректора имеет вид

$$g(x_1, y_1) = \frac{\lambda L \exp(-ikL) f(x_1, y_1)}{\int_S f(x, y) \exp\left[i \frac{k}{2L} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\right] dx dy}. \quad (3.18)$$

Функция $g(x_1, y_1)$ физически реализуема, если знаменатель не имеет нулей на S или нули знаменателя совпадают с нулями числителя.

Проведем синтез резонатора, в котором конфигурация поля представляет собой пучок Эрмита-Гаусса. Выше было показано, что гауссовы пучки, распространяясь в свободном пространстве, остаются подобными себе и являются модами конфокального резонатора. Используя выражение для пучков Эрмита-Гаусса в (3.18), получим выражение для пропускания амплитудно-фазового корректора:

$$g(x_1, y_1) = \frac{\omega_2}{\omega_1} \exp(i\varphi) \left[-r^2 \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) \right] \frac{H_n\left(\sqrt{2} \frac{x_1}{\omega_1}\right) H_m\left(\sqrt{2} \frac{y_1}{\omega_1}\right)}{H_n\left(\sqrt{2} \frac{x_1}{\omega_2}\right) H_m\left(\sqrt{2} \frac{y_1}{\omega_2}\right)}, \quad (3.19)$$

$$\varphi = kL - m + n + 1 \left[\arctg \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} - \arctg \frac{\lambda(z+L)}{\pi \omega_0^2} \right] + \frac{\pi r^2}{\lambda} \left[\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} \right]. \quad (3.20)$$

В выражении (3.19) введены обозначения, аналогичные формулам во 2 разделе, кроме того, $\omega_1 \equiv \omega(z)$, $\omega_2 \equiv \omega(z+L)$. Область интегрирования S лежит от $-\infty$ до $+\infty$.

Анализ (3.19) показывает, что при $\omega_1 = \omega_2$ корректор чисто фазовый, а конфигурация резонатора соответствует конфигурации устойчивого неконфокального резонатора. Последнее слагаемое в (3.20) определяет квадратичную фазовую коррекцию корректора, т. е. соответствует выражению для тонкой линзы. При $b_1 = b_2 = L$ резонатор конфокальный.

Представляет интерес случай, когда $\omega_1 \neq \omega_2$. Корректор физически реализуем при $\omega_1 < \omega_2$ для мод с индексами $m, n = 0, 1$. Это соответствует амплитудно-фазовому корректору с квадратичной фазовой коррекцией и гауссовым амплитудным пропусканием. Для возможности поддержания пучков Эрмита-Гаусса оптическая система должна содержать активную среду с

усилением, пропорциональным ω_2/ω_1 для моды $m,n=0$, и ω_2^3/ω_1^3 для моды $m,n=1$. Моды $m,n>1$ физически нереализуемы. Корректор служит селектором поперечных мод.

Аналогичная ситуация возникает в случае синтеза корректора с более сложной передаточной функцией резонатора, которая реализуется для оптически неоднородных сред, свойственных большинству лазеров. Если синтезируется чисто фазовый корректор, то оптический резонатор способен поддерживать большое число высокочастотных поперечных мод. Амплитудно-фазовый корректор ограничивает набор поперечных мод.

Синтез амплитудно-фазового корректора целесообразно использовать в случае лазеров с неоднородными средами, когда информация для расчета корректора может быть получена лишь экспериментально, путем анализа заданного, например, гауссова пучка, прошедшего неоднородную среду, в плоскости установки корректора.

Синтез частотного фильтра

После синтеза поперечной структуры резонатора, имеющего заданный набор поперечных мод, можно синтезировать его продольную структуру, обладающую заданным спектром продольных мод. Спектр продольных мод зададим через спектральную зависимость амплитудного коэффициента отражения отражателя. Пусть спектральная характеристика отражателя $F(\omega)$ задана суммой вида:

$$F(\omega) = \sum_n 2\pi\rho_n e^{i\omega t_n}, \quad (3.21)$$

где ρ_n – амплитудный коэффициент отражения отражателя. Обратное преобразование Фурье (3.21) есть последовательность временных импульсов:

$$f(t) = \sum_n \rho_n \delta_D(t - t_n), \quad (3.22)$$

где $t_n = \sum_n \frac{2}{c} n_n z_n$ – время возвращения отраженного импульса излучения от границы раздела сред. Для слоистой среды время возвращения t_1 первого импульса определяет расстояние до первой границы раздела сред, а ρ_1 – коэффициент отражения первой границы раздела сред. Последующие импульсы возникают в результате многократных взаимных отражений от границ разделов сред. Если перенести начало координат на первую границу раздела сред, то спектральная характеристика оставшейся оптической структуры будет иметь вид

$$F'(\omega) = \frac{F(\omega) - \rho_1}{1 - \rho_1 F(\omega)}. \quad (3.23)$$

Параметры слоистой среды: показатель преломления n_s и толщину слоя l_s определяют последовательно от слоя s к слою $s+1$ по рекуррентным соотношениям

$$n_{S+1} = n_S \frac{1 + \rho_S}{1 - \rho_S}; i_S = \frac{t_S c}{n_S}, \quad (3.24)$$

где $\rho_S = \sup \lim_{t=t_S=t_{\min}} \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{F_{S-1}(\omega) - \rho_{S-1}}{1 - \rho_{S-1} F_{S-1}(\omega)} e^{i\omega t} d\omega$.

Если заданная спектральная характеристика $F(\omega)$ периодична, то усреднение производят по периоду Ω , а задержку по времени $t=\Omega^{-1}$. В этом случае

$$\rho_S = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{F_{S-1}(\omega) - \rho_{S-1}}{1 - \rho_{S-1} F_{S-1}(\omega)} e^{i\omega/\Omega} d\omega. \quad (3.25)$$

Решение этой обратной задачи оптики слоистых сред целесообразно использовать в случае необходимости проектирования многослойных диэлектрических зеркал с заданными спектральными свойствами.

Вопросы для самопроверки.

1. Вычислите параметры A, B, C, D неконфокального резонатора. Рассчитайте комплексный параметр q для устойчивого неконфокального резонатора, записав матричное уравнение (2.30) в виде $q = \frac{Aq + B}{Cq + D}$. Получите

условие устойчивости резонатора.

2. Используя зависимость (3.15), определите расстояние между ближайшими резонансными частотами продольных мод неконфокального резонатора, т.е. разность $\omega_{m,n(q+1)} - \omega_{m,n,q}$ и расстояние между поперечными модами, т.е. величину $\omega_{m+1,m,q} - \omega_{m,n,q}$. Покажите, что расстояние по шкале частот между поперечными модами в

$$\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{g_1 g_2}$$

раз меньше, чем расстояние между продольными модами.

3. Найдите отношение радиуса лазерного пучка в неконфокальном резонаторе к минимальному радиусу лазерного пучка в конфокальном резонаторе. Покажите, что это отношение стремится к бесконечности по мере приближения к неустойчивой конфигурации резонатора.

4. Выражение для дифракционных потерь в неустойчивом резонаторе приведено для сферических зеркал. Получите выражение для потерь в неустойчивом резонаторе с цилиндрическими зеркалами.

5. Синтез амплитудно-фазового корректора в оптическом резонаторе по заданному поперечному распределению лазерного поля свелся к замене решения интегрального (3.17) на решение алгебраического (3.18) уравнения. Покажите, что если распространение электромагнитного поля задано волновым дифференциальным уравнением, то, задавая распределение поля по соответствующей координате, например, $E(x)$, можно синтезировать закон

изменения показателя преломления диэлектрического волновода аналогичным приемом:

$$n^2(x) = n_0^2 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \frac{d^2 E(x)}{E(x) dx^2}.$$

6. Используя выражение для $n^2(x)$ из задачи 6, покажите, что если потребовать распространения гауссова пучка по диэлектрическому волноводу, то показатель преломления волновода должен плавно уменьшаться от оси волновода по параболическому закону.

7. Используя (3.21)-(3.25), синтезируйте оптическую структуру, дающую постоянное значение энергетического коэффициента отражения на всех частотах и линейное изменение фазового набега волны от частоты.

8. Покажите, что если частотная характеристика амплитудного коэффициента отражения оптической структуры

$$R(\omega) = \frac{0,9 + 0,8 \exp[i10 - 9\omega]}{1 + 0,72 \exp[i10 - 9\omega]},$$

то оптическая структура представляет собой интерферометр Фабри-Перо, образованный двумя зеркалами, отстоящими на расстоянии 15 см друг от друга, с амплитудными коэффициентами отражения $r_1=0,9$ и $r_2=0,8$.

4. Физические основы взаимодействия квантовых систем с электромагнитным полем

Электромагнитному излучению присущи не только волновые свойства (характеризуемые частотой ν и длиной волны λ), но и корпускулярные свойства.

В основе квантовой и оптической электроники лежит подтвержденное на опыте представление о дискретности электромагнитного излучения при его взаимодействии с микрочастицами (электронами, атомами, молекулами). Кванты электромагнитного поля – фотоны – являются при данной частоте ν поля носителями минимально возможной энергии $W=h\nu=\hbar\omega$ и импульса $p=h/\lambda$, где h – постоянная Планка [6]. Взаимодействие электромагнитного излучения с микрочастицами, а также с квантовыми системами – ансамблями микрочастиц, рассматривается как излучение и поглощение фотонов.

В квантовой электронике решающую роль играет вынужденное взаимодействие излучения с квантовыми системами. Только вынужденное (индуцированное) взаимодействие излучения с квантовыми системами вынуждает их отдавать накопленную энергию в виде когерентного излучения. Когерентно взаимодействуя с квантовыми системами, индуцирующее излучение усиливается. Но усиление возможно только в том случае, когда оно преобладает над параллельно идущим обратным процессом поглощения падающего на квантовую систему излучения.

Очень часто, накопив энергию, квантовая система может потерять ее, не вступая во взаимодействие с внешним по отношению к квантовой системе вынуждающим электромагнитным полем, самопроизвольно (спонтанно) не когерентно излучая фотоны или затрачивая избыточную энергию на тепловые или акустические колебания. Поэтому основной проблемой квантовой электроники является проблема создания условий, при которых усиление будет преобладающим процессом.

Долгое время это представлялось невозможным, противоречащим классической термодинамике Больцмана, согласно которой чем выше энергия квантовой системы в ансамбле аналогичных систем, тем меньше число таких систем (меньше населенность энергетического уровня). И только революционные идеи основоположников квантовой электроники, предложивших способы создания инверсии населенностей энергетических уровней, привели к созданию принципов усиления, генерации и спектрального преобразования оптического излучения.

4.1. Уравнение Шредингера

Выше было показано, что распространение электромагнитных волн подчиняется волновому уравнению (1.1), которое при отсутствии проводимости среды записывают в виде

$$\nabla^2 E = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (4.1)$$

Если искать его решение в виде выражения для плоских волн $E = \psi e^{i\omega t}$, где ψ – функция только координат, то волновое уравнение имеет вид

$$\nabla^2 \psi + n^2 k_0^2 \psi = 0, \quad (4.2)$$

где k_0 – волновое число в вакууме.

Уравнения геометрической оптики, приводящие к лучевому описанию распространения света, могут быть выведены из волнового уравнения (4.2).

Согласно классической механике частицы движутся вдоль определенных траекторий. Траектории материальных частиц в поле сил совпадают с траекториями лучей в неоднородной оптической среде. Эта аналогия заставляет предполагать существование волнового уравнения механики. Уравнение волновой механики, аналогичное (4.2), может быть записано при допущениях, что $n k_0$ пропорционально импульсу частицы p , а длина волны частицы в свободном пространстве равна h/p . Этим условиям удовлетворяет уравнение, выведенное Шредингером и по форме совпадающее с (4.2):

$$\nabla^2 \psi_0 + \frac{2}{\hbar^2} m_{\text{ч}} (W - W_n) \psi_0 = 0, \quad (4.3)$$

где $m_{\text{ч}}$ – масса частицы; W – полная энергия; W_n – потенциальная энергия. Функцию ψ_0 называют волновой функцией. Чтобы перейти от приведенного волнового уравнения Шредингера к временному уравнению, воспользуемся допущением де Бройля о соответствии соотношений между энергией и частотой для материальных частиц и фотонов:

$$W = m_{\text{ч}} c^2 = \hbar \omega. \quad (4.4)$$

Тогда

$$\omega = \hbar^2 W; \psi = \psi_0 \exp[i\hbar^{-1} W t]; \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} W \psi_0 \exp[i\hbar^{-1} W t];$$

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 \psi_0 \exp[i\hbar^{-1} W t] / \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) и (4.5) в (4.3), получают

$$\frac{\hbar^2}{2m_{\text{ч}}} \nabla^2 \psi + W_n \psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) является основным для дальнейшего анализа работы квантового прибора. Впервые введенная для описания поведения микрочастиц

во времени и пространстве, в дальнейшем оно было использовано при рассмотрении излучения (теория фотонов Эйнштейна) и взаимодействия излучения с веществом.

4.2. Энергетический спектр состояний

Совокупность стационарных состояний микрочастиц с постоянной энергией – энергетический спектр – одна из основных характеристик квантовых систем.

Энергетический спектр может быть как дискретным, так и непрерывным. Стационарное состояние дискретного спектра всегда соответствует связанному, ограниченному движению микрочастицы, т. е. финитному движению, при котором квантовая система или ее часть не уходит в бесконечность. Напротив, стационарные состояния непрерывного спектра соответствуют неограниченному движению квантовой системы.

Движение микрочастиц среды во внешних электрических и магнитных полях и полях других микрочастиц подчиняется уравнению Шредингера (4.7), которое записывают в виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi. \quad (4.8)$$

Волновая функция полностью описывает физическое состояние микрочастицы во времени и пространстве. Линейная зависимость, определяемая оператором H , соответствует функции Гамильтона, характеризующей в механике энергию системы, выраженную через обобщенные координаты и импульсы системы.

Линейный оператор Гамильтона H системы определяет энергию микрочастицы, если она не находится в переменных внешних полях. При этом волновые функции ψ являются собственными волновыми функциями ψ_n оператора Гамильтона H_0 , не зависящими от времени, т. е. удовлетворяющими уравнению

$$\hat{H}_0 \psi_n = W_n \psi_n. \quad (4.9)$$

Функции для которых энергия имеет определенное значение W_n , называют стационарными состояниями микрочастицы.

Стационарное состояние с наименьшим из всех возможных значений энергии считают основным, а все остальные – возбужденными. Среди различных стационарных состояний могут встречаться такие, которые соответствуют одним и тем же значениям энергии, отличаясь значениями других физических величин. Такие значения энергии, или такие уровни энергии, называют вырожденными. Энергетический спектр системы – множество всех возможных значений энергии, соответствующих стационарным состояниям квантовой системы. Энергетический спектр может быть как

дискретным, так и непрерывным. Стационарное состояние дискретного спектра всегда соответствует связанному, ограниченному движению микрочастицы, т.е. финитному движению, при котором квантовая система или ее часть не уходит в бесконечность. Напротив, стационарные состояния непрерывного спектра соответствуют неограниченному движению квантовой системы.

Энергетический спектр атома во внешнем электрическом или магнитном полях

Под действием внешнего электрического или магнитного поля нарушается симметрия электрического внутриатомного поля, что приводит к снятию вырождения уровней энергии. Расщепление уровней в магнитном поле называют эффектом Зеемана, в электрическом – эффектом Штарка. Величина расщепления уровней в слабом магнитном поле пропорциональна напряженности магнитного поля (рис. 4.1); при эффекте Штарка может наблюдаться линейное и квадратичное изменение расстояния между уровнями в случае изменения напряженности электрического поля.

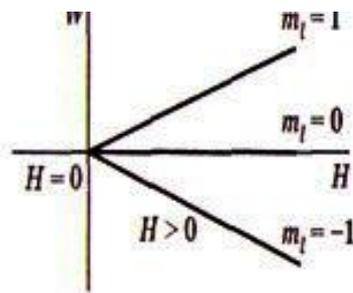


Рис.4.1. Зависимость энергии W от напряженности магнитного поля H при $l_a = 1$

Энергетический спектр взаимодействующих частиц усложняется по сравнению со спектром одной частицы в потенциальном поле. Наиболее существенным является расщепление уровней энергии на подуровни, число которых зависит от числа взаимодействующих частиц, а расстояние между ними – от степени взаимодействия частиц. Это общее свойство связанных колебательных контуров любой природы. Движение отдельной частицы происходит в поле всех взаимодействующих частиц, что снимает вырождение энергетических уровней. В многоэлектронных атомах энергия электрона увеличивается не только с ростом n , но и l_a . В системе взаимодействующих частиц появляются дополнительные степени свободы: колебательные и вращательные относительные движения отдельных частей квантовой системы. Для связанных финитных движений это приводит к дополнительным дискретным спектрам, определяющим дополнительную энергию колебательного и вращательного движений в квантовой системе.

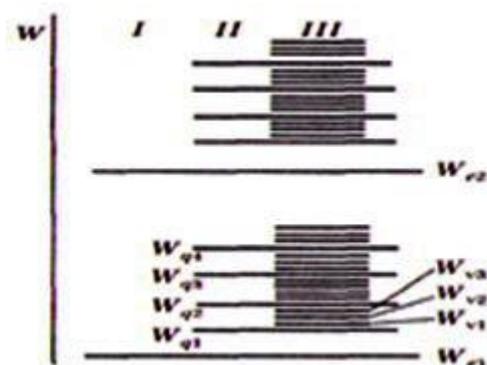


Рис.4.2. Энергетическая диаграмма двухатомной молекулы: I- электронный спектр; II- электронно-колебательный спектр; III- электронно-колебательно-вращательный спектр

На рис. 4.2 показана энергетическая диаграмма двухатомной молекулы, где W_e – электронные, W_q – колебательные и W_η – вращательные уровни энергии.

Энергетические зоны в кристаллах

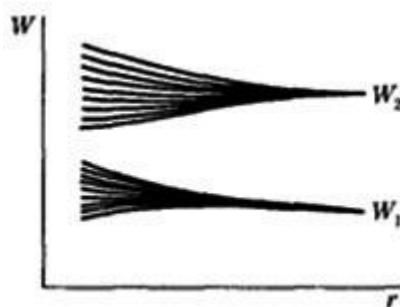


Рис. 4.3. образование энергетических зон при уменьшении расстояния между взаимодействующими атомами

Если частица входит в упорядоченный ансамбль n взаимодействующих тождественных частиц, то система из $m(2l_a + 1)$ подуровней образует зону разрешенных энергетических состояний (рис. 4.3). Разрешенные зоны энергетических состояний разделены запрещенными зонами. Упорядоченный ансамбль взаимодействующих тождественных частиц представляет собой кристалл, называемый собственным, в отличие от примесного кристалла, в котором имеется небольшое количество частиц – примеси. Если концентрация частиц примеси незначительна, то их взаимодействие между собой мало и они создают в запрещенной зоне локальные энергетические уровни. При увеличении концентрации примесей образуется примесная зона. При еще больших концентрациях примесные зоны перекрываются с энергетическими зонами матрицы кристалла.

4.3. Однофотонные квантовые переходы

Переход квантовой системы с одного уровня энергии на другой сопровождается дискретным изменением энергии системы на величину, равную разности энергий уровней. Переход на более высокий уровень энергии сопровождается поглощением энергии от источника возмущения, а обратные переходы – потерей энергии.

Излучательные и безызлучательные переходы

Переход квантовой системы, сопровождающийся потерей энергии, равной $W_m - W_n$, может происходить при испускании электромагнитного излучения с частотой $\omega_{mn} = (W_m - W_n)/\hbar$.

Множество всех излучательных переходов с верхних уровней на нижние представляет собой спектр излучения квантовой системы. В случае безызлучательных переходов энергия перераспределяется между взаимодействующими квантовыми системами.

Вероятность существования излучательных переходов определяется правилами отбора, согласно которым переходы наиболее вероятны между уровнями, квантовые числа которых отличаются на величины $\Delta m = 0; \pm 1; \Delta l_a = \pm 1$ для дипольных переходов; $\Delta m = 0; \pm \Delta l_a; \Delta l_a = 0$ для магнитных переходов; $\Delta m = 0; \pm 1; \pm 2; \Delta l_a = 0; \pm 2$ для квадрупольных переходов. Переходы, удовлетворяющие этим условиям, называют разрешенными, а не удовлетворяющие – запрещенными. Для запрещенных переходов вероятность перехода очень мала. Энергетические уровни, с которых запрещены все переходы вниз, называют метастабильными. Безызлучательные переходы также можно характеризовать вероятностями переходов, которые определяются процессами перераспределения энергии взаимодействующих квантовых систем (например, при столкновении).

Вероятности переходов под действием возмущений вычисляют в соответствии с уравнением Шредингера (4.8), в котором оператор возмущения $H_1(t)$ определяют так, что полный гамильтониан

$$\hat{H}(x, t) = \hat{H}_0(x) + \hat{H}_1(t); \quad x = (x, y, z). \quad (4.10)$$

Решение уравнения (4.8) с гамильтонианом (4.10) можно разложить в ряд по полной ортонормированной системе функций ψ_n удовлетворяющих уравнению (4.9)

$$\psi(x, t) = \sum_n a_n(t) \psi_n(x) \left[-i \frac{W_n T}{\hbar} \right] \quad (4.11)$$

Подставляя (4.11) в (4.8) с учетом (4.10), умножая левую и правую части уравнения на ψ_n и интегрируя по координатам при использовании условий ортонормированности собственных функций

$$\Psi_n^* \Psi_m = \int \Psi_n^* \Psi_m dx = \delta_{mn},$$

получаем

$$\frac{da_m}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \sum_n a_n \hat{H}_{mn} \exp[i\omega_{mn}t], \quad (4.12)$$

где

$$\hat{H}_{mn} = \int \Psi_n^* \hat{H}_1(t) \Psi_m dx, \quad (4.13)$$

$$\hat{\omega}_{mn} = \frac{W_m - W_n}{\hbar}. \quad (4.14)$$

Поскольку коэффициенты a_n зависят от времени, то в общем случае решение системы линейных дифференциальных уравнений не может быть найдено точно. Решение можно искать методом теории возмущений путем последовательных приближений по степеням малости H_{mn} .

Если предположить, что энергия возмущения мала по сравнению с полной энергией системы, то изменения коэффициентов $a_m(t)$ незначительны относительно стационарных коэффициентов $a_m(0)$. Ограничиваясь первым приближением и считая, что система в момент времени $t=0$ находилась в состоянии n , найдем, что выражение (4.12) примет вид

$$\frac{da_{mn}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H_{mn} \exp(i\omega_{mn}t). \quad (4.15)$$

Величина $|a_{mn}|^2$ представляет собой вероятность перехода квантовой системы к моменту времени t в состояние W_m . В зависимости от вида возмущения $H_1(t)$ меняется и вероятность квантового перехода.

Использованное приближение приводит к переходам первого порядка. Если величина (4.13) отлична от нуля, то и вероятность перехода $|a_{mn}|^2 > 0$. Это соответствует разрешенным переходам. Если $H_{mn} = 0$, то соответствующие переходы запрещены.

Если возмущение гармонически изменяется во времени

$$\hat{H}_1(t) = H_1 e^{-i\omega t} + H_1^* e^{i\omega t}, \quad t > 0; \quad (4.16)$$

$$\hat{H}_1(t) = 0, \quad t < 0.$$

то подстановка (4.16) в (4.15) и интегрирование приводят к

$$a_{mn} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H_{mn}(t_1) e^{i\omega_{mn}t_1} dt_1 = \frac{1}{\hbar} \left[H_{mn} \frac{\exp[i(\omega_{mn}-\omega)t] - 1}{\omega_{mn} - \omega} + H_{mn}^* \frac{\exp[i(\omega_{mn}+\omega)t] - 1}{\omega_{mn} + \omega} \right]. \quad (4.17)$$

Вероятность перехода системы $|a_{mn}|^2$ в состояние W_m носит резонансный характер в соответствии с (4.17) и максимальна в случае $\omega_{mn} = \pm\omega$, т. е. гармоническое возмущение с частотой ω может вызвать переходы с излучением энергии с вероятностью

$$|a_{mn}| = \frac{4|H_m|^2 \sin^2 0.5(\omega_{mn} - \omega)t}{\hbar^2 (\omega_{mn} - \omega)^2} \quad (4.18)$$

и поглощением энергии с вероятностью

$$|a_{mn}| = \frac{4|H_m|^2 \sin^2 0.5(\omega_{mn} + \omega)t}{\hbar^2 (\omega_{mn} + \omega)^2}. \quad (4.19)$$

Переходы, индуцированные электромагнитным полем, следует определять как частный случай гармонического возмущения квантовой системы.

Пусть плоско поляризованный пучок света распространяется вдоль оси z . Вектор \mathbf{E} направлен по оси x . Рассмотрим квантовую систему как совокупность зарядов, смещающихся из стационарных положений равновесия под действием электрического поля световой волны. Основываясь на предположении о малости размеров квантовой системы по сравнению с длиной волны излучения, дипольный момент квантовой системы под действием электрического поля E_x волны можно записать в виде

$$d_x = ex, \quad (4.20)$$

где e – заряд электрона, x – смещение электрона под действием электромагнитного поля. Энергия взаимодействия

$$H = E_x d_x. \quad (4.21)$$

Полагая, что при $z = 0$

$$E_x = E_{0x} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] \quad (4.22)$$

и, подставляя (4.21) в (4.17), найдем

$$a_{mn} = \frac{ex_{mn} E_{0x}}{\hbar} \left[\frac{e^{i(\omega_{mn} - \omega)t} - 1}{\omega_{mn} - \omega} + \frac{e^{i(\omega_{mn} + \omega)t} - 1}{\omega_{mn} + \omega} \right]. \quad (4.23)$$

Вероятность перехода квантовой системы с излучением согласно (4.18)

$$|a_{mn}|^2 = \frac{4e^2 x_{mn}^2 E_{0x}^2 \sin^2 0.5(\omega_{mn} - \omega)t}{\hbar^2 (\omega_{mn} - \omega)^2}, \quad (4.24)$$

а вероятность перехода с поглощением энергии

$$|a_{mn}|^2 = \frac{4e^2 x_{mn}^2 E_{0x}^2 \sin^2 0.5(\omega_{mn} + \omega)t}{\hbar^2 (\omega_{mn} + \omega)^2}, \quad (4.25)$$

Поскольку $|a_{mn}|$ пропорциональна E^2 , то вероятность перехода под действием электромагнитного поля пропорциональна плотности энергии излучения, причем вероятности индуцированного полем излучения и поглощения одинаковы.

4.4. Населенность энергетических уровней

При переходе к макроскопическим объектам, состоящим из большого числа элементарных квантовых систем (электронов, атомов, молекул и т. д.),

приходится рассматривать распределения квантовых систем по стационарным состояниям внутри макроскопического ансамбля.

Распределение Больцмана

Если рассмотреть макроскопический ансамбль слабо взаимодействующих, одинаковых, но различимых квантовых систем, то его можно характеризовать числами квантовых систем N_m , находящихся в стационарном состоянии с энергией W_m . Множество чисел N_m представляет собой распределение населенностей квантовых систем по энергетическим уровням внутри ансамбля. По статистике Больцмана, распределение по энергиям внутри невырожденного ансамбля квантовых систем, находящихся в термодинамическом равновесии друг с другом и окружающей средой при температуре T :

$$N_m = N_n \exp\left[\frac{W_n - W_m}{kT}\right], \quad (4.26)$$

где $W_m > W_n$.

Соотношение (4.26) показывает, что чем больше энергия уровня, тем меньшее число квантовых систем имеет эту энергию (рис. 4.4а). Термодинамическое распределение Больцмана соответствует условиям, в которых обычно работают квантовые приборы (условиям слабого взаимодействия невырожденных квантовых систем).

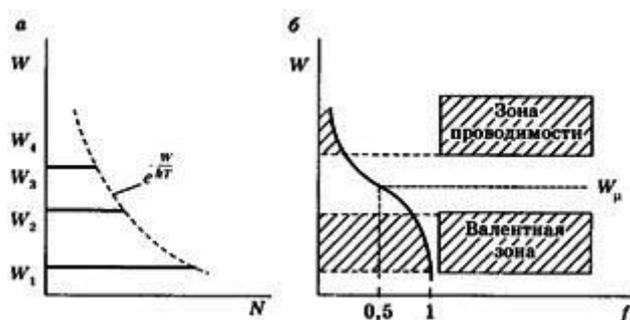


Рис.4.4. Распределение населенностей энергетических уровней:

а – распределение Больцмана в условиях термодинамического равновесия; б – распределение в валентной зоне и зоне проводимости собственного полупроводника

Равновесное распределение вырожденных квантовых систем по состояниям вычисляют методами квантовой статистики.

Распределение Ферми-Дирака

Если вычислять вероятность распределения квантовых систем с полуцелым спином по энергиям с учетом неразличимости квантовых систем, то получают следующее выражение для вероятности заполнения состояния с энергией W :

$$f = \frac{1}{\exp\left[\frac{W - W_\mu}{kT}\right] + 1}, \quad (4.27)$$

где W_μ – химический потенциал или уровень Ферми (рис. 4.56).

Распределение Бозе-Энштейна

Такое распределение для квантовых систем с целым спином описывает случай вырожденного ансамбля. Вероятность заполнения состояния с энергией W

$$f = \frac{1}{\exp\left[\frac{W - W_\mu}{kT}\right] - 1}. \quad (4.28)$$

Распределение Бозе-Эйнштейна (4.28) характерно, например, для фотонного ансамбля, а распределение Ферми-Дирака – для ансамбля электронов проводимости в полупроводнике. При $\exp -\frac{W_\mu}{kT} \gg 1$ (условие невырожденности ансамбля) распределения (4.27) и (4.28) переходят в классическое, больцмановское распределение.

Установление равновесия в ансамбле квантовых систем, приводящее к стационарному распределению, осуществляется за счет взаимодействия квантовых систем друг с другом и окружающей средой. Процесс установления равновесия называют релаксацией. Равновесное распределение квантовых систем по энергиям внутри ансамбля обеспечивается за счет статистической компенсации всех прямых и обратных переходов между уровнями энергии, постоянного перераспределения энергии внутри ансамбля. В ансамбле взаимодействующих квантовых систем могут существовать несколько механизмов релаксации, приводящих ансамбль к равновесному распределению: диффузия, столкновения, излучение и другие взаимодействия.

Релаксация за счет излучательных переходов является одним из наиболее важных механизмов релаксации. Еще до появления квантовой теории излучения Эйнштейн доказал необходимость рассмотрения индуцированных и спонтанных переходов для объяснения механизма установления равновесия в ансамбле квантовых систем, взаимодействующих с электромагнитным полем. Он рассмотрел условия равновесия в ансамбле из m атомов, обладающих двумя энергетическими уровнями W_2 и W_1 , предположив, что равновесие поддерживается за счет равенства числа квантовых переходов с поглощением и излучением в электромагнитном поле частотой $\omega_{21} = W_2 - W_1$. Если $p(\omega)$ – плотность энергии электромагнитного излучения, а N_1 и N_2 – населенности уровней с энергиями W_1 и W_2 , то условия равновесия числа переходов с поглощением и излучением без учета степени вырождения уровней записывают в виде

$$p(\omega)B_{12}N_1 = p(\omega)B_{21}N_2 + A_{21}N_2, \quad (4.29)$$

где B_{12} и B_{21} – коэффициенты Эйнштейна для вынужденного поглощения и излучения; A_{21} – коэффициент Эйнштейна для спонтанного излучения. Решим уравнение (4.29) относительно $p(\omega)$:

$$p(\omega) = \frac{A_{21}}{B_{12} \frac{N_1}{N_2} - B_{21}} \quad (4.30)$$

и учтем, что согласно статистике Больцмана (4.34)

$$\frac{N_1}{N_2} = \exp \frac{W_2 - W_1}{kT} = \exp \frac{\hbar\omega_{21}}{kT}. \quad (4.31)$$

Тогда

$$p(\omega) = \frac{A_{21}}{B_{12} \exp \frac{\hbar\omega^3}{kT} - B_{21}}. \quad (4.32)$$

Выражение (4.32) совпадает с законом излучения Планка, если $B_{12}=B_{21}$ и

$$A_{21} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} B_{21}. \quad (4.33)$$

Именно такие соотношения между коэффициентами Эйнштейна дает квантовая теория [сравните (4.33) с (4.22) и (4.24)].

Инверсия населенностей уровней

В условиях термодинамического равновесия число атомов на низшем уровне превышает число атомов, находящихся в возбужденном состоянии, т.е. $N_1 > N_2$. Однако для того чтобы число индуцированных полей переходов с излучением $p(\omega)BN_2$ не превышало число переходов с поглощением $p(\omega)BN_1$, необходимо обратное соотношение

$$N_1 < N_2, \quad (4.34)$$

называемое инверсной населенностью уровней.

С учетом степени вырождения $g_{1,2y}$ лазерных уровней условие инверсной населенности (4.34) записывают в виде

$$N_2 > \frac{g_{2y}}{g_{1y}} N_1. \quad (4.35)$$

При выполнении условия (4.35) взаимодействие электромагнитного излучения с ансамблем атомов приводит к усилению электромагнитного излучения за счет преобладания процессов индуцированного излучения над процессами поглощения. Спонтанное излучение некогерентно с внешним электромагнитным полем и является шумовым по отношению к индуцированному излучению. Условие инверсной населенности свидетельствует о нарушении термодинамического равновесия. В этом случае с

точки зрения распределения Больцмана для рассматриваемой пары уровней температура должна быть отрицательной: $T_{12} < 0$.

Вопросы для самопроверки

1. Рассчитайте дипольные моменты лазерных переходов для $\lambda = 1$ мкм, если известно, что вероятности спонтанных переходов A_{mn} имеют значения, лежащие в диапазоне 10^3 - 10^6 с⁻¹. Основные постоянные имеют следующие значения: скорость света $c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с; заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг; постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Соотношение между круговой частотой ω и длиной волны λ имеет вид $k = \lambda\omega/2\pi$.

2. Запишите систему кинетических уравнений для населенностей уровней при четырехуровневой схеме накачки. Получите закон изменения разности населенностей лазерных уровней 3 и 2 от уровня плотности энергии накачки.

3. Покажите, что для трехуровневой схемы при оптической накачке, когда $a_{32} > a_{21}$ пороговая энергия накачки может быть оценена по формуле

$$W'_{\text{нак}} = \frac{N_0 V}{4\pi l} \hbar \omega_{\text{нак}},$$

где N_0 – концентрация активных атомов в единице объема; V – объем активной среды; i – квантовая эффективность, т. е. отношение числа излученных фотонов к числу поглощенных фотонов.

Рассчитайте пороговую энергию накачки на единицу объема для кристалла рубина с $N_0 = 2 \cdot 10^{19}$ см⁻³; $l_{\text{знак}} = 0,4$ мкм; $i = 0,7$.

5. Лазерные усилители

Лазерные усилители очень часто являются неотъемлемой частью систем приема и передачи лазерного излучения. Это устройства, способные усиливать оптический сигнал на несущей частоте за счет индуцированных резонансных переходов в среде с инверсной населенностью уровней [7]. Достаточно того, чтобы усиление могло компенсировать неизбежные потери в среде за счет ее несовершенства и нерезонансного поглощения излучения. Рабочие характеристики квантовых усилителей, особенно в радиодиапазоне длин волн, могут приближаться к характеристикам идеальных усилителей.

5.1. Усилители бегущей волны

В простейшем случае лазерные усилители представляют собой активную лазерную среду. Распространяющийся вдоль активной среды оптический сигнал усиливается в среде за счет индуцированного излучения, которое по своим параметрам совпадает с оптическим сигналом. Использование лазерного усилителя повышает чувствительность, спектральную и пространственную селективность приема слабых оптических сигналов. В оптическом диапазоне часто используют оптические схемы с маломощным генератором высококогерентного излучения при последующем усилении сигнала в лазерных усилителях мощности.

Усилители бегущей волны обеспечивают более широкую полосу усиления, высокую стабильность, более простую конструкцию по сравнению с резонаторными усилителями.

Частотная характеристика

Вычислим зависимость показателя усиления среды от частоты усиливаемого сигнала. Решение этих уравнений характеризуется наличием резонансного множителя в выражении для показателя усиления среды:

$$\beta = \beta_0 \left[(\omega_0 - \omega)^2 T_1^2 + 1 + \alpha J \right]^{-1} = \beta_0 g(\omega, J). \quad (5.1)$$

В ненасыщенном режиме, когда усилитель работает при усилении малых сигналов, $\alpha J \ll 1$. Зависящая только от частоты сигнала зависимость $g'(\omega)$ – функция Лоренца характеризует форму линии усиления. Ширина линии Лоренца

$$\Delta\omega_L = \frac{2}{T_1} \quad (5.2)$$

определяет полосу усиления активной среды, т. е. диапазон частот, в котором коэффициент усиления среды составляет не меньше половины от максимального значения. Из соотношения (5.1) следует, что рост

интенсивности входного сигнала приводит к уменьшению показателя усиления среды и искажению формы линии. Ширина линии усиления увеличивается.

К Лоренцеву уширению линии применяют термин «однородное уширение», имея в виду, что частотные характеристики среды совпадают с частотными характеристиками отдельных атомов. Следствием однородного уширения линии является равномерная деформация формы линии усиления (рис. 5.1а) и частотной зависимости показателя преломления (рис. 5.1б) вследствие насыщения. При определении частотной характеристики активной среды, линия усиления которой уширена однородно, учитывают, что частотная характеристика полной макроскопической поляризации определяется как сумма вкладов отдельных атомов, настроенных на одну частоту перехода.

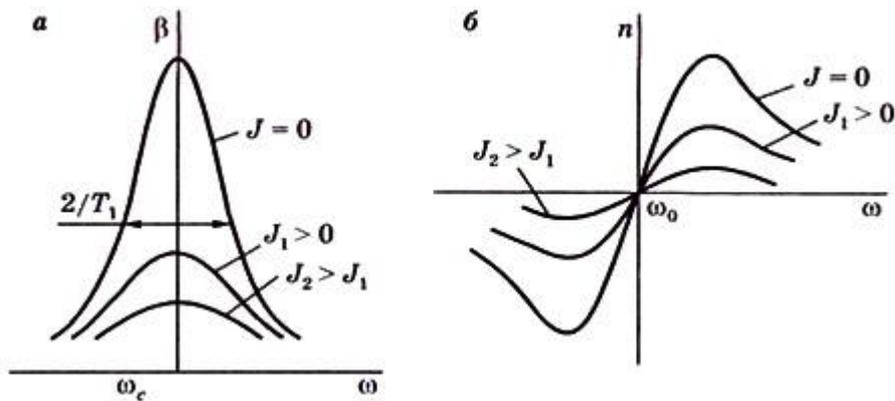


Рис. 5.1. Зависимость коэффициента усиления β а) и коэффициента преломления n б) активной среды с однородным уширением линии лазерного перехода от частоты ω и интенсивности входного сигнала J на частоте ω_c

Возможен неоднородный механизм уширения линии, когда центральные частоты переходов атомов среды распределены по некоторому закону. В этом случае частотную характеристику среды вычисляют с помощью интегральной операции свертки частотной характеристики отдельного атома (кривой Лоренца) с частотной характеристикой, определяемой законом распределения центральных частот переходов по всему ансамблю атомов среды. Если закон распределения центральных частот атомов случаен, то частотная характеристика распределения – кривая Гаусса. Выражение, описывающее форму линии усиления при неоднородном уширении, имеет вид

$$\beta = \beta_0 g(\omega, J) = \frac{\beta_0}{\pi^{1/2}} \frac{\Delta\omega_L^2}{\Delta\omega_D} * \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(\frac{-\omega_D^2}{\Delta\omega_D^2}\right)}{\Delta\omega_L^2 (1 + \alpha J) + (\omega_0 - \omega - \omega_D)^2} d\omega_D, \quad (5.3)$$

где $\Delta\omega_D = 1/T_2$ – ширина кривой Гаусса.

При $\frac{\Delta\omega_D}{\Delta\omega_L} \rightarrow 0$ формула (5.3) переходит в (5.1); при $\frac{\Delta\omega_D}{\Delta\omega_L} \ll 1$ возможно

приближенное интегрирование (5.3):

$$g(\omega, L) = \exp \left[- \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\Delta\omega_D} \right)^2 \right] (1 + \alpha J)^{-1/2} - \frac{2\Delta\omega_D}{\pi^{1/2}\Delta\omega_D} 1 - 2xF(x) , \quad (5.4)$$

где

$$x = \frac{\omega_0 - \omega}{\Delta\omega_D}; F x = \exp(-x^2) \int_0^x \exp t^2 dt.$$

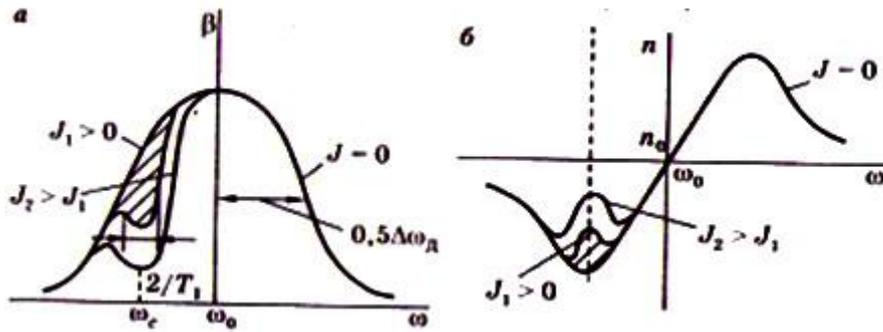


Рис 5.2. Зависимость коэффициента усиления β (а) и коэффициента преломления n (б) активной среды с неоднородным уширением линии лазерного перехода от частоты ω и интенсивности входного сигнала J (интеграл – табулированная функция – интеграл вероятности)

Рост интенсивности входного сигнала вызывает уменьшение коэффициента усиления активной среды (эффект насыщения). Для активной среды с неоднородным механизмом уширения искажение формы линии при насыщении усиления проявляется в виде провалов на кривой усиления (рис. 5.2а) и дисперсионной кривой показателя преломления (рис. 5.2б). Провалы на кривой усиления образуются потому, что усиливаемый сигнал взаимодействует лишь с той группой атомов, центральные частоты которых близки к частоте сигнала.

Ширина провала зависит от уровня входного сигнала, она приблизительно равна ширине однородной части неоднородно уширенной линии, т. е. $2/T_1$, и растет при увеличении интенсивности входного сигнала в $(1 + \alpha J)^{0.5}$ раз.

Коэффициент усиления

Этот параметр является основной характеристикой усилителя. Усиление оптического сигнала по мере прохождения вдоль активной среды может быть вычислено с помощью уравнения:

$$\frac{\partial J}{\partial z} = \beta_0 g(\omega, J) - \gamma J = \beta - \gamma , \quad (5.5)$$

где β_0, ω, J – определяют по формуле (5.1) для однородно уширенной и по (5.4) для неоднородно уширенной линии усиления среды.

В режиме усиления малых сигналов уравнение (5.5) интегрируют:

$$J(z) = J(0)e^{b-\gamma|z|}. \quad (5.6)$$

Из соотношений (5.1), (5.6) следует, что увеличение коэффициента усиления возможно при росте инверсной населенности в среде, сужении ширины линии усиления, увеличении длины пути, пройденного усиливаемым сигналом в среде или уменьшении фазовой скорости волны, т. е. при росте времени взаимодействия излучения с инверсной средой.

Отношение интенсивности волны на выходе из усилителя к интенсивности на входе $J(z)/J(0)$ характеризует коэффициент усиления усилителя бегущей волны:

$$\frac{J(z)}{J(0)} = G(z) = \exp |b - \gamma| z. \quad (5.7)$$

Закон нарастания интенсивности поля (5.7) известен как закон Бугера (область I на рис. 5.3б).

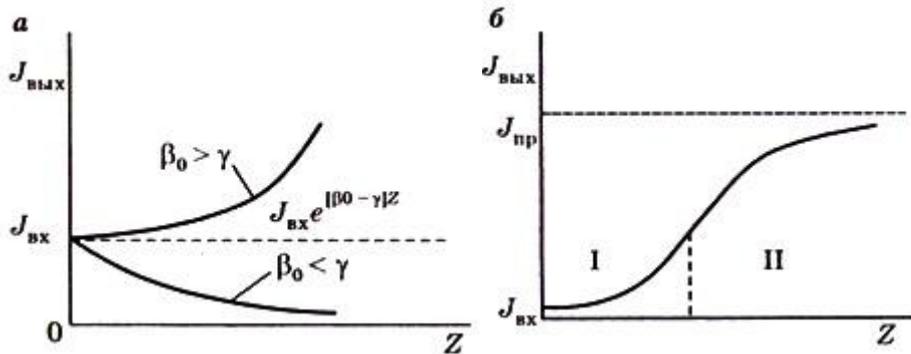


Рис. 5.3. Зависимость интенсивности $J_{\text{вых}}$ электромагнитной волны на выходе усилителя от пройденного пути z в активной среде

В режиме насыщения наблюдается отступление от закона Бугера (область II на рис. 5.3б). Интегрирование дает соотношение

$$\ln \frac{J(z)}{J(0)} = -\frac{\beta_0}{\gamma} \ln \frac{1 - \frac{\gamma}{\beta_0} \alpha J(0)}{1 - \frac{\gamma}{\beta_0} \alpha J(z)} + (\beta_0 - \gamma)z. \quad (5.8)$$

Если потери на рассеяние внутри среды малы и ими можно пренебречь, то выражение (5.8) упрощается:

$$\ln \frac{J(z)}{J(0)} = \alpha J(z) - J(0) + \beta_0 z. \quad (5.9)$$

Анализ (5.8) показывает, что при больших интенсивностях усиление прекращается. Предельное значение интенсивности, которое может быть получено в усилителе, можно найти из уравнения:

$$J_{\text{пр}} = \frac{\beta_0 - \gamma}{\alpha\gamma}. \quad (5.10)$$

Предельное значение (5.10) не зависит от величины интенсивности входного сигнала. От интенсивности входного сигнала зависит предельная длина усиливающей среды, на которой практически прекращается усиление, а точнее, наступает баланс энергии, отдаваемой средой в процессе усиления, и энергии, поглощаемой из-за потерь на рассеяние.

В том случае, когда входной сигнал превышает предельно допустимый

$$J_0 > \frac{\beta_0 - \gamma}{\alpha\gamma} = J_{\text{нас}} \frac{\beta_0}{\gamma} - 1 ,$$

то он будет ослабляться при распространении в среде, стремясь к величине (5.10).

5.2. Резонаторные усилители

Резонаторный усилитель состоит из резонатора с достаточно высокой добротностью и активной среды, помещенной внутрь резонатора. Резонатор обеспечивает накопление электромагнитной энергии, пространственную и частотную селекцию входного сигнала. Существуют два типа резонаторных усилителей, отличающихся устройствами вывода электромагнитной энергии: отражательный и проходной [2]. В отражательном усилителе устройство ввода усиливаемого сигнала (например, частично пропускающее зеркало) служит и устройством его вывода. В проходном усилителе для ввода и вывода излучения используют различные устройства.

Коэффициент усиления

Коэффициент усиления резонаторного усилителя увеличивается по сравнению с усилителем бегущей волны за счет многократного прохождения усиливаемого сигнала через активную среду.

Рассчитаем коэффициент усиления данного усилителя, состоящего из активной среды длиной L , обладающей коэффициентом усиления ρ , заполняющей целиком резонатор с плоскопараллельными отражателями. Амплитудные коэффициенты отражения и прозрачности отражателей соответственно ρ_1, τ_1 и ρ_2, τ_2 . При стационарном режиме усиления входного сигнала с амплитудой $E_{\text{вх}}$ одна часть излучения выходит из резонатора через первый отражатель с амплитудой $E_{\text{вых1}}$, а другая часть – через второй отражатель с амплитудой $E_{\text{вых2}}$. Амплитуда напряженности электрического поля на выходе из резонатора связана с амплитудой напряженности поля внутри резонатора.

В резонаторе существуют две бегущие навстречу друг другу волны с амплитудами E_1 и E_2 (рис. 5.4). Условие стационарности этих амплитуд имеет вид

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \tau_1 E_{BX} + p_1 E_2 \\ E_2 &= p_2 G^2 \exp -i2\varphi E_1 \end{aligned} \right\}, \quad (5.11)$$

где G – коэффициент усиления в среде длиной L ;

$$\varphi = \frac{\omega}{c} nL$$

– фазовый набег волны при распространении между отражателями.

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= -p_1 E_{BX} + \tau_1 E_2 \\ E_2 &= \tau_2 G \exp -i\varphi E_1 \end{aligned} \right\}. \quad (5.12)$$

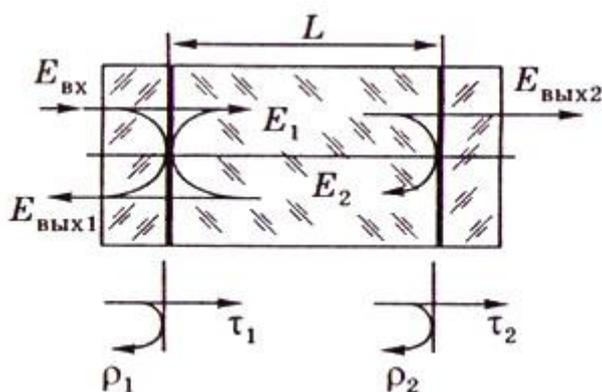


Рис. 5.4. Схема резонаторного усилителя

Используя соотношения (5.11) и (5.12), найдем коэффициенты усиления проходного усилителя как отношение $E_{ВЫХ2}/E_{ВХ}$ и отражательного, как отношение $E_{ВЫХ1}/E_{ВХ}$:

$$\frac{E_{ВЫХ2}}{E_{ВХ}} = \frac{\tau_1 \tau_2 G \exp -i\varphi}{1 - p_1 p_2 G^2 \exp -2i\varphi}, \quad (5.13)$$

$$\frac{E_{ВЫХ1}}{E_{ВХ}} = \frac{p_2 G^2 \exp -i2\varphi - p_1}{1 - p_1 p_2 G^2 \exp -2i\varphi}. \quad (5.14)$$

Умножая выражения (5.13) и (5.14) на комплексно сопряженные, определим коэффициенты усиления усилителя по мощности:

$$\frac{E_{ВЫХ2}^2}{E_{ВХ}^2} = \frac{\tau_1 \tau_2 G}{\left[1 - p_1 p_2 G^2 \cos 2\varphi\right]^2 + \left[p_1 p_2 G^2 \sin 2\varphi\right]^2}, \quad (5.15)$$

$$\frac{E_{ВЫХ1}^2}{E_{ВХ}^2} = \frac{\left[p_2 G^2 \cos 2\varphi - p_1\right]^2 + \left[p_2 G^2 \sin 2\varphi\right]^2}{\left[1 - p_1 p_2 G^2 \cos 2\varphi\right]^2 + \left[p_1 p_2 G^2 \sin 2\varphi\right]^2}. \quad (5.16)$$

Из выражений (5.15) и (5.16) следует, что коэффициенты усиления обладают резонансными свойствами. При $\varphi = \pi q$, где q – целое число, выражение (5.15) имеет максимальное значение:

$$\frac{E_{ВЫХ1}^2}{E_{ВХ}^2} = \frac{\tau_1^2 \tau_2^2 G^2}{[1 - p_1 p_2 G^2]^2} = \max. \quad (5.17)$$

При увеличении коэффициента усиления среды G знаменатель в (5.17) стремится к нулю, т.е. коэффициент усиления резонаторного усилителя в линейном приближении может быть сколь угодно большим.

Если необходимо учесть насыщение и дисперсию активной среды, то следует воспользоваться результатами расчетов коэффициента усиления среды G .

Полоса пропускания

Полоса пропускания данного вида усилителей уже, чем у усилителей бегущей волны, и определяется в основном добротностью резонатора. Полоса пропускания резонаторного усилителя

$$\Delta\omega_p = \frac{[1 - p_1 p_2 G^2] c}{nL [p_1 p_2 G^2]^{1/2}}. \quad (5.18)$$

Увеличение коэффициента G приводит к сужению полосы пропускания. Так же как и для любого линейного усилителя, для лазерного усилителя произведение корня квадратного из коэффициента усиления усилителя на ширину полосы усиления есть величина постоянная:

$$\left[\frac{E_{ВЫХ2}^2}{E_{ВХ}^2} \right]^{1/2} \Delta\omega_p = \left[\frac{\tau_1^2 \tau_2^2}{p_1 p_2} \right]^{0.5}; \quad \frac{c}{nL} = const. \quad (5.19)$$

В оптическом диапазоне полоса пропускания проходного усилителя много меньше ширины линии усиления:

$$\Delta\omega_p \ll \Delta\omega_d.$$

В полосе усиления активной среды могут находиться несколько резонансов резонатора (рис. 5.5).

Расстояние между ближайшими резонансами определяется соотношением

$$\Delta\omega_q = \omega_q - \omega_{q-1} = \frac{\pi c}{nL}. \quad (5.20)$$

Ширина линии усиления активной среды для лазеров $\Delta\omega_d \gg \Delta\omega_q$.

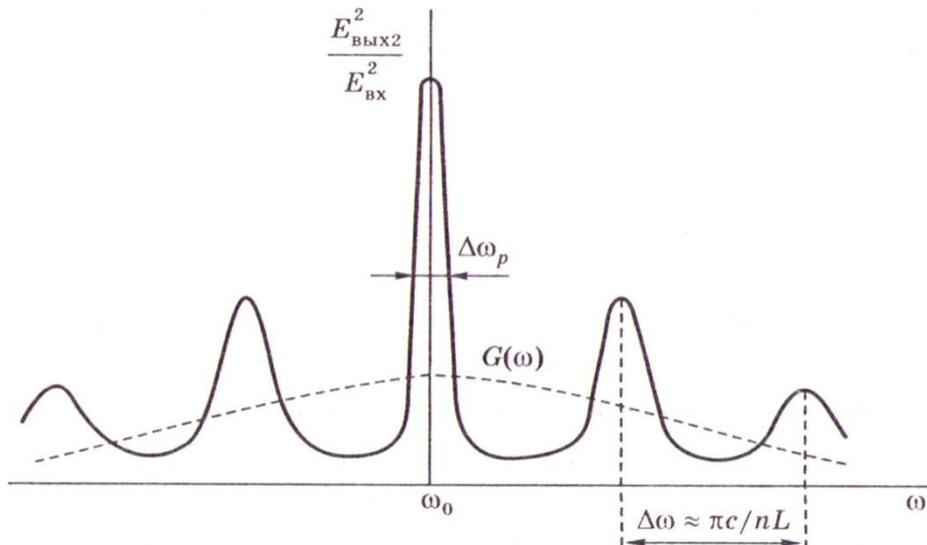


Рис. 5.5. Спектральная зависимость коэффициента усиления по мощности проходного резонаторного усилителя в линейном режиме усиления слабых сигналов

Вопросы для самопроверки

1. Найдите длину активной среды лазерного усилителя бегущей волны, если $J_{\text{вх}} = 0,1\alpha^{-1}$, а $J_{\text{вых}} = 0,9J_{\text{пред}}$.

2. Проведите анализ выражения (5.4), характеризующего процесс усиления в среде с неоднородным уширением линии. Покажите, что насыщение усиления и показателя преломления носит характер образования провалов в частотной зависимости, причем ширина провала пропорциональна однородной части неоднородно уширенной линии активной среды. Объясните этот эффект.

3. Покажите, что в лазерном усилителе бегущей волны с неоднородной линией усиления насыщение усиления входным сигналом, содержащим две спектральные компоненты ω_1 и ω_2 , причем $|\omega_1 - \omega_2| \ll \Delta\omega_{\text{л}}$, приводит к образованию провала частотной зависимости коэффициента усиления, ширина и глубина которого гармонически изменяются с частотой $\omega_1 - \omega_2$.

4. Получите уравнение для расчета прохождения гауссова пучка через усиливающую среду.

6. Лазерные генераторы

Принцип действия лазера – генератора мощного когерентного излучения оптического диапазона – можно свести к двум основополагающим физическим явлениям: вынужденное излучение + положительная оптическая обратная связь. Вынужденное излучение в активной среде в условиях инверсной населенности лазерных уровней когерентно складывается и не дает затухать оптическому излучению, формируемому резонатором – устройством, реализующим принцип положительной обратной связи [8]. Насыщение усиления в мощном когерентном поле приводит к балансу усиления и потерь в резонаторе и возникновению условий существования стационарных режимов генерации. Такие условия реализуются только для одной или нескольких дискретных частот. Это объясняет, почему излучение лазера монохроматично.

6.1. Условия самовозбуждения и существования стационарного режима

Лазерный генератор можно рассматривать как преобразователь энергии источника накачки в энергию электромагнитного поля. Лазерный генератор работает как любая автоколебательная система. В автоколебательной системе энергия от источника энергии подается в колебательный контур периодически, в такт с происходящими колебаниями с помощью клапана, работа которого, в свою очередь, согласована с колебаниями в контуре. Таким образом возникают автоколебания. В лазерном генераторе автоколебания поддерживаются за счет вынужденного излучения атомов среды в поле резонатора. Свойства вынужденного излучения таковы, что оно полностью согласовано по всем параметрам с полем в резонаторе. Лазерный резонатор осуществляет формирование пространственного распределения поля и спектрального состава излучения. Лазерная среда играет роль клапана, управляемого полем резонатора и управляющего поступлением энергии в резонатор от источника накачки.

Условия, при которых в резонаторе с активной средой возникают автоколебания, и амплитуда установившихся колебаний могут быть определены при рассмотрении энергетического баланса нелинейной системы. Незатухающие колебания стационарной амплитуды возможны в системе при равенстве мощностей, поступающих в резонатор из активной среды и теряемых в нем за счет внутренних потерь и связи с внешним пространством.

Стационарные колебания в генераторе развиваются из усиленного спонтанного излучения. При стационарном режиме в линейном резонаторе возникают две переходящие друг в друга бегущие волны, сохраняющие неизменными амплитуды и согласованность фаз в некоторой точке внутри резонатора.

Условия самовозбуждения и существования стационарных колебаний могут быть найдены при использовании линейной теории. Ранее был

рассмотрен режим стационарного усиления. Аналогичный подход применим и к генератору, однако нет необходимости вводить внешний сигнал. Стационарные колебания в генераторе разовьются из усиленного спонтанного излучения. Условие самосогласованности амплитуды E и фазы φ волны, прошедшей замкнутый путь, т. е. отразившейся от обоих зеркал и дважды прошедшей активную среду, имеет вид

$$E = E p_1 p_2 G^2 \exp\{-i2\varphi\} = E p_1 p_2 G^2 \exp\left\{-i \frac{2\omega L}{c} n\right\}, \quad (6.1)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_1 e^{-i\varphi_1}, \\ \rho_2 &= \rho_2 e^{-i\varphi_2}. \end{aligned}$$

– комплексные коэффициенты отражения зеркал, характеризующие амплитудный коэффициент отражения $|\rho_{1,2}|$ и изменение фазы при отражении – $\varphi_{1,2}$; n – коэффициент преломления, определяющий фазовую скорость волны; L – расстояние между зеркалами (рис. 6.1).

Определяя действительную и мнимую части (6.1), получим

$$|p_1 p_2| G^2 \cos\left[\frac{2\omega L}{c} + \varphi_1 + \varphi_2\right] = 1, \quad (6.2)$$

$$|p_1 p_2| G^2 \sin\left[\frac{2\omega L}{c} + \varphi_1 + \varphi_2\right] = 0. \quad (6.3)$$

откуда условия баланса амплитуд и фаз имеют вид

$$|p_1 p_2| G^2 = 1, \quad (6.4)$$

$$\left[\frac{2\omega L}{c} + \varphi_1 + \varphi_2\right] = 2\pi q, q = 0, 1, 2, 3, \dots, 10^7, \dots \quad (6.5)$$

Условие баланса фаз (6.5) означает, что волна, проходя в усиливающей среде расстояние $2L$ и отразившись от зеркал, получает фазовый набег, кратный 2π , что обеспечивает положительную обратную связь. Из (6.5) найдем частоту колебаний:

$$\omega = \frac{2\pi c}{nL} \left[q - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi} \right]. \quad (6.6)$$

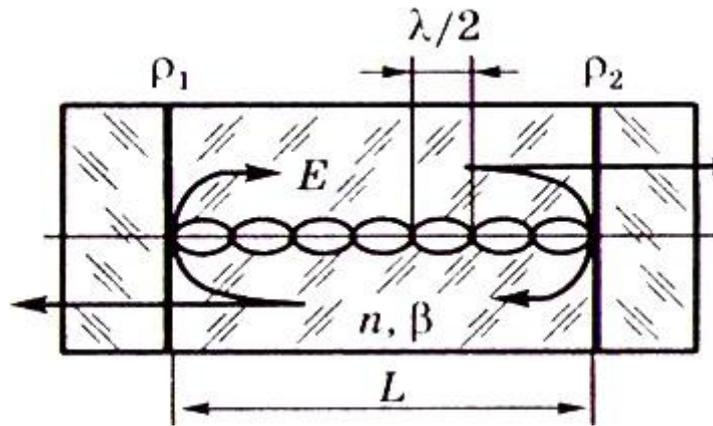


Рис. 6.1. Схема лазерного генератора

Из выражения (6.6) нельзя определить, на какой же из частот возбуждены колебания. Условие баланса фаз выполнено для всех собственных частот резонатора.

Условие баланса амплитуд дает дополнительную информацию о том, на какой частоте возможны стационарные автоколебания. Физический смысл (6.4) – баланс потерь и усиления в системе. Автоколебания существуют, если показатель усиления в среде β равен показателю потерь γ .

$$\beta = \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{\rho_1 \rho_2} + \gamma_{\text{вредн}} = \gamma_{\text{полезн}} + \gamma_{\text{вредн}} = \gamma'. \quad (6.7)$$

Величина γ' введена для удобства, где $\gamma_{\text{полезн}} = \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ – полезные

потери, связанные с полезным выводом излучения из резонатора, и вредные потери $\gamma_{\text{вредн}}$, связанные в основном с дифракционными потерями излучения, поглощением и рассеянием, и заменяет реальные потери некоторыми эквивалентными, отнесенными к единице длины. Условие (6.7) является необходимым для самовозбуждения генератора, поскольку только компенсация потерь усилением приводит к незатухающим колебаниям. Если показатель усиления больше показателя потерь, то в резонаторе начинает нарастать электромагнитное поле, поскольку приращение энергии, отдаваемой средой, превышает потери энергии в резонаторе.

Поле в резонаторе нарастает до такой величины, при которой в силу эффекта насыщения среды показатель усиления среды упадет до значения, равного показателю потерь в системе. Таким образом, условия (6.4) и (6.5) являются одновременно пороговыми условиями возникновения генерации и условиями существования стационарной генерации. Линейная модель не позволяет определить величину установившегося поля в резонаторе.

6.2. Спектр излучения

Спектр излучения зависит от характера и степени уширения линии активной среды, усиления среды, добротности резонатора [5].

Однородное уширение линии усиление

Рассмотрим лазерный генератор со средой, линия излучения которой уширена однородно. В этом случае усиление и дисперсию среды находят по выражениям (5.1) и (5.11). Условия баланса фаз (6.5) и амплитуд (6.7) записывают с учетом насыщения и дисперсии среды в виде

$$\frac{2\omega n_0 L}{c} \left[1 - \frac{c\beta_0 \Delta\omega_L (\omega_0 - \omega)}{\omega [\Delta\omega_L^2 (1 + \alpha J) + (\omega_0 - \omega)^2]} \right] + \varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi q, \quad (6.8)$$

$$\beta_0 \left[\left(\frac{\omega_0 - \omega}{\Delta\omega_L} \right)^2 + 1 + \alpha J \right]^{-1} = \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{p_1 p_2}. \quad (6.9)$$

Уравнения (6.8) и (6.9) позволяют рассчитать неизвестную частоту генерации и интенсивность поля на частоте генерации.

Если принять $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi$; $n_0 L \omega / \pi c = q$, то одна из собственных частот резонатора, а также частота генерации совпадают с центральной частотой перехода $\omega = \omega_0 = \omega_p$. Интенсивность поля при $\omega = \omega_0$ вычисляют из уравнения (6.9):

$$J = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{2\beta_0 L}{\ln p_1 p_2} \right]. \quad (6.10)$$

При несовпадении резонансной частоты пустого резонатора с центральной частотой перехода генерация происходит на резонансной частоте связи системы двух связанных резонансных контуров: резонансного контура резонатора и контура линии усиления активной среды.

Совместное решение (6.8) и (6.9) приводит к следующему выражению для частоты генерации:

$$\omega = \omega_0 + \frac{\omega_p - \omega_0}{1+k} = \omega_p + \frac{\omega_p - \omega_0}{1+k} K, \quad (6.11)$$

$$K = \frac{\pi c}{2L \Delta\omega_L^2} \ln \frac{1}{p_1 p_2}, \quad (6.12)$$

$$\omega_p = \frac{2\pi q - \varphi_1 - \varphi_2}{2n_0 L} c. \quad (6.13)$$

Величина K пропорциональна отношению добротностей активной среды и резонатора. Поскольку в оптическом диапазоне добротность резонатора много больше добротности активной среды, то частота генерации определяется в основном резонансной частотой ω_p пустого резонатора, немного смещаясь к

центру линии перехода. В СВЧ-диапазоне наблюдается обратная картина – частота генерации зависит от центральной частоты перехода, немного смещаясь к частоте пустого резонатора.

Интенсивность поля в резонаторе найдем из (6.9) с учетом (6.11):

$$J = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{2\beta_0 L}{\ln p_1 p_2} - 1 - \left(\frac{\omega_p - \omega_0}{\Delta\omega_L^2} \right) (1 + K)^2 \right]. \quad (6.14)$$

Соотношение (6.14) позволяет определить диапазон частот относительно центра линии, в котором возможна генерация:

$$|\omega_0 - \omega_{h0}| = \Delta\omega_L (1 + K) \left[\frac{2\beta_0 L}{\ln p_1 p_2} - 1 \right]^{0.5} = \frac{1}{2} \Delta\omega_L. \quad (6.15)$$

В диапазоне частот $\Delta\omega_L$ возможна перестройка частоты генерации. Рисунок 6.2а иллюстрирует возникновение деформации контура усиления однородно уширенной линии активной среды в генераторе, когда $\omega = \omega_0 = \omega_L$. Усиление на частоте генерации падает до уровня потерь

$$\beta = \{2L\}^{-1} \ln\{\rho_1 \rho_2\}^{-1}$$

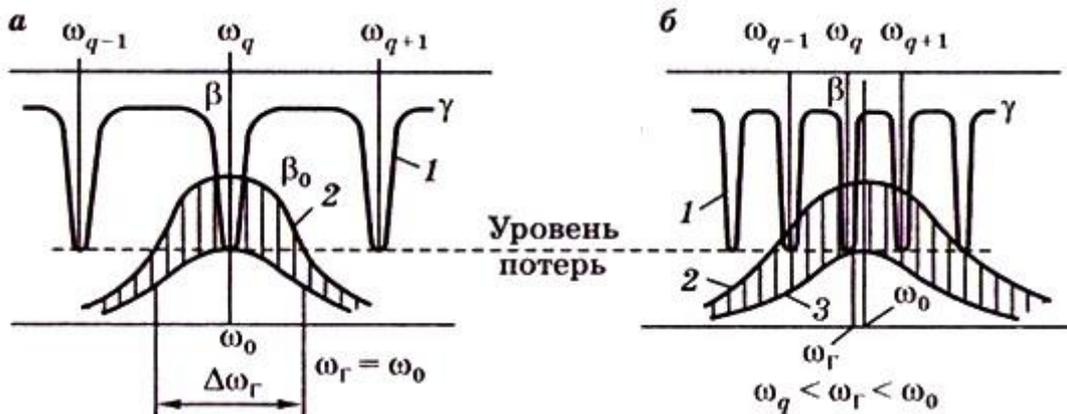


Рис. 6.2. Характер насыщения активной среды лазерного генератора с однородно уширенной линией перехода:

1 – спектральная зависимость потерь в резонаторе; 2 – спектральная зависимость ненасыщенного показателя усиления среды; 3 – спектральная зависимость показателя усиления среды, насыщенной электромагнитным полем на частоте генерации ω_L

из-за насыщения усиления активной среды мощным полем лазерного излучения. Поверхность, заштрихованная на рис. 6.2а, пропорциональна интенсивности лазерного излучения.

Был рассмотрен случай одночастотной генерации, когда условия генерации выполняются для одной собственной частоты резонатора, попадающей в диапазон ω_L . Однако при увеличении длины резонатора возможна ситуация, когда пороговые условия самовозбуждения генерации могут быть выполнены для нескольких мод резонатора (рис. 6.2б). В этом

случае спектр частот генератора определяется расположением частот мод относительно центра линии усиления и степенью взаимодействия мод. Мода, частота которой наиболее близка к центру линии излучения, имеет наибольшее начальное превышение усиления над потерями, быстрее растет на участке линейного усиления. При сильном взаимодействии мод, когда степень пространственного перекрытия мод велика, насыщение усиления до уровня потерь произойдет быстрее для моды, частота которой находится дальше других от центра линии усиления. Продолжающийся рост поля остальных мод и уменьшение усиления приведут к затуханию этой моды, так как для нее усиление станет меньше потерь.

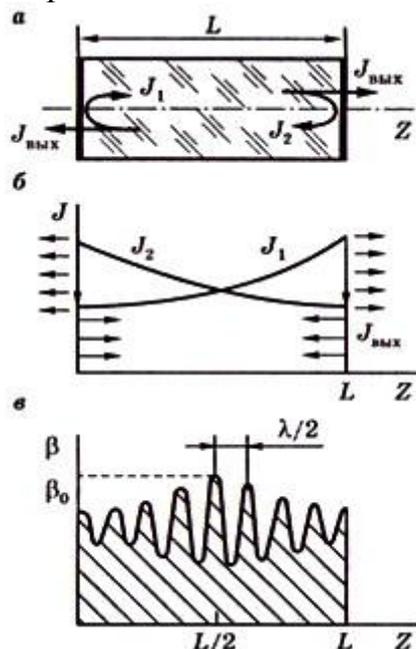


Рис. 6.3 Схемы, характеризующие эффекты пространственного насыщения активной среды лазерного генератора с однородно уширенной линией перехода в поле стоячей волны: а – схема лазерного генератора; б – схема распределения интенсивностей встречных волн J_1 и J_2 по длине активной среды; в – схема пространственного распределения показателя усиления активной β среды в поле стоячей волны

Последующий рост поля приведет к последовательному затуханию всех мод, кроме одной, частота которой наиболее близка к центру линии усиления среды. При слабом взаимодействии мод, когда степень пространственного перекрытия мод мала и отсутствует дрейф активных атомов или эффективная передача энергии возбуждения между атомами, спектр излучения генератора является многомодовым. Наиболее благоприятные условия для генерации многомодового излучения возникают в лазерах, где имеется большое число пространственно слабо перекрывающихся высокочастотных поперечных мод. Неравномерность пространственного насыщения усиления в поле стоячей волны является причиной многомодовой генерации продольных мод. В поле стоячей волны усиление насыщается лишь в пучностях поля и оказывается пространственно модулированным с периодом, равным $\lambda/2$. Период

пространственной модуляции различных продольных мод не совпадает, что уменьшает степень взаимодействия мод через активную среду (рис. 6.3).

Спектральная ширина излучения лазерного генератора

Спектральная ширина излучения одномодового лазерного генератора определяется флуктуациями спонтанного и теплового шума и движением зеркал резонатора. Ширина линии за счет спонтанных и тепловых шумов

$$\Delta\omega_{СП} = \frac{8\pi\hbar\omega}{M_{ВЫХ}} \left[\frac{\Delta\omega_D \Delta\omega_P}{\Delta\omega_D + \Delta\omega_P} \right]^2, \quad (6.16)$$

где $M_{вых}$ – выходная мощность генерации.

Ширина спектра излучения, связанная с флуктуациями движения зеркал,

$$\Delta\omega_T = \omega \frac{\Delta\omega_D}{\Delta\omega_D + \Delta\omega_P} * \frac{\Delta L}{L}. \quad (6.17)$$

Анализ соотношений (6.16) и (6.17) показывает, что в основном на спектральную ширину излучения одномодового генератора влияет флуктуационное движение зеркал, связанное с тепловыми и акустическими возмущениями.

В многомодовых лазерных генераторах имеются и другие виды шумов. К источникам шумов следует отнести конкурирующие лазерные переходы, конкуренцию мод, нестабильность параметров среды и нестационарность накачки.

Таким образом, технические шумы определяют спектральную ширину излучения лазерного генератора, которая на несколько порядков превышает теоретическое значение (6.16).

6.3 Переходные процессы в генераторе

Для большинства импульсных лазерных генераторов стационарный режим не успевает установиться за время действия импульса. Длительности лазерных импульсов могут быть сравнимы с временами релаксации в среде и резонаторе. Нестационарные процессы характерны не только для поля в резонаторе, но и для населенностей лазерных уровней. На переходные процессы в генераторе влияет соотношение между тремя константами релаксации T_1, T_2, T_p и характерными временами T_{Π} и T_{Φ} , где T_1 – продольное (тепловое) время релаксации вещества, характеризующее время жизни атома на верхнем лазерном уровне и определяющее скорость затухания инверсной населенности; T_2 – поперечное время релаксации вещества, определяющее скорость затухания поляризации среды и временную когерентность при спонтанном излучении; $T_p = Q/\omega$ – время жизни фотона в резонаторе, характеризующее скорость затухания поля в резонаторе; $T_{\Pi} \approx (2\pi\hbar)/|d|^2$ –

время перехода электронов с уровня на уровень под действием электромагнитного поля; $T_\phi = 2L/c$ – время пролета фотона через резонатор.

После включения накачки пороговое значение инверсии населенностей устанавливается за время T_1 , формирование поля в резонаторе запаздывает еще на время T_p . Если отношение времени пролета фотона через резонатор к времени перехода электрона с уровня на уровень $T_\phi/T_n \approx 1$, то электромагнитная волна сильно модулирует коэффициент усиления и преломления среды. При отклонении от стационарных значений поле и поляризация совершают релаксационные колебания, частота которых зависит от отношения констант релаксации; эти колебания могут затухать или нарастать. Кинетика генерации во многом зависит от степени пространственной неоднородности поля, пространственной дисперсии резонатора, характера уширения линии, размеров среды и ее расположения в резонаторе.

Переходные процессы в генераторах оптического и СВЧ-диапазонов различаются. В лазерах рабочие переходы являются магнитодипольными, ширина линии усиления много меньше спектральной ширины моды. Размеры активной среды меньше длины волны. Линия усиления уширена однородно. Спектральный режим работы – одномодовый.

В лазерах рабочие переходы являются обычно электро-дипольными, ширина линии усиления много больше спектральной ширины моды и других характерных полос частот. Размеры активной среды много больше длины волны излучения. Наблюдается сильное отличие потерь различных поперечных мод, следовательно, и многомодовый режим работы.

Рассмотрим одну из простейших моделей генератора – одномодовый генератор с однородным пространственным и спектральным насыщением активной среды. Зададим отношения между константами релаксации: $T_1 \gg T_2, T_p \gg T_2$. Кинетические уравнения в безразмерных переменных записывают в виде

$$\frac{dX}{d\tau} = \dot{X} = \eta X(Y - 1); \tau = \frac{1}{T_1}; \eta = \frac{T_1}{T_p}, \quad (6.18)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = \dot{X} = Y_0 - Y(X + 1), \quad (6.19)$$

где

$$X = |E|^2 T_1 T_2 |d|^2 \hbar^{-2}; Y = \frac{\varepsilon |E|^2 T_p N_0}{2\hbar\omega}; Y_0 = \frac{\varepsilon |E|^2 T_p N_0}{2\hbar\omega}. \quad (6.20)$$

Режиму автоколебаний соответствует стационарное состояние:

$$X = Y_0 - 1; Y = 1. \quad (6.21)$$

Для исследований устойчивости решения (6.21) определим малые отклонения от стационарных состояний:

$$X = Y_0 - 1 + \Delta X; Y = 1 + \Delta Y. \quad (6.22)$$

Подставляя (6.22) в (6.18), линеаризируем исходные уравнения:

$$\Delta X = \eta(Y_0 - 1)\Delta Y; \Delta Y = \Delta X - Y_0\Delta Y. \quad (6.23)$$

Решение уравнений (6.40) ищем в виде

$$\Delta X = \Delta X_0 \exp p\tau; \Delta Y = \Delta Y_0 \exp p\tau. \quad (6.24)$$

Подставляя (6.24) в (6.23), получим систему двух алгебраических уравнений, условием решения которой является равенство нулю определителя:

$$P^2 + Y_0 p + \eta(Y_0 - 1) = 0. \quad (6.25)$$

Стационарная точка является устойчивым узлом, если корни уравнения (6.25) отрицательны. Это может быть при

$$Y_0^2 - 4\eta(Y_0 - 1) > 0. \quad (6.26)$$

Интенсивность поля аperiodически стремится к стационарному состоянию.

Если выполняется соотношение, обратное (6.26), то стационарная точка – устойчивый фокус, и электромагнитное поле и инверсия населенностей совершают затухающие колебания около стационарного уровня (рис. 6.4а, б) с частотой

$$\Omega = \sqrt{\eta(Y_0 - 1)} \quad (6.27)$$

и декрементом

$$\varphi = -\frac{Y_0}{2}. \quad (6.28)$$

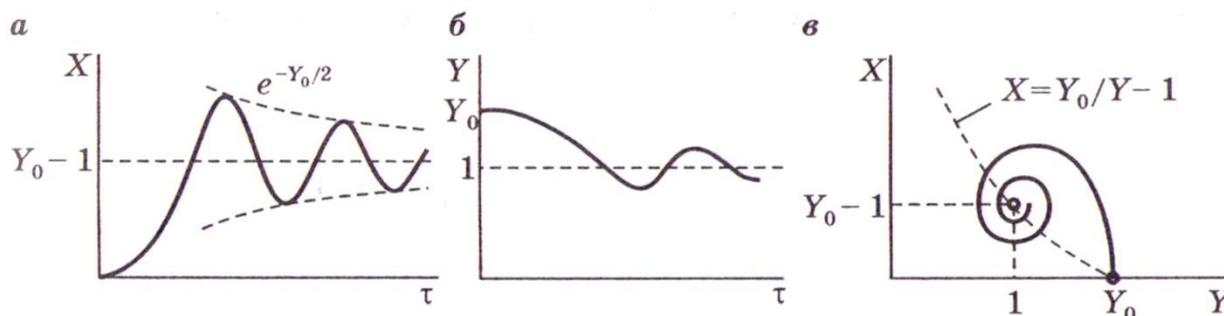


Рис. 6.4. Переходной процесс в одномодовом лазерном генераторе, соответствующий затухающим колебаниям

Если отклонения от стационарного состояния нельзя считать малыми, то представление о характере движений получают, строя фазовый портрет генератора (рис. 6.4в). Уравнения фазовых траекторий можно получить, разделив (6.18) на (6.19):

$$\frac{dX}{dY} = \eta \frac{(Y - 1)X}{Y_0 - (X + 1)Y}. \quad (6.29)$$

Анализ уравнения (6.29) показывает, что наклон фазовых траекторий велик на всей плоскости X, Y , за исключением областей вблизи прямых $Y = 1$ и $X = 0$. Вертикальные касательные к фазовым траекториям определяются

уравнением $X = \frac{Y_0}{Y} - 1$. Вдали от стационарной точки движение системы к равновесию происходит неравномерно. Вблизи оси абсцисс $X < Y_0 - 1$ скорость движения небольшая, определяется исключительно скоростью накачки. При $X > Y_0 - 1$ процесс индуцированного излучения преобладает над накачкой и скорость движения по фазовой траектории высока. Фазовые траектории имеют вид спиралей, накручивающихся вокруг стационарной точки.

Таким образом, переходный режим одномодового генератора может представлять собой пиковый режим генерации, затухающей с релаксационной частотой.

Если в генераторе реализуется другое отношение между константами релаксации, а сам генератор не является одномодовым с однородными пространственными и спектральными параметрами, то релаксационные колебания могут не только затухать, но и нарастать. В последнем случае генерация будет представлять собой гигантские импульсы. При $T_\phi \approx T_\pi$ модуляция параметров среды может вызвать фазовую синхронизацию типов колебаний, и тогда генератор излучает ультракороткие импульсы.

6.4. Генераторы с нестационарными параметрами

Выше было показано, что в генераторе возможно возникновение неустойчивых режимов работы, носящих апериодический или колебательный характер. Принудительная модуляция параметров среды или резонатора может вызвать параметрическую неустойчивость режимов работы при условии, если частота внешнего возмущения находится в рациональном соотношении с частотой собственных колебательных неустойчивостей.

Периодическая модуляция параметров генератора

Рассмотрим случай малой глубины модуляции для генератора, описываемого уравнениями (6.17)-(6.18):

$$X = \eta X(Y - 1 - m \cos \Omega \tau), \quad (6.30)$$

$$\dot{Y} = Y_0 - Y(X + 1). \quad (6.31)$$

где $m \ll 1$, $\Omega = \omega_{\text{мод}} T_1$. Определив модуляцию как возмущение, ищем решение в виде малых отклонений от стационарных значений:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_0 + X_1 e^{i\Omega \tau} + \text{компл. сопр.}; \\ Y &= Y_0 + Y_1 e^{i\Omega \tau} + \text{компл. сопр.} \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

Подставляя (6.32) в (6.30) и (6.31) и пренебрегая произведениями малых величин X , Y и m , получим

$$X_1 = \frac{\eta m(Y_0 - 1)}{2} * \frac{i\Omega + Y_0}{\Omega^2 - \eta(Y_0 - 1) - i\Omega Y_0}. \quad (6.33)$$

$$Y_1 = \frac{\eta m(Y_0 - 1)}{2} * \left[\Omega^2 - \eta(Y_0 - 1) - i\Omega Y_0 \right]^{-1}, \quad (6.34)$$

Соотношения (6.33) и (6.34) носят резонансный характер. В случае совпадения частоты модуляции с частотой релаксационных колебаний (6.27) $\Omega = \Omega_0 = \overline{\eta(Y - 1)}$ отклонения максимальны. При больших амплитудах модуляции резонанс становится нелинейным и возможны гистерезисные явления. Если внешнее воздействие модулирует параметры генератора в широком спектре частот и такой глубины, что резонансы нелинейны и перекрываются, то излучение генератора нерегулярно и похоже на случайное.

Генераторы с модулированной добротностью

Генераторы с модулированной добротностью применяют для получения излучения большой мощности и малой длительности импульса. Такие импульсы, называемые гигантскими, возникают в том случае, если обеспечить сильное заселение верхнего метастабильного лазерного уровня, а затем резко уменьшить потери в резонаторе до уровня, значительно ниже порога самовозбуждения (рис. 6.5 а-г). Время нарастания импульса оказывается настолько коротким, что можно пренебречь изменением населенности уровней под действием накачки и затуханием излучения в резонаторе в течение процесса нарастания импульса. Уравнения (6.18) и (6.19) можно упростить:

$$\dot{X} = \eta XY, \quad (6.35)$$

$$\dot{Y} = -XY. \quad (6.36)$$

Решения этих уравнений получим в таком виде:

$$X = \frac{Y_0}{2} 1 + th Y_0 \eta (\tau - \tau_0), \quad (6.37)$$

$$Y = Y_0 1 + th Y_0 \eta (\tau - \tau_0), \quad (6.38)$$

где Y_0 – нормированная разность населенностей при $\tau = 0$.

Процесс развития моноимпульса можно разделить на три этапа (рис. 6.5г). На первом этапе, в момент включения добротности τ_b , выполняются условия самовозбуждения, и интенсивность поля растет по экспоненте согласно закону Бугера, что следует из (6.37), если аппроксимировать $th(-\tau) \approx 2exp/(-2\tau) - 1$. Длительность первого этапа τ_1 определяет время задержки (время линейного развития) моноимпульса. Из (6.37) найдем

$$\tau_1 = \frac{1}{\eta Y_0} \ln \frac{\eta Y_0}{2X_0}, \quad (6.39)$$

где

$$X_0 = \frac{Y_0}{T_{P0}/T_P - Y_0} = \frac{Y_0}{Q_{P0}/Q_P - Y_0} \quad (6.40)$$

– нормированная интенсивность поля в момент изменения добротности от Q_p до Q_{p0} . Уравнение (6.40) показывает, что потери должны быть больше усиления до момента переключения, для того чтобы не произошло самовозбуждения генератора.

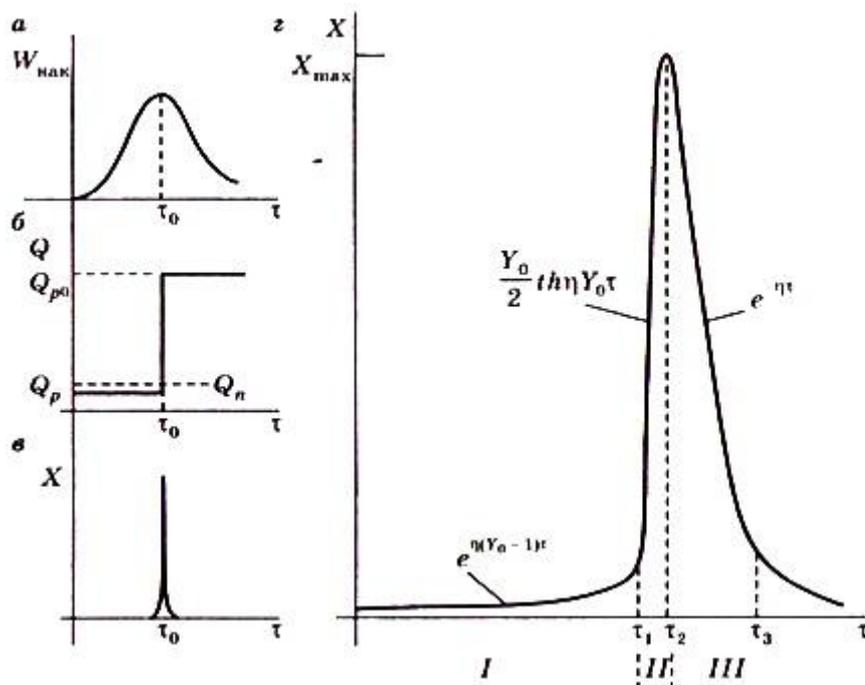


Рис. 6.5. Режим развития гигантского импульса в лазерном генераторе с модулированной добротностью:

а – зависимость энергии накачки $W_{нак}$ от времени τ ; б – изменение добротности резонатора Q от времени τ ; в – зависимость нормированной интенсивности поля генерации X от времени τ ; г – три этапа развития импульса; I – линейное усиление поля излучения; II – нелинейное нарастание моноимпульса, сопровождающееся насыщением усиления; III – затухание поля в резонаторе

Согласно (6.35) $X = 0$ при $Y = 1$. Тогда для интервала времени нелинейного нарастания импульса τ_2 (второй этап), где Y уменьшается от $Y_0/2$ до 1, получим выражение

$$\tau_2 = \frac{1}{\eta Y_0} \ln Y_0. \quad (6.41)$$

Максимальное значение X согласно (6.37) и (6.41):

$$X_{max} = \eta(Y_0 - 1 - \ln Y_0). \quad (6.42)$$

На третьем этапе уменьшение X определяется затуханием в резонаторе

$$X = X_{max} e^{-\eta\tau}. \quad (6.43)$$

Сравнив максимальные значения интенсивностей поля в режиме модулированной добротности (6.42) со значением интенсивности в стационарном режиме (6.21), получим, что мощность генерации в режиме модулированной добротности возросла в $\eta = T_1 / T_{рез}$ раз. Для твердотельной

среды $T_1 = 10^{-3}$, $T_{\text{рез}} = 10^{-8}$, следовательно, мощность возрастет в $\eta = 10^5$ раз.

Время затухания поля в резонаторе $\tau_3 = \eta^{-1} > \tau_2$, что является причиной асимметрии формы импульса.

Гигантский импульс в генераторе развивается при $Y_0 \gg 1$, а время включения добротности должно быть меньше времени линейного развития моноимпульса τ_1 .

Генераторы с нелинейными потерями

Кроме принудительной модуляции параметров резонатора и среды, возможно управление динамикой работы генератора с помощью оптических элементов, находящихся внутри резонатора, оптические свойства которых изменяются под действием излучения. Нелинейные оптические характеристики этих элементов обеспечивают изменение добротности в процессе работы.

Рассмотрим уравнения баланса (6.18) и (6.19), дополнив их законом изменения добротности резонатора $Q = Q_{\text{max}}/f(x)$, где $Q_{\text{max}} = \omega T_p$ – максимальное значение добротности:

$$\dot{X} = \eta X(Y - f(X)), \quad (6.44)$$

$$\dot{Y} = Y_0 - Y(X + 1). \quad (6.45)$$

Стационарные положения равновесия, соответствующие $X = Y = 0$, находят при решении алгебраических уравнений

$$Y = f(X), \quad (6.46)$$

$$Y_0 = Y(X + 1). \quad (6.47)$$

Если с увеличением поля добротность резонатора монотонно снижается, т. е. вносится дополнительная отрицательная обратная связь, то решение (6.46) и (6.47) позволяет определить одно положение равновесия. Это положение устойчиво. Исследование устойчивости производят аналогично расчету (6.22)-(6.26). Аперiodический режим реализуется (рис. 6.9а) в том случае, когда

$$\left. \frac{df(X)}{dX} \right|_{X=X_{\text{ст}}} = \frac{2}{\Omega}, \quad (6.48)$$

где Ω – безразмерная частота релаксационных колебаний, определяемая выражением (6.27).

Если с увеличением поля добротность резонатора монотонно увеличивается, т. е. вносится дополнительная положительная обратная связь, то стационарных положений равновесия может быть несколько. Если изоклины (6.46) и (6.47) не пересекаются на фазовой плоскости (X, Y) , то генерация невозможна.

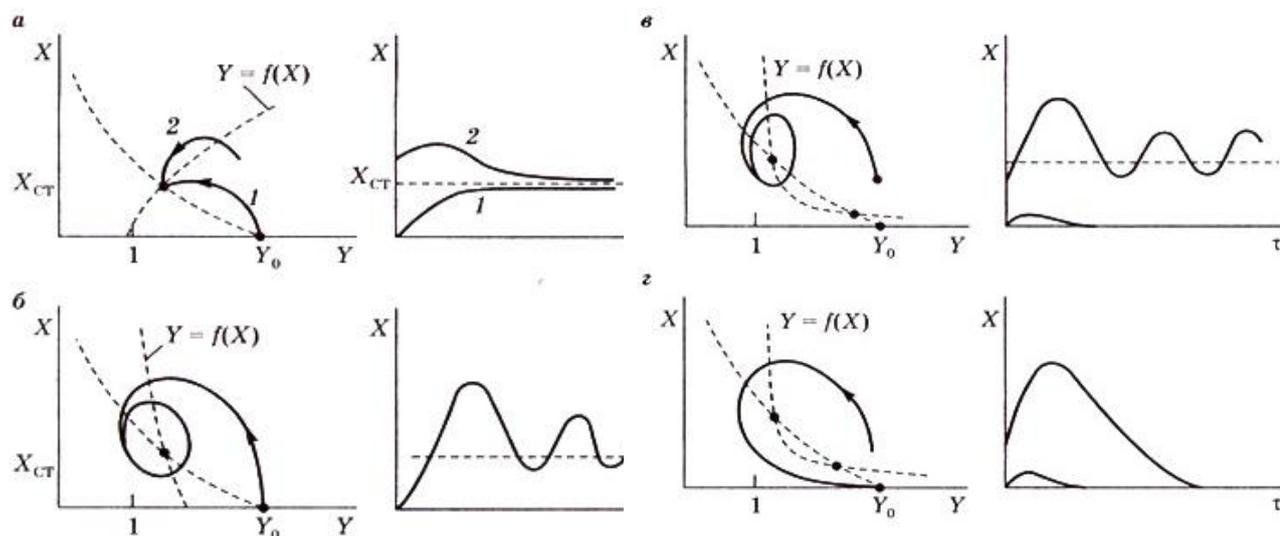


Рис. 6.6. Фазовый портрет генератора с нелинейными потерями:

а – режим гладкого аperiodического импульса при отрицательной обратной связи; б – режим незатухающих пульсаций при мягком включении генерации при положительной обратной связи; в – режим незатухающих пульсаций при жестком режиме включения и положительной обратной связи; г – жесткий режим неустойчивой импульсной генерации при положительной обратной связи

В случае единственного пересечения положение равновесия устойчиво при слабой величине дополнительной обратной связи

$$\eta X \frac{df(x)}{dX} + X + 1 > 0 \Big|_{X=X_{CT}}. \quad (6.49)$$

При выполнении обратного неравенства положение равновесия неустойчиво, стационарная точка охвачена замкнутой фазовой траекторией – предельным циклом. Это означает, что излучение генератора представляет собой незатухающие периодические пульсации (рис. 6.6б). Возбуждение генератора – мягкое, т. е. условия самовозбуждения выполнены при $X = 0, Y_0 > f(0)$.

Рассмотрим случай, когда изоклины пересекаются два раза (рис. 6.6в, г), т. е. система имеет две нетривиальные точки равновесия. Генерация в этом случае может быть возбуждена только внешним импульсом, так как при $X = 0$ условия самовозбуждения не выполнены (жесткое самовозбуждение). Внешний инициирующий импульс, способный возбудить генератор, должен быть больше поля, насыщающего потери до уровня самовозбуждения системы. В противном случае инициирующий импульс затухает. Таким образом, отличие между мягким и жестким режимами включения генерации определяется устойчивостью первой (тривиальной) точки равновесия $X = 0$: для жесткого

режима включения состояние покоя устойчиво, для мягкого режима – неустойчиво. Ближайшая к состоянию покоя точка равновесия неустойчива. Ей соответствует выполнение условия самовозбуждения генератора. Вторая стационарная точка равновесия может быть устойчивой, когда генератор, жестко возбудившись, излучает затухающие импульсы, или неустойчивой. При неустойчивой точке равновесия возможно излучение незатухающих импульсов (рис. 6.6в) либо в системе невозможна длительная генерация: будучи возбужденным внешним импульсом, генератор излучает более мощный импульс и возвращается в состояние покоя (рис. 6.6г).

Генераторы с нелинейным поглощающим фильтром

Такие генераторы относятся к генераторам с нелинейными потерями, однако их необходимо исследовать отдельно, поскольку следует рассмотреть еще одно время релаксации – время релаксации поглощения в фильтре. Балансные уравнения генератора с фильтром записывают в виде

$$\dot{X} = \eta X (Y + Y_{\phi} - 1), \quad (6.50)$$

$$\dot{Y} = Y_0 - Y(X + 1), \quad (6.51)$$

$$\dot{Y}_{\phi} = \delta Y_{\phi 0} - Y_{\phi} \zeta X + \delta. \quad (6.52)$$

В уравнении (6.52) учтено, что среда фильтра может насыщаться полем, отличающимся от поля, взаимодействующего с активной средой. Уравнения (6.50)-(6.52) имеют три положения равновесия: тривиальное – $X=0$, $Y = Y_0$, $Y = Y_{\phi 0}$ и положения 1 и 2:

$$X_0 = 0.5 \left[Y_0 - 1 + \frac{\delta}{\zeta} (Y_{\phi 0} - 1) \right] \pm 0.5 \left[Y_0 - 1 + \frac{\delta}{\zeta} (Y_0 Y_{\phi 0} - 1) \right]^{-0.5};$$

$$Y_{1,2} = \frac{Y_0}{1 + X_{1,2}}; Y_{\phi 1,2} = \frac{Y_{\phi 0}}{1 + \frac{\zeta}{\delta} X_{1,2}}.$$

Если выполнено условие самовозбуждения $Y_0 + Y_{\phi 0} - 1 \geq 0$, то генератор возбуждается мягко.

Общий анализ устойчивости работы генератора с нелинейным фильтром показывает, что неустойчивость стационарных точек 1 и 2 возникает лишь при $Y_{\phi 0} < 0$.

Незатухающие пульсации чаще всего возникают при использовании безынерционных нелинейных фильтров, для которых $T_{\phi} < T_p$. Если обеспечить условия, при которых нелинейный фильтр насыщается раньше активной среды, то в генераторе реализуются условия развития гигантского импульса. Для этого необходимо, чтобы $Y_{\phi 1}$ было значительно меньше $Y_{\phi 0}$ при малых X , т. е. $\zeta \delta \gg 1$. Наличие насыщающегося поглотителя способствует возникновению фазовой синхронизации мод и режиму излучения ультракоротких импульсов.

Вопросы для самопроверки

1. Используя выражение выходной мощности генерации, покажите, что для активной среды, работающей по трехуровневой схеме накачки, максимальная выходная мощность генерации в непрерывном режиме

$$M_{\text{вых}} \approx \frac{N_0 V \hbar \omega}{2T_1} \frac{M_{\text{нак}}}{M_{\text{п}}} - 1 ,$$

где N_0 – число активных атомов в единице объема V активной среды; $M_{\text{нак}}$ и $M_{\text{п}} = N_0 V \hbar \omega_{\text{нак}} / (2T_1 \eta)$ – мощность накачки и пороговая мощность накачки; η – квантовая эффективность накачки, равная отношению числа излученных фотонов частотой ω к числу поглощенных фотонов частотой $\omega_{\text{нак}}$. Покажите, что для активной среды, работающей по четырехуровневой схеме накачки, выходная мощность генерации

$$M_{\text{вых}} = M_{\text{п}} \frac{\omega}{\omega_{\text{нак}}} \eta \frac{M_{\text{нак}}}{M_{\text{п}}} - 1 ,$$

где

$$M_{\text{п}} = \frac{N_{\text{п}} V \hbar \omega_{\text{нак}}}{T_1 \eta s_{\text{п}}} \gamma - \frac{\ln \rho_1 \rho_2}{2L} ,$$

где $s_{\text{п}}$ – поперечное сечение лазерного перехода.

2. Получите выражение для оптимального коэффициента пропускания выходного зеркала для генератора при непрерывном режиме работы с неоднородной линией уширения активной среды.

3. Покажите, что отношение выходной мощности генератора в режиме модулированной добротности к выходной мощности генератора, работающего в непрерывном режиме:

$$\frac{M_Q}{M_{\text{вых}}} \approx \frac{T_1}{2T_p} \approx \frac{T_1 \gamma L - \ln \rho_1 \rho_2}{2nL} .$$

4. Вычислите максимальную выходную мощность лазерного генератора при оптимальном согласовании.

Литература

1. Пихтин А.Н. Оптическая и квантовая электроника: учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 2001. - 573 с.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 1988. - 448с.
3. Клышко Д.Н. Физические основы квантовой электроники. – М.: Наука, 1986.- 296 с.
4. Карлов Н.В. Лекции по квантовой электронике. – М.: Наука, 1988.- 320с.
5. Пихтин А.Н. Физические основы квантовой электроники и оптоэлектроники. – М.: Высшая школа, 1983. 304с.
6. Калитеевский Н.И. Волновая оптика. – М.: Высшая школа, 1978. - 383с.
7. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. - 616 с.
8. Киселев Г.Л. Приборы квантовой электроники. – М.: Высшая школа, 1980. 237с.