ВВЕДЕНИЕ

Пособие соответствует содержанию дисциплины «Теоретическая механика» Федерального государственного образовательного стандарта ВПО по направлению подготовки 162300 – Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей, квалификация (степень) – бакалавр.

Пособие содержит 30 вариантов заданий и типовые задачи по темам динамики твердого тела. В конце пособия приведены ответы по всем заданиям. Вариант задания выдается преподавателем и соответствует сумме трех последних цифр шифра зачетной книжки студента.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ (РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ) РАБОТ

1. Контрольные (расчетно-графические) работы выполняются на стандартных листах писчей бумаги формата А4 с одной стороны.
2. Титульный лист оформляется по приведенному образцу (см. Приложение 1).
3. Каждый рабочий лист должен иметь рамку, линии которой отстоят от края листа слева на 20 мм; справа, сверху и снизу – на 5 мм.
4. Все расчеты снабжаются пояснениями и выполняются только ручкой. Графическая часть задания выполняется в масштабе с использованием чертежных инструментов.
5. При решении каждого задания необходимо указать его вариант, записать полное условие с исходными данными. Расчет должен сопровождаться кратким пояснением, точность расчета 0,01.
6. Если решение задачи размещено на нескольких листах, то все листы задачи должны быть сброшюрованы (скреплены степлером между собой).
7. Допускается по разрешению преподавателя брошюрование нескольких задач по разделам курса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: в 2 т. – С.-Пб.: Лань, 2009.
2. Диевский В.А. Теоретическая механика: учеб. пособие. - 3-е изд., испр. – С.-Пб.: Лань, 2009.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов. – М.: Высшая школа, 2005.

ЗАДАНИЕ Д1

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Моменты, заданные формулами, измеряются Н·м

1. Вентилятор, вращавшийся с угловой скоростью ω_o = 3 рад/с, тормозится силами сопротивления, момент которых $M = 25\,\omega^2$. Момент инерции вентилятора относительно оси вращения равен $J = 40$ кг·м^2. Определить, в течение какого времени угловая скорость вентилятора уменьшится в два раза.

2. Вращавшийся с угловой скоростью ω_o = 2,5 рад/с ротор электродвигателя начинает тормозиться силами аэродинамического сопротивления, момент которых $M_1 = 15\,\omega$, и силами трения в подшипниках, момент которых $M_2 = 30$ Н·м. Момент инерции ротора относительно оси вращения равен $J = 100$ кг·м^2. Определить, в течение какого времени ротор остановится.

3. Вентилятор, вращавшийся с угловой скоростью ω_o = 6 рад/с, тормозится силами сопротивления, момент которых $M_1 = 30\,\omega^2$, и силами трения с моментом $M_2 = 300$ Н·м. Момент инерции его относительно оси вращения равен $J = 50$ кг·м^2. Определить, за какое время вентилятор остановится.

4. К валу, находившемуся в покое, прикладывается вращающий момент $M_1 = 0{,}8$ Н·м. При этом возникают силы, момент которых $M_2 = 5\cos(\pi t)$. Момент инерции вала относительно оси вращения равен $J = 0{,}1$ кг·м^2. Определить угловую скорость вала через 2,5 с после начала движения.

5. Твердое тело, вращавшееся с угловой скоростью ω_o = 8 рад/с, начинает тормозиться силами сопротивления, моменты которых M_1 и M_2. Момент M_1 от трения в подшипниках постоянен $M_1 = 150$ Н·м. Тормозящий момент M_2 пропорционален угловой скорости $M_2 = 25\,\omega$. Момент инерции тела относительно оси вращения равен $J = 140$ кг·м^2. Определить, через какой промежуток времени тело остановится.

6. Маховик массой 500 кг и радиусом 60 см приводится во вращение из состояния покоя моментом $M_1 = 470$ Н·м. При этом маховик испытывает силы сопротивления с моментом $M_2 = 8{,}5\,\omega^2$. Маховик считать однородным диском. Определить, по истечении какого времени угловая скорость маховика станет равной 6 рад/с.

7. Вращавшийся с некоторой угловой скоростью ротор электродвигателя начинает тормозиться силами аэродинамического сопротивления, момент которых равен $M = 12\,\omega^2$. Момент инерции ротора относительно оси вращения равен $J = 150$ кг·м^2. Определить угол, на который повернется ротор до того момента времени, когда его угловая скорость уменьшится в два раза.

8. Платформа, находившаяся в покое, приводится во вращение постоянным моментом $M_1 = 1800$ Н·м. При этом возникает момент сил сопротивления $M_2 = 120\,\omega$. Радиус инерции платформы относительно оси вращения равен ρ = 1,5 м, ее масса m = 500 кг. Определить угловую скорость платформы через 5 с после начала движения.

9. Платформа, вращавшаяся с угловой скоростью ω_o = 3 рад/с, начинает тормозиться силами сопротивления, момент которых равен $M = 10\ \omega\ (\omega + 3)$. Момент инерции платформы относительно оси вращения равен J = 435 кг·м^2. Определить число оборотов платформы с момента начала торможения и до ее остановки.

10. Маховик начинает вращаться из состояния покоя, причем вращающий момент зависит от угла его поворота: $M = 2470\ \varphi - 3\ \varphi^3$. Момент инерции маховика относительно оси вращения J = 1000 кг·м^2. Установить зависимость угловой скорости маховика от угла поворота. Определить значение угловой скорости в тот момент времени, когда маховик сделает 5 оборотов.

11. На тормозящийся вал действует постоянный момент сил трения в подшипниках M_1 = 80 Н·м и момент сил сопротивления, вызываемый электромагнитной муфтой $M_2 = 60\ (1 - e^{-1,2t})$. Начальная угловая скорость вала равна ω_o = 15 рад/с. Момент инерции тела относительно оси вращения равен J = 50 кг·м^2. Определить угловую скорость вала в момент времени t = 3 с.

12. Вал, вращавшийся с угловой скоростью ω_o = 9 рад/с, начинает тормозиться силами сопротивления, моменты которых M_1 и M_2. Тормозящий момент M_1 пропорционален угловой скорости $M_1 = 15\ \omega$. Момент M_2 от трения в подшипниках постоянен и равен M_2 = 100 Н·м. Вал считать однородным цилиндром массой 200 кг и радиусом 60 см. Определить угловую скорость вала через 1,5 с после начала торможения.

13. Движущий момент электродвигателя обратно пропорционален квадрату угловой скорости $M = \dfrac{1,5}{\omega^2}$. Момент инерции ротора относительно оси вращения равен J = 50 кг·м^2. Определить, через какое время угловая скорость ротора утроится, если начальная угловая скорость равна ω_o = 0,5 рад/с.

14. Маховик, находившийся в покое, приводится во вращение постоянным моментом M_1 = 2000 Н·м. При этом возникает момент сил сопротивления, пропорциональный угловой скорости: $M_2 = 100\ \omega$. Момент инерции маховика относительно оси вращения равен J = 250 кг·м^2. Определить число оборотов маховика за 10 с после начала движения.

15. Барабан массой 200 кг и радиусом 80 см приводится во вращение из состояния покоя постоянной силой F_1 = 30 Н, приложенной по касательной к его ободу. При этом возникает сила сопротивления, пропорциональная угловой скорости $F_2 = 15\ \omega$, приложенная на расстоянии r =45 см от оси вращения. Барабан считать однородным цилиндром. Определить угловую скорость барабана через 15 с после начала вращения.

16. К ведущему валу редуктора при запуске прикладывается вращающий момент, который зависит от его угловой скорости: $M = 18\ (1 - 0,5\ \omega)$. Момент инерции вала относительно оси вращения J = 36 кг·м^2. Определить угол, на который повернется вал за 15 с после начала пуска.

17. На тормозящийся вал действует момент сил сопротивления, равный $M = 120\ (1 - e^{-0,6t})$. Момент инерции тела относительно оси вращения равен $J = 150$ кг·м^2. Начальная угловая скорость вала равна $\omega_o = 10$ рад/с. Определить значение угла поворота вала в момент времени $t = 5$ с.

18. Барабан массой 600 кг и радиусом 80 см приводится во вращение из состояния покоя постоянным моментом $M_1 = 500$ Н·м. При этом барабан испытывает силы сопротивления, момент которых $M_2 = 6\ \omega^2$. Барабан считать однородным диском. Определить угловую скорость барабана в тот момент времени, когда он повернется на угол $\varphi = 4\pi$ рад.

19. Вал, вращавшийся с угловой скоростью $\omega_o = 2,5$ рад/с, начинает испытывать воздействие сил, момент которых $M = 50 \sin(\pi t)$. Момент инерции вала относительно оси вращения равен $J = 10$ кг·м^2. Определить угловую скорость вала через 10,5 с после начала воздействия сил.

20. Барабан, находившийся в покое, приводится во вращение постоянным моментом M_1. При этом возникает момент сил сопротивления, пропорциональный угловой скорости: $M_2 = 12\ \omega$. Барабан считать однородным цилиндром массой 100 кг и радиусом 50 см. Определить, каким должен быть момент $\mathbf{M}_1$, чтобы через 2 с угловая скорость барабана равнялась 8 рад/с.

21. Маховик массой 100 кг и радиусом 80 см, вращавшийся с угловой скоростью $\omega_o = 15$ рад/с, начинает испытывать силы сопротивления, момент которых пропорционален угловой скорости $M = 16\ \omega$. Маховик считать однородным диском. Определить число оборотов маховика с момента начала торможения и до его остановки.

22. После отключения подачи газа турбина, вращавшаяся с угловой скоростью $\omega_o = 6$ рад/с, тормозится силами аэродинамического сопротивления, момент которых $M_1 = 15\ \omega^2$, и силами трения в подшипниках, момент которых $M_2 = 130$ Н·м. Момент инерции турбины относительно оси вращения равен $J = 120$ кг·м^2. Определить число оборотов турбины с момента начала торможения и до ее остановки.

23. К шкиву в момент пуска прикладывается вращающий момент, который зависит от его угловой скорости: $M = 18\ (1 - 0,5\ \omega)$. Шкив считать однородным кольцом массой 100 кг и радиусом 60 см. Определить угловую скорость шкива через 10 с после пуска.

24. К однородному цилиндру массой 20 кг и радиусом 10 см, вращавшемуся с угловой скоростью $\omega_o = 10$ рад/с, прикладывается вращающий момент, который зависит от угловой скорости цилиндра и времени: $M = \dfrac{1,1t}{\omega}$. Определить угловую скорость цилиндра через 2 с после приложения момента.

25. На тело, вращавшееся с угловой скоростью $\omega_o = 5$ рад/с, начинают действовать силы сопротивления, момент которых зависит от угла поворота тела: $M = 3\ \varphi^2$. Момент инерции тела относительно оси вращения равен $J = 10$ кг·м^2. Определить, на какой угол повернется тело до его остановки.

26. Для торможения ротора электродвигателя к нему прикладывается момент сил сопротивления, зависящий от угловой скорости: $M = 0{,}002\ \omega^3$. Момент инерции ротора относительно оси вращения равен $J = 0{,}1$ кг·м^2. Определить число оборотов ротора с момента начала торможения и до того момента времени, когда его угловая скорость уменьшится в два раза, если $\omega_o = 0{,}5$ рад/с.

27. Для ускорения вращения турбины к ней прикладывается вращающий момент, который зависит от угловой скорости турбины и времени: $M = \dfrac{1{,}2t}{\omega^2}$. Начальная угловая скорость турбины $\omega_o = 4$ рад/с. Момент инерции турбины относительно оси вращения равен $J = 0{,}2$ кг·м^2. Определить угловую скорость турбины через 2 с после приложения момента.

28. При работе дизеля его вращающий момент может зависеть от угловой скорости: $M = 100\ (2\ \omega - 7)$. Момент инерции вала дизеля относительно оси вращения равен $J = 180$ кг·м^2. Начальная угловая скорость вала $\omega_o = 5$ рад/с. Определить угловую скорость вала через 1,5 с после приложения момента.

29. Вращающий момент, приложенный к платформе, обратно пропорционален квадрату угловой скорости: $M = \dfrac{1{,}5}{\omega^2}$. Момент инерции платформы относительно оси вращения равен $J = 50$ кг·м^2. Определить угловую скорость платформы через 25 с после приложения момента, если начальная угловая скорость равна $\omega_o = 0{,}5$ рад/с.

30. Шкив (однородное кольцо) массой 200 кг и радиусом 40 см приводится во вращение из состояния покоя моментом $M_1 = 80$ Н·м, испытывая силы сопротивления, момент которых $M_2 = 1{,}2\ \omega^2$. Определить, на какой угол повернется шкив, пока его угловая скорость станет равной 4 рад/с.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

ЗАДАЧА 1

Шкив, массой m = 90 кг и радиусом r = 30 см вращается с угловой скоростью $\omega_o = 20$ с$^{-1}$. Для его остановки на шкив оказывается действие через невесомый ремень, натяжения ветвей которого равны $T_1 = 40$ Н и $T_2 = 20$ Н (рис. 1). Радиус инерции шкива $\rho_z = 20$ см. Определить время торможения шкива t_1 и угол φ_1, на который он повернется за это время.

Решение. Рассмотрим все силы, действующие на шкив и прилежащую к нему часть ремня: силы натяжения ветвей ремня $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$, силу тяжести шкива $\overline{G}$, составляющие реакции в подшипниках $\overline{X}_O$ и $\overline{Y}_O$ (рис. 2). Применим к шкиву дифференциальное уравнение вращательного движения относительно его оси z: $J_z\dfrac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\overline{F}_k^e)$.

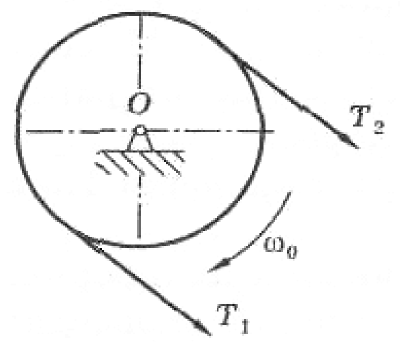


Рис. 1

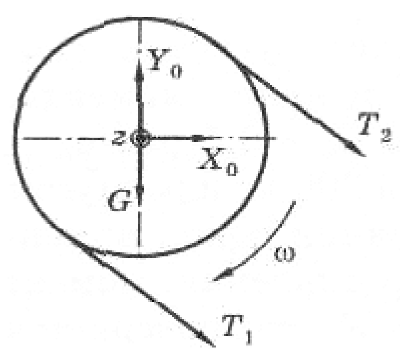


Рис. 2

Здесь $J_z = m\rho_z^2 = 90 \cdot 0{,}2^2 = 3{,}6$ кг·м^2 - осевой момент инерции шкива. Стоящий в правой части уравнения главный момент внешних сил относительно оси вращения обозначим для краткости M_z^e. Он будет в данном случае равен

$$M_z^e = -T_1 \cdot r + T_2 \cdot r = -6 \text{ Н·м},$$

поскольку силы $\overline{G}$, $\overline{X}_O$ и $\overline{Y}_O$ имеют нулевые моменты относительно оси z (моменты сил, действующих по движению, должны браться со знаком «плюс», а против движения – со знаком «минус»).

Таким образом, дифференциальное уравнение вращательного движения имеет вид: $J_z\dfrac{d\omega}{dt} = M_z^e$.

Для интегрирования этого уравнения делим переменные, учитывая, что $M_z^e = const$ и $J_z = const$:

$$J_z d\omega = M_z^e dt, \qquad (*)$$

после чего в левой и правой частях ставим интегралы – определенные или неопределенные.

Рассмотрим оба способа решения.

1. Если использовать неопределенные интегралы, получим

$$J_z \int d\omega = M_z^e \int dt, \text{ откуда } J_z\omega = M_z^e t + C_1,$$

где постоянная интегрирования C_1 может быть найдена из начального условия $\omega = \omega_o$ при $t = 0$. Подставив в уравнение эти значения, получим

$$J_z\omega_o = C_1, \text{ и тогда } J_z\omega = M_z^e t + J_z\omega_o,$$

откуда
$$\omega = \omega_o + \frac{M_z^e}{J_z} t.$$

2. Если в уравнении (*) использовать определенные интегралы, можно записать:

$$J_z \int_{\omega_o}^{\omega} d\omega = M_z^e \int_0^t dt.$$

Здесь нижние пределы интегралов соответствуют начальному моменту времени $\omega = \omega_o$ при $t = 0$, а верхние – произвольному моменту времени t и некоторой угловой скорости ω в этот момент времени.

Из последнего уравнения, интегрируя, находим

$$J_z\omega \Big|_{\omega_o}^{\omega} = M_z^e t \Big|_0^t,$$

после чего делаем подстановки $J_z\omega - J_z\omega_o = M_z^e t$, откуда имеем

$$\omega = \omega_o + \frac{M_z^e}{J_z} t.$$

Получили то же решение, что и при первом способе.

Используя последнее соотношение, можно найти время торможения шкива, т.е. время t_1, за которое угловая скорость обратится в ноль

$$0 = \omega_o + \frac{M_z^e}{J_z} t_1,$$

и тогда
$$t_1 = -\frac{J_z\omega_o}{M_z^e} = 12 \text{ с}.$$

Для определения угла поворота φ, заменив в уравнении для угловой скорости $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, получим $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega_o + \dfrac{M_z^e}{J_z} t.$

Деля здесь переменные $d\varphi = \omega_o dt + \dfrac{M_z^e}{J_z} t dt$ и интегрируя с использованием определенных интегралов (учитывая, что $\varphi = 0$ при $t = 0$), находим $\int_0^{\varphi_1} d\varphi = \omega_0 \int_0^{t_1} dt + \dfrac{M_z^e}{J_z} \int_0^{t_1} t dt$, откуда $\varphi \Big|_0^{\varphi_1} = \omega_0 t \Big|_0^{t_1} + \dfrac{M_z^e}{J_z} \dfrac{t^2}{2} \Big|_0^{t_1}$.

Окончательно имеем $\varphi_1 = \omega_0 t_1 + \dfrac{M_z^e}{J_z} \dfrac{t_1^2}{2} = 120$ рад, что соответствует числу N оборотов шкива: $N = \dfrac{\varphi}{2\pi} = 19{,}1$ оборотов.

Ответ: $t_1 = 12$ с, $\varphi_1 = 120$ рад.

ЗАДАЧА 2

Однородный цилиндр массой m = 5 кг и радиусом r = 6 см, находящийся на оси вращения (рис. 3), взаимодействует с неподвижной поверхностью посредством спиральной пружины, создающей момент, пропорциональный углу поворота $M = C_\varphi \varphi$, где коэффициент жесткости пружины $C_\varphi = 3{,}6$ Н·м/рад.

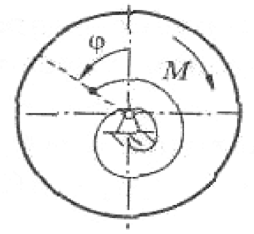


Рис. 3

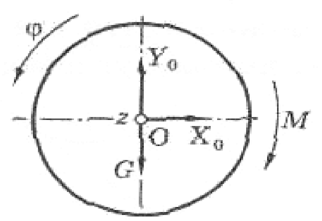


Рис. 4

В начальный момент времени цилиндр отклонен от положения равновесия на угол $\varphi_0 = 0{,}5$ рад и ему придана угловая скорость $\omega_0 = 10$ с$^{-1}$. Определить частоту и амплитуду возникших колебаний. Сопротивление движению отсутствует.

Решение. Рассмотрим цилиндр, освобожденный от связей (рис. 4), и применим к нему дифференциальное уравнение вращательного движения

$$J_z\varepsilon = \sum M_z\left(\bar{F}_k^e\right).$$

В данном случае имеем $J_z\varepsilon = -M$, где $J_z = \dfrac{mr^2}{2} = 9 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2 – осевой момент инерции или $J_z\varepsilon = -C_\varphi\varphi$, откуда

$$\varepsilon = -k^2\varphi, \qquad (*)$$

где
$$k = \sqrt{\frac{C_\varphi}{J_z}} = 20 \text{ с}^{-1}.$$

Интегрирование дифференциального уравнения (*) можно провести двумя способами.

Способ 1. Запишем уравнение в виде $\dfrac{d\omega}{dt} = -k^2\varphi$. Разделение переменных здесь невозможно, поскольку в уравнении присутствуют сразу три переменные: t, ω и φ.

Чтобы избавиться от переменной t, сделаем замену

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\omega,$$

получим
$$\omega\frac{d\omega}{d\varphi} = -k^2\varphi.$$

Умножая это уравнение на dφ, разделяем переменные и интегрируем, используя определенные интегралы

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega = -k^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \varphi d\varphi,$$

откуда
$$\left.\frac{\omega^2}{2}\right|_{\omega_0}^{\omega} = -k^2 \left.\frac{\varphi^2}{2}\right|_{\varphi_0}^{\varphi},$$

или $\omega^2 - \omega_0^2 = -k^2(\varphi^2 - \varphi_0^2)$, и, следовательно, $\omega = k\sqrt{A^2 - \varphi^2}$, где обозначено

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\omega_0}{k}\right)^2} = 0{,}5\sqrt{2} \text{ рад}.$$

Учитывая, что $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, последнее уравнение записываем в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = k\sqrt{A^2 - \varphi^2},$$

и после разделения переменных интегрируем $\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{A^2 - \varphi^2}} = k\int_0^t dt$,

откуда $\arcsin \left.\frac{\varphi}{A}\right|_{\varphi_0}^{\varphi} = kt\big|_0^t$, или $\arcsin\frac{\varphi}{A} - \arcsin\frac{\varphi_0}{A} = kt$.

Тогда $\varphi = A\sin(kt + \alpha)$, где $\alpha = \arcsin\frac{\varphi_0}{A} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ рад – начальная фаза колебаний.

Итак, амплитуда колебаний $A = 0{,}5\sqrt{2}$ рад, а частота $k = 20$ с$^{-1}$.

Способ 2. Запишем уравнение (*) в виде $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, для которого характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$ имеет два чисто мнимых корня: $\lambda_{1,2} = \pm ki$.

Тогда общее решение уравнения записывается в виде

$$\varphi = C_1\cos kt + C_2\sin kt, \text{ или } \varphi = A\sin(kt + \alpha),$$

где постоянные интегрирования A и α определяются из начальных условий:

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0 = 0{,}5 \text{ рад и } \dot{\varphi}\big|_{t=0} = \omega_0 = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Подставляя начальные условия в выражения для φ и $\dot{\varphi} = Ak\cos(kt + \alpha)$, получаем $\varphi_0 = A\sin\alpha$, $\omega_0 = Ak\cos\alpha$, откуда

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\omega_0}{k}\right)^2} = 0{,}5\sqrt{2} \text{ рад и } \alpha = \operatorname{arctg}\frac{\varphi_0 k}{\omega_0} = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4} \text{ рад}.$$

Окончательно имеем $\varphi = 0{,}5\sqrt{2}\sin\left(20t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $k = 20$ с$^{-1}$; $A = 0{,}5\sqrt{2}$ рад.

ЗАДАНИЕ Д2

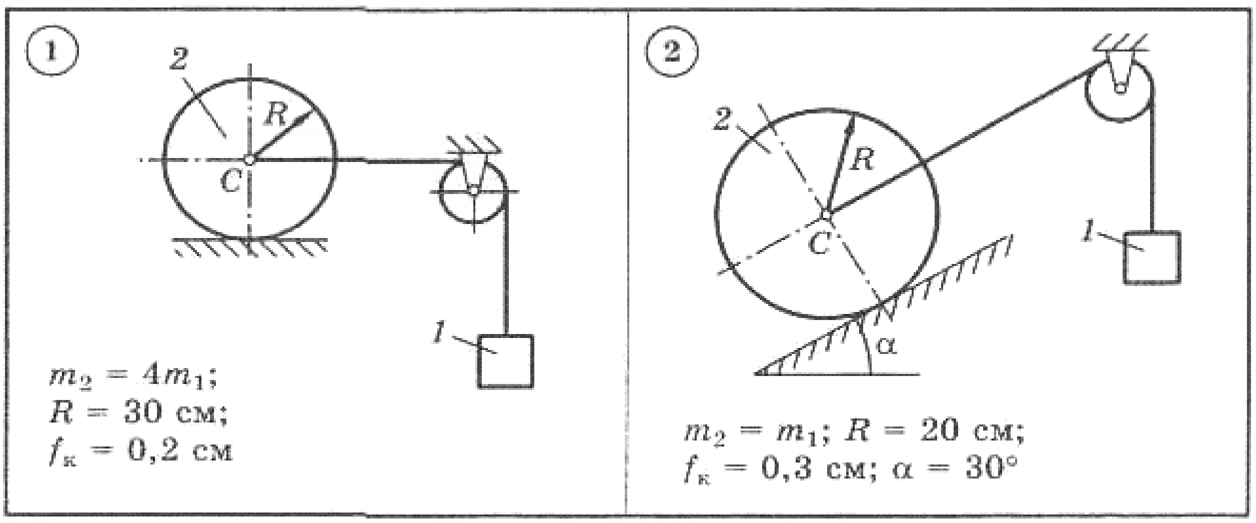
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

ЗАДАНИЕ 1

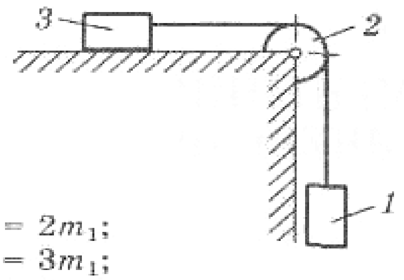
Для приведенных на схемах 1-30 механических систем, используя теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме, определить угловое ускорение (варианты 4, 6, 7, 9, 11, 18, 25, 26, 28) или линейное ускорение (остальные варианты) тела 1. Нити невесомы и нерастяжимы. Принятые обозначения: m – массы тел, R и r – радиусы, ρ – радиус инерции (если он не указан, тело считать однородным цилиндром); при наличии трения указываются f – коэффициент трения скольжения, f_k – коэффициент трения качения.

ЗАДАНИЕ 2

Для приведенных на схемах 1-30 механических систем, используя теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме, определить угловую скорость (варианты 4, 6, 7, 9, 11, 18, 25, 26, 28) или линейную скорость (остальные варианты) тела 1 после его заданного перемещения $\varphi_1 = 2\pi$ рад или $s_1 = 2$ м. Движение начинается из состояния покоя.

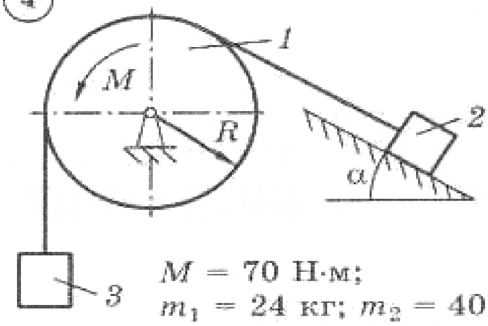


3



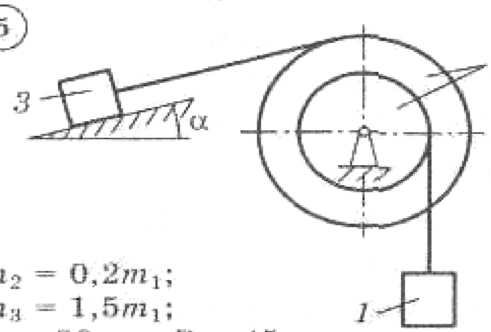
$m_2 = 2m_1$;
$m_3 = 3m_1$;
$f = 0{,}15$

4



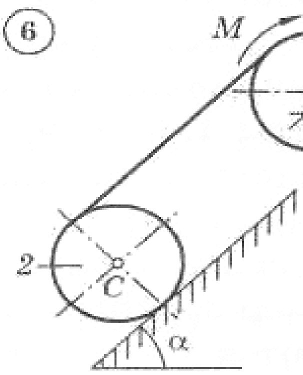
M = 70 Н·м;
m_1 = 24 кг; m_2 = 40 кг;
m_3 = 20 кг; R = 25 см;
$f = 0{,}12$; $\alpha = 30°$

5



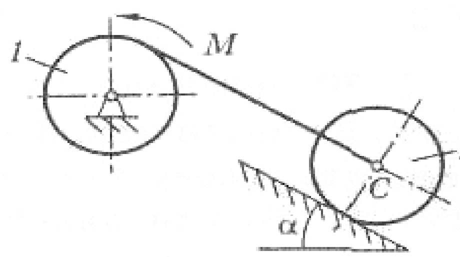
$m_2 = 0{,}2m_1$;
$m_3 = 1{,}5m_1$;
r_3 = 30 см; R = 45 см;
ρ_2 = 25 см; $f = 0{,}1$;
$\alpha = 15°$

6



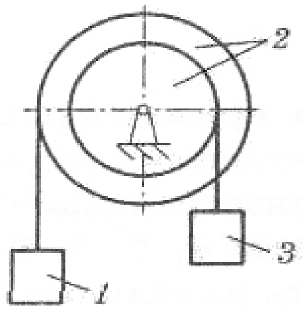
M = 40 Н·м;
m_1 = 15 кг;
m_2 = 35 кг;
R_1 = 20 см;
$\alpha = 45°$

7



M = 120 Н·м;
m_1 = 30 кг; m_2 = 42 кг;
R_1 = 40 см; $\alpha = 30°$

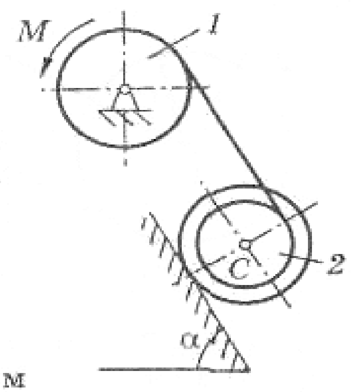
8



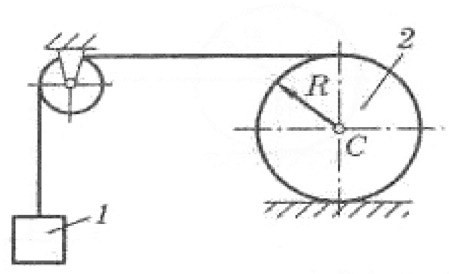
$m_2 = 0{,}5m_1$; $m_3 = 2m_1$;
r_2 = 25 см; R_2 = 55 см;
ρ_2 = 40 см

9

m_1 = 15 кг;
m_2 = 32 кг;
R_1 = 20 см;
r_2 = 15 см;
R_2 = 40 см;
ρ_2 = 20 см;
$\alpha = 60°$;
M = 120 Н·м

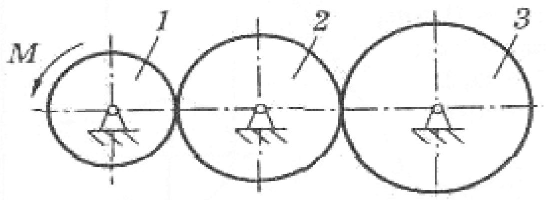


10



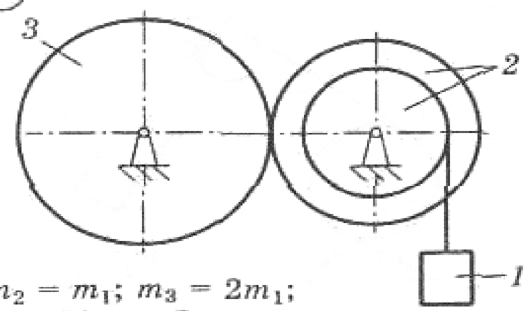
$m_2 = 6m_1$; R = 45 см;
$f_к$ = 0,2 см

(11)



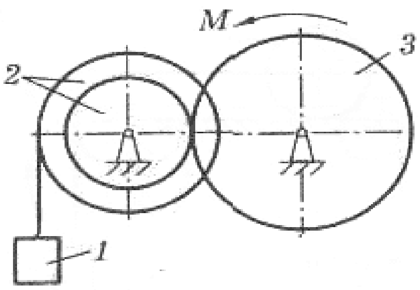
$m_1 = 20$ кг; $m_2 = 10$ кг;
$m_3 = 40$ кг; $M = 60$ Н·м;
$R_1 = 30$ см

(12)



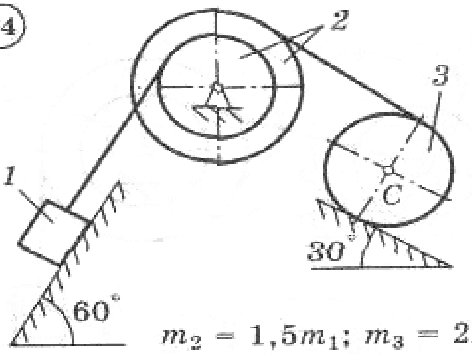
$m_2 = m_1$; $m_3 = 2m_1$;
$r_2 = 30$ см; $R_2 = 50$ см;
$\rho_2 = 40$ см

(13)



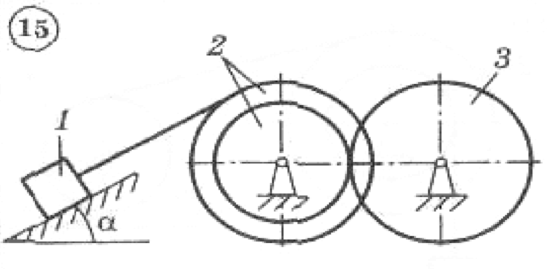
$M = 220$ Н·м; $m_1 = 20$ кг;
$m_2 = 8$ кг; $m_3 = 15$ кг; $r_2 = 40$ см;
$R_2 = 60$ см; $R_3 = 70$ см; $\rho_2 = 50$ см

(14)



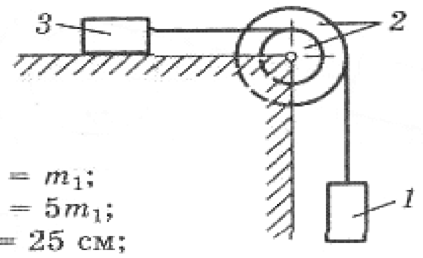
$m_2 = 1{,}5m_1$; $m_3 = 2m_1$;
$r_2 = 35$ см; $R_2 = 55$ см;
$\rho_2 = 40$ см

(15)



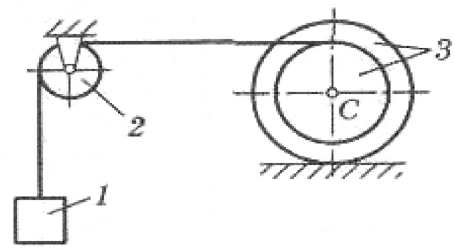
$m_2 = 2m_1$; $m_3 = 4m_1$;
$r_2 = 30$ см; $R_2 = 50$ см;
$\rho_2 = 40$ см; $f = 0{,}2$; $\alpha = 30°$

(16)



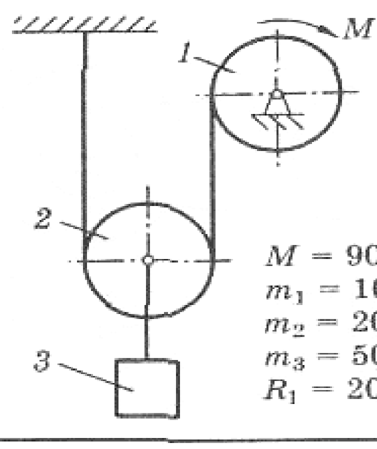
$m_2 = m_1$;
$m_3 = 5m_1$;
$r_2 = 25$ см;
$R_2 = 45$ см;
$\rho_2 = 35$ см;
$f = 0{,}2$

(17)



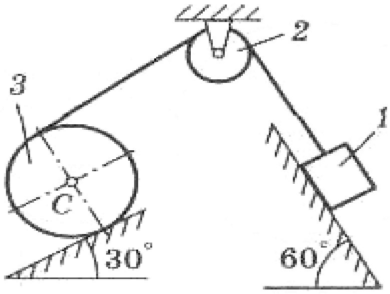
$m_2 = 3m_1$; $m_3 = 7m_1$;
$r_3 = 30$ см; $R_3 = 50$ см;
$\rho_3 = 40$ см

(18)



$M = 90$ Н·м;
$m_1 = 10$ кг;
$m_2 = 20$ кг;
$m_3 = 50$ кг;
$R_1 = 20$ см

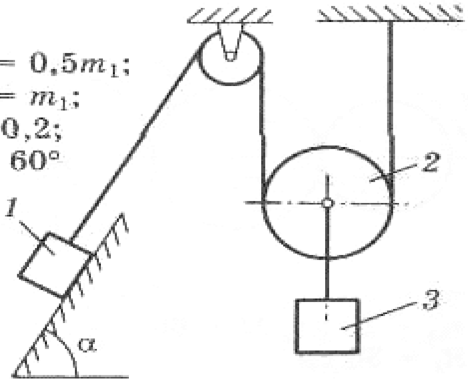
19



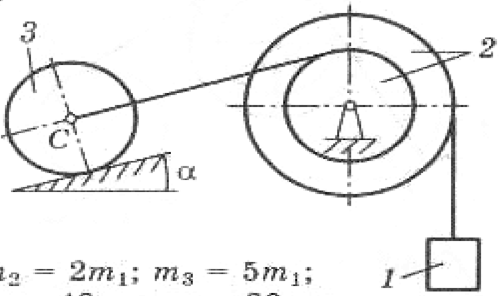
$m_2 = 0{,}6m_1$; $m_3 = 3m_1$

20

$m_2 = 0{,}5m_1$;
$m_3 = m_1$;
$f = 0{,}2$;
$\alpha = 60°$

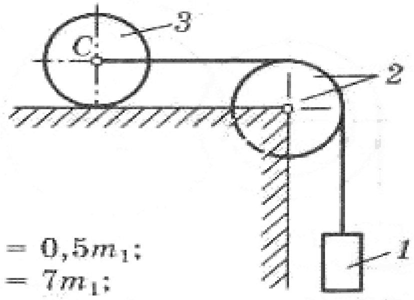


21



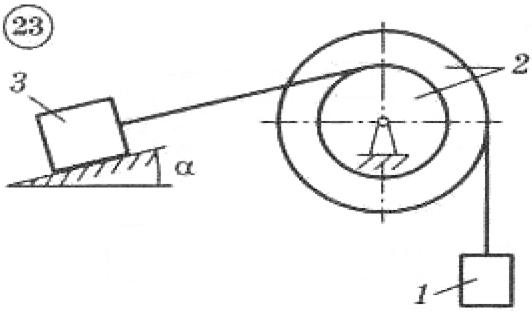
$m_2 = 2m_1$; $m_3 = 5m_1$;
$\rho_2 = 40$ см; $r_2 = 30$ см;
$R_2 = 50$ см; $\alpha = 15°$

22



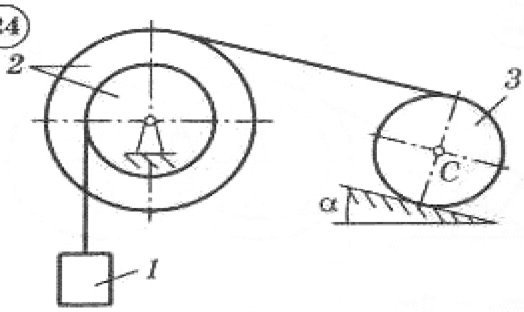
$m_2 = 0{,}5m_1$;
$m_3 = 7m_1$;
$R_3 = 40$ см;
$f_к = 0{,}25$ см

23



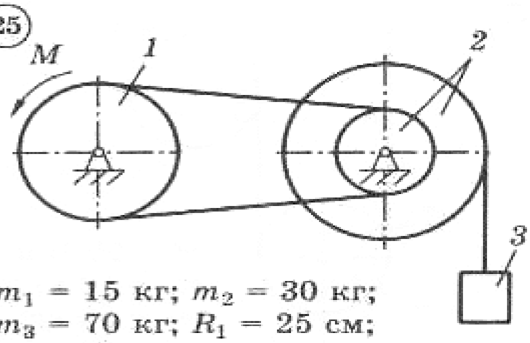
$m_2 = 1{,}5m_1$; $m_3 = 6m_1$;
$r_2 = 20$ см; $R_2 = 45$ см;
$\rho_2 = 30$ см; $f = 0{,}1$; $\alpha = 15°$

24



$m_2 = m_1$; $m_3 = 2{,}5m_1$;
$r_2 = 35$ см; $R_2 = 45$ см;
$\rho_2 = 40$ см; $\alpha = 15°$

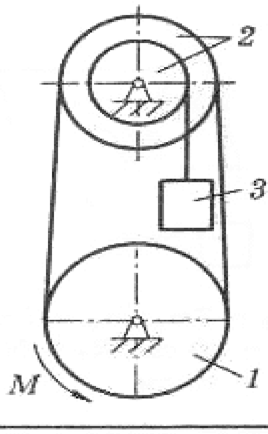
25



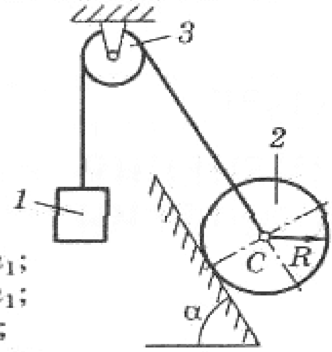
$m_1 = 15$ кг; $m_2 = 30$ кг;
$m_3 = 70$ кг; $R_1 = 25$ см;
$R_2 = 40$ см; $r_2 = 20$ см;
$\rho_2 = 30$ см; $M = 480$ Н·м

26

$m_1 = 20$ кг;
$m_2 = 30$ кг;
$m_3 = 50$ кг;
$R_1 = 50$ см;
$r_2 = 25$ см;
$R_2 = 45$ см;
$\rho_2 = 35$ см;
$M = 180$ Н·м

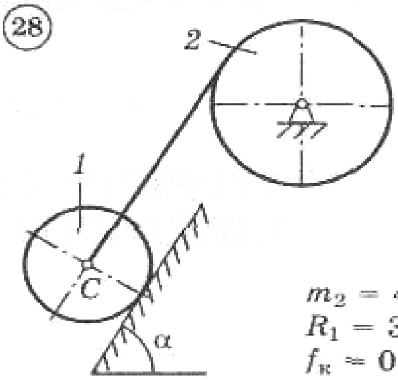


27



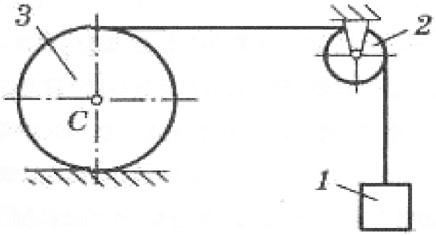
$m_2 = 0{,}5m_1$;
$m_3 = 0{,}5m_1$;
$R = 25$ см;
$f_к = 0{,}28$ см;
$\alpha = 60°$

28



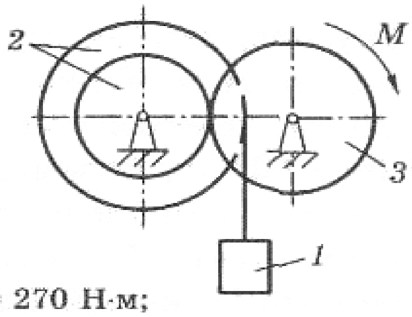
$m_2 = 4m_1$;
$R_1 = 30$ см;
$f_к = 0{,}3$ см;
$\alpha = 60°$

29



$m_2 = 2m_1$; $m_3 = 6m_1$;
$R_3 = 50$ см; $f_к = 0{,}25$ см

30



$M = 270$ Н·м;
$m_1 = 45$ кг; $m_2 = 20$ кг;
$m_3 = 15$ кг; $r_2 = 30$ см;
$R_2 = 50$ см; $r_3 = 35$ см; $\rho_2 = 40$ см

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

ЗАДАЧА 1

Грузоподъемная установка (рис.5) состоит из барабана с осевым моментом инерции J = 4 кг·м^2 и радиусом r = 20 см, невесомого и нерастяжимого троса и груза массой m = 10^3 кг, перемещающегося по наклонной плоскости, составляющей угол α = 30^o с горизонтом, с коэффициентом трения f = 0,2. Определить величину вращающего момента M, который необходимо приложить к барабану, чтобы его угловое ускорение было равно ε = 5 с$^{-2}$.

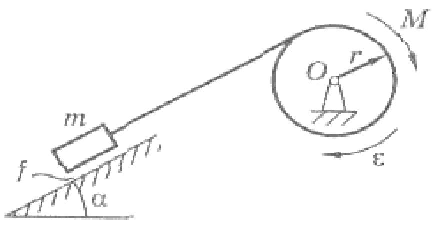


Рис. 5

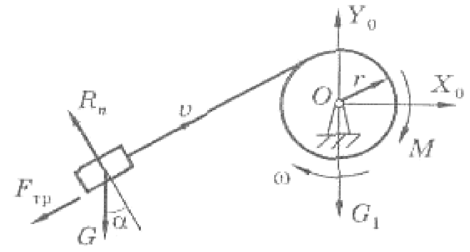


Рис. 6

Решение. Поскольку рассматривается мгновенное состояние системы, то следует применить теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме $\frac{dT}{dt} = \sum N_k$.

При условии, что трос нерастяжим и отсутствует проскальзывание троса относительно барабана, система является неизменяемой (внутренние силы не работают), и тогда производная от кинетической энергии будет определяться только мощностями внешних сил: $\frac{dT}{dt} = \sum N_k^e$.

Кинетическая энергия системы (поступательно движущийся груз и вращающийся барабан, рис. 6) $T = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$.

Кинематическая связь, наложенная на скорость груза и угловую скорость барабана, определяется условиями нерастяжимости троса и отсутствием проскальзывания троса относительно барабана: $\upsilon = \omega r$. Тогда

$$T = \frac{1}{2}(mr^2 + J)\omega^2.$$

Выражение в скобках называется приведенным (к барабану) моментом инерции: $J_{пр} = mr^2 + J = 44$ кг·м^2.

Итак, кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2}J_{пр}\omega^2,$$

а производная от нее по времени

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} J_{пр} 2\omega \frac{d\omega}{dt} = J_{пр}\omega\varepsilon$$

дает левую часть записи теоремы.

Рассмотрим действующие в системе внешние силы и их мощности. Сила тяжести барабана $\overline{G}_1$ и составляющие реакции на его оси $\overline{X}_o$ и $\overline{Y}_o$ будут иметь нулевую мощность (так как равна нулю скорость точки их приложения – точки O). Также равна нулю мощность нормальной реакции груза $\overline{R}_n$, поскольку она перпендикулярна скорости груза.

Ненулевую мощность будут иметь только сила тяжести груза $\overline{G}$, сила трения $\overline{F}_{тр}$ и вращающий момент M:

$$N_G = \overline{G}\,\overline{\upsilon} = G\upsilon\cos(\alpha + 90^o) = -G\upsilon\sin\alpha;$$

$$N_{F_{тр}} = \overline{F}_{тр}\,\overline{\upsilon} = F_{тр}\upsilon\cos 180^o = -F_{тр}\upsilon; \quad N_M = M\omega.$$

Тогда (с учетом кинематической связи) сумма мощностей запишется в виде:

$$\sum N_k^e = [M - (G\sin\alpha + F_{тр})r]\omega.$$

Выражение в квадратных скобках называется приведенным (к барабану) вращающим моментом: $M_{пр} = M - (G\sin\alpha + F_{тр})r$, и тогда правая часть записи теоремы имеет вид $\sum N_k^e = M_{пр}\omega$.

Приравнивая правую и левую части теоремы, получаем $J_{пр}\omega\varepsilon = M_{пр}\,\omega$, отсюда после сокращения находим требуемый приведенный вращающий момент $M_{пр} = J_{пр}\varepsilon = 44 \cdot 5 = 220$ Н·м.

Теперь можно найти необходимый вращающий момент:

$$M = M_{пр} + (G\sin\alpha + F_{тр})r.$$

Учитывая, что $F_{тр} = f R_n = f G \cos\alpha$, находим

$$M = M_{пр} + G(f\cos\alpha + \sin\alpha)r = 1539 \text{ Н·м} \approx 15{,}4 \text{ кН·м}.$$

Ответ: M = 15,4 кН·м.

ЗАДАЧА 2

Рассматривается грузоподъемная установка из предыдущей задачи. К барабану приложен постоянный вращающий момент M = 3 кН·м. Определить угловую скорость барабана после того, как он повернется на угол $\varphi = 10$ рад, если движение началось из состояния покоя.

Решение. В постановке данной задачи идет речь о конечном перемещении системы, поэтому следует применить теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i.$$

Кинетическая энергия системы получена в предыдущей задаче

$$T = \frac{1}{2} J_{пр} \omega^2,$$

где приведенный момент инерции $J_{пр}$ = 44 кг·м^2. Начальная кинетическая энергия системы $T_0 = 0$, так как движение началось из состояния покоя.

Перейдем к вычислению величин работ.

Внутренние силы в данной системе не работают: $\sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0$ (неизменяемая система), поэтому изменение кинетической энергии будет определяться только работами внешних сил. Внешние силы и соответствующие перемещения показаны на рис. 7 (перемещение груза $\bar{s}$ и перемещение барабана φ).

Сила тяжести барабана $\bar{G}_1$ и составляющие реакции на его оси $\bar{X}_o$ и $\bar{Y}_o$ работы не совершают (так как нет перемещения у точки их приложения – точки O). Также равна нулю работа нормальной реакции груза $\bar{R}_n$, поскольку она перпендикулярна перемещению груза.

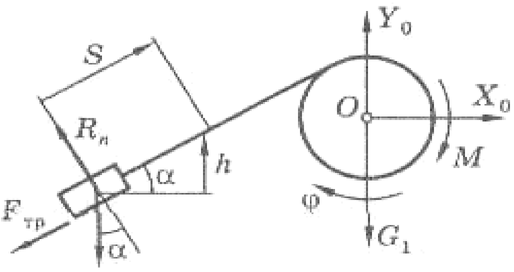


Рис. 7

Ненулевая работа будет только у силы тяжести груза $\bar{G}$, силы трения $\bar{F}_{тр}$ и вращающего момента M. Величину этих работ вычисляем по формулам, соответствующим постоянным силам и моментам:

$$A_G = \bar{G}\,\bar{s} = Gs\cos(\alpha + 90^o) = -Gs\sin\alpha = -Gh;$$

$$A_{F_{тр}} = \bar{F}_{тр}\,\bar{s} = F_{тр}\, s\cos 180^o = -\ F_{тр}s;\ \ A_M = M\varphi.$$

Интегрируя уравнение кинематической связи $\upsilon = \omega r$, получаем соотношение для перемещений $s = \varphi r$. Тогда суммарная работа запишется в виде $\sum_{k=1}^{n} A_k^e = [M - (G\sin\alpha + F_{тр})r]\varphi$.

Выражение в квадратных скобках – приведенный вращающий момент

$$M_{пр} = M - (G\sin\alpha + F_{тр})r = 1680 \text{ Н·м},$$

и тогда правая часть записи теоремы имеет вид $\sum_{k=1}^{n} A_k^e = M_{пр}\varphi$.

Приравнивая правую и левую части теоремы, получаем

$$\frac{1}{2}J_{пр}\omega^2 = M_{пр}\varphi,$$

откуда искомая угловая скорость $\omega = \sqrt{2\frac{M_{пр}}{J_{пр}}\varphi} = 27{,}6\ с^{-1}$.

Ответ: $\omega = 27{,}6\ с^{-1}$.

ЗАДАЧА 3

Каток для раскатывания асфальта (рис. 8) состоит из кузова массой $m_1 = 3 \cdot 10^3$ кг и двух одинаковых барабанов. Масса барабана $m_2 = 10^3$ кг, радиус его $r = 0{,}5$ м, а радиус инерции - $\rho = 0{,}4$ м. Коэффициент трения качения барабанов $f_к = 9$ см. Определить величину вращающего момента М, передаваемого от двигателя на ведущий барабан катка, необходимую для придания кузову ускорения $a = 0{,}2$ м/с^2.

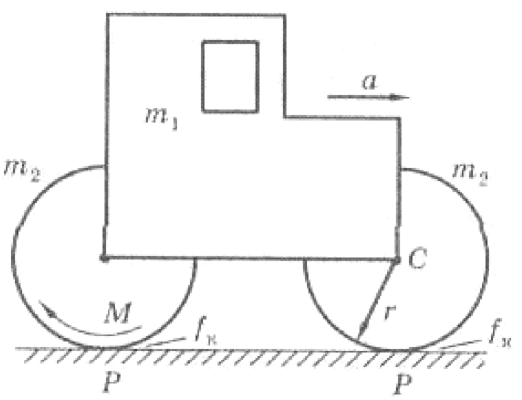


Рис. 8

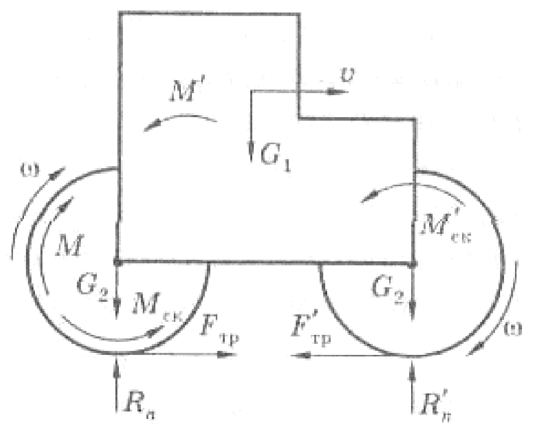


Рис. 9

Решение. Поскольку рассматривается мгновенное состояние системы, то следует применить теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме $\frac{dT}{dt} = \sum N_k^e + \sum N_k^i$.

Кинетическая энергия системы (поступательно движущийся кузов и совершающие плоское движение барабаны) имеет вид

$$T = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + 2\left(\frac{1}{2}m_2\upsilon_C^2 + \frac{1}{2}J_{zC}\omega^2\right),$$

где υ – скорость кузова;

υ_C – скорость центра масс барабана;

ω – его угловая скорость;

$J_{zC} = m_2\rho^2 = 160$ кг·м^2 – момент инерции барабана относительно его оси (проходящей через центр масс).

Кинематические связи определяются тем, что каждый барабан поворачивается вокруг своего мгновенного центра скоростей (точки P), а именно: $\upsilon_C = \omega r$; кроме того, $\upsilon = \upsilon_C$, т.е. $\omega = \upsilon / r$. Тогда кинетическая энергия приводится к виду $T = \frac{1}{2} m_{пр} \upsilon^2$,

где $m_{пр} = m_1 + 2m_2 + 2\frac{J_{zC}}{r^2} = 6280$ кг – приведенная к кузову масса системы. Производная от кинетической энергии по времени равна

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} m_{пр} 2\upsilon \frac{d\upsilon}{dt} = m_{пр} \upsilon a.$$

Рассмотрим действующие в системе силы (рис.9).

Внешние силы. Силы тяжести барабанов $\overline{G}_2$ и кузова $\overline{G}_1$ будут иметь нулевую мощность, поскольку они перпендикулярны скоростям точек их приложения. Также нулевую мощность будут иметь нормальные реакции $\overline{R}_n$ и $\overline{R'}_n$ и силы трения $\overline{F}_{тр}$ и $\overline{F'}_{тр}$, так как равны нулю скорости их точек приложения – мгновенных центров скоростей.

Сопротивление качению учтем, используя вторую модель, т.е. не смещая нормальные реакции, а вводя моменты сопротивления качению:

$$M_{ск} = f_к R_n \text{ и } M'_{ск} = f_к R'_n.$$

Суммарная мощность внешних сил – мощность этих моментов

$$\sum N_k^e = - M_{ск}\omega - M'_{ск}\omega = - f_к(R_n + R'_n)\frac{\upsilon}{r}.$$

Из условия отсутствия движения центра масс системы вдоль вертикали следует равенство нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось, откуда легко получаем $R_n + R'_n = G_1 + 2G_2$. Тогда

$$\sum N_k^e = - f_к(G_1 + 2G_2)\frac{\upsilon}{r}.$$

Внутренние силы. Учтем, что за счет работы двигателя на ведущий барабан и на кузов будут действовать одинаковые по модулю, но противоположно направленные вращающие моменты M и M' (закон равенства действия и противодействия). Заметим, что хотя эти моменты относятся к числу внутренних сил, в данном случае они должны учитываться, поскольку система не является неизменяемой (имеется взаимное проскальзывание тел системы: кузова и барабанов).

Запишем, учитывая, что кузов не вращается, суммарную мощность внутренних сил (моментов) $\sum N_k^i = M\omega + M' \cdot 0 = M\frac{\upsilon}{r}$.

Тогда сумма мощностей всех сил запишется в виде

$$\sum N_k = \sum N_k^e + \sum N_k^i = [M - f_к(G_1 + 2G_2)]\frac{1}{r}\upsilon.$$

Множитель, стоящий в этой формуле перед скоростью, – это приведенная сила системы

$$F_{пр} = [M - f_к(G_1 + 2G_2)]\frac{1}{r}.$$

Итак, $\sum N_k = F_{пр}\upsilon$.

Собирая правую и левую части теоремы, получаем $m_{пр}\upsilon a = F_{пр}\upsilon$, откуда найдем необходимую приведенную силу $F_{пр} = m_{пр}a$ = 1256 Н.

Из выражения для приведенной силы найдем необходимую величину вращающего момента М: $M = F_{пр}r + f_к(G_1 + 2G_2)$ = 5,04 кН·м.

Анализируя численные величины слагаемых в последней формуле, можно отметить, что на преодоление сопротивления качению в данном случае требуется значительно больший вращающий момент, чем на разгон катка, т.е. придание ему ускоренного движения.

Ответ: М = 5,04 кН·м.

ЗАДАЧА 4

Для рассмотренного в предыдущей задаче катка определить скорость его кузова после того, как он прошел расстояние s = 2 м, если к ведущему барабану приложен постоянный вращающий момент М = 4,6 кН·м, а начальная скорость катка была равна υ_0 = 0,2 м/с.

Решение. В постановке данной задачи идет речь о конечном перемещении системы, поэтому следует применить теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме: $T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i$.

Кинетическая энергия системы получена в предыдущей задаче

$$T = \frac{1}{2}m_{пр}\upsilon^2,$$

где $m_{пр}$ = 6280 кг – приведенная к кузову масса системы.

Начальная кинетическая энергия системы $T_0 = \frac{1}{2}m_{пр}\upsilon_0^{\,2}$ = 125,6 Дж.

Вычислим теперь величину работы действующих сил (рис. 9).

Внешние силы. Силы тяжести барабанов $\overline{G}_2$ и кузова $\overline{G}_1$ работы не совершают, поскольку они перпендикулярны скоростям (и, соответственно, перемещениям) точек их приложения. Также не работают нормальные реакции $\overline{R}_n$ и $\overline{R'}_n$ и силы трения $\overline{F}_{тр}$ и $\overline{F'}_{тр}$, так как всегда равны нулю скорости их точек приложения – мгновенных центров скоростей, и, соответственно, постоянно равны нулю их мощности.

Работу будут совершать моменты сопротивления качению:
$M_{ск} = f_к R_n$ и $M'_{ск} = f_к R'_n$, а именно: $\sum A_k^e = - M_{ск}\varphi - M'_{ск}\varphi = - f_к(R_n + R'_n)\varphi$,
где $R_n + R'_n = G_1 + 2G_2$.

Здесь φ – угол поворота барабанов, для которого, интегрируя уравнение кинематической связи $\omega = \upsilon/r$ с учетом нулевых начальных условий для перемещений s и φ, легко получаем $\varphi = s/r$. Тогда $\sum A_k^e = -f_к(G_1 + 2G_2)\frac{s}{r}$.

Внутренние силы. Запишем, учитывая, что кузов не вращается, суммарную работу внутренних сил (моментов) M и M':

$$\sum A_k^i = M\varphi + M'\cdot 0 = M\frac{s}{r}.$$

Тогда сумма работ всех сил запишется в виде

$$\sum A_k = \sum A_k^e + \sum A_k^i = [M - f_к(G_1 + 2G_2)]\frac{1}{r}s.$$

Множитель, стоящий в этой формуле перед перемещением s, –это приведенная сила системы $F_{пр} = [M - f_к(G_1 + 2G_2)]\frac{1}{r} = 380$ Н.

Итак, $\sum A_k = F_{пр}s = 760$ Дж.

Собирая правую и левую части теоремы, получаем $T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k$, или $T - 125{,}6 = 760$, откуда $T = \frac{1}{2}m_{пр}\upsilon^2 = 885{,}6$ Дж и $\upsilon = \sqrt{\frac{2\cdot 885{,}6}{6280}} = 0{,}53$ м/с.

Ответ: $\upsilon = 0{,}53$ м/с.

ЗАДАНИЕ Д3

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

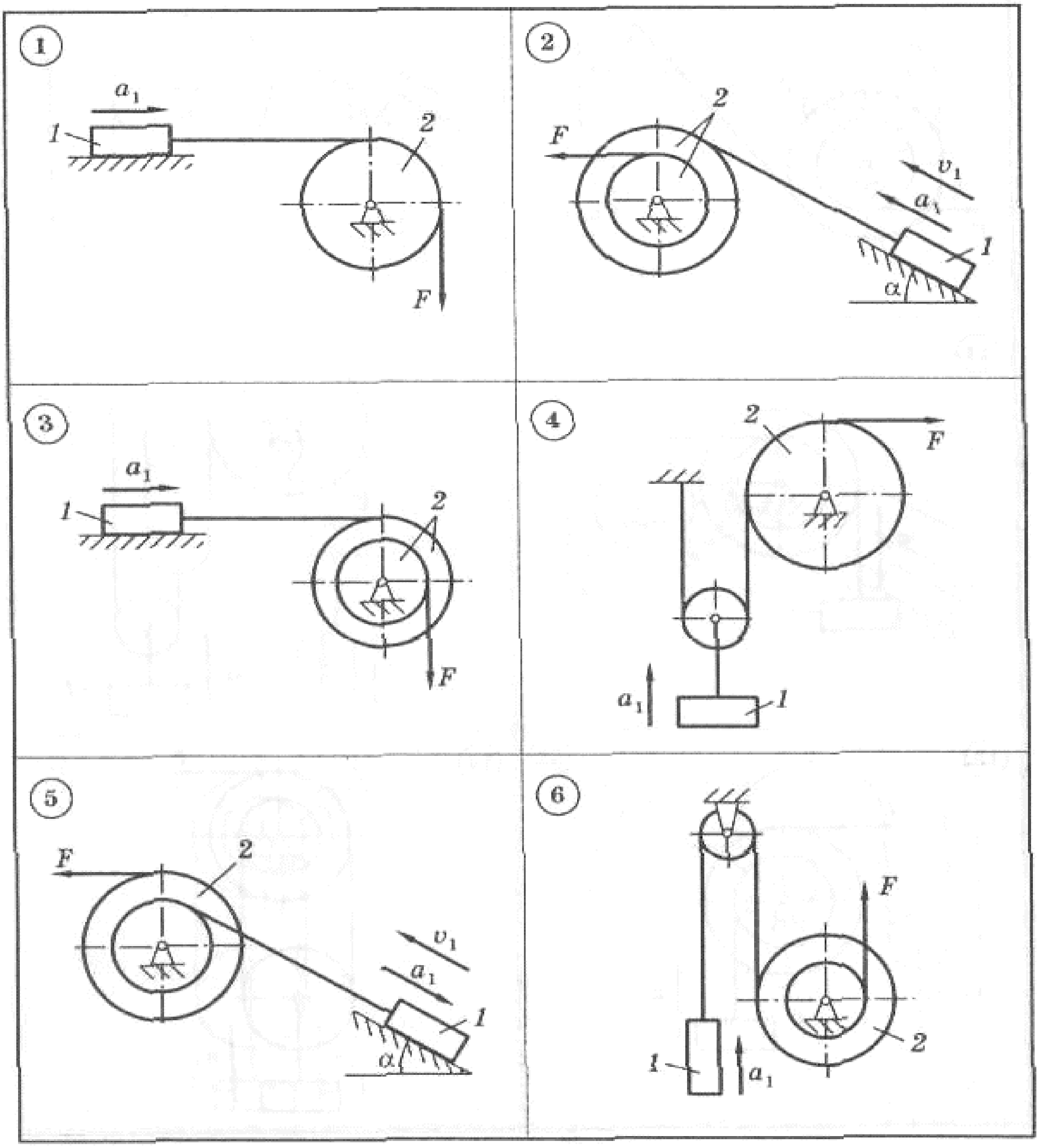
Для приведенных на схемах 1-30 механических систем, используя принцип Даламбера, определить величину силы F, необходимую для перемещения груза с заданным ускорением a_1, а также усилие в грузовом тросе. Исходные данные: массы груза m_1 и барабана m_2, радиус барабана R_2 (у двойного барабана имеется также r_2), его радиус инерции ρ_2 (если он не указан, тело считать однородным цилиндром), угол α и коэффициент трения скольжения f приведены в табл. 1. Непронумерованные блоки и катки считать невесомыми. Трением на осях барабана и блоков можно пренебречь.

Таблица 1

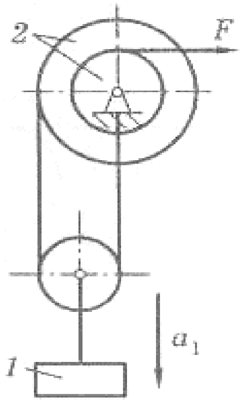
№ вар.	m_1, кг	m_2, кг	ρ_2, см	R_2, см	r_2, см	α, град	f	a_1, м/с
1	1000	200					0,15	2,0
2	500	100	20	40	20	30	0,2	1,5
3	600	80	30	30	20		0,15	3,5
4	500	100						2,0
5	200	50	25	30	15	45	0,1	3,0
6	1000	150	40	20	10			2,7
7	400	100	30	35	15		0,25	1,5
8	1000	200	40	20	15			1,0
9	1500	150	20	30	20			1,7
10	700	100				30	0,2	2,0
11	750	100	30	40	25			3,0
12	700	80						2,5
13	800	200	40	30	10			2,0
14	500	85	35	20	15			1,5
15	500	100	25	30	25			1,0
16	520	100				45	0,1	2,0
17	620	150	15	30	20		0,25	0,9
18	700	70	40	40	30		0,25	1,0
19	800	50	20	25	10			1,5
20	500	80	35	30	10	30	0,2	1,8
21	600	60	20	30	25			2,0
22	1000	150				45	0,15	3,0

Продолжение табл. 1

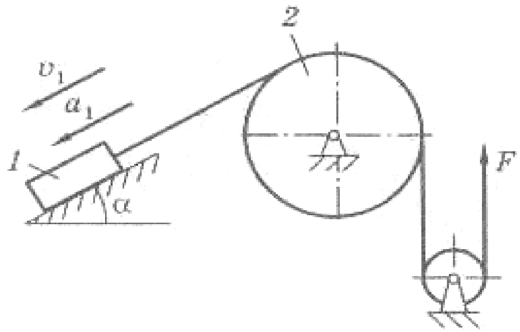
№ вар.	m_1, кг	m_2, кг	ρ_2, см	R_2, см	r_2, см	α, град	f	a_1, м/с
23	1500	200	35	35	25	45	0,2	3,5
24	1000	160	45	30	15			2,5
25	700	80						1,5
26	500	100	15	40	20			1,0
27	350	75					0,2	2,0
28	450	75	20	45	25	30	0,1	3,0
29	550	85				60	0,2	2,5
30	600	100	30	25	10			1,5



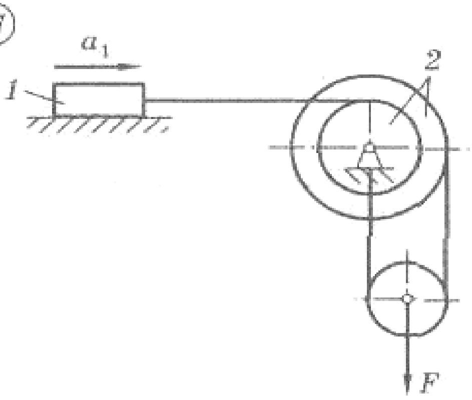
15



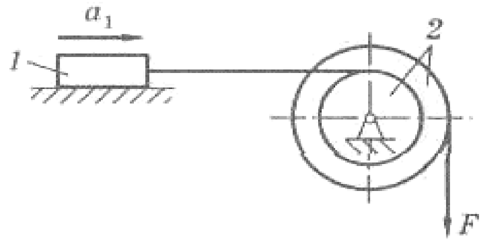
16



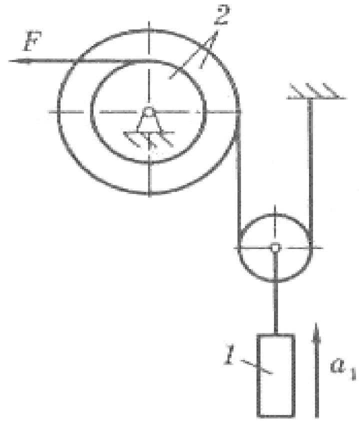
17



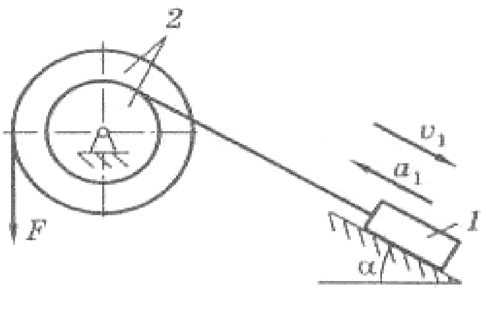
18



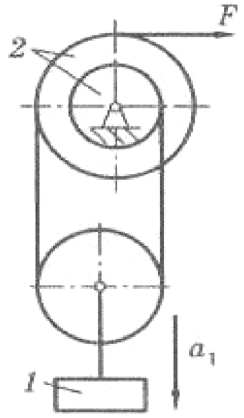
19



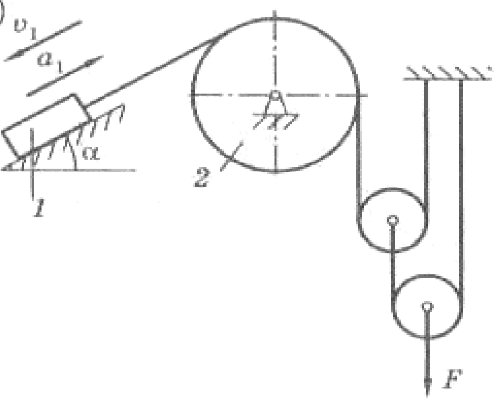
20

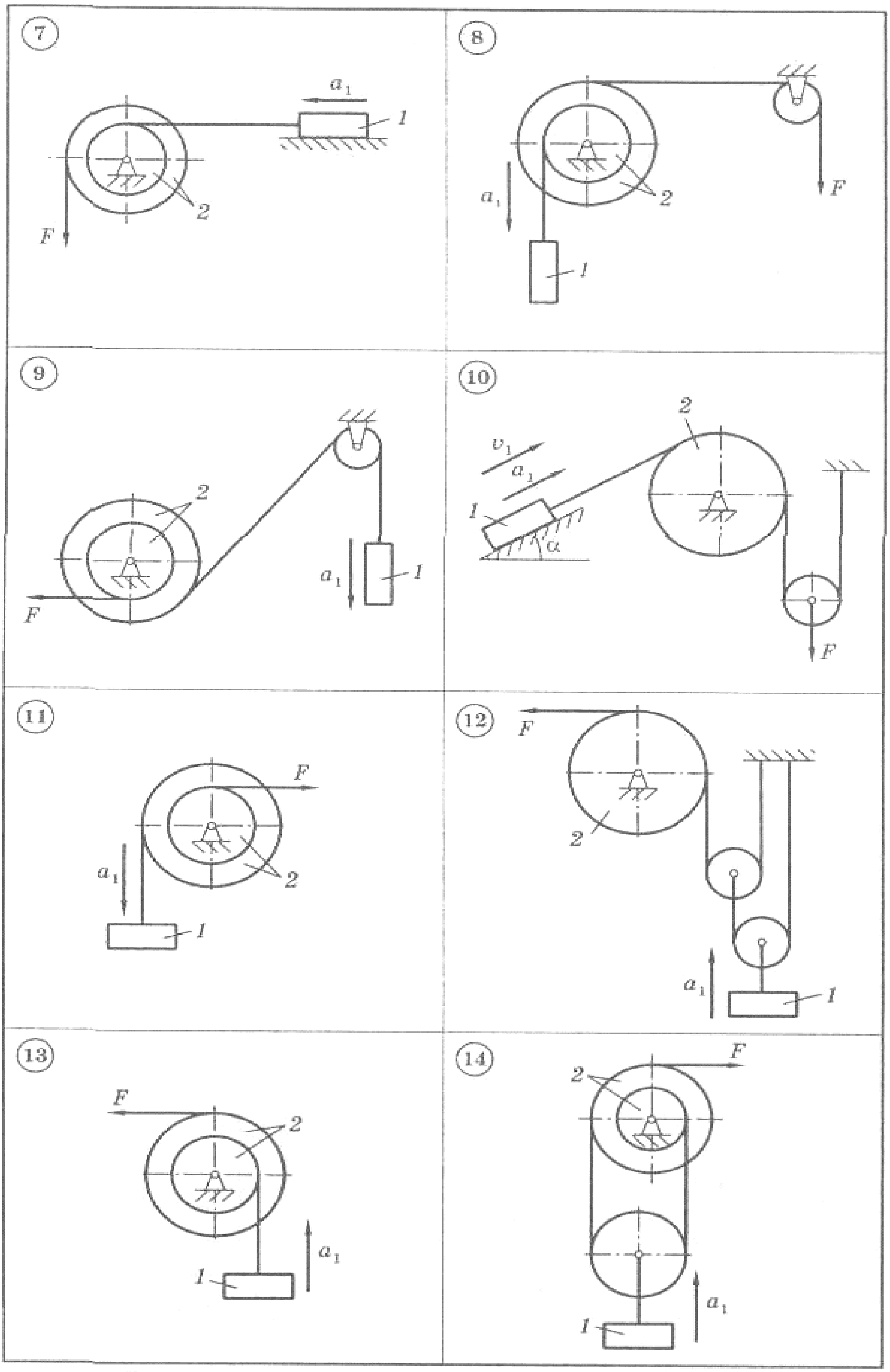


21

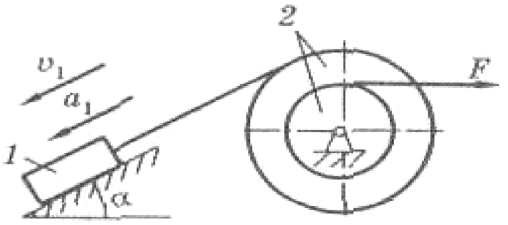


22

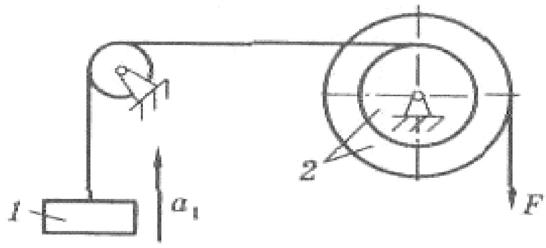



7
a1
1
2
F
8
F
a1
2
1
9
2
F
a1
1
10
2
v1
a1
1
α
F
11
F
a1
2
1
12
F
2
a1
1
13
F
2
a1
1
14
F
2
a1
1

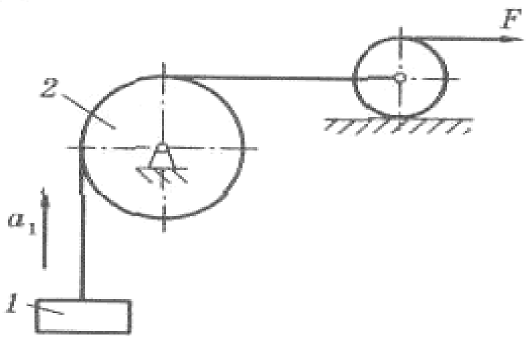
23



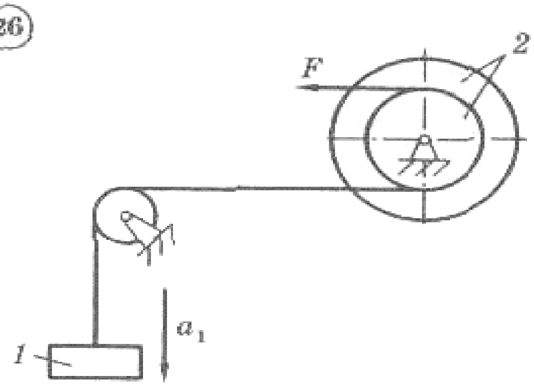
24



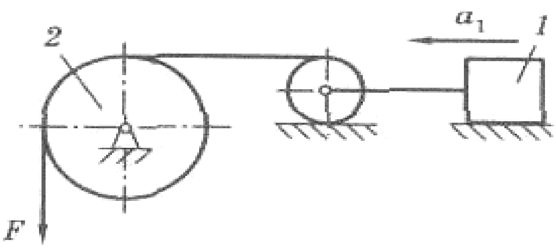
25



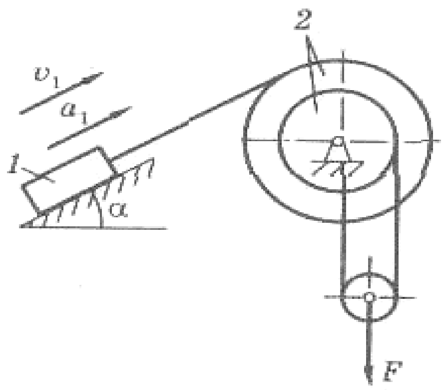
26



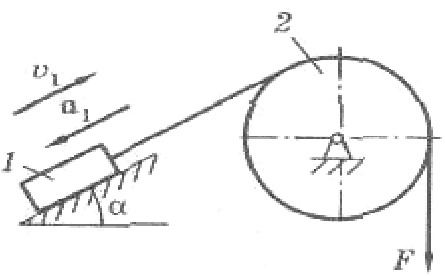
27



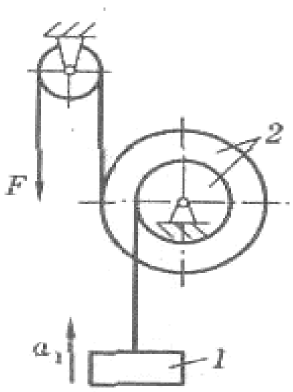
28



29



30



ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИНЦИПЫ ДАЛАМБЕРА И ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА

ЗАДАЧА 1

Груз ***1*** массой m_1 = 500 кг, перемещающийся по горизонтальной шероховатой плоскости (коэффициент трения скольжения f = 0,2), связан невесомыми нерастяжимыми тросами с барабаном ***2*** радиусом r_2 = 0,2 м, массой m_2 = 150 кг и с невесомым барабаном радиусом r = 0,3 м, к которому приложен вращающий момент M, приводящий в движение систему (рис. 10).

Какой величины должен быть момент M, чтобы ускорение груза ***1*** равнялось бы a_1 = 1,5 м/с^2 в тот момент, когда трос невесомого барабана составит с вертикалью угол $\alpha = 60^{\circ}$. Определить также при этих условиях усилия в тросах груза и реакции опор барабанов. Барабан ***2*** считать однородным цилиндром.

Решение. Применим принцип Даламбера к барабану ***2*** (рис. 11), добавив к действующим силам главный момент сил инерции барабана относительно оси вращения $M_z^{\phi} = -J_z\,\varepsilon$. Момент M_z^{ϕ} направлен против углового ускорения ε_2, и его модуль равен $\left|M_z^{\phi}\right| = J_z\,\varepsilon$. Учитывая, что осевой момент инерции барабана как однородного цилиндра равен $J_z = \frac{1}{2} m_2 r_z^2 = 3$ кг·м^2,

и что $\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2} = 7{,}5$ с$^{-2}$,

имеем $\left|M_z^{\phi}\right| = J_z\,\varepsilon = 22{,}5$ Н·м.

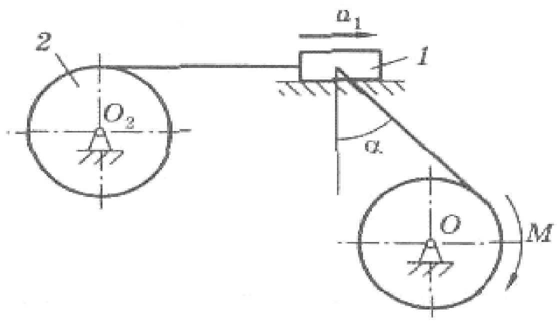


Рис. 10

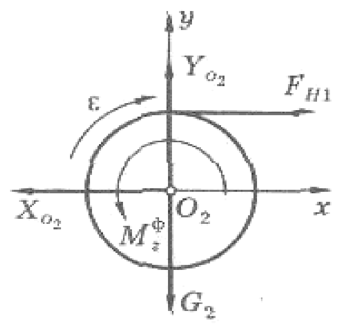


Рис. 11

Уравнения принципа Даламбера для системы сил $\overline{G}_2$, $\overline{F}_{H1}$, $\overline{X}_{O_2}$ и $\overline{Y}_{O_2}$ и пары с моментом $\left|M_z^{\phi}\right|$ имеют вид:

$$x: F_{H1} - X_{O_2} = 0;\; y: Y_{O_2} - G_2 = 0;\; M_{O_2}: \left|M_z^{\phi}\right| - F_{H1} r_2 = 0.$$

Решив систему уравнений, получим, что сила натяжения троса равна

$$F_{H1} = \frac{\left|M_z^{\phi}\right|}{r_2} = \frac{1}{2} m_2 a_1 = 0{,}113 \text{ кН},$$

а реакции опор барабана: $X = FH1 = 0{,}113$ кН;

$$Y = G2 = m2g = 1{,}47 \text{ кН}.$$

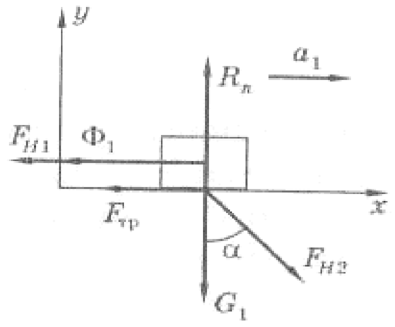


Рис. 12

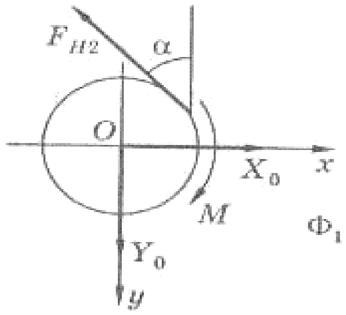


Рис. 13

Применим теперь принцип Даламбера к грузу ***1*** (рис. 12), добавив к действующим на него силам силу инерции, модуль которой

$$Ф_1 = m_1 a_1 = 0{,}75 \text{ кН}.$$

Сила $\overline{Ф}_1 = - m_1 \bar{a}_1$ направлена против ускорения $\bar{a}_1$.

Уравнения для системы сил $\overline{G}_1$, $\overline{F}_{H1}$, $\overline{F}_{H2}$, $\overline{R}_n$, $\overline{F}_{тр}$, $\overline{Ф}_1$ в проекциях на оси координат имеют вид: x: $F_{H2}\sin\alpha - F_{H1} - F_{тр} - Ф_1 = 0$;

$$y\text{: } R_n - G_1 - F_{H2}\cos\alpha = 0.$$

Из второго уравнения системы получим $R_n = G_1 + F_{H2}\cos\alpha$, откуда

$$F_{тр} = f R_n = f(G_1 + F_{H2}\cos\alpha).$$

Тогда из первого уравнения определим натяжение в правой ветви троса

$$F_{H2} = \frac{m_1(fg + a_1) + F_{H1}}{\sin\alpha - f\cos\alpha} = 2{,}41 \text{ кН}.$$

Применим принцип Даламбера и к невесомому барабану при действии сил $\overline{F}_{H2}$, $\overline{X}_O$, $\overline{Y}_O$ и вращающего момента M (рис. 13):

$$x\text{: } X_O - F_{H2}\sin\alpha = 0;$$

$$y\text{: } Y_O - F_{H2}\cos\alpha = 0.$$

$$M_O\text{: } F_{H2}r - M = 0.$$

Решив систему уравнений, получим вращающий момент и реакции опор:

$$M = F_{H2}r = 0{,}723 \text{ кН·м};$$

$$X_O = F_{H2}\sin\alpha = 2{,}09 \text{ кН};$$

$$Y_O = F_{H2}\cos\alpha = 1{,}21 \text{ кН}.$$

Ответ: $M = 0{,}723$ кН·м; $F_{H1} = 0{,}113$ кН; $F_{H2} = 2{,}41$ кН; $X_{O_2} = 0{,}113$ кН; $Y_{O_2} = 1{,}47$ кН; $X_O = 2{,}09$ кН; $Y_O = 1{,}21$ кН.

Примечание. Установим предельное значение угла $\alpha_{пр}$, при котором сила натяжения троса F_{H2} становится бесконечной (эффект самоторможения или «заклинивания»).

Из формулы для этой силы следует, что это будет при $\sin\alpha - f\cos\alpha = 0$, то есть при $tg\alpha = f$, откуда $\alpha_{пр} = arctg\ f = 11{,}3^o$ – угол трения. Следовательно, «заклинивание» произойдет тогда, когда значение угла α станет равным углу трения и линия троса совпадет с образующей конуса трения. В частном случае гладкой поверхности $f = 0$ и $\alpha_{пр} = 0$ – «заклинивание» произойдет при вертикальном положении троса.

ЗАДАЧА 2

Центробежный регулятор (рис. 14), закрепленный в точке ***O*** на валу $\boldsymbol{OO}_1$, состоит из четырех шарнирно соединенных невесомых стержней: ***AC*** и ***BC*** с длинами 2***l***, а также ***OD*** и ***OE*** с длинами ***l***, и трех точечных грузов. Грузы ***A*** и ***B*** имеют массы m_1, а груз ***C*** (муфта) массу m_2. При повороте стержней груз ***C*** может свободно перемещаться вдоль оси вращения. Требуется установить связь между некоторой постоянной угловой скоростью вращения ω и углом отклонения стержней α. Трением можно пренебречь.

Решение. Для решения задачи применим принцип Даламбера (метод кинетостатики), суть которого состоит в том, что если к силам, действующим в движущей механической системе, добавить силы инерции, то полученная система сил оказывается уравновешенной, и для нее можно составлять обычные уравнения статики. Сила инерции материальной точки – это вектор

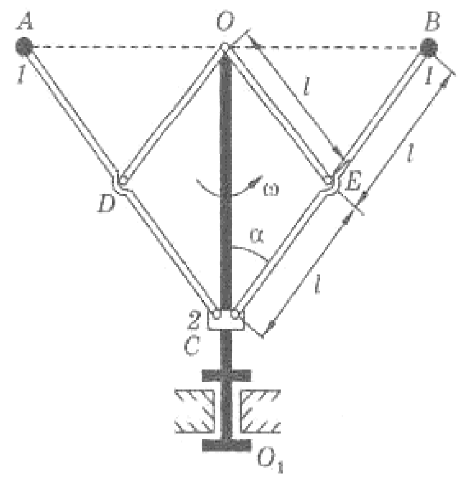


Рис. 14

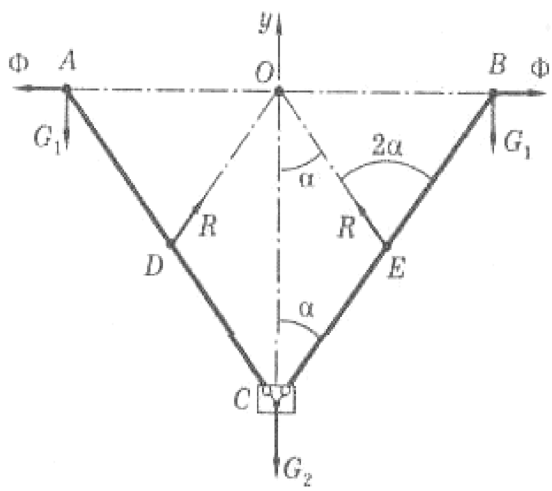


Рис. 15

$\overline{Ф} = -m\bar{a}$, где m – масса точки; $\bar{a}$ – ее ускорение. При этом ясно, что $Ф = ma$, и сила инерции направлена противоположно ускорению.

В рассматриваемой конструкции силы инерции будут только у точечных грузов ***A*** и ***B*** (заметим, что они всегда находятся на одной горизонтали с точкой ***O***). Модули этих сил инерции одинаковы, так как одинаковы массы грузов и модули их ускорений (а именно, центростремительных ускорений $a = \omega^2 r$, где $r = 2l\cos\alpha$ – расстояние до оси вращения):

$$Ф = m_1 a = 2m_1\omega^2 l\ \sin\alpha.$$

Рассмотрим в качестве объекта равновесия систему из стержней ***AC*** и ***BC*** и груза ***C***. Исключив стержни ***OD*** и ***OE***, учтем их действие введением реакций этих стержней ***R***, направленных по стержням (рис. 15).

По причине симметрии системы (что, конечно, легко увидеть и из уравнения проекций сил на ось *x*) на груз ***C*** со стороны оси вращения горизонтальная сила не действует. Здесь $G_1 = m_1 g$, $G_2 = m_2 g$ – силы тяжести.

Составляем уравнение равновесия:

$$\sum F_{ky} = 0, \qquad -2G_1 - G_2 + 2R\cos\alpha = 0,$$

откуда $R = \dfrac{2G_1 + G_2}{2\cos\alpha}$.

Если рассмотреть теперь в качестве объекта равновесия отдельно один из стержней (например, ***AC***), то можно составить для него уравнение равновесия

$$\sum M_C(\overline{F}_k) = 0;$$

$$\Phi \cdot 2l\cos\alpha + G_1 2l\sin\alpha - Rl \cdot \sin 2\alpha = 0,$$

откуда $R = \dfrac{2\Phi\cos\alpha + 2G_1\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \dfrac{\Phi\mathrm{ctg}\alpha + G_1}{\cos\alpha}$.

Приравнивая два последних выражения для силы R, получаем

$$\frac{2G_1 + G_2}{2\cos\alpha} = \frac{\Phi\mathrm{ctg}\alpha + G_1}{\cos\alpha},$$

откуда, после сокращения следует $G_2 = 2\Phi\mathrm{ctg}\alpha$, или $m_2 g = 4m_1\omega^2 l\cos\alpha$, и окончательно $\cos\alpha = \dfrac{m_2 g}{4m_1\ell\omega^2}$.

Конечно, если правая часть последнего равенства окажется больше или равна единице, то есть $\omega \le \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m_2 g}{m_1\ell}}$ (угловая скорость слишком мала), то угол α будет равен нулю и грузы отклоняться не будут.

Ответ: $\cos\alpha = \dfrac{m_2 g}{4m_1\ell\omega^2}$.

ЗАДАЧА 3

Решить задачу **1**, используя принцип Даламбера-Лагранжа (общее уравнение динамики).

Решение. Согласно принципу Даламбера-Лагранжа для движущихся механических систем, суммарная возможная работа всех активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях всегда равна нулю

$$\sum(\overline{F}_k + \overline{\Phi}_k)\delta\overline{r}_k = 0,$$

или (что равносильно) возможная мощность всех активных сил и сил инерции на любых возможных скоростях всегда равна нулю

$$\sum(\overline{F}_k + \overline{\Phi}_k)\overline{\upsilon}_k = 0.$$

Воспользуемся второй формулировкой, рассматривая весь регулятор целиком и придавая точкам его стержней и грузам возможные скорости, а именно следующие: стержни ***OD*** и ***OE*** поворачиваются с некоторой угловой скоростью ω_1, грузы ***A*** и ***B*** имеют в плоскости рисунка (рис. 16) скорости, равные υ_1, а груз ***C*** – скорость υ_2.

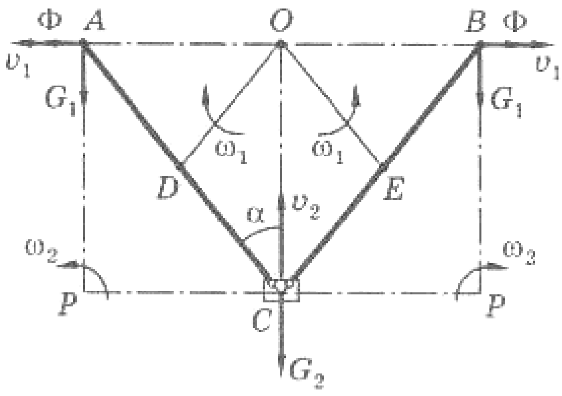


Рис. 16

Установим кинематические связи, учитывая, что стержни ***AC*** и ***BC*** поворачиваются вокруг точек ***P*** – мгновенных центров скоростей с некоторой угловой скоростью ω_2. Тогда $\upsilon_1 = \omega_2 |PA|$; $\upsilon_2 = \omega_2 |PC|$, где $|PA| = 2l\cos\alpha$; $|PC| = 2l\sin\alpha$.

Отсюда $\omega_2 = \dfrac{\upsilon_1}{2\ell\cos\alpha} = \dfrac{\upsilon_2}{2\ell\sin\alpha}$, то есть $\upsilon_1 = \upsilon_2 \operatorname{ctg}\alpha$.

Из действующих активных сил и сил инерции мощность будут иметь сила тяжести $G_2 = m_2 g$ и две силы инерции $\Phi = 2m_1\omega^2 l\sin\alpha$ (см. задачу 1). Суммарная мощность их должна быть равна нулю: $2\Phi\upsilon_1 - G_2\upsilon_2 = 0$, или $2\Phi\upsilon_2 \operatorname{ctg}\alpha = G_2\upsilon_2$, то есть $G_2 = 2\Phi\operatorname{ctg}\alpha$.

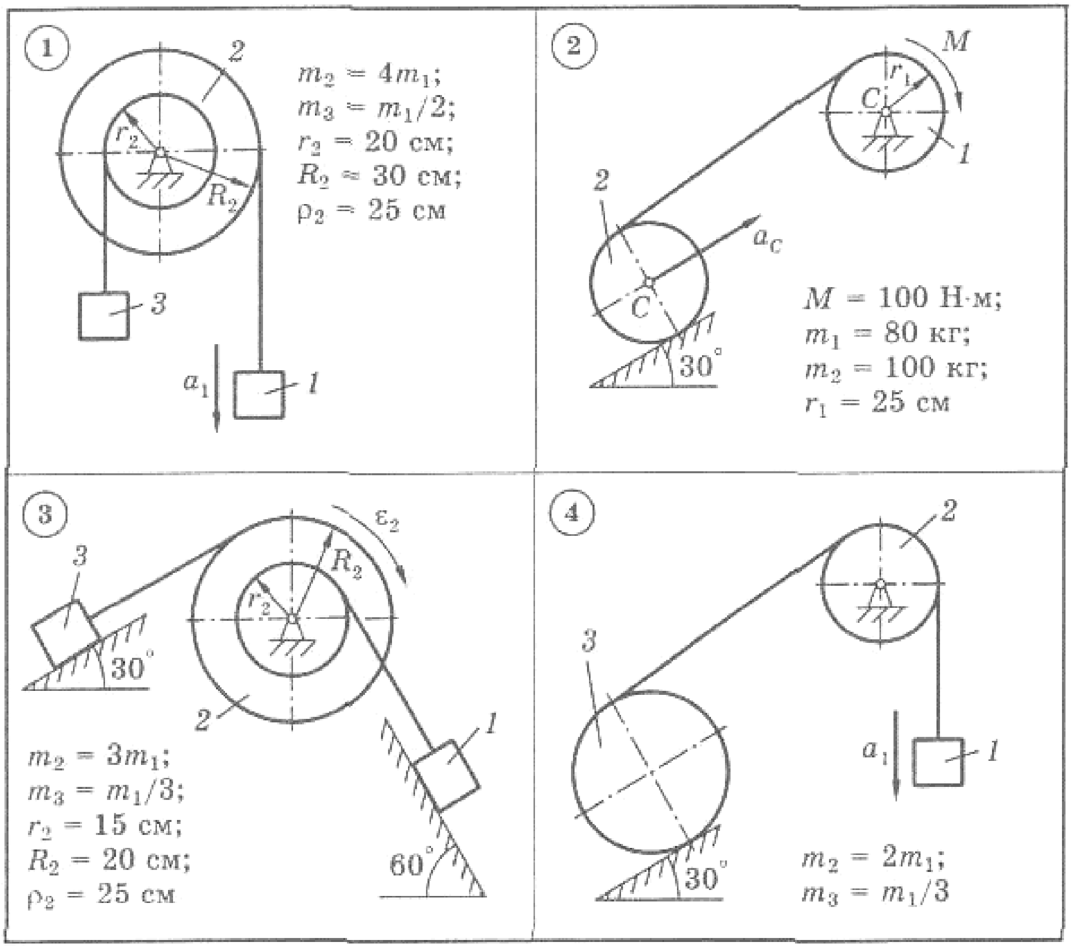
Подставляя сюда выражения для сил, получаем тот же ответ, что и в задаче **1**. Отметим, что при использовании принципа Даламбера-Лагранжа можно получить решение быстрее, чем при использовании принципа Даламбера.

Ответ: $\cos\alpha = \dfrac{m_2 g}{4m_1\ell\omega^2}$.

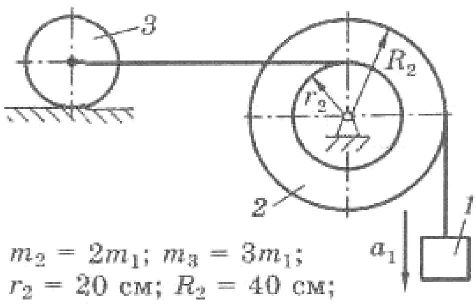
ЗАДАНИЕ Д4

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Для приведенных на схемах 1-30 механических систем, используя уравнения Лагранжа второго рода, определить указанное на схеме угловое ускорение или линейное ускорение. Нити невесомы и нерастяжимы. Принятые обозначения: m – массы тел, R и r –радиусы, ρ – радиус инерции (если он не указан, тело считать однородным цилиндром); при наличии трения указываются: f – коэффициент трения скольжения, $f_к$ – коэффициент трения качения.

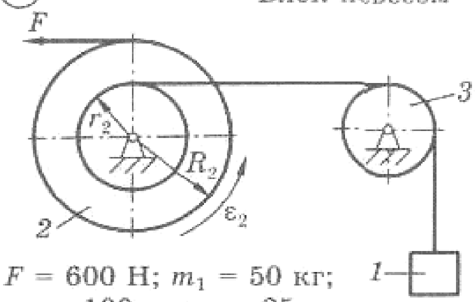


(5)



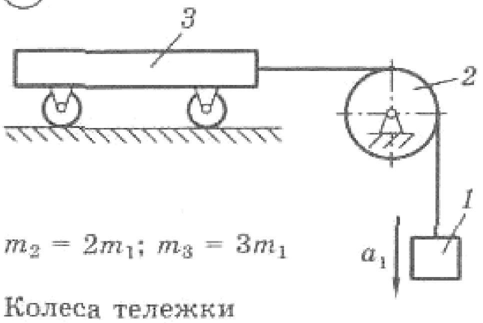
$m_2 = 2m_1$; $m_3 = 3m_1$;
$r_2 = 20$ см; $R_2 = 40$ см;
$\rho_2 = 30$ см

(6) Блок невесом



$F = 600$ Н; $m_1 = 50$ кг;
$m_2 = 100$ кг; $r_2 = 25$ см;
$R_2 = 35$ см; $\rho_2 = 30$ см

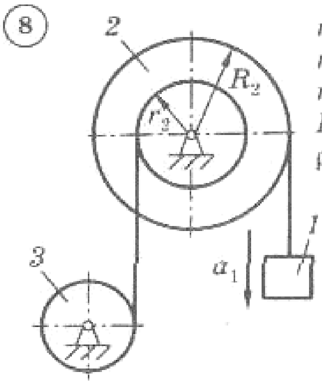
(7)



$m_2 = 2m_1$; $m_3 = 3m_1$

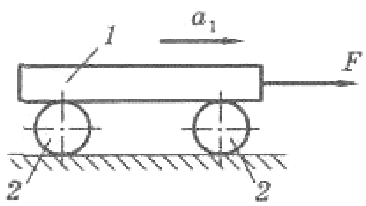
Колеса тележки невесомы

(8)



$m_2 = m_1/2$;
$m_3 = 2m_1$;
$r_2 = 30$ см;
$R_2 = 40$ см;
$\rho_2 = 35$ см

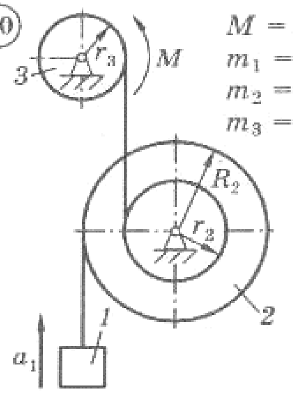
(9)



$F = 340$ Н; $m_1 = 70$ кг;
$m_2 = 40$ кг

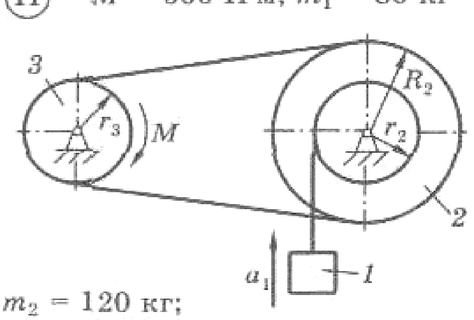
(10)

$M = 1000$ Н·м;
$m_1 = 200$ кг;
$m_2 = 150$ кг
$m_3 = 300$ кг



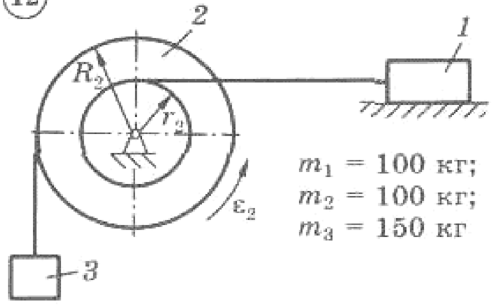
$r_2 = 40$ см;
$R_2 = 50$ см;
$r_3 = 30$ см;
$\rho_2 = 45$ см

(11) $M = 500$ Н·м; $m_1 = 80$ кг



$m_2 = 120$ кг;
$m_3 = 150$ кг; $r_2 = 20$ см;
$R_2 = 30$ см; $r_3 = 35$ см; $\rho_2 = 25$ см

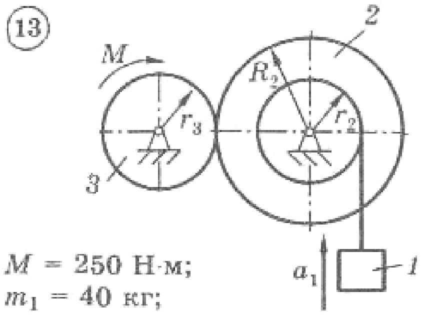
(12)



$m_1 = 100$ кг;
$m_2 = 100$ кг;
$m_3 = 150$ кг

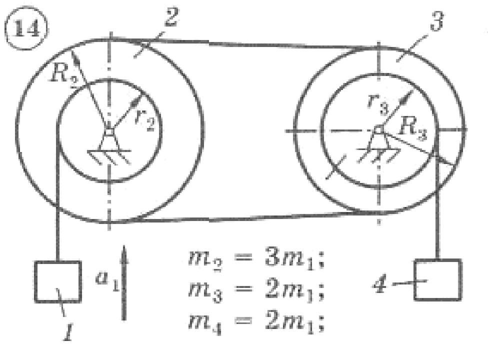
$r_2 = 25$ см; $R_2 = 50$ см;
$\rho_2 = 35$ см; $f = 0,3$

13



$M = 250$ Н·м;
$m_1 = 40$ кг;
$m_2 = 60$ кг; $m_3 = 75$ кг;
$r_2 = 20$ см; $R_2 = 30$ см;
$r_3 = 35$ см; $\rho_2 = 25$ см

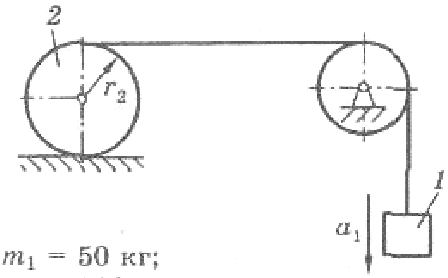
14



$m_2 = 3m_1$;
$m_3 = 2m_1$;
$m_4 = 2m_1$;
$r_2 = 15$ см; $R_2 = 30$ см; $\rho_2 = 25$ см;
$r_3 = 20$ см; $R_3 = 40$ см; $\rho_3 = 35$ см

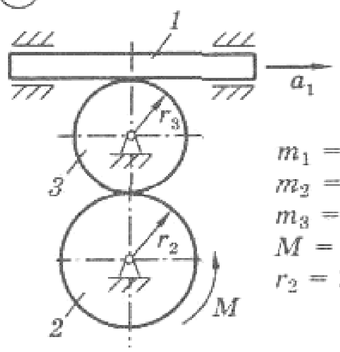
15

Блок невесом



$m_1 = 50$ кг;
$m_2 = 300$ кг;
$r_2 = 30$ см; $f_к = 0{,}2$ см

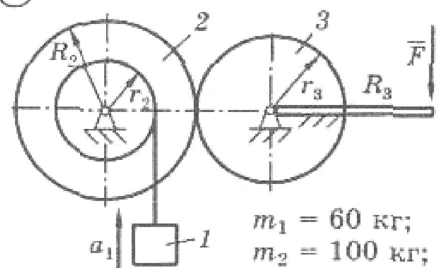
16



$m_1 = 50$ кг;
$m_2 = 100$ кг;
$m_3 = 100$ кг;
$M = 100$ Н·м;
$r_2 = 20$ см

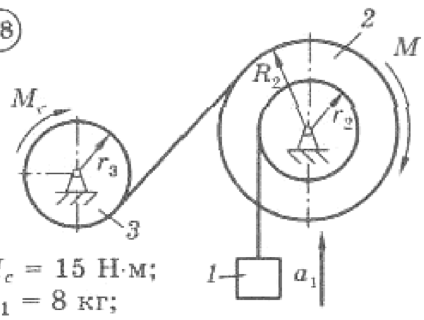
17

Рукоятка невесома



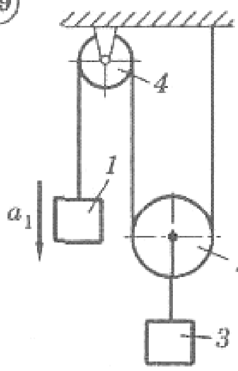
$m_1 = 60$ кг;
$m_2 = 100$ кг;
$m_3 = 120$ кг;
$r_2 = 15$ см; $R_2 = 30$ см; $\rho_2 = 25$ см;
$r_3 = 40$ см; $R_3 = 50$ см; $F = 500$ Н

18



$M_c = 15$ Н·м;
$m_1 = 8$ кг;
$m_2 = 12$ кг; $m_3 = 10$ кг;
$R_2 = 20$ см; $\rho_2 = 18$ см; $r_3 = 20$ см;
$M = 45$ Н·м; $r_2 = 15$ см

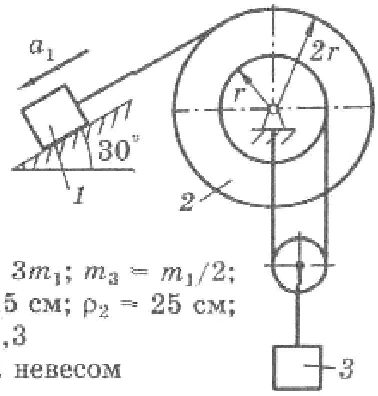
19



$m_2 = m_1$;
$m_3 = m_1/2$

Блок 4 невесом

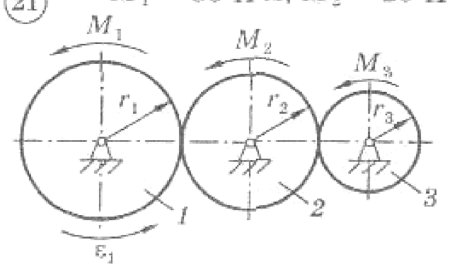
20



$m_2 = 3m_1$; $m_3 = m_1/2$;
$r = 15$ см; $\rho_2 = 25$ см;
$f = 0{,}3$
Блок невесом

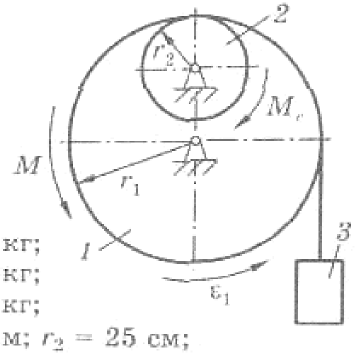
21

$M_1 = 80$ Н·м; $M_2 = 20$ Н·м



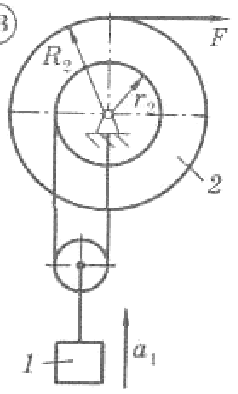
$M_3 = 15$ Н·м; $m_1 = 40$ кг;
$m_2 = 30$ кг; $m_3 = 20$ кг;
$r_1 = 50$ см; $r_2 = 40$ см; $r_3 = 30$ см

22



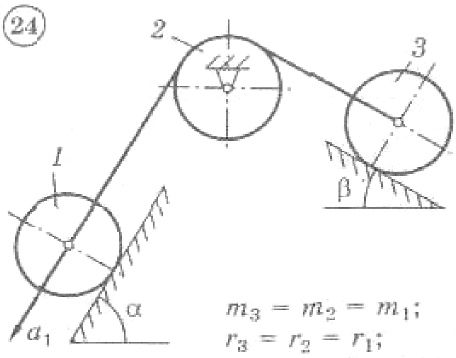
$m_1 = 15$ кг;
$m_2 = 20$ кг;
$m_3 = 10$ кг;
$r_1 = 50$ см; $r_2 = 25$ см;
$M = 250$ Н·м; $M_c = 30$ Н·м

23



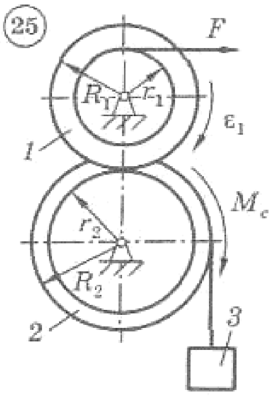
$F = 160$ Н;
$m_1 = 20$ кг;
$m_2 = 35$ кг;
$r_2 = 40$ см;
$R_2 = 50$ см;
$\rho_2 = 45$ см
Блок невесом

24



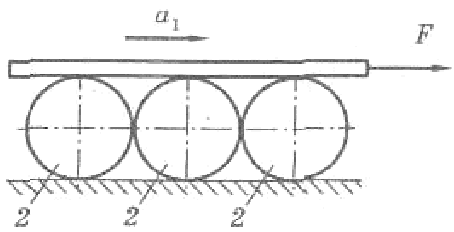
$m_3 = m_2 = m_1$;
$r_3 = r_2 = r_1$;
$\alpha = 60°$; $\beta = 30°$

25



$M_c = 60$ Н·м;
$F = 500$ Н;
$m_1 = 30$ кг;
$m_2 = 40$ кг;
$m_3 = 20$ кг;
$r_1 = 40$ см;
$R_1 = 50$ см;
$r_2 = 50$ см;
$R_2 = 60$ см;
$\rho_1 = 45$ см;
$\rho_2 = 55$ см

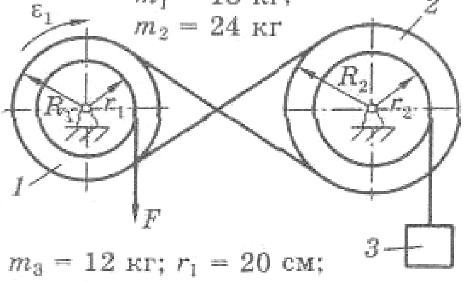
26



$F = 190$ Н; $m_1 = 50$ кг;
$m_2 = 40$ кг

27

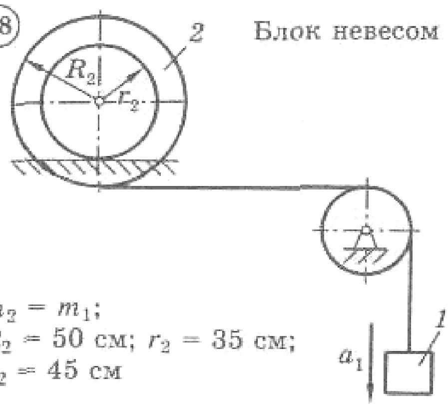
$F = 170$ Н;
$m_1 = 18$ кг;
$m_2 = 24$ кг



$m_3 = 12$ кг; $r_1 = 20$ см;
$R_1 = 30$ см; $r_2 = 25$ см;
$\rho_1 = 25$ см; $\rho_2 = 30$ см; $R_2 = 35$ см

28

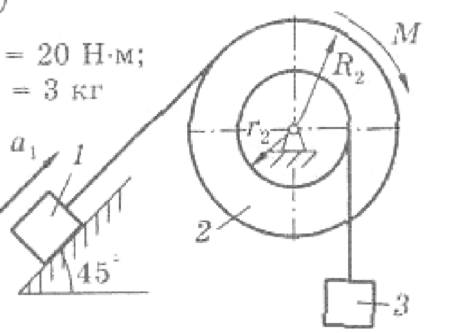
Блок невесом



$m_2 = m_1$;
$R_2 = 50$ см; $r_2 = 35$ см;
$\rho_2 = 45$ см

(29)

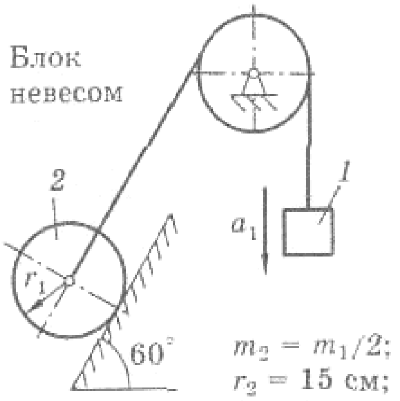
$M = 20$ Н·м;
$m_1 = 3$ кг



$m_2 = 5$ кг; $m_3 = 10$ кг; $r_2 = 20$ см;
$R_2 = 40$ см; $\rho_2 = 20\sqrt{2}$ см; $f = 0{,}2$

(30)

Блок невесом



$m_2 = m_1/2$;
$r_2 = 15$ см;
$f_к = 0{,}2$ см

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

ЗАДАЧА 1

Грузоподъемная установка (рис. 17) состоит из барабана ***1*** массой $m_1 = 200$ кг и радиусом r = 0,2 м, невесомого нерастяжимого троса, который перемещает груз ***2*** по наклонной плоскости, составляющий угол α = 30° с горизонтом. Масса груза m_2 = 1000 кг, коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью f = 0,2. К барабану приложен вращающий момент M = 1,6 кН·м. Определить величину ускорения груза a. Барабан считать однородным цилиндром.

Решение. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы (s = 1) и может быть описана одним уравнением Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{d\dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q.$$

В качестве обобщенной координаты выберем координату x груза на наклонной плоскости $q = x$, тогда обобщенная скорость $\dot{q} = \dot{x} = \upsilon$ будет являться скоростью груза.

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

где ω – угловая скорость барабана; J – его момент инерции относительно оси вращения. Для однородного цилиндра $J = \frac{m_1 r^2}{2}$ и, следовательно, J = 4 кг·м².

При учете кинематической связи $\upsilon = \omega r$, т.е.

$$\omega = \frac{\upsilon}{r},$$

кинетическая энергия запишется в виде

$$T = \frac{1}{2}\left(m + J\frac{1}{r^2}\right)\upsilon^2 = \frac{1}{2}m_{пр}\upsilon^2,$$

где приведенная (к грузу) масса системы равна

$$m_{пр} = m + J\frac{1}{r^2} = 1100 \text{ кг}.$$

Вычислим производные, входящие в левую часть уравнения Лагранжа. Частная производная по обобщенной координате

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

так как кинетическая энергия явно от координаты x не зависит. Частная производная по обобщенной скорости

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \upsilon} = m_{пр}\upsilon.$$

Полная производная по времени

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{d\dot{q}} = m_{пр}\,a$$

дает левую часть уравнения Лагранжа.

Входящую в правую часть уравнения обобщенную силу Q вычисляют двумя способами: через возможную мощность и через возможную работу.

Разберем оба эти способа.

1. Вычисление обобщенной силы через возможную мощность

Рассмотрим действующие в системе силы, исключая реакции связей, и придадим телам системы возможные скорости: произвольную скорость груза υ и угловую скорость барабана ω. Они связаны друг с другом уравнением кинематической связи $\upsilon = \omega r$ (рис. 18).

Запишем теперь мощности действующих сил. При этом следует иметь в виду, что обобщенная сила вычисляется только на основе активных сил. Таким образом, можно не освобождать систему от связей и не вводить реакции связей (силу трения относим к числу активных сил). Учтем также, что сила G_1 приложена в неподвижной точке, и ее мощность и работа равны нулю.

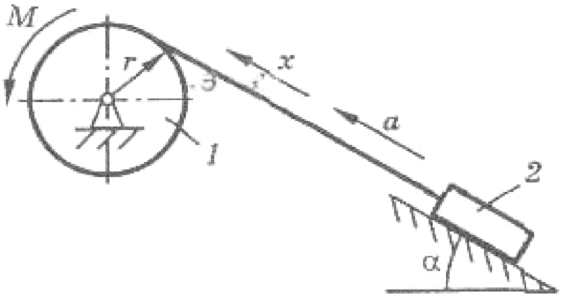


Рис. 17

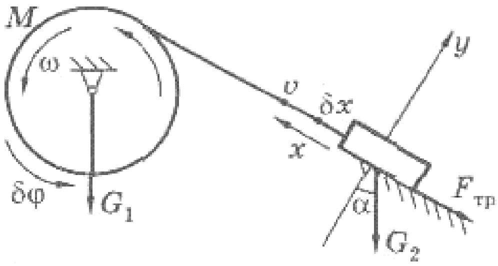


Рис. 18

Ненулевую мощность будут иметь сила трения $N_{Fтр} = -\,F_{тр}\upsilon$, сила тяжести груза $N_{G2} = -\,G_2\,\upsilon\,\sin\alpha$ и вращающий момент

$$N_M = M\omega = M\,\frac{\upsilon}{r}\,.$$

Таким образом, возможная мощность для механической системы будет равна

$$N = \sum\nolimits_k N_k = \left(M\frac{1}{r} - G_2\sin\alpha - F_{тр}\right)\upsilon = F_{пр}\,\upsilon,$$

где $F_{тр}$ – приведенная (к грузу) сила,

$$F_{пр} = M\,\frac{1}{r} - G_2\sin\alpha - F_{тр}.$$

Поскольку для системы с одной степенью свободы возможная мощность записывается в виде $N = Q\dot{q}$, а в нашей задаче $\dot{q} = \upsilon$, сравнивая два соотношения для мощности, найдем $Q = F_{пр}$. Следовательно, обобщенная сила системы в данной постановке задачи является приведенной силой.

2. Вычисление обобщенной силы через возможную работу

Рассмотрим, как и в предыдущем пункте, действующие в системе силы (рис. 18), и придадим телам системы возможное перемещение: бесконечно малое перемещение груза δx и поворот барабана на бесконечно малый угол $\delta\varphi$. Соотношение между этими величинами можно получить как непосредственно из геометрии, так и из уравнения кинематической связи $\upsilon = \omega r$. Интегрируя обе части этого уравнения по времени, находим

$$\int \upsilon dt = r\int \omega dt,$$

или $x = \varphi r + C$, где C – постоянная интегрирования. Варьируя последнее соотношение, получаем равенство $\delta x = r\delta\varphi$, которое в данном случае имеет простой геометрический смысл – равенство длины дуги окружности произведению радиуса на величину угла в радианах.

На возможном перемещении ненулевую работу будут совершать сила трения $\delta A_{F\text{тр}} = - F_{\text{тр}}\, \delta x$, сила тяжести груза $\delta A_{G2} = - G_2\delta x \sin\alpha$ и вращающий момент

$$\delta A_M = M\, \delta\varphi = M\,\frac{\partial x}{r}.$$

Таким образом, возможная работа для механической системы будет равна

$$\delta A = \sum_k \delta A_k = \left(M\frac{1}{r} - G_2\sin\alpha - F_{\text{тр}}\right)\delta x = F_{\text{пр}}\,\delta x,$$

где $F_{\text{пр}}$ – приведенная сила системы.

Поскольку для системы с одной степенью свободы возможная работа записывается в виде $\delta A = Q\delta q$, и в нашей задаче $\delta q = \delta x$, сравнивая последние два соотношения, находим $Q = F_{\text{пр}}$, т.е. обобщенная сила является в данной постановке задачи приведенной силой

$$Q = F_{\text{пр}} = M\frac{1}{r} - G_2\sin\alpha - F_{\text{тр}}$$

и совпадает с полученной первым способом.

Вычислим ее, учитывая, что $F_{\text{тр}} = fR_n = fG_2\cos\alpha$. Тогда

$$Q = F_{\text{пр}} = M\frac{1}{r} - m_2 g(\sin\alpha + f\cos\alpha) \approx 1400 \text{ Н}.$$

Составляем теперь уравнение Лагранжа, приравнивая правую и левую части: $m_{\text{пр}}a = F_{\text{пр}}$, откуда находим ускорение груза

$$a = \frac{F_{\text{пр}}}{m_{\text{пр}}} \approx 1{,}27 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = 1{,}27$ м/с^2.

ЗАДАЧА 2

Цилиндр массой m, имеющий форму тонкостенной трубы радиусом r, обмотан нитью, конец которой закреплен неподвижно (рис. 19). Определить ускорение центра падающего цилиндра a_C.

Решение. Система имеет одну степень свободы и может быть описана одним уравнением Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{d\dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q.$$

Поскольку необходимо определить ускорение центра цилиндра, движущегося по вертикальной оси y, в качестве обобщенной координаты удобнее всего выбрать соответствующую координату точки С: $q = y_C$. Тогда обобщенная скорость $\dot{q} = \dot{y_C} = v_C$ будет скоростью центра.

Цилиндр совершает плоское движение, и его кинетическая энергия, согласно теореме Кенига, равна

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{z_C} \omega^2,$$

где ω – угловая скорость;

J_{z_C} момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс, равен для тонкостенной трубы $J_{z_C} = mr^2$.

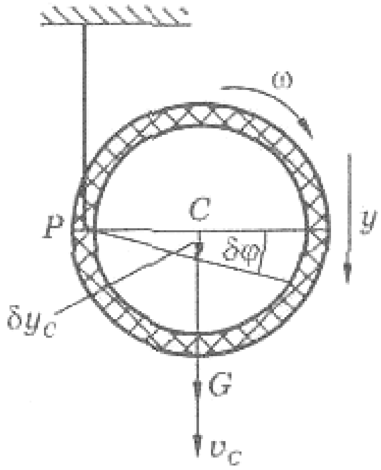


Рис. 19

Кинематическая связь между v_C и ω определена известным положением МЦС точки P формулой $v_C = \omega|CP|$, т.е. $v_C = \omega r$, откуда $\omega = \frac{v_C}{r}$.

С учетом этого кинетическая энергия принимает вид

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} m v_C^2 = \frac{1}{2}(2m) v_C^2,$$

где в скобках стоит приведенная масса системы $m_{пр} = 2m$.

Тогда $T = \frac{1}{2} m_{пр} v_C^2$.

Вычисляем производные, входящие в левую часть уравнения Лагранжа. Частные производные

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial y_c} = 0,$$

так как кинетическая энергия не зависит явно от y_C;

$$\frac{\partial T}{d\dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial v_c} = m_{пр} v_C.$$

Полная производная по времени равна

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{d\dot{q}} = m_{пр}\dot{v}_C = m_{пр} a_C$$

и дает левую часть уравнения Лагранжа.

Входящую в правую часть обобщенную силу Q получим тремя способами:

1. Вычисление обобщенной силы через возможную мощность

На цилиндр в процессе его движения действует только одна активная сила – сила тяжести. Мощность силы тяжести $N = G\upsilon_C$. Сравнивая это с записью в общем виде для системы с одной степенью свободы $N = Q\dot{q}$, видим, что обобщенная сила равна силе тяжести $Q = G$ (приведенная сила).

2. Вычисление обобщенной силы через возможную работу

Возможное перемещение для цилиндра – это поворот вокруг мгновенного центра скоростей на угол $\delta\varphi$. При этом центр цилиндра получает вертикальное перемещение δy_C, которое равно $\delta y_C = r\delta\varphi$, что можно получить непосредственно из геометрии, учитывая, что перемещения бесконечно малые, или интегрируя и затем варьируя уравнение связи $\upsilon_C = \omega r$.

Возможная работа – это работа силы тяжести на возможном перемещении $\delta A = G\delta y_C$. Сравнивая это с общим соотношением для систем с одной степенью свободы $\delta A = Q\delta q$, находим, что $Q = G$.

3. Вычисление обобщенной силы через потенциальную энергию

Единственная в системе работающая сила (сила тяжести) является потенциальной, и тогда обобщенная сила может быть вычислена по известной формуле

$$Q^{П} = -\frac{\partial П}{\partial q},$$

где П – потенциальная энергия системы.

Для цилиндра в поле силы тяжести $П = -Gy_C$ и поэтому

$$Q = -\frac{\partial П}{\partial y_c} = G.$$

Собираем теперь левую и правую части уравнения Лагранжа: $m_{пр}a_C = G$, откуда находим ускорение центра

$$a_C = \frac{G}{m_{пр}} = \frac{mg}{2m} = \frac{g}{2} \approx 4{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, ускорение центра цилиндра не зависит ни от его массы, ни от радиуса.

Ответ: $a_C = \frac{g}{2} \approx 4{,}9$ м/с^2.

ЗАДАЧА 3

Диск вращается вокруг неподвижной вертикальной оси. Его момент инерции относительно этой оси равен J. Одновременно по радиусу диска движется материальная точка массой m (рис. 20). Определить величины приложенного к диску вращающего момента M и действующей на точку силы F, необходимые для того, чтобы диск вращался с заданным угловым ускорением ε, а точка двигалась по диску с заданным относительным ускорением a_r. Трением пренебречь.

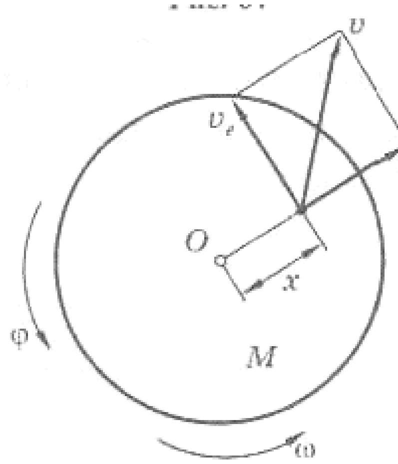


Рис. 20

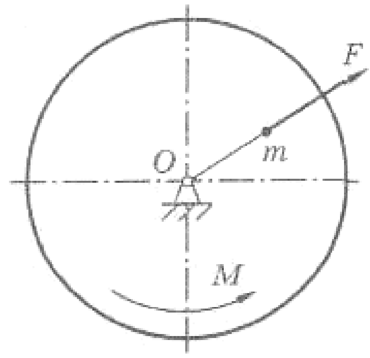


Рис. 21

Решение. Система имеет две степени свободы, и для ее описания следует составить два уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \ , j = 1,2.$$

В качестве обобщенных координат можно выбрать угол поворота диска φ и координату материальной точки x (рис. 21): $q_1 = \varphi$; $q_2 = x$.

Тогда обобщенные скорости будут $\dot{q}_1 = \dot{\varphi} = \omega$, $\dot{q}_2 = \dot{x} = v_r$, где ω – угловая скорость диска; υ_r – относительная скорость точки.

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2,$$

где $\bar{v}$ – абсолютная скорость точки, равная сумме относительной $\bar{v}_r$ и переносной $\bar{v}_e$ скоростей: $\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e$. Из рисунка видно, что $v^2 = v_r^2 + v_e^2$, и поскольку $v_e = \omega x$, то $v^2 = v_r^2 + \omega^2 x^2$.

Тогда кинетическая энергия запишется в виде

$$T = \frac{1}{2}(J + mx^2)\omega^2 + \frac{1}{2}mv_r^2 = \frac{1}{2}J_{\text{пр}}(x)\omega^2 + \frac{1}{2}mv_r^2 \,,$$

где $J_{\text{пр}}(x) = J + mx^2$ – приведенный (к диску) момент инерции.

Определяем члены уравнений

1. $j = 1$. Выписываем производные:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \omega} = J_{\text{пр}}(x)\omega \,;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = J_{\text{пр}}(x)\dot{\omega} + \frac{dJ_{\text{пр}}}{dx}\frac{dx}{dt}\omega = J_{\text{пр}}(x)\varepsilon + 2mxv_r\omega.$$

Обобщенную силу Q_1 ищем через возможную мощность, фиксируя координату q_2, т.е. рассматривая материальную точку как неподвижную. В этом случае мощность имеет только вращающий момент $N_1 = M\omega = M\dot{q}_1$, следовательно $Q_1 = M$.

2. $j = 2$. Выписываем производные:

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial J_{\text{пр}}(x)}{\partial x}\omega^2 = mx\omega^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \upsilon_r} = m\upsilon_r; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m\dot{\upsilon}_r = ma_r.$$

Обобщенную силу Q_2 находим через возможную мощность, фиксируя координату q_1, т.е. рассматривая диск как неподвижный. В этом случае мощность будет только у силы F: $N_2 = F\upsilon_r = F\dot{q}_2$ и, следовательно, $Q_2 = F$.

Теперь составляем уравнения Лагранжа:

$$J_{\text{пр}}(x)\varepsilon + 2mx\upsilon_r\omega = M; \quad ma_r - mx\omega^2 = F.$$

Отсюда находим $M = (J + mx^2)\varepsilon + 2mx\upsilon_r\omega$; $F = ma_r - mx\omega^2$.

Первые слагаемые в этих уравнениях показывают величины момента и силы, необходимые для разгона системы (преодоления инерции).

Другие слагаемые имеют следующий физический смысл. Второе слагаемое первого уравнения представляет собой момент кориолисовой силы инерции относительно оси вращения (кориолисово ускорение здесь $2\omega\upsilon_r$).

Второе слагаемое второго уравнения – это центробежная сила инерции (здесь $\omega^2 x$ – центростремительное ускорение).

Ответ: $M = (J + mx^2)\varepsilon + 2mx\upsilon_r\omega$; $F = ma_r - mx\omega^2$.

ОТВЕТЫ

ЗАДАНИЕ Д1

№	Ответ	№	Ответ	№	Ответ
1.	0,533 с	11.	7,57 1/с	21.	4,77 об.
2.	5,41 с	12.	1,72 1/с	22.	1,04 об.
3.	0,572 с	13.	36,1 с	23.	1,84 1/с
4.	35,9 1/с	14.	24,0 об.	24.	12,0 1/с
5.	4,74 с	15.	2,82 1/с	25.	5,00 рад
6.	1,59 с	16.	22,2 рад	26.	15,9 об.
7.	8,66 рад	17.	44,5 рад	27.	4,64 1/с
8.	6,20 1/с	18.	6,73 1/с	28.	11,4 1/с
9.	4,80 об.	19.	4,09 1/с	29.	1,33 1/с
10.	31,3 1/с	20.	112 Нм	30.	3,66 рад

ЗАДАНИЕ Д2

Задание 1

№	Ответ	№	Ответ	№	Ответ
1.	1,36 м/с^2	11.	19,0 1/с^2	21.	0,440 м/с^2
2.	1,91 м/с^2	12.	1,76 м/с^2	22.	0,798 м/с^2
3.	1,08 м/с^2	13.	0,468 м/с^2	23.	0,180 м/с^2
4.	13,3 1/с^2	14.	0,164 м/с^2	24.	1,48 м/с^2
5.	0,435 м/с^2	15.	1,07 м/с^2	25.	6,17 1/с^2
6.	19,1 1/с^2	16.	1,38 м/с^2	26.	4,03 1/с^2
7.	3,02 1/с^2	17.	1,40 м/с^2	27.	2,76 м/с^2
8.	0,531 м/с^2	18.	21,4 1/с^2	28.	8,04 1/с^2
9.	70,2 1/с^2	19.	0,469 м/с^2	29.	2,27 м/с^2
10.	2,98 м/с^2	20.	0,109 м/с^2	30.	0,361 м/с^2

Задание 2

№	Ответ	№	Ответ	№	Ответ
1.	2,33 м/с	11.	15,5 1/с	21.	1,33 м/с
2.	2,76 м/с	12.	2,66 м/с	22.	1,79 м/с
3.	2,08 м/с	13.	1,37 м/с	23.	0,847 м/с
4.	12,9 1/с	14.	0,809 м/с	24.	2,44 м/с
5.	1,32 м/с	15.	2,07 м/с	25.	8,81 1/с
6.	15,5 1/с	16.	2,35 м/с	26.	7,11 1/с
7.	6,16 1/с	17.	2,37 м/с	27.	3,33 м/с
8.	1,46 м/с	18.	16,4 1/с	28.	10,0 1/с
9.	29,7 1/с	19.	1,37 м/с	29.	3,01 м/с
10.	3,45 м/с	20.	0,661 м/с	30.	1,20 м/с

ЗАДАНИЕ Д3

№	F, кН	R, кН	№	F, кН	R, кН
1.	3,67	3,47	16.	2,10	2,20
2.	8,17	4,05	17.	2,87	2,08
3.	4,89	2,98	18.	1,90	2,42
4.	3,15	5,90	19.	11,5	9,04
5.	0,254	0,925	20.	1,42	2,50
6.	28,2	12,5	21.	-0,250	4,68
7.	0,934	1,58	22.	36,5	8,89
8.	5,53	8,80	23.	3,31	3,07
9.	18,1	12,2	24.	7,95	12,3
10.	12,2	6,02	25.	3,99	7,91
11.	7,89	5,10	26.	8,77	4,40
12.	2,55	8,61	27.	0,843	1,39
13.	5,28	9,44	28.	14,3	3,94
14.	3,83	5,65	29.	3,73	3,83
15.	2,47	4,40	30.	3,25	6,78

ЗАДАНИЕ Д4

№	Ответ
1.	1,63 м/с^2
2.	1,00 м/с^2
3.	4,29 1/с^2
4.	4,23 м/с^2
5.	3,02 м/с^2
6.	7,22 1/с^2
7.	1,96 м/с^2
8.	5,04 м/с^2
9.	3,40 м/с^2
10.	1,69 м/с^2

№	Ответ
11.	3,11 м/с^2
12.	11,8 1/с^2
13.	3,11 м/с^2
14.	0,561 м/с^2
15.	2,96 м/с^2
16.	3,33 м/с^2
17.	1,15 м/с^2
18.	3,56 м/с^2
19.	1,63 м/с^2
20.	0,352 м/с^2

№	Ответ
21.	2,67 1/с^2
22.	20,5 1/с^2
23.	1,03 м/с^2
24.	1,02 м/с^2
25.	0,883 1/с^2
26.	2,00 м/с^2
27.	2,70 1/с^2
28.	0,635 м/с^2
29.	9,26 м/с^2
30.	3,16 м/с^2

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

КАФЕДРА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Контрольная (расчетно-графическая работа)

по теоретической механике

(№1, №2, №3)

Выполнил: Иванов А.А.
Группа: М-2-1
Шифр

Проверил: к.т.н., доц.
Пермякова В.В.

Москва – 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор Е.В. Гаранина

Подписано в печать 21.05.13 г.

Печать офсетная	Формат 60х84/16	2,87 уч.-изд. л.
3,02 усл.печ.л.	Заказ № 1625/	Тираж 260 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а