Содержание

Введение..4
Рекомендуемая литература..4
1. Формулировка задания...5
2. Оформление работы..8
3. Методика определения усилий в стержнях и перемещений узлов ферменных авиационных конструкций...8
4. Вопросы для самопроверки...22
Приложение..23

Введение

Дисциплина «Динамика и прочность авиационных конструкций» посвящена изучению теоретических основ анализа прочности, жесткости, статической устойчивости и динамического поведения авиационных конструкций. В конструкции летательных аппаратов широко используются стержневые системы (фермы, рамы). Они находят применение в конструкции шасси, в системах крепления двигателей, в качестве элементов конструкции планера летательного аппарата.

Из теоретической части дисциплин «Динамика и прочность авиационных конструкций» и «Сопротивление материалов» известны традиционные методы составления уравнений для расчета прочности и жесткости статически определимых и статически неопределимый ферменных конструкций, такие как, например, метод вырезания узлов, метод моментных точек (осей) и др. Однако стержневые системы могут иметь большое число элементов, что приводит к значительным вычислительным трудностям при их расчете традиционными методами. В настоящее время решить эту проблему позволяет компьютерная техника. При этом алгоритмы расчетов обычно составляются с использованием алгебры матриц, поскольку в данном случае компьютерные программы получаются достаточно компактными.

Знание матричного метода расчета стержневых систем, кроме того, дает основу для понимания метода конечных элементов, который в настоящее время широко применяется для расчета конструкций различных типов. Матричный метод универсален и применяется как для расчета статически определимых, так и для расчета статически неопределимых стержневых систем.

Настоящее пособие содержит в себе задания и методические указания для выполнения расчетно-графической работы, которая призвана помочь закреплению теоретического материала и получению знаний прикладного характера по разделу «Расчет стержневых систем».

Перед началом работы студентам рекомендуется изучить или повторить соответствующие разделы дисциплины «Динамика и прочность авиационных конструкций», а также повторить основы алгебры матриц.

Рекомендуемая литература

1. Строительная механика летательных аппаратов: учебник для авиационных специальностей вузов / под ред. И.Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.

2. Страхов Г.И., Чунарева Н.Н. Строительная механика самолета. – М.: МИИГА, 1983. – 96 с.

1. Формулировка задания

Для заданной схемы конструкции и схемы нагрузок:

– определить усилия в элементах фермы;

– определить перемещения узловых точек;

– определить реакции опор;

– выполнить проверку решения;

– построить эпюру усилий и схему перемещения узлов.

Вариант задания выбирается в соответствии с табл. 1. Порядок выбора определяется по табл. 2. На рис. 1 показаны схемы ферм к вариантам заданий.

Таблица 1

Варианты заданий

№ варианта	Схема	Нагрузки
1	1	R_{x1}, R_{y1}, R_{x5}
2		R_{x1}, R_{y1}, R_{y5}
3		R_{x1}, R_{x5}, R_{y5}
4		R_{y1}, R_{x5}, R_{y5}
5	2	R_{x1}, R_{y1}, R_{x5}
6		R_{x1}, R_{y1}, R_{y5}
7		R_{x1}, R_{x5}, R_{y5}
8		R_{y1}, R_{x5}, R_{y5}
9	3	R_{x1}, R_{y1}, R_{x5}
10		R_{x1}, R_{y1}, R_{y5}
11		R_{x1}, R_{x5}, R_{y5}
12		R_{y1}, R_{x5}, R_{y5}
13	4	R_{x1}, R_{y1}, R_{x5}
14		R_{x1}, R_{y1}, R_{y5}
15		R_{x1}, R_{x5}, R_{y5}
16		R_{y1}, R_{x5}, R_{y5}
17	5	R_{x1}, R_{y1}, R_{x5}
18		R_{x1}, R_{y1}, R_{y5}
19		R_{x1}, R_{x5}, R_{y5}
20		R_{y1}, R_{x5}, R_{y5}
21	6	R_{x1}, R_{y1}, R_{x5}
22		R_{x1}, R_{y1}, R_{y5}
23		R_{x1}, R_{x5}, R_{y5}
24		R_{y1}, R_{x5}, R_{y5}

Таблица 2

Выбор номера варианта

1	Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	1, 4, 7, 0										2, 5, 8						
2	Последняя цифра номера зачетной книжки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
3	Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Продолжение табл. 2

1	Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	2, 5, 8			3, 6, 9									
2	Последняя цифра номера зачетной книжки	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
3	Номер варианта	18	19	20	21	22	23	24	1	6	11	16	19	24

Для расчета предлагается ферменная конструкция, которая может являться, например, моделью конструкции крепления двигателя к планеру летательного аппарата. Все силы, действующие на двигатель, приводятся к системе статически эквивалентных сил нагружения фермы, приложенных в узлах № 1 и № 5. Узлы № 2 и № 4 являются узлами крепления фермы к планеру летательного аппарата, один из которых фиксирует ферму в двух направлениях (по осям *Ox* и *Oy*), другой лишь в одном направления – по оси *Oy*.

Жесткость элементов при расчете принять одинаковой.

Система нагрузок, действующих на ферму, определяется соотношениями:

$$R_{x1}=R_{x5}=P;\ R_{y1}=0{,}2\,P;\ R_{y5}=0{,}4\,P.$$

Все вычисления выполняются в параметрах P и a.

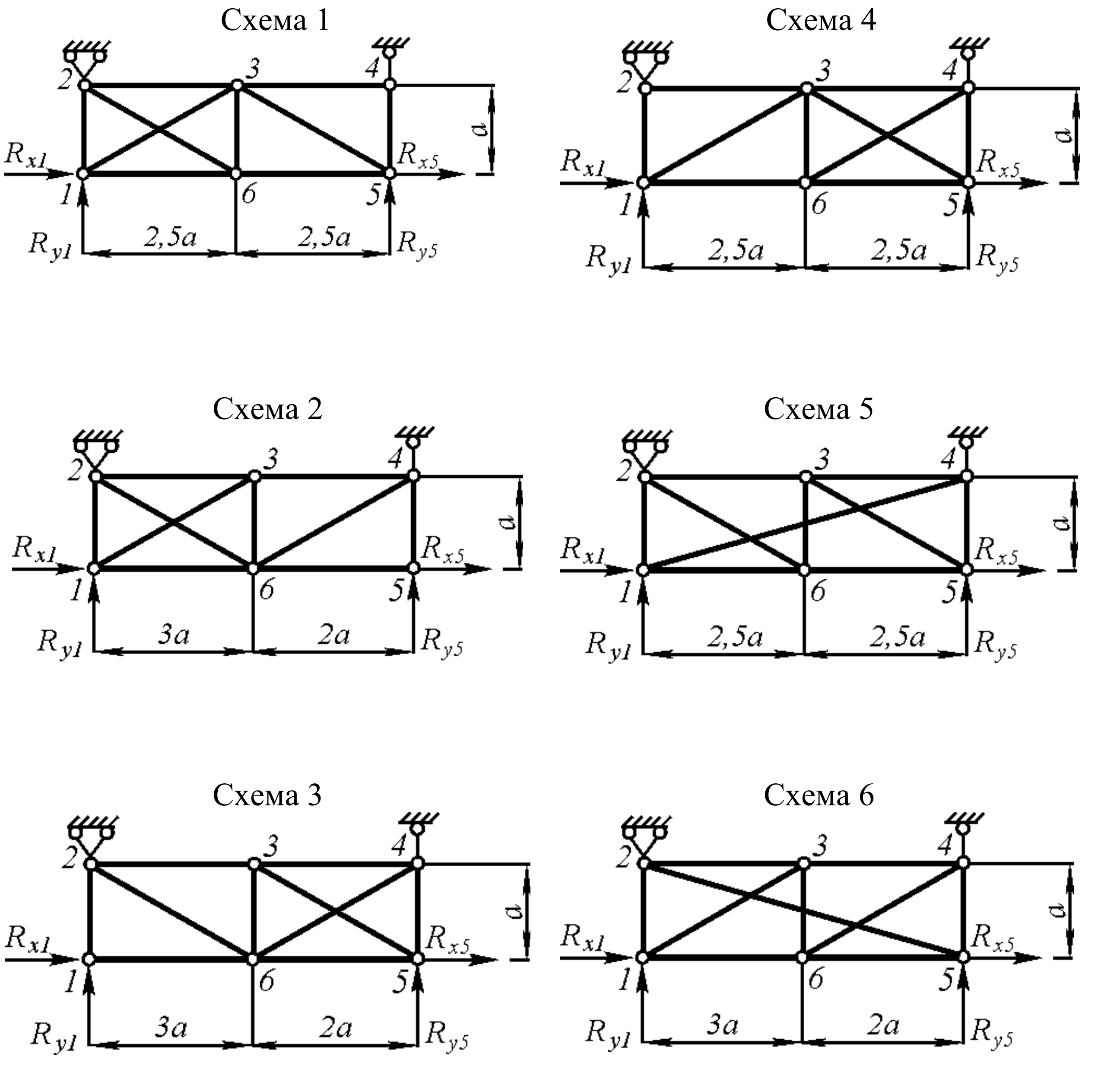


Рис. 1

Примечания к рис. 1:

1) в схеме 5 стержень 1-4 соединен с другими стрежнями только в узлах 1 и 4;

2) в схеме 6 стержень 2-5 соединен с другими стрежнями только в узлах 2 и 5.

2. Оформление работы

Работа представляется в виде пояснительной записки на листах белой бумаги формата А4, содержащей необходимые расчеты, схемы и эпюры. Текст пояснительной записки, таблицы, эпюры и рисунки выполняются студентом только ОТ РУКИ. Эпюры должны быть вычерчены на миллиметровой бумаге.

Изложение пояснительной записки должно быть четким и лаконичным, терминология и обозначения, входящие в расчетные формулы, должны быть общепринятыми для данной дисциплины. Обозначения, входящие в формулы, необходимо пояснять. Все вычисления должны записываться в следующей форме: формула в буквах = формула в цифрах = результат вычислений и размерность.

Автор несёт полную ответственность за содержание работы и обязан при ее защите отвечать на вопросы по тексту и теоретической части.

3. Методика определения усилий в стержнях и перемещений узлов ферменных авиационных конструкций

В данном разделе будут использоваться готовые формулы. С выводом данных формул и их теоретическим обоснованием необходимо познакомиться по [1, 2] перед началом выполнения задания. Это облегчит понимание материала.

Рассмотрим ферменную конструкцию, представленную на рис. 2 и на ее примере рассмотрим основные положения матричного метода расчета ферм.

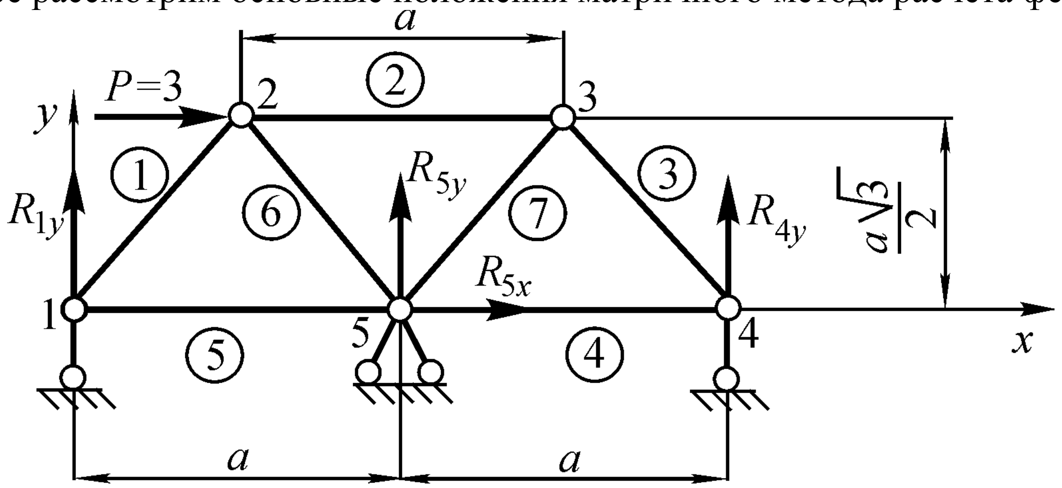


Рис. 2

Следует отметить, что рассматриваемая методика расчета применима для статически определимых и статически неопределимых ферм при условии, что нагрузка приложена в узловых точках, а жесткость и площади поперечного сечения каждого стержня не меняются по его длине.

В этом случае усилия в стержне постоянны, а векторы усилий и перемещений в случае плоской фермы содержат по два компонента.

Произведем кинематический анализ данной фермы. Найдем степень статической неопределимости:

$$W = 2\,У - C = 2 \cdot 5 - 11 = -1,$$

где $У$ – число узлов (исключая опорные узлы);

C – число всех стержней (включая опорные стержни).

Поскольку $W = -1 < 0$, рассматриваемая стержневая система статически неопределима.

Представим данную стержневую систему как совокупность упорядоченно расположенных элементов. Стержни и узлы, соединяющие их, пронумеруем. При этом введем две независимые произвольные системы нумерации (рис. 2):

− для стержней (номера стержней обведены в кружочек);

− для узлов.

Для простоты в рассматриваемой задаче примем, что жесткость всех элементов одинакова, а P = 3. Решение задачи будем вести в произвольной системе координат, начало координат – узел № 1.

Для аналитического описания фермы составим структурную матрицу $\overline{S}_c$ таким образом, чтобы число столбцов совпадало с числом стержней, а число строк – с числом узлов. Номер столбца должен соответственно совпадать с номером стержня, а номер строки – с номером узла. При этом значащие члены матрицы должны быть равны + 1, если это начальный узел стержня (узел с меньшим номером) и – 1, если это конечный узел стержня (узел с бóльшим номером). Заполнение матрицы ведут по столбцам, занося последовательно для каждого стержня условные +1 и –1 в соответствующие строки. Для рассматриваемой фермы получим:

$$\overline{S}_c = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{Vmatrix}. \qquad (1)$$

Например, столбец № 5 показывает, что элемент № 5 начинается в узле № 1 и заканчивается в узле № 5. Строка № 3 показывает, что элементы № 3 и № 7 начинаются в этом узле, а элемент №2 – заканчивается.

Составим матрицу координат узлов, включающую векторы-столбцы координат каждого узла:

$$\vec{C} = \begin{Vmatrix} \vec{C}_1 \\ \vec{C}_2 \\ \vec{C}_3 \\ \vec{C}_4 \\ \vec{C}_5 \end{Vmatrix}, \qquad (2)$$

где $\vec{C}_i = \begin{Vmatrix} x_i \\ y_i \end{Vmatrix}$, $i = 1, 2, \ldots, 5$; (3)

x_i, y_i – координаты i-го узла.

В развернутом виде:

$$\vec{C} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \\ x_5 \\ y_5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}5\,a \\ \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ 1{,}5\,a \\ \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ 2\,a \\ 0 \\ a \\ 0 \end{Vmatrix}. \qquad (4)$$

Составим матрицу-вектор внешних нагрузок (сил в узлах фермы):

$$\vec{P} = \begin{Vmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \\ \vec{P}_4 \\ \vec{P}_5 \end{Vmatrix}, \qquad (5)$$

где $\vec{P}_i = \begin{Vmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \end{Vmatrix}$, $i = 1, 2, \ldots, 5$; (6)

P_{ix}, P_{iy} – проекции внешней нагрузки в i-м узле на соответствующие оси системы координат.

Положительное направление нагрузок совпадает с направлением осей *Ox* и *Oy*. В число нагрузок должны быть включены также реакции опор R_{ix}, R_{iy}

(рис. 2). Для сокращения места запишем матрицу-вектор $\vec{P}$ в транспонированном виде:

$$\vec{P}^{\text{т}} = \|0 \;\; R_{1y} \;\; 3 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; R_{4y} \;\; R_{5x} \;\; R_{5y}\|. \tag{7}$$

Составим матрицу-вектор неизвестных усилий в стержнях, которую также запишем в транспонированном виде:

$$\vec{N}^{\text{т}} = \left\|\vec{N}_1 \vec{N}_2 \vec{N}_3 \vec{N}_4 \vec{N}_5 \vec{N}_6 \vec{N}_7\right\|, \tag{8}$$

где $$\vec{N}_j = \left\|\begin{matrix} N_{jx} \\ N_{jy} \end{matrix}\right\|, j = 1, 2, \ldots, 7; \tag{9}$$

N_{jx}, N_{jy} – проекции неизвестных усилий в j-м стержне на соответствующие оси системы координат.

Запишем уравнение равновесия сил в матричной форме:

$$\left(\overline{S}_c \overline{\alpha}\right) \vec{N} + \vec{P} = 0, \tag{10}$$

где $\overline{\alpha}$ – диагональная матрица направляющих косинусов.

Ось каждого стержня фермы определенным образом ориентирована по отношению к осям выбранной системы координат. Эту ориентацию можно задать с помощью косинусов углов между осью стержня и осью системы координат. В результате получится следующая диагональная матрица:

$$\overline{\alpha} = \left\|\begin{matrix} \overline{\alpha}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\alpha}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\alpha}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\alpha}_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{\alpha}_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{\alpha}_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{\alpha}_7 \end{matrix}\right\|, \tag{11}$$

где $$\overline{\alpha}_j = \left\|\begin{matrix} \cos\alpha_{jx} \\ \cos\alpha_{jy} \end{matrix}\right\|, j = 1, 2, \ldots, 7. \tag{12}$$

α_{jx}, α_{jy} – углы между осью j-го стержня и соответствующей осью системы координат.

Уравнение (10) содержит неизвестные в матрице-векторе $\vec{N}$ и в матрице-векторе $\vec{P}$ (опорные реакции). С целью исключения неизвестных опорных реакций из уравнений равновесия используется так называемая «выметающая» матрица $\overline{S}_0$. Это такая матрица, построенная на основе единичной матрицы, из которой удалены строки с номерами как у опорных реакций в матрице-векторе (7). В рассматриваемом примере это будут строки с номерами 2, 8, 9 и 10.

$$\overline{S}_0=\left\|\begin{array}{cccccccccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{0}\\
\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{0}\\
\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{1}
\end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{cccccccccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0
\end{array}\right\|, \qquad (13)$$

Умножим уравнение (10) на матрицу $\overline{S}_0$:

$$\overline{S}_0(\overline{S}_c\overline{\alpha})\vec{N}+\vec{Q}=0, \qquad (14)$$

где $\vec{Q}=\overline{S}_0\vec{P}$. (15)

В данном примере:

$$\vec{Q}^{\text{т}}=\|0\ \ 3\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\|. \qquad (16)$$

Однако и теперь в рассматриваемом примере число неизвестных (7 неизвестных усилий в стержнях) превышает число уравнений (6 уравнений равновесия, вытекающих из (14)). В связи с этим для раскрытия статической неопределимости необходимо использовать условие совместности деформаций: стержневая система, соединенная в узлах, должна оставаться соединенной в этих же узлах и после деформации. Это значит, что перемещения концов всех стержней, примыкающих к рассматриваемому узлу, а следовательно, и их проекции на оси системы координат должны быть одинаковыми.

Рассмотрим *k*-й стержень до и после деформации фермы (рис. 3).

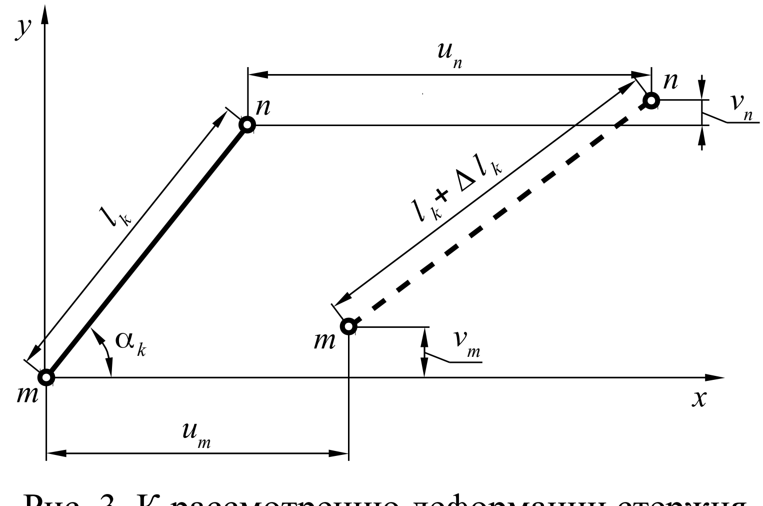


Рис. 3. К рассмотрению деформации стержня

Если принять допущение о малости перемещений, то это позволит использовать тригонометрические соотношения. Тогда в общем случае при наличии перемещений вдоль обеих осей:

$$\Delta l_k = \Delta u_{nm} \cos\alpha_k + \Delta v_{nm} \sin\alpha_k, \tag{17}$$

где $\Delta u_{nm} = u_n - u_m$; $\Delta v_{nm} = v_n - v_m$.

Но из теоремы Кастильяно вытекает:

$$\Delta l_k = \frac{N_k l_k}{E_k F_k}, \tag{18}$$

где E_k – модуль упругости k-го стержня;

F_k – площадь поперечного сечения k-го стержня.

В матричной форме уравнения (17) и (18) для всех стержней фермы можно записать соответственно:

$$\vec{\Delta} = -\overline{\alpha}^{\text{т}} \overline{S}_c^{\text{т}} \vec{r}, \tag{19}$$

$$\vec{\Delta} = \overline{G} \vec{N}, \tag{20}$$

где $\vec{r} = \begin{Vmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \\ \vec{r}_4 \\ \vec{r}_5 \end{Vmatrix}$ – матрица-вектор перемещений, $\vec{r}_i = \begin{Vmatrix} u_i \\ v_i \end{Vmatrix}$;

$$\overline{G} = \begin{Vmatrix} \frac{l_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_7}{E_7 F_7} \end{Vmatrix}. \tag{21}$$

Учитывая условия рассматриваемой задачи, можно записать:

$$\overline{G} = \frac{a}{EF} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{22}$$

Из (19) и (20) вытекает условие совместности деформаций:

$$\overline{G}\,\vec{N} = -\overline{\alpha}^{\mathrm{т}}\,\overline{S}_c^{\mathrm{т}}\,\vec{r}. \tag{23}$$

Отсюда можно выразить матрицу-вектор неизвестных усилий в стержнях:

$$\vec{N} = -\overline{G}^{-1}\,\overline{\alpha}^{\mathrm{т}}\,\overline{S}_c^{\mathrm{т}}\,\vec{r}. \tag{24}$$

Подставим (24) в уравнение равновесия (14) и получим основное разрешающее уравнение задачи:

$$\overline{S}_0\,\overline{S}_c\,\overline{\alpha}\,\overline{G}^{-1}\,\overline{\alpha}^{\mathrm{т}}\,\overline{S}_c^{\mathrm{т}}\,\vec{r} = \vec{Q}. \tag{25}$$

Матрицу-вектор $\vec{r}$ можно представить в следующем виде:

$$\vec{r} = \overline{S}_0^{\mathrm{т}}\,\vec{\delta}, \tag{26}$$

где $\vec{\delta}$ – матрица-вектор перемещений, из которой исключены заранее известные нулевые перемещения в опорных узлах фермы.

Тогда:

$$\overline{K}\,\vec{\delta} = \vec{Q}, \tag{27}$$

где $\overline{K} = \overline{S}_0\,\overline{S}_c\,\overline{\alpha}\,\overline{G}^{-1}\,\overline{\alpha}^{\mathrm{т}}\,\overline{S}_c^{\mathrm{т}}\,\overline{S}_0^{\mathrm{т}}$ – матрица жесткости.

Составив матрицу жесткости, обратим ее и получим матрицу гибкости (или податливости):

$$\overline{L} = \overline{K}^{-1} = \left(\overline{S}_0\,\overline{S}_c\,\overline{\alpha}\,\overline{G}^{-1}\,\overline{\alpha}^{\mathrm{т}}\,\overline{S}_c^{\mathrm{т}}\,\overline{S}_0^{\mathrm{т}}\right)^{-1}. \tag{28}$$

Теперь можно найти неизвестные перемещения узлов фермы, без перемещений опорных узлов, которые известны и равны нулю:

$$\vec{\delta} = \overline{L}\,\vec{Q}. \tag{29}$$

Подставив полученную матрицу-вектор перемещений в уравнение (26), а затем полученную матрицу-вектор $\vec{r}$ – в уравнение (24), найдем усилия в стержнях:

$$\vec{N} = -\overline{G}^{-1}\,\overline{\alpha}^{\mathrm{т}}\,\overline{S}_c^{\mathrm{т}}\,\overline{S}_0^{\mathrm{т}}\,\vec{\delta}. \tag{30}$$

Итак построены все вспомогательные матрицы, описывающие задачу. Это:

1) структурная матрица $\overline{S}_c$ по (1);

2) матрица координат узлов $\vec{C}$ по (4);

3) «выметающая» матрица $\overline{S}_0$ по (13);

4) матрица внешних нагрузок $\vec{Q}$ по (16);

5) матрица жесткости $\overline{G}$ по (22).

Для примера выполним эти вычисления для рассматриваемой задачи.

Составим матрицу направляющих косинусов $\overline{\alpha}$.

Используя аналитическую геометрию, выражение (12) можно записать:

$$\vec{\alpha}_j = \frac{1}{l_j} \begin{Vmatrix} l_{jx} \\ l_{jy} \end{Vmatrix}, \tag{31}$$

где l_j – длина j-го стержня;

$l_{jx} = x_{\text{к}\,j} - x_{\text{н}\,j}$, $l_{jy} = y_{\text{к}\,j} - y_{\text{н}\,j}$ – длины проекций j-го стержня на соответствующие оси системы координат;

$x_{\text{н}\,j}, x_{\text{к}\,j}$ – координаты соответственно начала и конца j-го стержня по оси Ox;

$y_{\text{н}\,j}, y_{\text{к}\,j}$ – координаты соответственно начала и конца j-го стержня по оси Oy.

Введем вектор проекций:

$$\vec{\pi}_j = \begin{Vmatrix} l_{jx} \\ l_{jy} \end{Vmatrix}. \tag{32}$$

Матрица-вектор проекций всех стержней будет иметь вид:

$$\vec{\pi} = \begin{Vmatrix} \vec{\pi}_1 \\ \vec{\pi}_2 \\ \vdots \\ \vec{\pi}_7 \end{Vmatrix}. \tag{33}$$

Эту матрицу можно легко получить, используя ранее составленную структурную матрицу (1) и матрицу координат узлов (4):

$$\vec{\pi} = -\bar{S}_c^{\text{т}} \vec{C} = -\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 0{,}5a \\ \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 1{,}5a \\ \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 2a \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} a \\ 0 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0{,}5a \\ \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} a \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 0{,}5a \\ \dfrac{-a\sqrt{3}}{2} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} -a \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} a \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 0{,}5a \\ \dfrac{-a\sqrt{3}}{2} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} -0{,}5a \\ \dfrac{-a\sqrt{3}}{2} \end{Vmatrix} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \vec{\pi}_1 \\ \vec{\pi}_2 \\ \vec{\pi}_3 \\ \vec{\pi}_4 \\ \vec{\pi}_5 \\ \vec{\pi}_6 \\ \vec{\pi}_7 \end{Vmatrix}. \tag{34}$$

Длины стержней можно определить следующим образом:

$$l_j=\sqrt{l_{jx}^2+l_{jy}^2}=\sqrt{\vec{\pi}_j^{\text{т}}\vec{\pi}_j}. \qquad (35)$$

$$l_1=\sqrt{\begin{Vmatrix}0{,}5\,a & \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0{,}5\,a\\ \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\end{Vmatrix}}=a.$$

$$l_2=\sqrt{\begin{Vmatrix}a & 0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}a\\ 0\end{Vmatrix}}=a.$$

$$l_3=\sqrt{\begin{Vmatrix}0{,}5\,a & \dfrac{-a\sqrt{3}}{2}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0{,}5\,a\\ \dfrac{-a\sqrt{3}}{2}\end{Vmatrix}}=a.$$

Аналогично получим: $l_4=l_5=l_6=l_7=a.$

Направляющие косинусы определим по формуле (31):

$$\overline{\alpha}_1=\frac{1}{a}\begin{Vmatrix}0{,}5\,a\\ \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0{,}5\\ 0{,}87\end{Vmatrix}\ \text{и т.д.}$$

В результате получим матрицу направляющих косинусов:

$$\overline{\alpha}=\begin{Vmatrix}
\begin{Vmatrix}0{,}5\\0{,}87\end{Vmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \begin{Vmatrix}1\\0\end{Vmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \begin{Vmatrix}0{,}5\\-0{,}87\end{Vmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \begin{Vmatrix}-1\\0\end{Vmatrix} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \begin{Vmatrix}1\\0\end{Vmatrix} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{Vmatrix}0{,}5\\-0{,}87\end{Vmatrix} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{Vmatrix}-0{,}5\\-0{,}87\end{Vmatrix}
\end{Vmatrix}. \qquad (36)$$

Представляя выметающую матрицу $\overline{S}_0$ как блочную, элементами которой являются матрицы размера 1×2, перемножаем первую группу матриц в уравнении (25):

$$\overline{K}_0 = \overline{S}_0 \overline{S}_c \overline{\alpha} =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} \left\| \begin{matrix} 0{,}5 \\ 0{,}87 \end{matrix} \right\| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left\| \begin{matrix} 0{,}5 \\ -0{,}87 \end{matrix} \right\| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left\| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right\| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left\| \begin{matrix} 0{,}5 \\ -0{,}87 \end{matrix} \right\| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left\| \begin{matrix} -0{,}5 \\ -0{,}87 \end{matrix} \right\| \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}87 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}87 & 0 \\ 0 & -1 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}87 & 0 & 0 & 0 & -0{,}87 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|. \qquad (37)$$

Составим матрицу жесткости:

$$\overline{K} = \overline{S}_0 \overline{S}_c \overline{\alpha}\, \overline{G}^{-1} \left(\overline{S}_0 \overline{S}_c \overline{\alpha} \right)^{\text{т}} = \overline{K}_0 \overline{G}^{-1} \overline{K}_0^{\text{т}} =$$

$$=\frac{EF}{a}\begin{Vmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}87 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}87 & 0 \\ 0 & -1 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}87 & 0 & 0 & 0 & -0{,}87 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\times$$

$$\times\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}87 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}87 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}87 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}5 & -0{,}87 & 0 \end{Vmatrix}=$$

$$=\frac{EF}{a}\begin{Vmatrix} 1{,}25 & -0{,}25 & -0{,}44 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}25 & 1{,}5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0{,}44 & 0 & 1{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1{,}5 & 0{,}87 & -0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}87 & 1{,}3 & -0{,}44 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}25 & -0{,}44 & 1{,}25 \end{Vmatrix}. \qquad (38)$$

Обратив последнюю матрицу, получим матрицу податливости:

$$\overline{L}=\frac{a}{EF}\begin{Vmatrix} 1{,}05 & 0{,}65 & 0{,}36 & 0{,}71 & -0{,}48 & -0{,}03 \\ 0{,}65 & 2{,}84 & 0{,}22 & 3{,}11 & -2{,}12 & -0{,}13 \\ 0{,}36 & 0{,}22 & 0{,}89 & 0{,}24 & -0{,}16 & -0{,}01 \\ 0{,}71 & 3{,}11 & 0{,}24 & 4{,}48 & -3{,}06 & -0{,}18 \\ -0{,}48 & -2{,}12 & -0{,}16 & -3{,}06 & 2{,}96 & 0{,}43 \\ -0{,}03 & -0{,}13 & -0{,}01 & -0{,}18 & 0{,}43 & 0{,}92 \end{Vmatrix}. \qquad (39)$$

Матрица-вектор перемещений узлов (без нулевых перемещений опор):

$$\vec{\delta}=\begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \end{Vmatrix}=\overline{L}\,\vec{Q}=\frac{a}{EF}\begin{Vmatrix} 1{,}05 & 0{,}65 & 0{,}36 & 0{,}71 & -0{,}48 & -0{,}03 \\ 0{,}65 & 2{,}84 & 0{,}22 & 3{,}11 & -2{,}12 & -0{,}13 \\ 0{,}36 & 0{,}22 & 0{,}89 & 0{,}24 & -0{,}16 & -0{,}01 \\ 0{,}71 & 3{,}11 & 0{,}24 & 4{,}48 & -3{,}06 & -0{,}18 \\ -0{,}48 & -2{,}12 & -0{,}16 & -3{,}06 & 2{,}96 & 0{,}43 \\ -0{,}03 & -0{,}13 & -0{,}01 & -0{,}18 & 0{,}43 & 0{,}92 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}=$$

$$
= \frac{a}{EF} \begin{Vmatrix} 1{,}94 \\ 8{,}53 \\ 0{,}66 \\ 9{,}32 \\ -6{,}36 \\ -0{,}38 \end{Vmatrix}. \tag{40}
$$

Теперь по известному вектору перемещений находим усилия (формулы (24) и (26)):

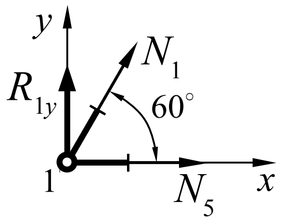
$$
\vec{N} = -\overline{G}^{-1}\left(\overline{S}_0 \overline{S}_c \overline{\alpha}\right)^{\text{т}} \vec{\delta} = -\overline{G}^{-1} \overline{K}_0^{\text{т}} \vec{\delta} =
$$

$$
= -\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}87 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}87 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}87 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}5 & -0{,}87 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1{,}94 \\ 8{,}53 \\ 0{,}66 \\ 9{,}32 \\ -6{,}36 \\ -0{,}38 \end{Vmatrix};
$$

$$
\vec{N} = \begin{Vmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vec{N}_3 \\ \vec{N}_4 \\ \vec{N}_5 \\ \vec{N}_6 \\ \vec{N}_7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3{,}87 \\ 0{,}79 \\ 0{,}68 \\ -0{,}38 \\ -1{,}94 \\ -3{,}69 \\ -0{,}87 \end{Vmatrix}. \tag{41}
$$

Для определения реакций опор можно воспользоваться оставшимися, «выметенными» с помощью матрицы $\overline{S}_0$, уравнениями. Однако в рассматриваемом примере нет смысла составлять новую систему матричных уравнений. При небольшом числе опорных реакций лучше воспользоваться методом вырезания узлов. Следует отметить, что при этом нарушается универсальность алгоритма.

Рассмотрим равновесие узла № 1 (рис. 4).



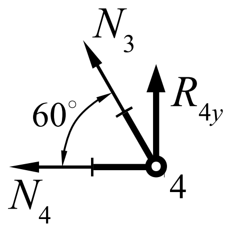
$$\sum X = N_1 \cos 60^0 + N_5 = 0;$$

$$\sum Y = R_{1y} + N_1 \sin 60^0 = 0.$$

Рис. 4

Реакцию опоры R_{1y} находим из второго уравнения с учетом (41):
$R_{1y} = -N_1 \sin 60^0 = -3{,}87 \cdot 0{,}87 \approx -3{,}37.$

Рассмотрим равновесие узла № 4 (рис. 5).



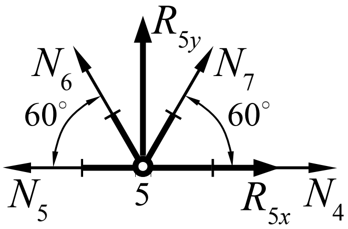
$$\sum X = -N_3 \cos 60^0 - N_4 = 0;$$

$$\sum Y = R_{4y} + N_3 \sin 60^0 = 0.$$

Рис. 5

Реакцию опоры R_{4y} находим также из второго уравнения с учетом (41):
$R_{4y} = -N_3 \sin 60^0 = -0{,}68 \cdot 0{,}87 \approx -0{,}59.$

Рассмотрим равновесие узла № 5 (рис. 6).



$$\sum X = -N_5 + N_4 + R_{5x} - N_6 \cos 60^0 + N_7 \cos 60^0 = 0;$$

$$\sum Y = N_6 \sin 60^0 + R_{5y} + N_7 \sin 60^0 = 0.$$

Рис. 6

Из первого уравнения находим реакцию опоры R_{5x}:
$R_{5x} = N_5 - N_4 + N_6 \cos 60^0 - N_7 \cos 60^0 =$
$= -1{,}94 + 0{,}38 - 3{,}69 \cdot 0{,}5 + 0{,}87 \cdot 0{,}5 \approx -2{,}97$.
Из второго уравнения находим реакцию опоры R_{5y}:
$R_{5y} = -N_6 \sin 60^0 - N_7 \sin 60^0 =$
$= 3{,}69 \cdot 0{,}87 + 0{,}87 \cdot 0{,}87 \approx 3{,}97$.

Для проверки правильности определения опорных реакций используем общие уравнения равновесия системы. Сумма проекций всех внешних сил, приложенных к системе, на ось Ox должна быть равна нулю:

$$\sum X = P + R_{5x} = 0,$$

но, если подставить в это уравнение значения сил, то получим:

$$3 - 2{,}97 = 0{,}03.$$

Относительную погрешность определим по отношению к максимальному из усилий (в данном примере это усилие $N_1 = 3{,}87$):

$$\frac{0{,}03}{3{,}87} \cdot 100\,\% \approx 0{,}78\,\%.$$

Сумма проекций всех внешних сил, приложенных к системе, на ось Oy также должна быть равна нулю:

$$\sum Y = R_{1y} + R_{4y} + R_{5y} = 0.$$

Если подставить в это уравнение значения сил, то получим:

$$-3{,}37 + 3{,}97 - 0{,}59 = 0{,}01.$$

Относительная погрешность:

$$\frac{0{,}01}{3{,}87} \cdot 100\,\% \approx 0{,}26\,\%.$$

В обоих случаях точность очень хорошая.

Таким образом, мы определили усилия в стержнях, опорные реакции и перемещения узлов. Задача полностью решена.

Построим эпюры усилий в стержнях (рис. 7) и покажем перемещения узлов (рис. 8), соблюдая по возможности масштаб.

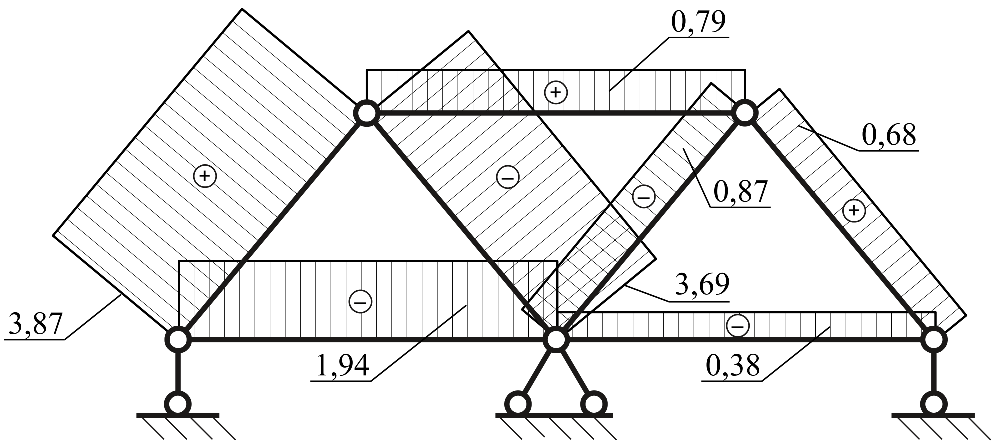


Рис. 7

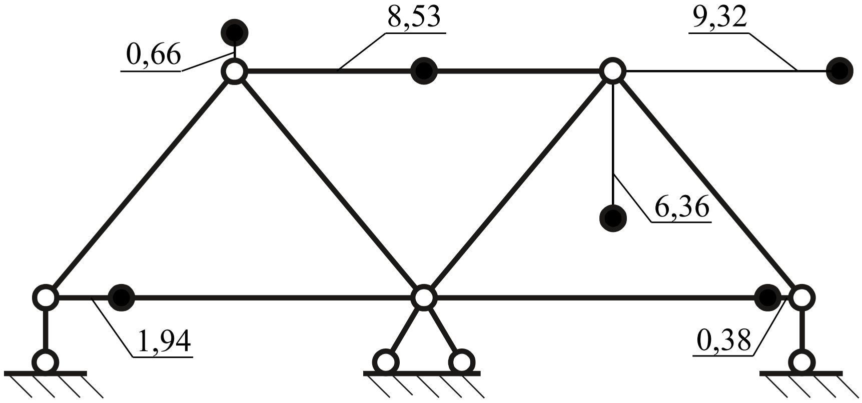


Рис. 8

4. Вопросы для самопроверки

1. Какие фермы называются статически определимыми, а какие – статически неопределимыми?

2. Как узнать степень статической неопределимости фермы?

3. Что такое структурная матрица? Как она составляется?

4. Какие матрицы необходимо составить для решения задачи определения усилий и перемещений в стержневых системах с использованием матричного метода?

5. Для чего вводится «выметающая» матрица?

6. Какой физический смысл имеет основное разрешающее уравнение задачи?

7. Какова связь между матрицей жесткости и матрицей податливости?

8. Должны ли матрицы жесткости и податливости обязательно быть квадратными?

9. Какими методами можно определить опорные реакции фермы?

10. В чем преимущество матричного метода решения по сравнению с другими известными Вам методами расчета ферм?

11. Позволяет ли матричный метод рассчитывать статически неопределимые фермы?

12. Где в конструкции летательных аппаратов могут применяться стержневые системы?

Приложение

Некоторые сведения из алгебры матриц

Матрица – упорядоченная система чисел, расположенных по m строкам и n столбцам:

$$\overline{A}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Если $m=n$, то матрица называется квадратной.

Если $m=1$, то матрица называется матрица-строка. При $n=1$ матрица называется матрица-столбец.

Диагональная матрица – это матрица, у которой только диагональные элементы отличны от нуля. Если эти элементы равны единице, то такая матрица называется единичной и обозначается $\overline{E}$.

Операции с матрицами

1. Равенство матриц:

$$\overline{A}=\overline{B}, \text{ если } a_{ij}=b_{ij}.$$

2. Сумма матриц:

$$\overline{C}=\overline{A}+\overline{B}, \text{ если } c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

3. Разность матриц:

$$\overline{C}=\overline{A}-\overline{B}, \text{ если } c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}.$$

4. Умножение матриц:

$$\overline{C}=\overline{A}\cdot\overline{B}.$$

При этом:

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj},$$

т.е. элемент c_{ij} получается как сумма произведений элементов i-й строки левой матрицы $\overline{A}$ на соответствующие элементы j-го столбца правой матрицы $\overline{B}$.

Умножение матриц возможно, если число столбцов матрицы $\overline{A}$ равно числу строк матрицы $\overline{B}$.

Если размер матрицы $\overline{A}$ – $m \times n$, а матрицы $\overline{B}$ – $l \times k$, то размер матрицы-произведения $\overline{C}$ – $m \times k$, т.е. эта матрица имеет число строк как у матрицы $\overline{A}$, а число столбцов как у матрицы $\overline{B}$.

Известно:

$$\overline{A} \cdot \overline{B} \neq \overline{B} \cdot \overline{A};$$

$$\overline{C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{D} = \left(\overline{A} \cdot \overline{B}\right) \cdot \overline{D} = \overline{A} \cdot \left(\overline{B} \cdot \overline{D}\right).$$

5. Транспонирование матрицы – это замена строк на столбцы и наоборот. Транспонированная матрица обозначается верхним индексом «т»: $\overline{A}^{\text{т}}$. Элементы: $a^{\text{т}}_{i\,j} = a_{j\,i}$.

Известно:

$$\left(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}\right)^{\text{т}} = \overline{D}^{\text{т}} \cdot \overline{C}^{\text{т}} \cdot \overline{B}^{\text{т}} \cdot \overline{A}^{\text{т}}.$$

6. Обращение матриц.

Матрица $\overline{A}^{-1}$ называется обратной по отношению к матрице $\overline{A}$, если:

$$\overline{A} \cdot \overline{A}^{-1} = \overline{A}^{-1} \cdot \overline{A} = \overline{E}.$$

Обращение матрицы можно произвести различными способами, например, с помощью матрицы алгебраических дополнений:

$$\overline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \overline{A}} \cdot \overline{F}^{\text{т}},$$

где $\det \overline{A}$ – определитель матрицы $\overline{A}$;

$\overline{F}^{\text{т}}$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений элементов матрицы $\overline{A}$.

Алгебраическим дополнением элемента $a_{i\,j}$ матрицы $\overline{A}$ называется число

$$f_{i\,j} = (-1)^{i+j} M_{i\,j},$$

где $M_{i\,j}$ – дополнительный минор, определитель матрицы, получающейся из исходной матрицы $\overline{A}$ путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца.

Матрицы $\overline{A}$ и $\overline{A}^{-1}$ обязательно должны быть квадратными.

Известно:

$$\left(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}\right)^{-1} = \overline{D}^{-1} \cdot \overline{C}^{-1} \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{A}^{-1}.$$