

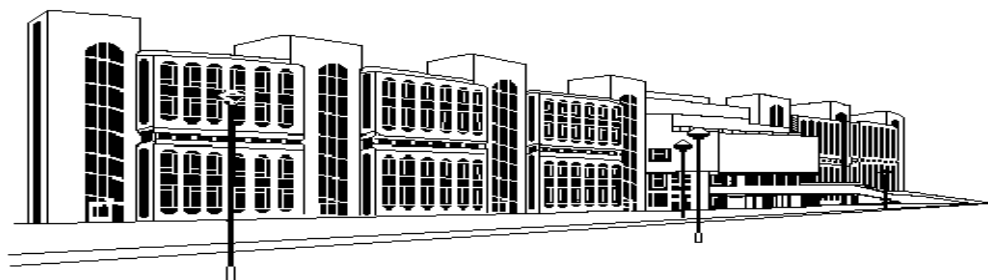


ISSN 2079-0619

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК МГТУ ГА

№ 194



**Москва
2013**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)**

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК МГТУ ГА

№ 194 (8)

Издается с 1998 г.

**Москва
2013**

Научный Вестник МГТУ ГА решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ включен в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

Главная редакция

- Главный редактор** - заслуженный юрист РФ, д-р юрид. наук, д-р техн. наук, проф. Б.П. Елисеев (МГТУ ГА)
- Зам. главного редактора** - д-р техн. наук, проф. В.В. Воробьев (МГТУ ГА)
- Ответственный секретарь главной редакции** - д-р техн. наук, доц. О.Г. Феокистова (МГТУ ГА)
- Члены главной редакции** - почетный работник науки и техники, д-р филос. наук, проф. О.Д. Гаранина (МГТУ ГА);
д-р техн. наук, проф. Л.Н. Елисов (МГТУ ГА);
д-р экон. наук, проф. В.А. Казаков (МГУ им. М.В. Ломоносова);
заслуженный деятель науки РФ,
д-р техн. наук, проф. В.Т. Калугин (МГТУ им. Н.Э. Баумана);
заслуженный деятель науки и техники РФ,
д-р физ.-мат. наук, проф. А.И. Козлов (МГТУ ГА);
д-р техн. наук, проф. В.Л. Кузнецов (МГТУ ГА);
д-р техн. наук, проф. С.В. Кузнецов (МГТУ ГА);
заслуженный деятель науки и техники РФ,
д-р физ.-мат. наук, проф. Д.С. Лукин (МФТИ);
д-р техн. наук, проф. В.В. Соломенцев (НТИЦ «Промтехаэро»);
заслуженный деятель науки РФ, д-р техн. наук,
проф. В.Г. Ципенко (МГТУ ГА);
д-р техн. наук, проф. В.С. Шапкин (ГосНИИ ГА)

Редакционная коллегия выпуска

- Ответственный редактор выпуска** - д-р техн. наук, проф. А.В. Самохин (МГТУ ГА)
- Зам. ответственного редактора** - д-р физ.-мат. наук, проф. И.С. Меньшов (МГТУ ГА)
- Ответственный секретарь** - д-р техн. наук, проф. В.Л. Кузнецов (МГТУ ГА)
- Члены редакционной коллегии** - заслуженный деятель науки и техники РФ,
- д-р физ.-мат. наук, проф. А.И. Козлов (МГТУ ГА);
- д-р физ.-мат. наук, проф. Д.С. Лукин (МФТИ);
- д-р физ.-мат. наук, проф. И.С. Красильщик (НМУ);
- д-р техн. наук, проф. В.В. Воробьев (МГТУ ГА);
- д-р техн. наук, проф. С.К. Камзолов (МГТУ ГА);
- д-р техн. наук, проф. Г.Г. Спирин (МАИ)

E-mail: samohinalexey@gmail.com

тел. +7(495) 459-04-74

ISBN 978-5-86311-892-5

Плата за публикацию в Научном Вестнике МГТУ ГА с аспирантов не взимается

**НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**

№ 194 (8)

2013

СОДЕРЖАНИЕ

Богданов Р.И., Богданов М.Р., Баранов М.А. Дисперсность пробных частиц в слабо-диссипативной КАМ-теории	5
Евсеев А.В. Условия существования минимальной реализации общего вида для отображения вход-выход	13
Кушнер Е.Н. Нормальные формы некоторых уравнений газовой динамики	20
Кушнер Е.Н. Построение разрывных решений дифференциальных уравнений в MAPLE....	24
Климов М.И., Меньшов И.С. Эффективный параллельный расчет задач механики сплошной среды для систем гибридной архитектуры.....	31
Лукацкий А.М. Геометрический подход к получению решений в гидродинамике идеальной жидкости.....	40
Морозов О.И. Представление нулевой кривизны для обобщенного уравнения Рабело.....	44
Пантелеев А.В., Алёшина Е.А. Применение непрерывной модификации метода муравьиных колоний к задаче поиска оптимального управления дискретными детерминированными системами.....	47
Рыбаков К.А. Вероятностный анализ стохастических систем с пуассоновской составляющей.	55
Самохин А.В. Эволюция начальных данных для уравнения Бюргерса с фиксированными значениями на границе	63
Солодов В.В. Гомеоморфизмы прямой.....	71
Стрекаловская Я.И. Имитационное моделирование потока разнохарактерных воздушных целей в условиях одновременного сопровождения.....	74
Стрекаловская Я.И. Выбор оптимального фильтра в случае радиолокационного сопровождения воздушной цели с диверсифицированными параметрами.....	79
Стрельцова И.С. Классификация кривых на плоскости Лобачевского	83
Четвериков В.Н. Субмерсии в категории бесконечно продолженных дифференциальных уравнений.....	88
Четвериков В.Н. Джеты плоских систем с управлением	98
Жулева Л.Д. Один из методов исследования линейной динамической системы с переменными коэффициентами.....	105
Кирдюшкин Ю.С. Потенциал водородного топлива гражданской авиации будущего.....	110

Статьи настоящего Вестника в целом можно разделить на четыре тематические части.

Первая, носящая более теоретико-математический характер, в основном посвящена исследованию аналитических объектов (таких как уравнения и/или многообразия) методами алгебры и геометрии. Сюда входят статья А.М. Лукацкого о геометрическом подходе к получению решений в гидродинамике идеальной жидкости и близкая ей по предмету исследований статья Е.Н. Кушнер о нормальных формах некоторых уравнений газовой динамики, а также работа Р.И. Богданова, М.Р. Богданова, М.А. Баранова о дисперсности пробных частиц в слабо диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера.

Вторую группу составляют исследования геометрических структур дифференциальных уравнений. Это статья О.И. Морозова, в которой изучается представление нулевой кривизны для обобщенного уравнения Рабело, статья В.В. Солодова о гомеоморфизмах прямой, статья А.В. Самохина об эволюции начальных данных для уравнения Бюргерса с фиксированными значениями на границе, а также две статьи В.Н. Четверикова о геометрических структурах систем с управлением. Классической (по предмету и по форме исследования) является работа Л.Д. Жулевой о линейной динамической системе с переменными коэффициентами.

Использование компьютерного моделирования в различных прикладных задачах объединяет в третью группу статьи М.И. Климова и И.С. Меньшова об эффективном параллельном расчете задач механики сплошной среды для систем гибридной архитектуры и ещё две работы: К.А. Рыбакова о вероятностном анализе стохастических систем с пуассоновской составляющей и совместной работе А.В. Пантелева и Е.А. Алёшиной о применении непрерывной модификации метода муравьиных колоний к задаче поиска оптимального управления дискретными детерминированными системами, которые имеют наиболее выраженный физический характер. К этой тематике примыкает и статья Е.Н. Кушнер о построении разрывных решений дифференциальных уравнений в компьютерной среде MAPLE.

Задачи управления (в широком смысле) являются предметом исследования последней группы статей. В двух статьях Я.И. Стрекаловской обсуждаются различные аспекты выбора оптимального фильтра в случае радиолокационного сопровождения воздушной цели с диверсифицированными параметрами, а статья А.В. Евсеева о построении реализаций отображений вход-выход с использованием дифференциальных форм имеет прямое отношение к системам управления.

Ответственный редактор –

*доктор технических наук, профессор
кафедры высшей математики МГТУ ГА*

А.В. Самохин

УДК 517.983+517.55+517.95

ДИСПЕРСНОСТЬ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ В СЛАБО-ДИССИПАТИВНОЙ КАМ-ТЕОРИИ

Р.И. БОГДАНОВ, М.Р. БОГДАНОВ, М.А. БАРАНОВ

Простейший пример слабо-диссипативной КАМ-теории даёт кусочно-линейное движение пробной частицы в окружающей сплошной среде. Через постоянный во времени шаг частица перерассеивается в соответствии с полем потенциальных сил, слабо возмущённых переменного знака силами вязкости. В результате мы получаем дискретное отображение плоскости на себя под названием «Bogdanov-map».

Асимптотически (не) устойчивые периодические движения пробной частицы позволяют оценить массу физических параметров модели. Здесь, отправляясь от работ Ланжевена, мы рассматриваем геометрические размеры движущихся частиц.

Ключевые слова: дисперсность, геометрические размеры пробных частиц, гамильтоновы динамические системы, стохастическая динамика струй.

1. Введение

Неожиданным образом теория колебаний [11; 33-35; 39-45; 47-50; 52-57] пополнилась новым примером.

Традиционно теория малых колебаний исходит из движений в окрестности минимума потенциальной энергии в натуральных гамильтоновых системах [7-9]. Движения являются просто устойчивыми по Ляпунову. Известно, какое количество восхитительных результатов получили специалисты в XIX - XX вв. [40; 43-50; 55-58].

Проблемы квантовой механики потребовали ввести в эту модель простейшие усложнения. В окрестности минимума нужно учесть кубический член в разложении в ряд Тейлора потенциала вдоль оси, где упругая составляющая мала. Это начало нелинейной теории, где мало разработанных методов исследований вплоть до XIX столетия.

Следующим шагом явилось введение релаксационных колебаний Ван-дер-Поля [28; 38; 44]. Он предложил учесть силы вязкости в уравнении движения пробной частицы. К сожалению, исходя из физических соображений коэффициент вязкости был выбран в виде чётной функции от фазовой координаты $(\varepsilon + \mu x^2)$. Большое внимание релаксационным колебаниям уделял наш соотечественник Е.Ф. Мищенко [44].

Следующий шаг в теории колебаний был сделан в XX столетии [7-11; 25], благодаря настойчивости В.И. Арнольда – энтузиаста теории бифуркаций. Очевидный ответ пришёл из теории бифуркаций. Известен пример бифуркации Андронова-Хопфа, описывающий изменение состояния устойчивости в однопараметрическом семействе векторных полей [7; 25]. Очередной вопрос с точки зрения спектральной теории линейных операторов заключался в следующем. Как происходит потеря устойчивости в двухпараметрических семействах векторных полей в случае двух нулевых собственных значений матрицы линейной части векторного поля в особой точке? Ответ даётся бифуркацией Богданов-Такенса [1; 11; 25] и выглядит чрезвычайно просто. Нужно к потенциальным силам, отвечающим ангармоническому потенциалу, добавить силы вязкости. Но коэффициент вязкости, в отличие от предположений Ван-дер-Поля, должен быть линейной, а не квадратной функцией фазовой переменной.

В литературе после 1970-х годов появилось много версий бифуркации Богданов-Такенса. Но нам здесь важна следующая форма [1; 25]

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x(x-1) + (\varepsilon + \mu x) y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2. Переход к дискретной модели

С целью понижения размерности задачи мы перейдем к дискретному варианту динамики (1) [1; 34]. Имея в виду вычислительные средства исследований и физические соображения для понимания результатов наших вычислений, мы дискретизируем систему (1) в простой полуявной схеме Эйлера

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h y_{n+1} \\ y_{n+1} &= y_n + h \dot{y}_n \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где ε, μ - малые параметры [1; 25].

Отображение (2), известное в литературе как «Bogdanov-map», при подходящих значениях ε и μ имеет много асимптотически (не)устойчивых периодических орбит. Наряду с асимптотически (не)устойчивыми по Ляпунову периодическими орбитами имеются в большом количестве гиперболические орбиты или состояния рассеяния ансамбля пробных частиц в квантовой механике.

Физические характеристики гиперболических и асимптотически (не)устойчивых периодических орбит различаются [10-32]. В частности, для асимптотически (не)устойчивых орбит существует понятие абсолютной температуры. Это позволяет получить оценки размеров пробных частиц.

Наличие температуры позволяет нам получить распределение геометрических размеров в зависимости от периодов периодических орбит. В начале наших рассуждений лежат соотношения Ланжевена [42]

$$\overline{\Delta x^2} = \frac{RT}{N} \cdot \frac{1}{3\pi\mu \cdot a} \tau,$$

где $\overline{\Delta x^2}$ - дисперсия фазовой координаты; R - универсальная газовая постоянная; T - температура; N - число Авогадро; μ - коэффициент вязкости; a - размер частицы; τ - время наблюдения частицы. Таким образом, обращая равенство относительно a , мы получаем распределение по найденным периодическим орбитам геометрических размеров a пробных частиц в слабо-диссипативной теории КАМ.

Ниже мы приводим соответствующие иллюстрации.

3. Общность положения предыдущих рассмотрений

В классической теории КАМ [7; 39] рассматриваются гамильтоновы системы в четномерном евклидовом пространстве $R^{2n} \{(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)\}$, где q_i - фазовые координаты, а p_i - сопряженные им импульсы. Гамильтониан $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ представляется в виде

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots, \quad (3)$$

где система с гамильтонианом H_0 вполне интегрируемая (например, $H_0 = \sum p_i^2/2 + (q, Bq)$, где B симметричная положительно определенная матрица [6-9]). Возмущение H_1 выбирается отвечающим случаю общего положения.

Таким образом, в R^{2n} возникает гамильтонова динамическая система следующего вида [7; 25; 44]

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Движение материальной точки в системе происходит на поверхности уровня

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \equiv Const, \quad (5)$$

которая является гиперповерхностью в R^{2n} , т.е. имеет коразмерность один в случае общего положения.

В слабо-диссипативной теории КАМ [2-32] мы разрушаем интеграл (5). Другими словами, мы пишем на H дифференциальное уравнение. Точнее, мы рассматриваем полупрямое произведение гамильтоновой системы (4), являющейся прямым сомножителем, на систему в проекции на H . В окрестности неособого значения H - это эквивалентно рассмотрению динамической системы в проекции на трансверсаль к поверхности уровня гамильтониана (5).

В простейшем содержательном (нетривиальном) случае такое уравнение можно представить в виде

$$\ddot{x} = \varepsilon F(x, \dot{x}, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n), \quad (6)$$

где в неособом случае x координата в ортогональном направлении к поверхности уровня $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = const$.

Осталось заметить, что в окрестности нерезонансного тора вполне интегрируемой системы с гамильтонианом H_0 в уравнении (4) зависимость от $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ можно «убить», т.е. привести систему в R^{2n+1} к прямому произведению [9; 25; 42]. Ниже мы приводим результаты исследования слагаемого (4) в нормальной форме, опустив случай вырождения коразмерности один, т.е. нулевое или чисто мнимое собственное число матрицы линеаризации системы в окрестности инвариантного тора.

4. Компьютерные результаты

Мы приводим результаты расчётов на современных PC-компьютерах, т.е. мы имеем ограничения по точности расчётов, ориентированные на возможности языка программирования Borland Pascal 7.0 под DOS-управлением. Это приводит приблизительно к 17 десятичным знакам мантиссы.

По вертикальной оси мы откладываем размеры частицы. По горизонтальной оси откладываются частоты колебаний пробной частицы. Частоты откладываются на отрезке $[0;1]$, т.е. максимальная частота нормируется на 1.

Отдельно мы приводим асимптотически неустойчивые (рис. 1-3) и устойчивые состояния (рис. 4-6). Здесь важно отметить, что мы используем средний коэффициент трения вдоль периодической орбиты. Ничего удивительного, что эта величина меняет знак для асимптотически устойчивых и неустойчивых орбит. Поэтому устойчивые орбиты лежат ниже горизонтальной оси. По абсолютной величине размеры частиц убывают по мере повышения частоты колебаний.

Отметим также, что по обеим осям используется логарифмическая шкала (отрицательные значения размеров частиц для асимптотически устойчивых орбит взяты по модулю).

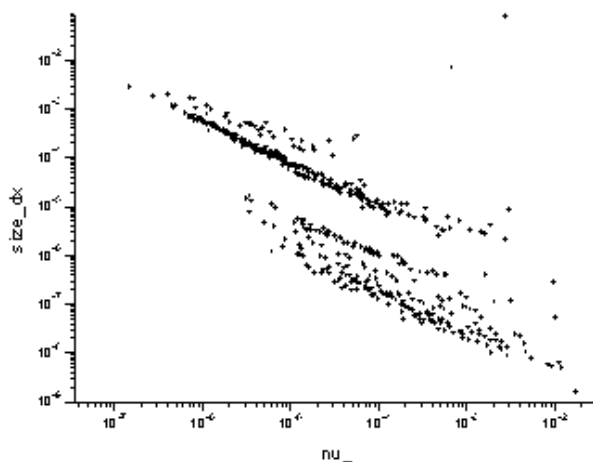


Рис. 1. Зависимость геометрических размеров пробной частицы от частоты колебаний для асимптотически неустойчивых орбит

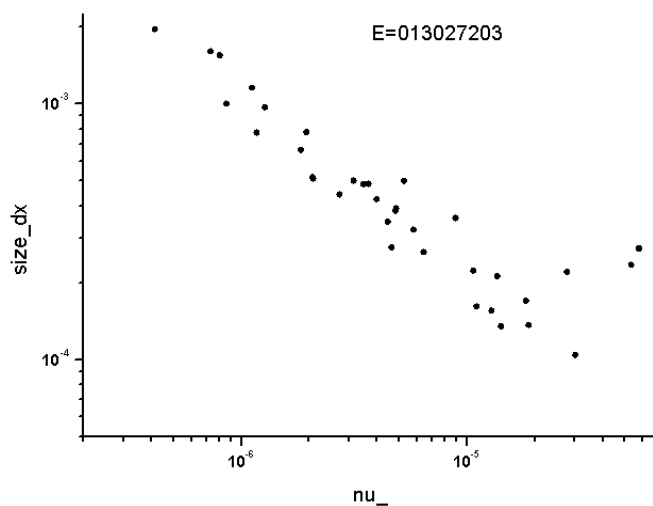


Рис. 2. Зависимость геометрических размеров пробной частицы от частоты колебаний для асимптотически неустойчивых орбит с фиксированной средней энергией ($E \sim 0.13027203$)

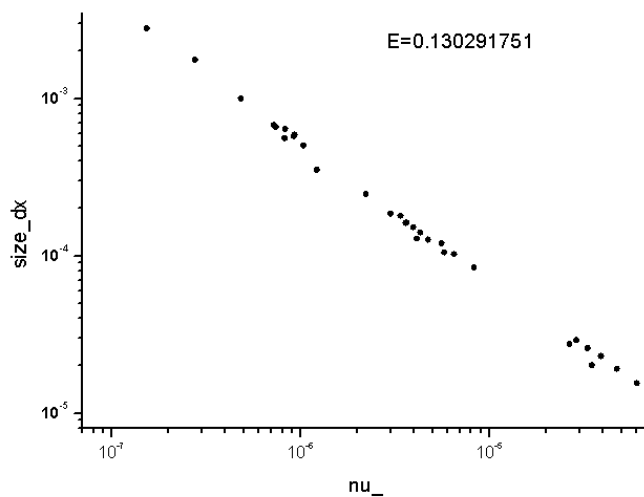


Рис. 3. Зависимость геометрических размеров пробной частицы от частоты колебаний для асимптотически неустойчивых орбит с фиксированной средней энергией ($E \sim 0.130291751$)

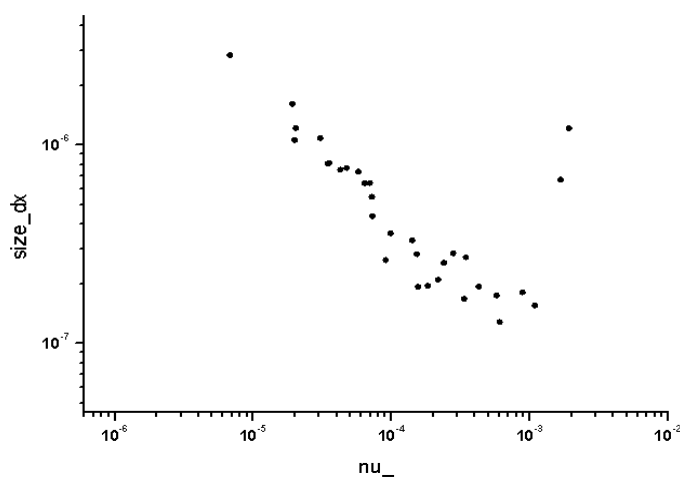


Рис. 4. Зависимость геометрических размеров пробной частицы от частоты колебаний для асимптотически устойчивых орбит

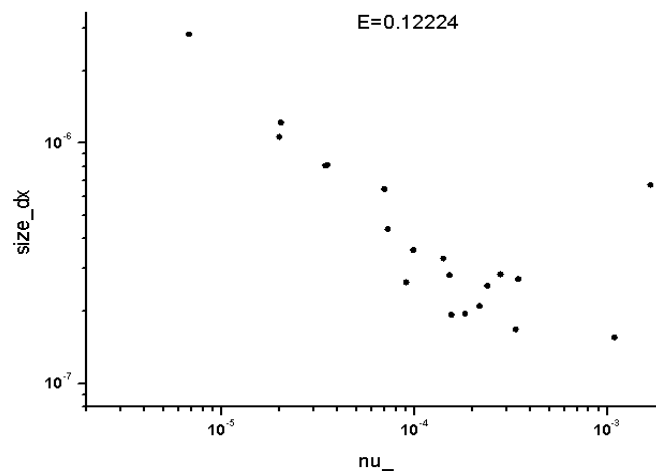


Рис. 5. Зависимость геометрических размеров пробной частицы от частоты колебаний для асимптотически устойчивых орбит с фиксированной средней энергией ($E \sim 0.12224$)

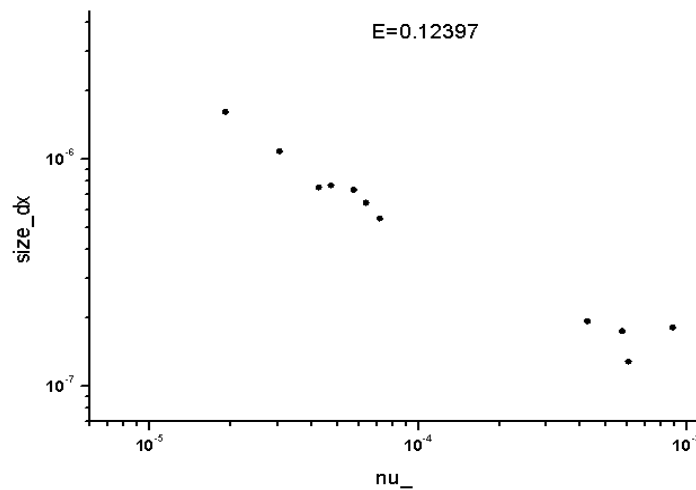


Рис. 6. Зависимость геометрических размеров пробной частицы от частоты колебаний для асимптотически устойчивых орбит с фиксированной средней энергией ($E \sim 0.12397$)

Заключение

Немного существует публикаций о регулярных компонентах хаотической динамики [2-8]. Возможно, всё связано с тем фактом, что развитие теории вероятностей происходило во второй половине XX столетия [9-11; 44-49].

К сожалению, классическая КАМ-теория, восходящая к 50-м годам XX столетия, обнаружила в первую очередь гиперболическое поведение траекторий динамических систем, что отчётливо видно в работе Д.В. Аносова [6]. Странный аттрактор, возникший в 60-е годы, повлёк развитие стохастических методов описания динамики, обоснованной эргодическим поведением динамики [9; 48].

Открытие, к сожалению, численное, большого количества асимптотически (не)устойчивых движений в окрестности гиперболических траекторий позволяет по-новому взглянуть на проблемы хаотической и регулярной динамики.

Такое обилие асимптотически (не)устойчивых движений прекрасным образом согласуется с идеями термодинамики. И можно только удивляться провидению Клаузиуса, сформулировавшего её основы [35].

Оценка дисперсности пробных частиц даёт к предыдущим расчётным величинам, таким как теплопроводность, теплоёмкость, средняя энергия, термодинамические потенциалы, вдобавок важную геометрическую характеристику движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Arrowsmith D.K., Cartwright J.H.E., Lansbury A.N., Place C.M.** The Bogdanov-map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system // International Journal of Bifurcation and Chaos, 1993, v. 3. №4, p. 803-842.
2. **Belotserkovskii O.V.** Turbulence and Instabilities /. M: MZpress, 2003, 460p.
3. Dynamic System and Turbulence, Warwick – 1980. Proceeding. Editing by D. Rand and L.S. Young. Lecture Notes in Math., p. 390.
4. **Bogdanov R.I., Nagornykh S.N. and Bogdanov M.R.** New Nature of the Noise of Thermally Stimulated Electron Emission from Rods under Cyclic Torsion.: Journal of Surface Investigation, X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques, 2007. - С. 157-166.
5. Альбом течений жидкости и газа / пер. с англ. М. Ван Дайка. - М.: Мир, 1986.
6. **Аносов Д.В.** Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. - 1967. - Т. ХС.
7. **Арнольд В.И.** Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978.
8. **Арнольд В.И.** Лекции о бифуркациях и версальных семействах // Успехи математических наук. - 1972. - Т. 27. - № 5. - С. 119-184.
9. **Арнольд В.И., Авец А.** Эргодические проблемы классической механики. - Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999.
10. **Богданов Р.И., Богданов М.Р.** Турбулентность в рамках слабо-диссипативной версии теории КАМ // Анализ и особенности: тезисы докладов междунар. конф., посвященной семидесятилетию Владимира Игоревича Арнольда. - М., 2007. - С. 35-38.
11. **Богданов Р.И.** Нелинейные динамические системы на плоскости и их приложения. - М.: Вузовская книга, 2003.
12. **Богданов Р.И.** Факторизация диффеоморфизмов над фазовыми портретами векторных полей на плоскости // Функциональный анализ и его приложения. - 1997. - Т. 31. - Вып. 2. - С. 67-70.
13. **Богданов Р.И., Богданов М.Р.** Свойства странного аттрактора в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера: труды междунар. конф. «DIFF2008». - Суздаль - Владимир: Владимирский государственный университет, 2008. - С. 54-55.
14. **Богданов Р.И., Богданов М.Р.** Модель дожигания отходов в турбулентном режиме // Экологические проблемы промышленных мегаполисов: материалы междунар. научн.-техн. конф. - Донецк: ДонНТУ Министерство образования и науки Украины, 2008. - С. 53-55.
15. **Богданов Р.И., Богданов М.Р.** Статистики в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера // Дифференциальные уравнения и топология: тезисы докладов междунар. конф., посвященной 100-летию со дня рождения А.С. Понтрягина. - М: Издательский отдел факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, МАКС Пресс, 2008. - С. 100-101.
16. **Богданов Р.И., Богданов М.Р.** Тепловые характеристики струйных течений в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера // Доклады Академии наук. - 2008. - Т. 423. - № 5. - С. 1-4.
17. **Богданов Р.И., Богданов М.Р.** Теплопроводность при транспорте электронного газа: тезисы докладов XXXVIII междунар. конф. по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами / под ред. проф. А.Ф. Тулинова. - М.: Университетская книга, 2008. - С. 36.
18. **Богданов Р.И., Богданов М.Р.** Переход от развитой турбулентности к квазиравновесному состоянию // Научный Вестник МГУ ГА, серия Математика и физика. - 2007. - № 114. - С. 50-55.
19. **Богданов Р.И., Богданов М.Р.** Слабо-диссипативная версия теории Колмогорова-Арнольда-Мозера: теория и практика расчетов // Вычислительная математика и математическая физика. - 2008. - Т. 48. - № 3. - С. 73-90.
20. **Богданов Р.И., Богданов М.Р.** Структурообразование в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера // Доклады Академии наук. - 2008. - Т. 418. - № 6. - С. 754-758.
21. **Богданов Р.И., Богданов М.Р.** Тепловые характеристики транспортных процессов на наноуровне: сб. трудов науч. конф. студентов, магистрантов и аспирантов МГУИЭ. - М: МГУИЭ, 2008. - С. 35-37.
22. **Богданов Р.И., Богданов М.Р.** Термодинамика турбулентности в слабо-диссипативной версии теории КАМ // Энергетические проблемы промышленных мегаполисов: сб. трудов IV междунар. науч.-практич. конф. - М.: МГУ ИЭ.

- 23. Богданов Р.И., Богданов М.Р., Нагорных С.Н.** Механизм разрушения на локальных разогревах при циклическом кручении стержней // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: аннотации докладов. - Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2006. - Т. III. - С. 40.
- 24. Богданов Р.И., Богданов М.Р., Нагорных С.Н.** Новая природа шума термостимулированной электронной эмиссии со стержней при циклическом кручении: тезисы докладов XXXVI междунар. конф. по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. - М.: Изд-во МГУ, 2006.
- 25. Богданов Р.И.** Фазовые портреты динамических систем на плоскости и их инварианты. - М.: Вузовская книга, 2008.
- 26. Богданов Р.И., Богданов М.Р.** Новый механизм микроразрушений твердого тела. Упругость и неупругость: материалы междунар. науч. симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А.А. Ильюшина / под ред. И.А. Кийко, Р.А. Васина, Г.Л. Бровко. - М: ЛЕНАНД, 2006. - С. 295-300.
- 27. Богданов Р.И., Гайдученко И.В., Расторгуев В.А., Тарасов Ю.И.** Спектрометрия в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера // Время, хаос и математические проблемы: труды семинара. - М: Книжный дом Университет, 1999. - С. 203-224.
- 28. Боголюбов Н.Н.** Собрание науч. трудов: в 12 т. Труды семинара: Механика, 1939-1980 / под ред. И.И. Плакида, А.Д. Суханова. - 2006.
- 29. Больцман Л.** Избранные труды. Молекулярно-кинетическая теория газов. Термодинамика. Статистическая механика. Теория излучения. Общие вопросы физики. - М.: Наука, 1984.
- 30. Бор Н.** Избранные научные труды: в 2 т. - М.: Наука. - 1970. - Т. 1. - 1971. - Т. 2.
- 31. Бэкстер Р.** Точно решаемые модели в статистической механике. - М.: Мир, 1985.
- 32. Вишик М.И., Фурсиков А.В.** Математические задачи статистической гидродинамики. - М.: Наука, 1978.
- 33. Генералов М.Б., Нагорных М.Б., Богданов М.Р., Богданов Р.И., Митрофанов А.В.** Механизм микроразрушения в слабодиссипативной КАМ-теории // Механика. Теплофизика. Экология: сб. науч. трудов МГУ ИЭ. - М.: Издательский центр МГУ ИЭ. - 2006. - Вып. 3. - С. 3-38.
- 34. Заславский Г.М.** Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. - М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2010.
- 35. Зоммерфельд А.** Термодинамика и статистическая физика. - М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955.
- 36. Рюэль Д.** Термодинамический формализм. Математические структуры классической равновесной статистической механики. - М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
- 37. Ильюшин А.А.** Механика сплошной среды. - М: Изд-во Московского университета, 1990.
- 38. Капица П.Л.** Физика и техника низких температур: научные труды. - М.: Наука, 1989.
- 39. Колмогоров А.Н.** Математика и механика: избранные труды. - М.: Наука, 1988. - Кн. 1.
- 40. Ландау Л.Д.** Собрание трудов. - М.: Наука, 1969. - Т. 1.
- 41. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Статистическая физика. - М.: Наука, 1964.
- 42. Ланжевэн П.** Избранные труды. - М.: Изд-во АН СССР, 1960.
- 43. Леонтович М.А.** Введение в термодинамику. Статистическая физика. - М.: Наука, 1983.
- 44. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Розов Н.Х., Колесов А.Ю.** Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. - М.: Физматгиз, 2010.
- 45. Планк М.** Термодинамика. Теория излучения и квантовая теория. Теория относительности. Статьи и речи. Избранные труды. - М.: Наука, 1975.
- 46. Роуч П.** Вычислительная гидродинамика / пер. с англ. В.А. Гущина, В.Я. Митниченко / под ред. П.И. Чушкина. - М.: Мир, 1980.
- 47. Седов Л.И.** Механика сплошной среды. - М: Наука, 1973. - Т. 1, 2.
- 48. Синай Я.Г.** Современные проблемы эргодической теории // Современные проблемы математики. - М.: Физматгиз, 1995. - Вып. 31.
- 49. Сухаревский В.В.** Бистабильные состояния в отображении Богданова // Вестник МГУ, серия Математика. Механика. - 2003. - № 5. - С. 3-5.
- 50. Сухаревский В.В.** Оценка температуры и плотности частиц в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера // Вестник МГУ, серия Физика. Астрономия. - 2005. - № 6. - С. 28-29.
- 51. Ферми Э.** Термодинамика. - Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1998.
- 52. Ферми Э.** Научные труды. - М.: Наука, 1972. - Т. II.
- 53. Ферми Э., Паста Дж., Улам С.** Изучение нелинейных задач // Научные труды. - 1972. - Ч. II.
- 54. Фриш У.** Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова / пер. с англ. А.Н. Соболевского / под ред. М.Л. Бланка. - М.: ФАЗИС, 1998. - Т. XIV.
- 55. Хайрер Э., Ваннер Г.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / пер. с англ. - М.: Мир, 1999.
- 56. Чжен П.** Отрывные течения. - М.: Мир, 1973.
- 57. Чжен П.** Управление отрывом потока. - М.: Мир, 1979.

DISPERSITY OF TRIAL PARTICLES IN A WEAKLY DISSIPATIVE KAM THEORY**Bogdanov R.I., Bogdanov M.R., Baranov M.A.**

The simplest example of the weakly dissipative KAM theory gives a piecewise linear motion of a trial particle in the surrounding continuum. Through a constant time step particle rescatter according to the field of potential forces, slightly perturbed variable sign viscous forces. The result is a discrete mapping of the plane onto itself called the «Bogdanov-map».

Asymptotically (in)stable periodic motion of a trial particle can estimate some of the physical parameters of the model. Here, starting from the work of Langevin, we consider the geometrical sizes of the moving particles.

Key words: dispersion, geometrical sizes of a trial particles, Hamiltonian dynamical systems, stochastic dynamics of the jets.

Сведения об авторах

Богданов Рифкат Ибрагимович, 1950 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1972), доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института ядерной физики им. Д.В. Скобельцына МГУ им. М.В. Ломоносова, заведующий кафедрой высшей математики МГМУ (МАМИ), автор более 200 научных работ, область научных интересов – нелинейные уравнения математической физики, теория бифуркаций динамических систем.

Богданов Михаил Рифкатович, 1984 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (2006), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МГМУ (МАМИ), автор более 50 научных работ, область научных интересов – нелинейные уравнения математической физики, теория бифуркаций динамических систем.

Баранов Максим Александрович, 1988 г.р., окончил МГУИЭ (2010), аспирант МГМУ (МАМИ), автор 2 научных работ, область научных интересов – нелинейные уравнения математической физики, теория бифуркаций динамических систем.

УДК 517.935.4

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ОБЩЕГО ВИДА ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЯ ВХОД-ВЫХОД

А.В. ЕВСЕЕВ¹**Статья представлена доктором технических наук, профессором Самохиным А.В.**

Рассматривается задача перехода от описания динамической системы с помощью системы уравнений отображения вход-выход к системе в переменных состояния. Решается задача перехода с уменьшением порядка производных управлений и понижением порядка системы уравнений за счёт исключения первых интегралов. Доказана теорема о достаточных условиях существования требуемой системы в переменных состояния и приведён алгоритм её построения.

Ключевые слова: описания систем с управлением, реализации отображений вход-выход, первые интегралы системы с управлением, минимальные реализации.

1. Введение

Существуют два распространённых способа описания системы с управлением: в виде уравнений отображения вход-выход и с помощью переменных состояния.

В первом случае выход ($y \in R^p$) непосредственно связывается с входом ($u \in R^m$) при помощи дифференциальных уравнений

$$y_i^{(k_i)} = \phi_i(t, y_1, \dots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, \dots, y_p^{(k_p-1)}, u_1, \dots, u_1^{(s_1)}, u_2, \dots, u_m^{(s_m)}), \quad i = \overline{1, p}. \quad (1)$$

Уравнения системы (1) называют *уравнениями отображения вход - выход*.

Второе описание, кроме переменных входа и выхода, использует дополнительные переменные $x = (x_1, \dots, x_n)$, которые называют *переменными состояния*. Вход u изменяет состояние x системы в соответствии с системой

$$\dot{x} = f(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r_0)}), \quad x \in R^n, u \in R^m, \quad (2)$$

которую называют *системой уравнений состояния*. При этом выход явно выражается через переменные состояния, управления (входа) и их производные до некоторого порядка \tilde{r}

$$y = h(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\tilde{r})}), \quad y \in R^p. \quad (3)$$

Выражения (3) определяют замену переменных, позволяющую перейти от описания (2)- (3) к описанию (1). *Задача реализации* - это задача перехода от описания (1) к эквивалентному описанию (2) - (3), т.е. поиск системы (2) - (3) и таких функций

$$x = X(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k_0-1)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\tilde{s})}), \quad (4)$$

что при подстановке выражений (3) в систему (1) с учётом (2) и при подстановке (4) в систему (2) - (3) при условии (1) получаются верные тождества.

2. Проблема уменьшения размерности системы

Иногда удастся понизить не только порядок производных управления, но и размерность пространства состояний системы (2). Это можно сделать в случае, когда система (1) имеет первые интегралы.

Функцию $g(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(q)})$ называют *первым интегралом системы* (1), если производная этой функции в силу системы (1) тождественно равна нулю.

Система (1) и ее реализация (2) определяют выход по входу при условии задания начальных значений выхода и переменных состояния соответственно. Обычно система (1) и ее реали-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.В37.21.0370), гранта НШ-3659.2012.1 ведущих научных школ и РФФИ, 11-01-00733, 12-07-00267, 13-07-00736.

зация (2) рассматриваются в окрестности какого-либо решения. В этом случае начальные значения выхода и переменных состояния определяются этим решением (в линейном случае - это нулевое решение).

Рассмотрим отображение вход - выход, заданное системой (1) и начальными условиями

$$y_\alpha^{(l)}(t_0) = y_{\alpha,0}^{(l)}, u_\beta^{(j)}(t_0) = u_{\beta,0}^{(j)}, \quad \alpha = \overline{1, p}, l = \overline{0, k_\alpha - 1}, \beta = \overline{1, m}, j = \overline{0, s_\beta - 1}. \quad (5)$$

Пусть система (1) имеет некоторый набор первых интегралов g_1, \dots, g_ρ . Можно показать, что g_1, \dots, g_ρ выражаются через дифференциалы функций $X_i, i = \overline{1, n}$, поэтому в качестве части новых переменных состояния можно выбрать первые интегралы, и тогда в этих переменных часть уравнений системы (2) будет иметь вид

$$\dot{g}_i = 0. \quad (6)$$

Это позволит исключить данные уравнения из системы, заменив значения переменных g_i соответствующими значениями первых интегралов согласно заданным начальным условиям.

Система вида (2), (3), не имеющая первых интегралов и задающая с учётом начальных условий на переменные $x, u, \dot{u}, \dots, u^{(s-1)}$ то же отображение вход-выход, что и исходная система (1) с начальными условиями (5), называется *минимальной реализацией* системы (1).

В работе [2] предложен алгоритм построения минимальной реализации, уравнения (2) которой не содержат производных управлений в правой части, т.е. $r_0 = 0$. В этой статье решается задача построения минимальной реализации с правой частью общего вида

$$\dot{x} = f(t, x, u_1, \dots, u_1^{(s_1-r_1)}, u_2, \dots, u_m^{(s_m-r_m)}), \quad 0 \leq r_i \leq s_i. \quad (7)$$

3. Известные результаты

В [1] введены следующие обозначения.

Пусть F - кольцо гладких функций, каждая из которых зависит от t , переменных y, u и некоторого конечного (но произвольного) числа их производных. Рассмотрим следующий модуль 1-форм над кольцом F

$$H_1 = \text{span}_F \{ dt, dy_1, d\dot{y}_1, \dots, dy_1^{(k_1-1)}, dy_2, d\dot{y}_2, \dots, dy_p^{(k_p-1)}, du_1, \dots, du_1^{(s-1)}, du_2, \dots, du_m^{(s-1)} \},$$

где $s = \max_{i=1, \dots, m} s_i$. Для 1-формы $\omega \in H_1$ обозначим через $\dot{\omega}$ производную в силу системы (1).

Определим по индукции

$$H_{j+1} = \{ \omega \in H_j : \dot{\omega} \in H_j \}, \quad j \geq 1. \quad (8)$$

Можно показать [1], что H_j есть модуль над F и $dt \in H_j$ для всех $j \geq 1$.

Пусть $k^* = s + \sum_{i=1}^p k_i + 2$. Пространство с координатами

$$t, y_1, \dots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, \dots, y_p^{(k_p-1)}, u_1, \dots, u_1^{(k^*+s-1)}, u_2, \dots, u_m^{(k^*+s-1)} \quad (9)$$

обозначим через E . Согласно лемме 1 из [2], для любого $j = \overline{1, k^*+1}$ базис модуля H_j можно выбрать из 1-форм, зависящих только от координат на E .

Точку $\theta \in E$ будем называть *H -регулярной*, если в некоторой окрестности этой точки для любого $j = s+1, k^*+1$ модуль H_j имеет постоянную размерность. При этом будем говорить, что система (1) обладает свойством *H -регулярности* в точке θ .

Следующая теорема позволяет вычислять первые интегралы.

Теорема 1. В окрестности H -регулярной точки

а) существует такое натуральное $j^* \leq k^* = s + \sum_{i=1}^p k_i + 2$, что $H_{j^*+1} = H_{j^*}$;

б) $H_{j^*} = \text{span}_F \{ dt, dg_1, \dots, dg_\rho \}$, где g_1, \dots, g_ρ - максимальный набор функционально независимых первых интегралов системы (1) [2].

Сформулируем условия существования реализации вида (7), (3), полученные в [3]. Введём новые выходы z_i и управления v_i согласно следующему правилу

$$v_i = u_i^{(s_i - r_i)}, \quad (10)$$

$$\text{при } s_i - r_i > 0, \text{ полагаем } z_i = u_i, \quad (11)$$

при $s_i - r_i = 0$ выход z_i не вводится.

Система (1) переписывается в виде

$$y_i^{(k_i)} = \phi_i(t, y_1, \dots, y_p^{(k_p - 1)}, z_1, \dots, z_m^{(s_m - r_m - 1)}, v_1, \dots, v_1^{(r_1)}, v_2, \dots, v_m^{(r_m)}), \quad i = \overline{1, p}, \quad (12)$$

$$z_i^{(s_i - r_i)} = v_i, \quad \text{при } s_i - r_i > 0, i = \overline{1, m}. \quad (13)$$

Обозначим через R старший порядок производной управления в системе (12)

$$R = \max_{i=1, m} r_i. \quad (14)$$

Тогда систему (12) можно переписать в виде

$$y_i^{(k_i)} = \phi_i(t, y_1, \dots, y_p^{(k_p - 1)}, z_1, \dots, z_m^{(s_m - r_m - 1)}, v_1, \dots, v_1^{(R)}, v_2, \dots, v_m^{(R)}), \quad i = \overline{1, p}. \quad (15)$$

Теорема 2. Реализация вида (7), (3) локально существует для уравнений (1) отображения вход-выход тогда и только тогда, когда для системы (15), (13) модуль H_{R+1} имеет базис из точных 1-форм [3].

4. Минимальные реализации общего вида

Пусть существует реализация вида (7), (3). Тогда минимальная реализация системы (1) с начальными условиями (5) может быть построена с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм построения минимальной реализации общего вида

1. Для системы (1) вводим новые выходы z_i и делаем замену переменных (10), (11). Система (1) принимает вид (15), (13).

2. Согласно теореме 1, вычисляя базисы модулей H_1, \dots, H_{j^*} , находим для системы (1) максимальный набор функционально независимых первых интегралов \tilde{g}_i , $i = \overline{1, rho}$. Сделав замену (10), (11), получим максимальный набор функционально независимых первых интегралов g_i , $i = \overline{1, \rho}$, для системы (15), (13).

3. Так как реализация вида (7), (3) существует, то, согласно теореме 2, для системы (15), (13) модуль H_{R+1} имеет базис из точных 1-форм вида

$$dt, d\xi_1, \dots, d\xi_n, dz_1, \dots, dz_1^{(s_1 - r_1 - 1)}, dz_2, \dots, dz_m^{(s_m - r_m - 1)}, \quad (16)$$

где dz_i и их производные входят при $s_i - r_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, а $n = \sum_{i=1}^p k_i$. Согласно теореме 1 имеем $dg_i \in H_{j^*} \subset H_{R+1}$, следовательно, в окрестности рассматриваемой точки существует представление

$$dg = Ad\xi + Bdz, \quad (17)$$

где dg - столбец 1-форм dt, dg_1, \dots, dg_ρ , $d\xi$ - столбец 1-форм $dt, d\xi_1, \dots, d\xi_n$, dz - столбец 1-форм $dz_1, \dots, dz_m^{(s_m - r_m - 1)}$, а A, B - матрицы функций. Выбираем в матрице A базисный минор, а переменные, соответствующие небазисным столбцам, обозначаем через x_1, \dots, x_μ , где $\mu = n - \rho$. Заменив в (16) 1-формы $d\xi_i$, соответствующие базисным столбцам, на 1-формы dg_j , $j = \overline{1, \rho}$,

получим базис модуля H_{R+1} следующего вида

$$dt, dg_1, \dots, dg_p, dx_1, \dots, dx_\mu, dz_1, \dots, dz_1^{(s_1-r_1-1)}, dz_2, \dots, dz_m^{(s_m-r_m-1)}, \quad (18)$$

где dz_i и их производные входят только при $s_i - r_i > 0$, $i = \overline{1, m}$.

4. Находим систему вида (7), (3), которой удовлетворяют функции x_1, \dots, x_μ . Для этого производные в силу системы (15), (13) этих функций и переменные y_1, \dots, y_p выражаются через t, x, g , а также через v, z и их производные, а затем v и z заменяются на u согласно (10), (11). После этого в полученных выражениях переменные g_1, \dots, g_p заменяются на значения соответствующих первых интегралов согласно начальным условиям.

5. Если построенная система вида (7) не обладает первыми интегралами, то в совокупности с выражениями (3) и начальными условиями она представляет собой искомую минимальную реализацию. Если же построенная система имеет первые интегралы, то шаги 4–18 повторяются для полученной системы. Данную систему можно рассматривать как частный случай системы (1), при этом $p = \mu$, $y = x$, $k_j = 1$ для $j = \overline{1, \mu}$, $\phi = f$, и для вычисления её первых интегралов можно применить теорему 1. Шаги 4–18 могут повторяться только конечное число раз, так как каждое повторение уменьшает порядок системы.

Дадим теоретическое обоснование алгоритма, т.е. покажем, что каждый шаг алгоритма реализуем и результатом применения алгоритма является минимальная реализация системы.

Теорема 3. Пусть в окрестности H -регулярной точки $\theta \in E$ уравнения (1) отображения вход-выход имеют реализацию вида (7), (3). Пусть, кроме того, системы вида (7), которые получаются в процессе применения приведённого алгоритма, обладают свойством H -регулярности в точках, соответствующих θ . Тогда в некоторой окрестности точки θ каждый шаг приведённого алгоритма осуществим и результатом его применения является минимальная реализация системы (1) с заданными начальными условиями.

Доказательство. Замену переменных (10), (11) можно сделать во всех случаях, поэтому шаг 4 осуществим.

Отметим, что первые интегралы системы (1) не могут зависеть от производных управлений u_i выше порядка s_i для $i = \overline{1, m}$, так как в противном случае производная первого интеграла будет зависеть от производной некоторого управления u_i порядка $s_i + 1$ или выше, что противоречит равенству нулю производной первого интеграла. Также если $\tilde{g}(t, y_1, \dots, y_p^{(k_p-1)}, u_1, \dots, u_1^{(s_1)}, u_2, \dots, u_m^{(s_m)})$ - первый интеграл системы (1), то $g = \tilde{g}(t, y_1, \dots, y_p^{(k_p-1)}, v_1, \dots, v_1^{(r_1)}, z_1, \dots, z_1^{(s_1-r_1-1)}, v_2, \dots, z_m^{(s_m-r_m-1)})$ - первый интеграл системы (15), (13). Верно и обратное. Следовательно, первым интегралам системы (1) можно поставить во взаимно однозначное соответствие первые интегралы системы (15), (13). Следовательно, шаг 4 осуществим.

Модуль H_{R+1} имеет базис из точных 1-форм. Также из доказательства упомянутой теоремы известно, что в качестве базиса H_{R+1} можно выбрать набор 1-форм вида (18). Из утверждения б) теоремы 1 следует, что для системы (1) в окрестности точки θ модуль H_{j^*} имеет базис вида $\{dt, d\tilde{g}_1, \dots, d\tilde{g}_p\}$, где $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_p$ - максимальный набор функционально независимых первых интегралов системы (1). Так как первым интегралам \tilde{g}_i системы (1) соответствуют первые интегралы g_i системы (15), (13) (это показано в пункте 4 алгоритма), а дополнительные первые интегралы в результате замены (10), (11) не появляются, то согласно теореме 1 для системы (15), (13) модуль CH_{j^*} имеет базис $\{dt, dg_1, \dots, dg_p\}$. Из того, что $j^* \geq R+1$ и $H_i \subset H_j$ при $i \geq j$, следует,

что $H_{j^*} \subset H_{R+1}$, а значит, выполняется (17). Ранг блочной матрицы $(A|B)$ в окрестности точки θ максимален и равен $\rho+1$, так как 1-формы dt, dg_1, \dots, dg_ρ линейно независимы. Докажем, что ранг матрицы A также максимален и равен $\rho+1$, а для этого покажем, что столбцы матрицы B являются линейными комбинациями столбцов матрицы A .

Так как модуль H_{R+1} имеет базис из точных 1-форм (16), то, согласно теореме 2, система (15), (13) эквивалентна системе, в которую входят уравнения (13) и

$$\dot{\xi}_i = \tilde{f}(t, \xi, z, \dots, z^{(s-r-1)}, v), \quad (19)$$

где ξ, z, v - векторы переменных ξ_i, z_j и v_k соответственно форм $dz_i^{(j)}$. Рассмотрим векторное поле D , представляющее собой оператор дифференцирования в силу системы (19), (13)

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{s_i-r_i-2} z_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial z_i^{(j)}} + \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial z_i^{(s_i-r_i-1)}} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} v_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}. \quad (20)$$

Отметим, что для любого первого интеграла g системы (19), (13) верно, что

$$D(g) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v_k}(g) = 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (21)$$

Фиксируем $k = \overline{1, m}$. Используя индукцию по j , докажем, что при $j = \overline{1, s_k - r_k}$ верны равенства

$$\text{ad}_D^j \frac{\partial}{\partial v_k} = (-1)^j \left(\sum_{i=1}^n C_{ji}^k \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \frac{\partial}{\partial z_k^{(s_k-r_k-j)}} \right), \quad (22)$$

$$\text{ad}_D^j \frac{\partial}{\partial v_k}(g) = 0. \quad (23)$$

Для $j=1$ имеем

$$\text{ad}_D \frac{\partial}{\partial v_k} = [D, \frac{\partial}{\partial v_k}] = - \left(\sum_{i=1}^n C_{1i}^k \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \frac{\partial}{\partial z_k^{(s_k-r_k-1)}} \right), \quad (24)$$

где $C_{1i}^k = \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial v_k}$. Из (21) следует, что $(\text{ad}_D \frac{\partial}{\partial v_k})(g) = 0$.

Пусть для некоторого $j \leq s_k - r_k$ верны равенства (22), (23). Для случая $j+1$ (при условии, что $j+1 \leq s_k - r_k$) имеем

$$\text{ad}_D^{j+1} = [D, \text{ad}_D^j] = (-1)^{j+1} \left(\sum_{i=1}^n C_{j+1,i}^k \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \frac{\partial}{\partial z_k^{(s_k-r_k-(j+1))}} \right), \quad (25)$$

где $C_{j+1,i}^k = -D(C_{ji}^k) + \sum_{l=1}^n C_{jl}^k \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \xi_l} + \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial z_k^{(s_k-r_k-j)}}$. Также $(\text{ad}_D^{j+1} \frac{\partial}{\partial v_k})(g) = [D, \text{ad}_D^j \frac{\partial}{\partial v_k}](g) = 0$. Следовательно, формулы (22), (23) верны для любых $k = \overline{1, m}, j = \overline{1, s_k - r_k}$.

Из выражений (22) и (23) следует, что

$$\frac{\partial g}{\partial z_k^{(s_k-r_k-j)}} = - \sum_{i=1}^n C_{ji}^k \frac{\partial g}{\partial \xi_i}, \quad k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, s_k - r_k}. \quad (26)$$

Учитывая, что матрицы A и B из (17) - это матрицы Якоби векторной функции g по части переменных ξ и z соответственно, из равенства (26) получаем, что столбцы матрицы B являются линейными комбинациями столбцов матрицы A . Следовательно, $\text{rank} A \geq \text{rank} B$, а это означает, что $\text{rank} A = \rho+1$ в окрестности точки θ .

Выберем в матрице A некоторый базисный минор в точке θ . Обозначим через x_1, \dots, x_μ те функции набора t, ξ_1, \dots, ξ_n , которые соответствуют небазисным столбцам. Тогда 1-формы

$dt, dg_1, \dots, dg_\rho, dx_1, \dots, dx_\mu, dz_1, \dots, dz_1^{(s_1-r_1-1)}, dz_2, \dots, dz_m^{(s_m-r_m-1)}$ линейно независимы в окрестности точки θ и представляют собой базис модуля H_{R+1} . Следовательно, шаг 4 алгоритма также разрешим.

Из доказательства теоремы 2 следует, что в качестве компонент векторной функции (4) можно взять функции $g_1, \dots, g_\rho, x_1, \dots, x_\mu$, дифференциалы которых согласно шагу 4 вместе с другими 1-формами образуют базис модуля H_{R+1} . Так как g_1, \dots, g_ρ - первые интегралы, то часть уравнений системы примет вид (6). Согласно теореме 2 можно сделать замену, обратную к (10), (11). После замены оставшиеся уравнения системы примут вид

$$\dot{x}_i = f_i(t, g, x, u_1, \dots, u_1^{(s_1-r_1)}, u_2, \dots, u_m^{(s_m-r_m)}), \quad i = \overline{1, \mu}. \quad (27)$$

Компоненты векторной функции X в (4) не могут зависеть от производных порядка выше $s_i - 1$ для каждого из управлений u_i , $i = \overline{1, m}$, так как иначе правая часть уравнений (27) зависела бы для некоторого управления u_j от его производной порядка выше s_j . Следовательно, начальные условия (5) также можно преобразовать согласно (4), в результате получим

$$g_j(t_0) = g_{j,0}, \quad x_i(t_0) = x_{i,0}, \quad u_\beta^{(l)}(t_0) = u_{\beta,0}^{(l)}, \quad j = \overline{1, \rho}, i = \overline{1, \mu}, \beta = \overline{1, m}, l = \overline{0, s_\beta - 1}. \quad (28)$$

Из уравнений (6) следует, что функции g_1, \dots, g_ρ постоянны вдоль каждого решения системы (1). Поэтому на всех решениях системы (1) функции g_1, \dots, g_ρ принимают постоянные значения, соответствующие начальным условиям. А значит, для описания всех таких решений достаточно рассмотреть систему, которая получается из системы (27) заменой g_1, \dots, g_ρ на их значения в точке θ . Следовательно, шаг 18 также разрешим.

Так как система (6), (27) является реализацией системы (1), то она ей эквивалентна. А значит, полученная система задаёт с учётом начальных условий то же отображение вход-выход, что и система (1). Поэтому если система (27) с постоянными g не имеет первых интегралов, то она в совокупности с выражениями (3) и начальными условиями (28) является минимальной реализацией.

Если система (27) с постоянными g_i имеет первые интегралы, то она в совокупности с выражениями (3) представляет собой реализацию требуемого вида, а значит, условия теоремы выполняются и для этой системы. Следовательно, шаги 4-18 могут быть повторены. Теорема доказана.

5. Замечание

Если удаётся найти базисы из точных 1-форм для модулей H_{R+1} и H_{j^*} , то представленные результаты позволяют вычислить минимальную реализацию в явном виде. В противном случае удаётся только доказать существование минимальной реализации и указать её порядок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Преобразования описаний нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. - 2009. - Т. 45. - № 5. - С. 706-715.
2. Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Минимальные реализации нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. - 2010. - Т. 46, 11. - С. 1612-1622.
3. Евсеев А.В. Построение реализаций отображений вход-выход с использованием дифференциальных форм // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. - 2013.

CONDITIONS OF EXISTENCE OF GENERAL MINIMAL REALIZATION FOR INPUT-OUTPUT MAP

Evseev A.V.

Problem of transformation of dynamical system description from input-output map to state-space equations is considered. Problem of reduction of orders of controls derivatives with reduction of system order at the expense of first integrals is examined. Theorem about the sufficient conditions of objective system existence is proved. The algorithm of transformation is adduced.

Key words: control systems descriptions, input-output maps realizations, first integrals of control systems, minimal realizations.

Сведения об авторе

Евсеев Артём Владимирович, 1987 г.р., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана (2010), аспирант кафедры математического моделирования МГТУ им. Н.Э. Баумана, автор 4 научных работ, область научных интересов - преобразования описаний динамических систем, реализации нелинейных динамических систем, геометрическая теория управления.

УДК 514.763.85

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Е.Н. КУШНЕР¹**Статья представлена доктором технических наук, профессором Самохиным А.В.**

В работе приводятся нормальные формы двух уравнений одномерной газовой динамики: уравнения многокомпонентной газовой смеси и уравнения нестационарного газового потока. Эти формы получены путем симплектических преобразований соответствующих дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: симплектическая структура, симплектические преобразования, дифференциальные формы, уравнения Монжа-Ампера.

1. Симплектическая геометрия дифференциальных уравнений второго порядка

Предлагаемый подход к уравнениям газовой динамики основан на геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений [3; 8; 9].

Уравнения газовой динамики, рассматриваемые в данной работе, представляют собой частные случаи симплектических уравнений Монжа-Ампера [7]. Этот класс уравнений замкнут относительно симплектических преобразований и содержит квазилинейные уравнения.

Классические симплектические уравнения Монжа-Ампера имеют следующий вид

$$Av_{xx} + 2Bv_{xy} + Cv_{yy} + D(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0, \quad (1)$$

где A, B, C, D и E — функции от независимых переменных x, y и первых производных v_x, v_y неизвестной функции $v = v(x, y)$. Далее мы полагаем, что эти функции гладкие, т.е. принадлежат классу C^∞ .

В 1978 г. В.В. Лычагин [4] предложил геометрическое описание широкого класса дифференциальных уравнений второго порядка на гладких многообразиях. Если размерность многообразия равна двум, то этот класс совпадает с классом уравнений Монжа-Ампера (1).

В этом разделе опишем основные идеи Лычагина применительно к симплектическим уравнениям [5].

Пусть M - двумерное гладкое многообразие;

$$\pi : T^*M \rightarrow M$$

- кокасательное расслоение;

$$\Omega = dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2$$

- симплектическая структура на T^*M . Здесь q_1, q_2, p_1, p_2 - канонические координаты на T^*M .

С уравнениями Монжа-Ампера (1) свяжем дифференциальные 2-формы вида

$$\begin{aligned} \omega = & Edq_1 \wedge dq_2 + B(dq_1 \wedge dp_1 - dq_2 \wedge dp_2) + \\ & + Cdq_1 \wedge dp_2 - Adq_2 \wedge dp_1 + Ddp_1 \wedge dp_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Такие 2-формы называются *эффективными*.

Отметим, что произвольная дифференциальная 2-форма ω на T^*M является эффективной тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \Omega = 0$. Поэтому при симплектических преобразованиях класс эффективных дифференциальных 2-форм сохраняется.

Пусть ω - эффективная дифференциальная 2-форма.

¹ Работа выполнена при поддержке научного гранта МГТУ ГА 2011 г.

Дифференциальный оператор Δ_ω , определенный формулой

$$\Delta_\omega(v) = (dv)^*(\omega),$$

называется *оператором Монжа-Ампера*.

Здесь d - оператор внешнего дифференцирования и $dv : M \rightarrow T^*M$ - сечение, ассоциированное с функцией $v \in C^\infty(M)$.

Функция $\text{Pf}(\omega) \in C^\infty(T^*M)$, определяемая равенством

$$\text{Pf}(\omega)\Omega \wedge \Omega = \omega \wedge \omega,$$

называется *пфаффианом* дифференциальной 2-формы ω .

Уравнение

$$E_\omega = \{ \Delta_\omega(v) = 0 \}$$

называется *гиперболическим, параболическим или эллиптическим* в точке $a \in T^*M$, если пфаффиан отрицательный, нулевой или положительный в этой точке.

Уравнение E_ω *гиперболическое, параболическое или эллиптическое* в некоторой области, если оно таково во всех точках этой области.

Представление уравнений типа Монжа-Ампера в виде дифференциальных 2-форм очень удобно при преобразованиях уравнений. В следующих разделах мы используем это для упрощения уравнений газовой динамики.

Предлагаемый подход применялся ранее нами к другим уравнениям [1].

2. Поток многокомпонентной газовой смеси

Уравнение, описывающее околосзвуковой поток многокомпонентной газовой смеси, представляет собой обобщение уравнения Кармана и имеет вид [2]

$$(bv_x + a)v_{xx} - c^2v_{yy} + kv_x = 0. \quad (3)$$

Здесь a, b, c, k - некоторые постоянные, причем a, b, c не равны нулю.

На гиперповерхности

$$\left\{ p_1 = -\frac{a}{b} \right\} \subset T^*M$$

уравнение меняет тип, что отвечает переходу скорости потока через звуковой барьер.

Если $k = 0$, то это уравнение в окрестности точки, лежащей на гиперповерхности смены типа уравнения, заменой переменных может быть сведено к уравнению Трикоми [6]

$$v_{xx} + xv_{yy} = 0. \quad (4)$$

Далее мы будем рассматривать случай $k \neq 0$.

Без ограничения общности можно считать, что $b = 1$, так как в силу того, что $b \neq 0$, обе части уравнения (3) можно разделить на b . Поэтому вместо уравнения (3) далее мы будем рассматривать уравнение

$$(v_x + a)v_{xx} - c^2v_{yy} + kv_x = 0.$$

Эффективная 2-форма, отвечающая этому уравнению, имеет вид

$$\omega = -(bp_1 + a)dq_2 \wedge dp_1 - c^2dq_1 \wedge dp_2 + kp_1dq_1 \wedge dq_2.$$

Диффеоморфизм

$$\varphi : (q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto (-c^{-2}q_1, c^{-4}q_2, -c^2p_1, c^4p_2 + akc^2q_2)$$

является симплектическим и переводит эффективную дифференциальную 2-форму ω в эффективную 2-форму

$$\theta = \lambda p_1dq_1 \wedge dq_2 + dq_1 \wedge dp_2 - p_1dq_2 \wedge dp_1,$$

где $\lambda = ck^4$.

Форме θ соответствует дифференциальное уравнение

$$v_x v_{xx} + v_{yy} + \lambda v_x = 0. \quad (5)$$

Таким образом, мы построили замену переменных, переводящую уравнение (3) в более простое уравнение (5). Заметим, что последнее уравнение, в отличие от уравнения исходного, зависит только от одного параметра λ .

3. Уравнение нестационарного газового потока

Одномерный нестационарный поток газа описывается следующим уравнением

$$\varphi_{tt} + 2\varphi_x \varphi_{tx} + \left((k-1)\varphi_t + \frac{k+1}{2}\varphi_x^2 \right) \varphi_{xx} = 0. \quad (6)$$

Здесь φ - потенциал скорости и k ($k > 1$) - константа (показатель адиабаты).

Сверхзвуковым режимам отвечает область гиперболичности уравнения

$$\varphi_x^2 + 2\varphi_t < 0.$$

Далее мы рассматриваем уравнение только в этой области.

Уравнение (6) преобразованием Лежандра может быть приведено к линейному уравнению.

Действительно, комбинация преобразования Лежандра

$$(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (-p_1, -p_2, q_1, q_2)$$

и точечного преобразования

$$\begin{aligned} q_1 &\rightarrow \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}}; \\ q_2 &\rightarrow -\frac{1}{8}(1+k)(q_1^2 + q_2^2 + 2(k-3)q_1 q_2); \\ p_1 &\rightarrow \frac{((k-3)q_1 + (k+1)q_2)p_1 - ((k+1)q_1 + 9k-3)q_2 p_2}{\sqrt{2}(k-1)(q_1 + q_2)}; \\ p_2 &\rightarrow \frac{2(p_1 + p_2)}{(1-k)(q_1 + q_2)} \end{aligned}$$

переводит уравнение (6) в уравнение

$$v_{q_1 q_2} = \frac{(k-3)(v_{q_1} + v_{q_2})}{2(k-1)(q_1 + q_2)}. \quad (7)$$

Заметим, что при $k=3$ уравнение (6) вырождается в волновое уравнение $v_{xy} = 0$.

При $k = \frac{5}{3}$ мы получаем уравнение

$$v_{q_1 q_2} = -\frac{v_{q_1} + v_{q_2}}{q_1 + q_2},$$

общее решение которого имеет вид

$$v = \frac{F_1(q_1) + F_2(q_2)}{q_1 + q_2},$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции.

Выполняя обратное преобразование, мы получим, вообще говоря, многозначные решения исходного уравнения. Это связано с тем, что симплектические преобразования не сохраняют класс классических решений уравнений, но сохраняют класс многозначных решений. Полученные многозначные решения могут быть использованы для построения сингулярных решений типа ударных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кушнер Е.Н.** Принцип нелинейной суперпозиции в аэродинамике // Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий: материалы междунар. науч.-практ. конф. / под ред. А.Р. Симонян, Е.И. Улитина. - Сочи, 2012.
2. **Ларькин Н.А.** Гладкие решения уравнений трансзвуковой газовой динамики. - Новосибирск: Наука, 1991.
3. **Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В.** Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1986.
4. **Лычагин В.В.** Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка // Доклады Академии наук СССР. - 1978. - Т. 238. - № 5. - С. 273-276.
5. **Лычагин В.В.** Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка // Успехи математических наук. - 1979. - Т. 34. - № 1 (205). - С. 137-165.
6. **Bers L.** Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics, John Wiley and Sons, 1958.
7. **Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N.** Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations, 496 pp. Cambridge University Press, 2007.
8. **Lie S.:** Ueber einige partielle Differential-Gleichungen zweiter Ordnung, Math. Ann. 5, 209-256, 1872.
9. **Lie S.:** Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen. Math. Ann. 8, 215-303, 1874.

NORMAL FORMS OF SOME GAS DYNAMICS EQUATIONS

Kushner E.N.

Two normal forms of the multi-component gas mixture and the non-stationary gas flow equations are presented in the paper. These forms were obtained by symplectic transformations of the corresponding differential equations.

Key words: symplectic structure, symplectic transformations, differential forms, Monge-Ampere equations.

Сведения об авторе

Кушнер Елена Николаевна, окончила Астраханский государственный университет (2000), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МГТУ ГА, автор 31 научной работы, область научных интересов - уравнения математической физики, симметрии, законы сохранения.

УДК 514.763.85

ПОСТРОЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В MAPLE

Е.Н. КУШНЕР¹**Статья представлена доктором технических наук, профессором Самохиным А.В.**

Теория многозначных решений применяется для построения разрывных решений нелинейных дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными.

Ключевые слова: дифференциальные формы, многозначные решения, законы сохранения.

1. Введение

Математический аппарат классической теории дифференциальных уравнений плохо приспособлен для построения их разрывных решений. Теория обобщенных функций, предложенная С.Л. Соболевым и традиционно применяемая для построения разрывных решений, хорошо описывает лишь линейные уравнения.

Альтернативой этому аппарату является геометрическая теория многозначных решений, развитая в работах московской школы [5; 9; 11].

Многозначное решение, в отличие от классического, может и не представляться как график функции. С геометрической точки зрения оно является гладким многообразием в пространстве джетов, проекция которого на пространство независимых переменных может иметь особенности.

В настоящей работе мы реализуем основные идеи теории многозначных решений дифференциальных уравнений в виде алгоритмов для системы символьных вычислений Maple.

Результаты работы были анонсированы в [7].

2. Многозначные решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными

$$F(x, y, v, v_x, v_y) = 0, \quad (1)$$

где F - гладкая функция.

Пусть $J^1(R^2)$ - пространство 1-джетов функций от двух независимых переменных и q_1, q_2, u, p_1, p_2 - канонические координаты на нем [5].

Это пространство снабжено естественной контактной структурой, задаваемой дифференциальной 1-формой - формой Картана

$$U = du - p_1 dq_1 - p_2 dq_2.$$

В пространстве $J^1(R^2)$ уравнение (1) определяет гиперповерхность

$$E = \{F(q_1, q_2, u, p_1, p_2) = 0\} \subset J^1(R^2).$$

Эту гиперповерхность мы также будем называть *дифференциальным уравнением*.

Пусть $h = h(x, y)$ - некоторая гладкая функция. Гладкое подмногообразие

$$L_h^1 = \left\{ u = h(q_1, q_2), p_1 = \frac{\partial h}{\partial q_1}, p_2 = \frac{\partial h}{\partial q_2} \right\} \subset J^1(R^2)$$

назовем *1-графиком* функции h .

Функция $v = h(x, y)$ является классическим решением системы дифференциальных уравне-

¹ Работа выполнена при поддержке научного гранта МГТУ ГА 2011 г.

ний (1) тогда и только тогда, когда её 1-график лежит на гиперповерхности E .

Поверхность $L \subset E$ называется *многозначным решением* уравнения (1), если ограничение формы Картана на неё равно нулю

$$U|_L = 0.$$

Подробное изложение геометрии нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка приведено в работах В.В. Лычагина [8; 10].

Контактное векторное поле с производящей функцией F имеет вид

$$X_F = -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} + \left(F - \sum_{i=1}^2 p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Это векторное поле касается поверхности E [11].

Векторное поле X_F называется *характеристическим* для уравнения E , а его траектории, лежащие на K - *характеристиками* этого уравнения.

Гладкую кривую $K \subset E$ будем называть *кривой начальных данных* или *кривой Коши* для уравнения E , если характеристики пересекают только один раз и это пересечение трансверсально.

Многозначное решение L уравнения E будем называть решением обобщенной задачи Коши с начальными данными K , если $L \supset K$.

Обозначим через φ_τ преобразование сдвига вдоль векторного поля X_F . Тогда для достаточно малых значений τ множество

$$L = \bigcup_{\tau} \varphi_\tau(K)$$

является гладкой поверхностью и, стало быть, решением обобщенной задачи Коши для уравнения E .

Из этих рассуждений следует способ решения обобщенной задачи Коши: кривую Коши K нужно сдвинуть вдоль траекторий векторного поля X_F . При этом кривая Коши заметёт поверхность, которая и будет являться многозначным решением обобщенной задачи Коши.

Формально этот процесс сводится к решению классической задачи Коши для следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{q}_j = -\frac{\partial F}{\partial p_j}, \\ \dot{u} = F - \sum_{i=1}^2 p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_j = \frac{\partial F}{\partial q_j} + p_j \frac{\partial F}{\partial u} \end{cases} \quad (2)$$

с начальными данными

$$q_j(0) = q_j^0, u(0) = u^0, p_j(0) = p_j^0, \quad (j = 1, 2),$$

где точка $(q^0, u^0, p^0) \in K$.

Проекция π многозначного решения L на плоскость независимых переменных (x, y) , как правило, не является взаимно-однозначным отображением. Особые точки проекции $\pi: L \rightarrow R^2(x, y)$ обозначим L_Σ ($L_\Sigma \subset L$). Точки множества $\pi(L_\Sigma)$ образуют кривую на плоскости $R^2(t, x)$, которая называется *каустикой* многозначного решения L .

Многозначное решение L с выколотыми сингулярными точками, т.е. множество $L \setminus L_\Sigma$, представляет собой объединение графиков классических решений уравнения (1).

Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$v_t + (\Phi(x, v))_x = 0, \quad (3)$$

обобщающее уравнение Эйлера и описывающее одномерный поток газа без учета вязкости.

Отметим, что многозначные решения уравнения вида

$$v_t + (\Phi(v))_x = 0$$

были построены в работе В.В. Лычагина [10].

Положим $q_1 = t, q_2 = x$. Уравнению (3) отвечает функция

$$F = p_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} + p_2 \frac{\partial \Phi}{\partial u}$$

на пространстве $J^1(R^2)$. Система (2) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_1 = 1, \\ \dot{q}_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \\ \dot{u} = \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}, \\ \dot{p}_1 = -p_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_2 \partial u} + p_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \right), \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_2^2} - 2p_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_2 \partial u} - p_2^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Заметим, что первые три уравнения системы не зависят от двух последних уравнений, и поэтому вместо пространства 1-джетов мы можем рассматривать пространство 0-джетов с координатами q_1, q_2, u .

Уравнение (3) имеет закон сохранения

$$\theta = u dq_2 - \Phi(q_2, u) dq_1. \quad (5)$$

Действительно, внешний дифференциал 1-формы θ равен

$$d\theta = du \wedge dq_2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u} du \right) \wedge dq_1.$$

Пусть $u = v(t, x)$ - решение уравнения (3). Тогда ограничение дифференциальной 2-формы $d\theta$ на 1-график этого решения равно нулю

$$d\theta = (v_t + \Phi_x + \Phi_v v_x) dt \wedge dx = 0.$$

Таким образом, дифференциальная 1-форма (5) является законом сохранения для уравнения (3) [9].

Закон сохранения (5) позволяет найти условия Гюгонио-Ренкина для расчета фронта ударной волны.

Пусть плоскость независимых переменных R^2 делится кривой M^0 на две части, т.е.

$$R^2 = M^- \cap M^0 \cup M^+.$$

Пусть кривая M_0 является кривой, на которой решение v уравнения (3) имеет разрыв, т.е. график решения состоит из двух поверхностей $v = v^- \cup v^+$. Функция v^- определена на замыкании M^- , а v^+ — на замыкании M^+ .

Функция v называется разрывным решением уравнения (3), соответствующим закону сохранения θ , если

$$\int_{R^2} ds \wedge \theta|_{L_v} = 0$$

для любой функции s с компактным носителем [9].

Найдем уравнение кривой разрыва M^0 . Пусть уравнение этой кривой можно представить как график функции от t

$$M^0 = \{x = \varphi(t)\}.$$

Как известно, функция v является разрывным решением уравнения, отвечающим закону сохранения θ , тогда и только тогда, когда выполняются условия Гюгонио-Ренкина

$$\theta^+ \Big|_{M^0} = \theta^- \Big|_{M^0},$$

где $\theta^\pm = \theta \Big|_{L_{v^\pm}}$. Так как

$$\theta \Big|_{M^0} = u d\varphi - F(\varphi(t), u) dt = [u\varphi' - F(\varphi, u)] dt,$$

то условия Гюгонио-Ренкина для закона сохранения (5) имеют вид

$$u^+ \varphi' - F(\varphi, u^+) = u^- \varphi' - F(\varphi, u^-).$$

Отсюда следует, что функция φ является решением следующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{F(\varphi, u^+) - F(\varphi, u^-)}{u^+ - u^-}.$$

Это уравнение определяет движение фронта разрыва ударной волны. Начальное условие для решения этого уравнения определяется точкой возникновения каустики [1; 2].

Отметим, что правило равных площадей Максвелла для уравнения (3) не выполняется.

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$v_t + (v^2 + xv)_x = 0. \tag{6}$$

В приложении представлен код компьютерной программы на языке системы символьных вычислений Maple для расчета многозначных решений и каустик этого уравнения. В результате работы этой программы мы получаем эволюцию профиля во времени, представленную на рис. 1 для значений t , равных 0, 0.02, 0.035 и 0.05. Каустика и график распространения фронта ударной волны представлены на рис. 2.

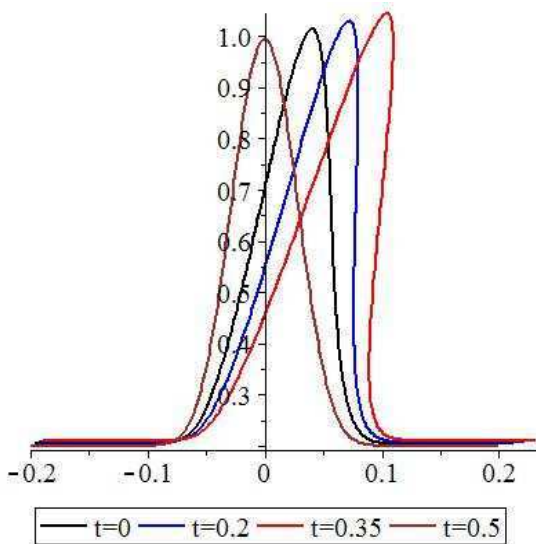


Рис. 1. Эволюция волны

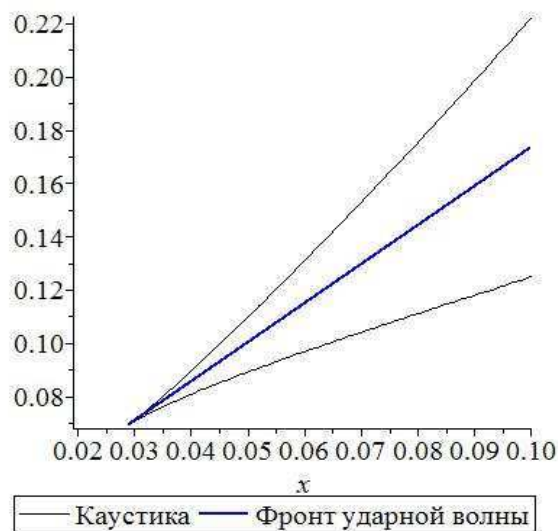


Рис. 2. Каустика многозначного решения

3. Приложение

В данном приложении приведена программа на языке системы символьных вычислений Maple-14 для расчета многозначных решений и каустик уравнения (3), в котором

$$\Phi(x, v) = v^2 + xv.$$

Подключение библиотек

```
with(plottools):with(plots):
with(plots,implicitplot):
with(geometry):
with(DifferentialGeometry):
with(GroupActions):
with(DEtools):
```

Задание начальных данных

```
s0:=x->piecewise(x<0, 0, x>=0 and x<0.06, 0.8-10*x, x>=0.06, 0.2,x<0,0): h:=x->s0(x):
alpha:=x->piecewise(x<=0, 0, x>0,exp(-1/x)):
beta:=(x,a,r)->alpha(r^2-(x-a)^2):
h:=x->10^11*4/7*beta(x,0,0.2)+0.2:
```

Задание функции Φ

```
Phi:=(x,u)->u^2+x*u :
```

Задание характеристической системы

```
eq:=[diff(t(s),s)-1, diff(x(s),s)-eval(diff(Phi(x,u),u), x=x(s),u=u(s)), diff(u(s),s)-eval(diff(Phi(x,u),x),
x=x(s),u=u(s)))];
```

Расчет профилей волны

```
ht:=0.01: hx:=0.001: xbegin:=-0.2:xend:=0.2:tbegin:=0: tend:=0.5:
i:=0:
for b from xbegin by hx to xend do
ics:= x(0)=b, t(0)=0, u(0)=h(b):
dsys := [eq[1],eq[2],eq[3], ics]:
resh:=dsolve(dsys, numeric):
sol:=resh(0.020): res:=eval([t(s),x(s),u(s)],sol):
sol1:=resh(0.035):
res1:=eval([t(s),x(s),u(s)],sol1):
sol2:=resh(0.050):
res2:=eval([t(s),x(s),u(s)],sol2):
sol3:=resh(0):
res3:=eval([t(s),x(s),u(s)],sol3):
i:=i+1:
tr[i]:=res[1]: xr[i]:=res[2]: ur[i]:=res[3]:
tr1[i]:=res1[1]: xr1[i]:=res1[2]: ur1[i]:=res1[3]:
tr2[i]:=res2[1]: xr2[i]:=res2[2]: ur2[i]:=res2[3]:
tr3[i]:=res3[1]: xr3[i]:=res3[2]: ur3[i]:=res3[3]:
end do:
ii:=i: i:=0:
poxy:=[[xr[i1],ur[i1]] $i1=1..ii]: poxy1 := [[xr1[i1],ur1[i1]] $i1=1..ii]:
poxy2:=[[xr2[i1],ur2[i1]] $i1=1..ii]: poxy3 := [[xr3[i1],ur3[i1]] $i1=1..ii]:
gr:=pointplot(poxy,symbol=point,symbolsize=1,color=blue):
gr1:=pointplot(poxy1,symbol=point,symbolsize=1,color=red):
gr2:=pointplot(poxy2,symbol=point,symbolsize=1,color=brown):
gr3:=pointplot(poxy3,symbol=point,symbolsize=1,color=black):
```

```
display(gr,gr1,gr2,gr3):
plot({poxy,poxy1,poxy2,poxy3},style=line, color=[black,blue,red,brown]);
```

Расчет каустики

```
ht:=0.001: hx:=0.0001: xbegin:=-0.2:xend:=0.1: tbegin:=0.01:tend:=0.1:
for b from xbegin by hx to xend do
ics:= x(0)=b, t(0)=0, u(0)=h(b):
ics1:= x(0)=b+hx, t(0)=0, u(0)=h(b+hx):
dsys := [eq[1],eq[2],eq[3], ics]:
dsys1 := [eq[1],eq[2],eq[3], ics1]:
resh:=dsolve(dsys, numeric):
resh1:=dsolve(dsys1, numeric):
for a from tbegin by ht to tend do
sol:=resh(a):
sol1:=resh1(a):
res:=eval([t(s),x(s),u(s)],sol):
res1:=eval([t(s),x(s),u(s)],sol1):
xa:=(res[3]): ta:=1: xb:=(res1[2]-res[2]):
tb:=(res1[1]-res[1]):
Delta:=ta*xb-tb*xa:
if (Delta)<0 then i:=i+1: tr0[i]:=res[1]:
xr0[i]:=res[2]: ur0[i]:=res[3]: break; end if;
end do:
end do:ii:=i:i:=0:
```

Изображение каустики

```
poxy0:=[[tr0[i1],xr0[i1]] $ i1 = 1..ii]:
plot(poxy0,style=line,symbol=circle,symbolsize=1, color=blue);
```

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. - М.: Наука, 1982.
2. Арнольд В.И. Особенности каустик и волновых фронтов. - М.: ФАЗИС, 1996.
3. Бочаров А.В. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А.В. Бочаров, А.М. Вербоветский, А.М. Виноградов и др. - М.: Факториал, 1997.
4. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Применение нелинейных дифференциальных уравнений в гражданской авиации. - М.: МИИГА, 1977.
5. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1986.
6. Годунов С.К. Разностный метод расчета ударных волн // Успехи математических наук. - 1957. - Т. 12. - № 1(73). - С. 176-177.
7. Кушнер Е.Н. Многозначные решения обобщенного уравнения Эйлера // Геометрические методы в механике, физике и управлении: тезисы докладов междунар. конф. - Одесса, 2012.
8. Лычагин В.В. Локальная классификация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады Академии наук СССР. - 1973. - Т. 210. - № 3. Успехи математических наук. - 1975. - Т. 30. - № 1. - С. 101-171.
9. Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations, 496 pp. Cambridge University Press, 2007.
10. Lychagin V.V. Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations and nonlinear Phenomena // Acta Appl. Math. - 1985. - № 3. - P. 135-173.
11. Lychagin V.V. Lectures on geometry of differential equations. Vol. 1,2. <<La Sapienza>>. - Rome. - 1993.

CONSTRUCTION OF DISCONTINUOUS SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MAPLE

Kushner E.N.

We use the theory of multivalued solutions to construct discontinuous solutions of non-linear partial differential equations with two independent variables.

Key words: differential forms, multivalued solutions, conservation laws.

Сведения об авторе

Кушнер Елена Николаевна, окончила Астраханский государственный университет (2000), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МГТУ ГА, автор 31 научной работы, область научных интересов - уравнения математической физики, симметрии, законы сохранения.

УДК 519.612

ЭФФЕКТИВНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ РАСЧЕТ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ СИСТЕМ ГИБРИДНОЙ АРХИТЕКТУРЫ

М.И. КЛИМОВ, И.С. МЕНЬШОВ

В статье предлагается общий подход к эффективному параллельному решению задач механики сплошных сред для систем гибридной архитектуры. Ввиду своих архитектурных особенностей эффективность расчета на GPU сильно зависит от многих факторов. Предложенный подход к построению параллельных программ позволит достичь корректного двухуровневого параллелизма: на уровне декомпозиции области и поэлементного параллелизма, при этом обеспечив должную производительность на обоих уровнях.

Ключевые слова: параллельные алгоритмы, высокопроизводительные вычисления, GPGPU, численные методы.

Введение

В настоящее время требования для расчета задач аэродинамики к вычислительным системам очень высоки: помимо сложной геометрии, сложных физических моделей, современные требования включают в себя расчет на больших сетках и ресурсоемкую вычислительную часть. Всё это заставляет строить огромные вычислительные комплексы с уникальной архитектурой. Обеспечить большую производительность таких систем до недавних пор позволяло увеличение тактовой частоты процессора, но на сегодняшний день учеными практически достигнут "кремниевый тупик". Рост производительности таких систем в последнее время происходит благодаря увеличению числа процессоров в системе или числа ядер на процессоре. Таким образом, ядра центральных процессоров вычислительных узлов параллельно решают необходимую задачу. Параллельное взаимодействие в таком случае, в основном, происходит на основе технологий MPI[2] и/или OpenMP.

Графические карты появились еще в 1981 году и были призваны освободить часть нагрузки на CPU по работе с графикой. В связи с особенностью работы с текстурной графикой GPU быстро превратился в простой SIMD-процессор, грубо говоря, процессор, одинаково обрабатывающий несколько потоков различных данных (рис. 1).

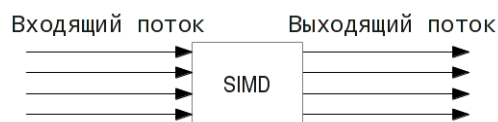


Рис. 1. SIMD-модель

Из-за своей архитектуры, максимально нацеленной на увеличение скорости расчёта текстур и сложных графических объектов, а также ограниченного набора команд графический процессор долгое время занимался лишь ускорением трехмерной графики и не мог использоваться в качестве устройства для математических расчетов. Это стало возможным совсем недавно благодаря добавлению программируемых шейдерных блоков и более высокой арифметической точности растровых конвейеров. Ряд крупных производителей графических карт выпустили свои программные инструменты для возможности проведения общих вычислений на GPU. Таким образом, появилась техника GPGPU (англ. General-purpose graphics processing units - «GPU общего назначения») - техника использования графического процессора видеокарты для общих вычислений, которые обычно проводит центральный процессор. Программные реализации GPGPU доступные сегодня:

1. CUDA - технология компании NVidia;
2. OpenCL - открытая разработка;
3. FireStream — продукт компании AMD;
4. DirectCompute — реализация от корпорации Microsoft.

CUDA и OpenCL на данный момент доминируют в секторе GPGPU с большим преимуществом технологии CUDA.

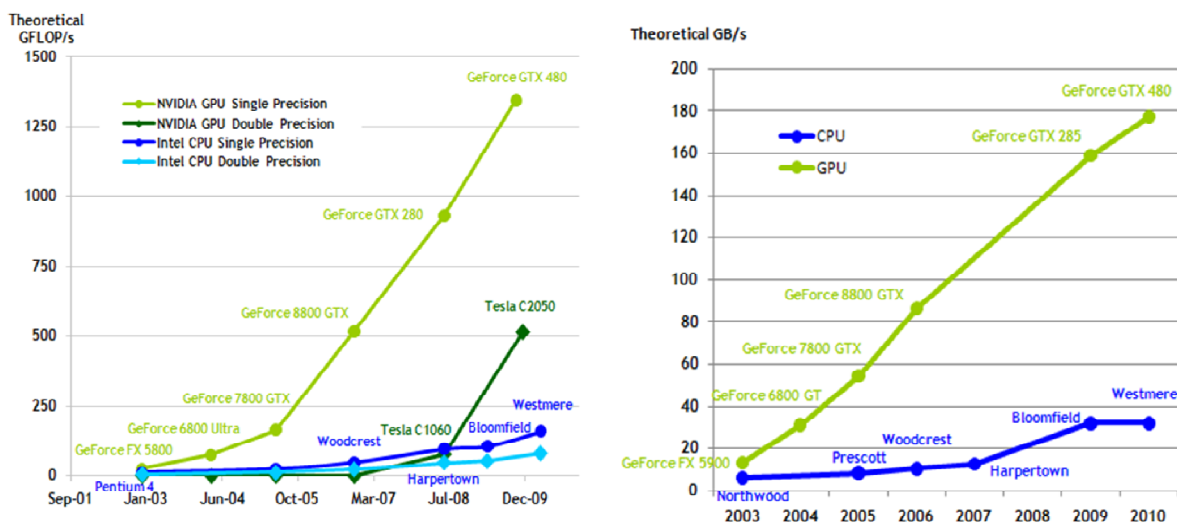


Рис. 2. Теоретическая вычислительная производительность и пропускная способность памяти

За счет наличия сотен скалярных ядер, одновременно обрабатывающих данные, пиковая производительность GPU оказывается на порядки выше, чем CPU. Память графического ускорителя обладает многоуровневой системой. Основной памятью служит так называемая глобальная память видеокарты, которая представлена наибольшим объемом. Но глобальная память латентна, и работа с ней часто является «узким местом» программы. Для уменьшения количества обращений к глобальной памяти применяются шаблоны запросов, при которых несколько обращений могут объединяться в одно (coalescing). Некоторые данные по производительности можно наблюдать на рис. 2.

Программирование с помощью техники GPGPU сложно из-за большого количества специфичных для архитектуры ограничений и особенностей и может существенно отличаться от программирования для CPU. Ввиду таких архитектурных особенностей для успешной адаптации кода под видеокарты необходимо учесть множество факторов, прямо или косвенно влияющих на производительность. Среди таких факторов можно выделить следующие:

- наличие ветвлений снижает производительность;
- специальным образом организованная память может существенно повысить эффективность;
- увеличение количества нитей может компенсировать бесполезное ожидание данных, но уменьшает количество регистровой памяти, выделенной потоку.

Учитывая подобные факторы при разработке, можно получить ускорение на порядки по сравнению с аналогичным расчетом на одном ядре CPU.

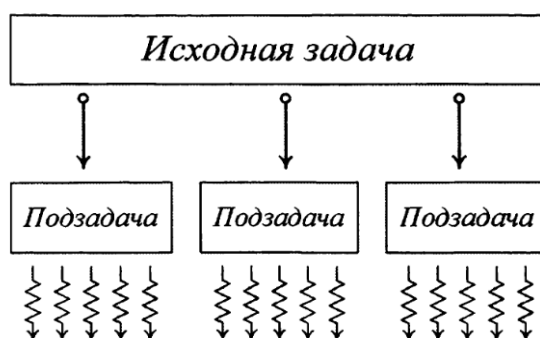


Рис. 3. Модель двухуровневого параллелизма

Безусловно, эффективность GPGPU высока, но ограничена. Для дальнейшего увеличения производительности используют метод разбиения общей задачи на подзадачи, решаемые параллельно. В таком случае обычно решение каждой подзадачи происходит на отдельном вычислительном объекте. Взаимодействие между процессами происходит с помощью MPI. Данная техника применима как для систем с общей памятью, так и для систем с раздельной памятью, что делает ее самой популярной на сегодняшний день. Каждый параллельный процесс при этом может вести свой параллельный расчет на GPU, формируя второй уровень параллелизма (рис. 3). Связка MPI и OpenMP является еще одним примером двухуровневого распараллеливания.

1. Численные модели механики сплошных сред

Несмотря на разнообразие численных и физических моделей механики сплошных сред, среди них можно выделить несколько общих концептуальных положений:

- законы сохранения (массы, импульса, энергии);
- происходит пространственная дискретизация области (строится структурированная или неструктурированная сетка);
- определяющие уравнения можно представить в дивергентной форме $\frac{d\bar{Q}}{dt} + \text{div}\bar{F} = \bar{H}$;
- вводится понятие вектора состояния ячейки $\bar{Q} = \bar{Q}(\bar{x}, t) = (\rho, \rho U_k, \dots)$;
- связи дискретной модели локальны.

При численном моделировании задач механики сплошных сред требуются знания не только физики и математики, но и программирования. Разработчику приходится решать проблемы организации памяти, хранения данных, параллельных вычислений. Подобного рода программные задачи, вообще говоря, не зависят от конкретной задачи механики сплошных сред и могут быть реализованы отдельно, составив так называемый «базис». В свою очередь, выбранные для решения физическая и математическая модели, опирающиеся на приведенные выше общие положения, могут быть также программно выделены в независимый модуль - так называемое «вычислительное ядро». Таким образом, становится возможным разработать обобщенную программную модель, в которой возможно разделение реализации вычислительного ядра от остальной части. Это обеспечит возможность более легкой разработки вычислительного ядра, а также его простую замену, не касаясь чисто программных проблем, позволив конечному разработчику вычислительного ядра сосредоточиться на физической и численной моделях. При этом «базис» должен обеспечить в первую очередь корректность и высокую эффективность при параллельном расчете.

Исходя из общих принципов дискретных моделей, стала возможна разработка обобщенной программной модели для современных параллельных вычислений, а также реализация модели в виде программного пакета базовых функций.

2. Обобщенная программная модель

Разработка обобщенной программной модели для эффективного решения задач механики сплошных сред сводится к формированию ряда правил и рекомендаций по созданию системы, обеспечивающей максимальную универсальность, расширяемость и, главное, корректность и высокую производительность параллельных вычислений. Следуя данной модели, становится возможным разделение разработки вычислительного ядра от остального кода, снабдив разработчика ядра необходимыми инструментами для проведения успешного и параллельного расчета. Таким инструментом может стать программная библиотека, содержащая широкий набор функций. Далее следует описание подхода по созданию представленной выше системы.

На расчетной области строится структурированная или неструктурированная сетка с некоторым количеством элементов. Каждый элемент окружен конечным количеством

соседей. Каждой ячейке приписан вектор состояния f некоторой размерности, содержащий в качестве компонент примитивные переменные расчета и другие переменные, необходимые для расчета (рис. 4).

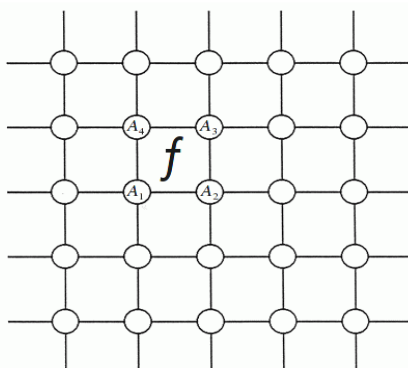


Рис. 4. Пример двумерной дискретной модели на регулярной сетке $\vec{f} = (\rho, V_x, V_y, p)$

В процессе расчета выбранной ячейки производятся математические операции с вектором состояния ячейки и ее соседей. Обновление вектора состояния может происходить лишь в текущей ячейке. Доступ к данным расчетной сетки не зависит от вычислительного ядра и может быть реализован независимо, на основании общих положений.

Использование параллельных технологий влечет за собой значительное усложнение системы и порождает целый ряд особенностей и специфичных для параллельного программирования проблем. Их решение нетривиально и может отнять у разработчика много сил. Далее, в следующих разделах будут рассмотрены примеры возникнувших проблем и методы их решения. В рамках данной работы необходимо обеспечить 2 уровня параллелизма: основанное на межузловом взаимодействии и поэлементное распараллеливание.

При этом согласно обобщенной программной модели разработчик вычислительного ядра не должен самостоятельно заниматься вопросами эффективного распараллеливания, представления данных в памяти компьютера. Его задача состоит в том, чтобы предоставить полный алгоритм расчета одной ячейки.

Конечно же, данные рассуждения вносят некоторые ограничения в математические модели. Во-первых, в шаблон включены лишь соседи первого уровня. Во-вторых, не рассматриваются адаптивные сетки. В-третьих, численные методы, применимые в данном подходе, не должны требовать обращения глобальной матрицы - это итерационные методы, такие как явные методы, LU-SGS, GMRES, метод Якоби и другие.

3. Раскраска сетки

Данный раздел описывает общий подход к проблеме поэлементного распараллеливания. На данном уровне параллелизма может быть применена не только техника GPGPU, но и другие различные технологии, основанные на многопоточности, допустим OpenMP или Intel Cilk Plus. В дальнейшем на втором уровне параллелизма будет подразумеваться использование GPGPU как наиболее специфичной технологии параллельного программирования.

Подход GPGPU, хотя и похож на работу с SIMD-моделью, имеет некоторые отличия. Нити разбиваются на группы по 32 нити, называемые warp'ами. Только нити в пределах одного warp'a выполняются физически одновременно, при этом быстрое управление нитями прозрачно осуществляет мультипроцессор GPU. В рамках такой многопоточной модели возможно возникновение состояния гонки, когда результат зависит от того, в каком порядке исполняются участки кода. Такие случаи приводят к коллизиям данных, называемые коллизиями типа «read-after-write».

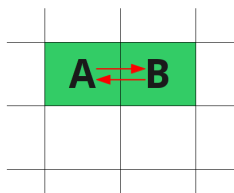


Рис. 5. Пример возникновения коллизий данных

К примеру, пусть ячейки A и B имеют векторы состояния f_A и f_B соответственно, как показано на рис. 5. В процессе расчета векторы состояния обновляются $f_A \rightarrow f'_A$, $f_B \rightarrow f'_B$. При расчете ячейки A запрашивается вектор состояния ячейки B. Какой вектор получим, f_B или f'_B ? Результат неоднозначен, а значит, такой расчет некорректен. Для решения проблемы гонок данных предлагается применить «раскраску» сетки, т.е. каждой ячейке назначается цвет таким образом, чтобы никакие ячейки одного цвета не были соседними друг с другом. Простой схематичный пример раскраски сетки изображен на рис. 6. Так как каждая расчетная сетка представляется графом, вершины которого взаимно-однозначно отображаются в элементы сетки, а инцидентные ребру вершины соответствуют соседним ячейкам, то раскраска сетки является аналогичной для раскраски графа процедурой.

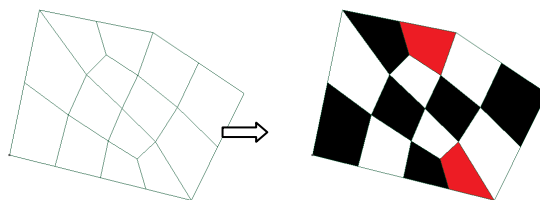


Рис. 6. Раскраска простой сетки

Очевидно, что при параллельном расчете ячеек выбранного цвета коллизий данных происходить не будет. Запустив расчет последовательно по ячейкам каждого цвета и обработав тем самым все ячейки, получим корректный результат.

Понятно, что ввиду последовательного запуска процедуры расчета по элементам каждого цвета для улучшения производительности необходимо уменьшить количество цветов в раскраске. Минимальное количество цветов среди всевозможных раскрасок называется хроматическим числом. Поиск одной из «минимальных раскрасок», т.е. раскрасок с хроматическим числом цветов, относится к ряду сверхсложных задач с экспоненциальным временем решения (зависимость от числа элементов). Поэтому раскраску будем искать приближенно с числом цветов, близким к хроматическому. К. Аппель и В. Хакен в 1976 году доказали известную проблему четырех красок, гласящую, что хроматическое число любого плоского графа не превосходит четырех. Так как любая двумерная сетка может быть отображена плоским графом, то данная теорема говорит о том, что минимальное число цветов двумерной сетки также не превосходит четырех. Существует ряд алгоритмов [7], обеспечивающих относительно быструю раскраску произвольного графа в заданное количество цветов, при этом согласно теореме о четырех красках, это количество разумно выбрать равным четырем. Самым простым и почти самым эффективным методом раскраски является жадный алгоритм с возвратами [6]. Примененный к структурированной сетке жадный алгоритм, к сожалению, с большой вероятностью даст сетку, раскрашенную в четыре цвета; такой результат не устраивает нас, поскольку хотелось бы в таком случае наблюдать очевидную минимальную «шахматную» раскраску с хроматическим числом, равным двум. Также данный алгоритм (как и другие известные алгоритмы) не заботится о количестве элементов каждого цвета, что может привести к результату, когда количество ячеек определенного цвета будет много меньше

количества ячеек других цветов. Такой расклад не сможет обеспечить расчет должной эффективностью. Поэтому в данной работе был разработан метод раскраски, базирующийся на жадном алгоритме, адаптированный к структурированным сеткам и производящий коррекцию раскраски, уравнивающую количество ячеек каждого цвета. Результат применения разработанного алгоритма на некоторых сетках можно видеть на рис. 7.

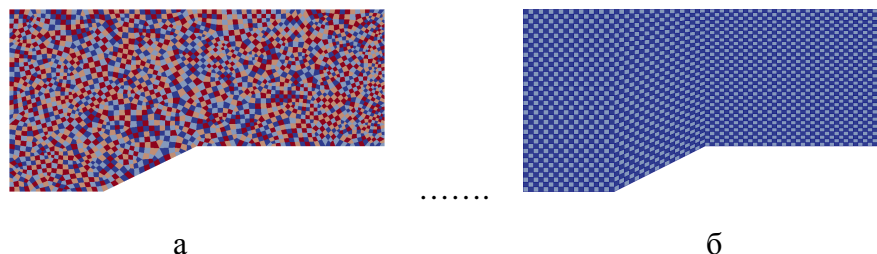


Рис. 7. Пример раскраски с помощью разработанного алгоритма:
а - неструктурированная сетка; б - структурированная сетка

Алгоритм реализуется в два этапа. На первом этапе все элементы обходятся по соседству с запоминанием «маршрута». При возникновении ситуации, когда у текущего элемента все соседи были пройдены, необходимо продолжить обход из последней ячейки маршрута, для которой это возможно. На втором этапе можно действовать обычным жадным алгоритмом раскраски, при этом выбор ячейки производя неслучайно, а по порядку следования в маршруте. Очевидно, что для структурированных сеток такой проход по первоначальному маршруту даст требуемую раскраску в два цвета.

4. Разбиение на подобласти

Параллелизм первого уровня, основанный на межузловых взаимодействиях, происходит за счет разбиения расчетной области на подобласти (рис. 8). Каждый вычислительный объект (в данном случае GPU или ядро CPU) производит расчет своей подобласти.

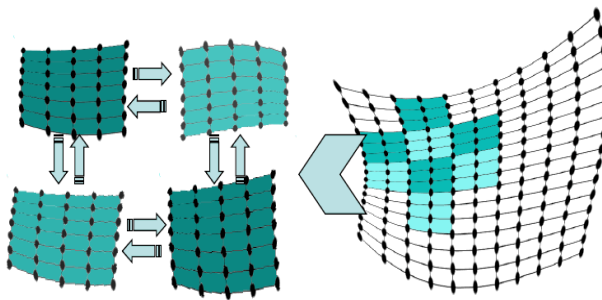


Рис. 8. Пример разбиения области на подобласти

Такой расчет должен сопровождаться обменами данных между объектами, так как в общем случае подобласти не являются независимыми. Локальность связей и ограничение на соседство первого уровня между элементами сетки, однако, позволяет организовать синхронизацию данных за счет их обмена только из граничных ячеек, т.е. ячеек, хотя бы один сосед которых находится в другой подобласти. При практической реализации удобно достроить к подобласти дополнительный ряд ячеек, называемых ghost-ячейками, копирующими граничные ячейки соседних подобластей (рис. 9). Тогда синхронизация сводится к передаче информации от граничных ячеек подобластей и ее приему в ghost-ячейки соседних подобластей.

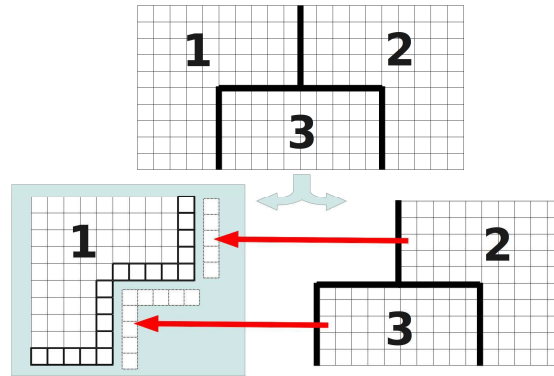


Рис. 9. Дополнение подобласти ghost-ячейками

5. Алгоритм расчета

Итерация расчетного цикла будет состоять из следующих шагов:

1. Выбираем цвет, который еще не рассчитан.
2. Рассчитываем граничные ячейки выбранного цвета во всех подобластях.
3. Синхронизация: передаем необходимые данные из посчитанных граничных ячеек в ghost-ячейки соседних блоков (можно выполнять асинхронно, т.е. в фоновом режиме).
4. Расчет внутренних ячеек выбранного цвета.
5. Выбранный цвет считается рассчитанным. Если все цвета рассчитаны, то итерация завершается, иначе переходим к пункту 1.

6. Распределение памяти

Память графических карт имеет многоуровневую систему. К сожалению, основная память GPU, называемая глобальной, латентна, что заставляет разработчиков предпринимать попытки уменьшить количество обращений к ней. Одним из способов, о котором рассказывалось ранее, является coalescing, т.е. объединение нескольких запросов к памяти в один. GPU аппаратно поддерживает несколько шаблонов оптимального доступа к глобальной памяти. Более подробно об этом написано в документации CUDA [8]. В данном пункте рассказывается о рекомендациях по быстрой и удобной организации памяти для осуществления эффекта coalescing и возможности быстрой межузловой синхронизации.

Как известно, для представления массивов структур в CUDA наилучшим образом подходит хранение в памяти в виде структуры массивов. Поэтому данные всех ячеек желательно хранить блочно покомпонентно. В таком случае хранение векторов состояния элементов сетки можно визуально представить рис. 10.

Компонента	Расположение ячеек в памяти						
ρ	1	2	3	4	...	N-1	N
V_x	1	2	3	4	...	N-1	N
	...						

Рис. 10. Покомпонентная организация памяти

Ввиду последовательного расчета по цветам ячеек для возникновения максимального количества coalesced-запросов к памяти, необходимо переупорядочить элементы в памяти по цветам. Так как порядок обхода ячеек внутри цвета неважен, то в таком случае, отдав соседним нитям соседние ячейки, можно добиться того, что все запросы к данным текущих обрабатываемых ячеек будут объединены. Схематично упорядоченные ячейки в блоке изображены на рис. 11.

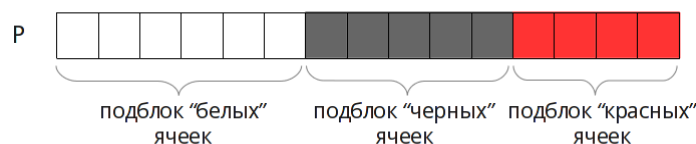


Рис. 11. Упорядочивание ячеек по цвету

Согласно алгоритму расчета, граничные ячейки каждого цвета обрабатываются отдельно. Поэтому внутри подблока каждого цвета желательно выделить граничные ячейки и расположить их также линейным подблоком. Так как на каждой итерации будет происходить их пересылка между узлами, то такое линейное расположение также ускорит процесс синхронизации. Выделение ghost-ячеек в отдельный подблок позволит быстро принимать ячейки во время обменов. Такое распределение ячеек внутри подблока одного цвета одной компоненты можно представить (рис. 12).

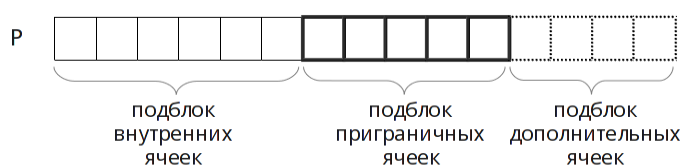


Рис. 12. Упорядочивание ячеек по типу

Тогда рекомендованное расположение ячеек в памяти можно проиллюстрировать схемой (рис. 13).

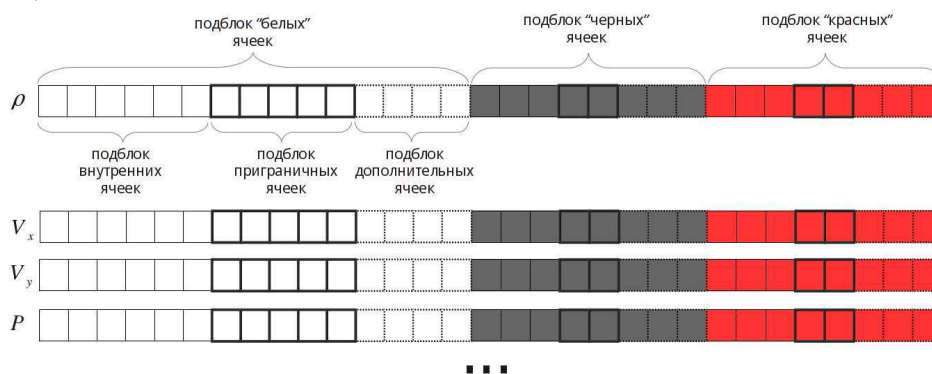


Рис. 13. Рекомендованное схематичное представление данных в памяти

7. Заключение

В рамках данной работы разработана обобщенная программная модель для эффективного решения задач механики сплошных сред. Предложенная схема ведения параллельного расчета помогает добиться высокой производительности, используя особенности как программирования для систем с распределенной памятью, так и многопоточного программирования. В том числе уделено особое внимание актуальному направлению: расчету с использованием графических плат на основе технологии CUDA. На основе данной работы возможно создать высокоэффективную программную библиотеку, полностью охватывающую сложные параллельные процессы синхронизации, вопросы распределения памяти и хранения данных, оставляя своему пользователю лишь проблему программирования физической модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI. - М.: МГУ, 2004.
2. Воеводин В.В. Параллельные вычисления. - СПб.: БХВ-Петербург, 2002.

3. Информационно-аналитический центр по параллельным вычислениям [Электронный ресурс]. URL: <http://parallel.ru>.
4. **Men'shov I., Nakamura Y.** Numerical Simulations and Experimental Comparisons for High Speed Nonequilibrium Air Flows -Fluid Dynamics Research Journal, v. 27, No 5, 2000, pp. 305-334.
5. **Бьерн Страуструп.** Язык программирования C++. Специальное издание / пер. с англ. - М.: Бином, 2011.
6. **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход. - М.: Мир, 1978.
7. **Родионов В.В.** Методы четырехцветной раскраски вершин плоских графов. - М.: КомКнига, 2005.
8. NVIDIA CUDA C Programming Guide [Электронный ресурс]. URL: <http://developer.nvidia.com>.

EFFECTIVE PARALLEL COMPUTING ON HYBRID ARCHITECTURE SYSTEMS FOR PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS

Klimov M.I., Menshov I.S.

A common core approach for effective parallel computing problems of continuum mechanics on hybrid architecture systems is proposed. The efficiency of GPGPU computations highly depends on several factors due to specifics of the architecture features. The proposed approach provides general means to develop parallel programs based on a correct and high-performance two-level parallel programming model that employs domain decomposition with message passing between computing nodes on the first level and element-by-element parallelism with multithread technologies on the second one.

Key words: parallel methods, high-performance computing, GPGPU, numerical methods.

Сведения об авторах

Климов Максим Игоревич, 1989 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (2012), аспирант МГУ им. М.В. Ломоносова, область научных интересов - численные методы, высокопроизводительные вычисления, параллельное программирование, механика сплошных сред.

Меньшов Игорь Станиславович, 1957 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1979), доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, профессор кафедры высшей математики МГТУГА и вычислительной механики МГУ им. М.В. Ломоносова, автор 47 научных работ, область научных интересов - численные методы, математическое моделирование, механика сплошных сред.

УДК 519.46

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПОЛУЧЕНИЮ РЕШЕНИЙ В ГИДРОДИНАМИКЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А.М. ЛУКАЦКИЙ¹

Установлен класс решений уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости, получающийся из начальных условий действием однопараметрической подгруппы группы диффеоморфизмов и являющийся обобщением ранее полученных автором решений типа бегущей волны.

Ключевые слова: идеальная жидкость, уравнения Эйлера, связность Леви-Чивитты, ковариантная производная.

Пусть дано компактное ориентированное риманово многообразие M размерности n . M можно рассматривать как область течения идеальной несжимаемой жидкости [1]. Конфигурационным пространством этой физической задачи является группа $Diff_\mu^0(M)$ сохраняющих элемент объема диффеоморфизмов M , изотопных тождественному. Ее алгебра Ли $V_\mu(M)$ состоит из бездивергентных векторных полей, которые интерпретируются как поля скоростей течений идеальной несжимаемой жидкости. Динамика течений жидкости при отсутствии внешних сил описывается уравнением Эйлера [1, с. 42] их полей скоростей на M .

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla_w w + \nabla p = 0. \quad (1)$$

Здесь w – поле скоростей идеальной несжимаемой жидкости; p – давление жидкости. Течения идеальной несжимаемой жидкости являются геодезическими многообразия $Diff_\mu^0(M)$ с правоинвариантной (в смысле групповой структуры) метрикой, задаваемой в единице группы формой кинетической энергии

$$(u, v) = \int_M \langle u(x), v(x) \rangle d\mu(x).$$

В [2; 3] описан класс решений уравнений Эйлера типа "бегущей волны". В частности, доказано [3, с. 133], что если v векторное поле действия компактной группы Ли, сохраняющей риманову метрику на M (т.е. киллингово поле римановой метрики), u стационарно (т.е. задает стационарное решение (1)) и выполнено условие $\nabla_u v = 0$, то решение уравнения Эйлера с начальными условиями

$$w = u + v \quad (2)$$

имеет вид

$$w_t = v + \exp(tv)_*(u). \quad (3)$$

Заметим, что в таком случае решение получается действием однопараметрической подгруппы группы диффеоморфизмов на начальные условия

$$w_t = \exp(tv)_*(u + v).$$

Здесь мы установим другие случаи, в которых решение уравнения (1) имеет аналогичный вид. В частности, мы откажемся от требования того, что v является векторным полем действия компактной группы Ли.

Используя известную формулу [4, с. 62] производной Ли векторного поля, имеем

$$\frac{\partial w}{\partial t} = [\exp tv_* u, v]. \quad (4)$$

¹ Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 11-01-00465а

По римановой метрике на M можно построить связность Леви-Чивиты [5-7] ∇ , имеющую нулевое кручение. Тогда для векторных полей p, q на M выполняется тождество: $[p, q] = \nabla_p q - \nabla_q p$, а формула (4) преобразуется к виду

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla_{\exp tv_* u} v - \nabla_v \exp tv_* u.$$

Далее, подставив (3) в (1), получаем

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\nabla_v v - \nabla_v \exp tv_* u - \nabla_{\exp tv_* u} v - \nabla_{\exp tv_* u} \exp tv_* u - \nabla p. \quad (5)$$

Сопоставляя (4) с (5), получаем условие того, что решение уравнения (1) примет вид (3)

$$\nabla_v v + 2\nabla_{\exp tv_* u} v + \nabla_{\exp tv_* u} \exp tv_* u = -\nabla p. \quad (6)$$

Пусть, кроме того, векторное поле v стационарно. Тогда имеем

$$\nabla_v v = \nabla F. \quad (7)$$

Резюмируя полученные выражения, получаем

Предложение 1. Пусть в дополнение к (7) выполнены условия

$$\nabla_{\exp tv_* u} v = \nabla G. \quad (8)$$

$$\nabla_{\exp tv_* u} \exp tv_* u = \nabla H. \quad (9)$$

Тогда решение (1) с начальными условиями (2) имеет вид (3).

Сформулируем теперь достаточные условия выполнения предложения 1.

Теорема 1. Пусть векторные поля u, v имеют вид

$$u = f a, v = g b, \quad (10)$$

где a, b – гладкие бездивергентные векторные поля, а f, g – гладкие функции на M и выполнены условия

$$\nabla_a a = \nabla_b b = \nabla_a b = \nabla_b a = 0; \quad (11)$$

$$a(f) = b(g) = a(g) = 0.$$

Тогда условия предложения 1 выполняются.

Доказательство. Заметим, что для векторных полей u, v из (10) имеем $\nabla_u u = \nabla_v v = 0$, откуда они являются стационарными решениями (1). Далее

$$[v, a] = g[b, a] - a(g)b = 0. \quad (12)$$

Отсюда имеем

$$\exp tv_* u = \exp tv_* f \exp tv_* a = \exp tv_* fa.$$

Далее получаем

$$\nabla_{\exp tv_* u} v = \nabla_{\exp tv_* fa} gb = \exp tv_* f \nabla_a gb = \exp tv_* f (a(g)b + g \nabla_a b) = 0.$$

Также имеем

$$\begin{aligned} \nabla_{\exp tv_* u} \exp tv_* u &= \nabla_{\exp tv_* fa} \exp tv_* fa = \\ &= \exp tv_* f (\exp tv_* f \nabla_a a + a(\exp tv_* f)a) = \exp tv_* fa (\exp tv_* f)a. \end{aligned}$$

Из (12), используя [5, с. 25], имеем $a(\exp tv_* f) = \exp tv_* a(f) = 0$. Это завершает доказательство.

Пусть теперь векторные поля a, b фиксированы, а функции f, g меняются. Обозначим через $V[a, b]$ пространство, образованное векторными полями u, v вида (10), удовлетворяющими условиям (11). Покажем, что это алгебра Ли. Имеем

$$[fa + gb, f'a + g'b] = (b(f')g - b(f)g')a. \quad (13)$$

Так как $[a, b] = 0$, то $a(b(f)) = b(a(f)) = 0$.

Поэтому векторное поле вида (13) лежит в $V[a, b]$.

С конкретным решением (3) можно связать алгебру Ли, порожденную элементами u, v . Положим

$$w_0 = u, w_1 = [w_0, v] = -b(f)g a, \dots, w_k = [w_{k-1}, v] = (-1)^k b^{(k)}(f)g^k a, \dots$$

Имеем $[w_i, w_j] = 0$, поэтому пространство $L[u, w_0, w_1, \dots, w_k, \dots]$ является алгеброй Ли. Обозначим $V[u, v]$ – замыкание в C^∞ -топологии этой алгебры Ли, очевидно, это подалгебра в $V[a, b]$.

Предложение 2. Алгебры Ли $V[a, b], V[u, v]$ являются разрешимыми. Им соответствуют подгруппы $G[a, b], G[u, v]$ в группе $Diff_\mu^0(M)$, являющиеся вполне геодезическими подмногообразиями в смысле правоинвариантной метрики - кинетической энергии. Векторные поля из этих алгебр Ли задают либо стационарные решения уравнений Эйлера, либо интегрируемые по формуле (3).

Пример 1. Пусть K – компактная группа Ли ранга не меньше 2 (т.е. с максимальным тором T размерности не меньше 2) и размерности не меньше 3. Зададим на группе Ли K биинвариантную риманову метрику. Тогда для ковариантной производной элементов из алгебры Ли группы K имеем [6, с. 121]

$$\nabla_u v = \frac{1}{2}[u, v].$$

Возьмем неколлинеарные векторные поля a, b из алгебры Ли тора T и гладкие функции f, g на K такие, что $a(f) = b(g) = a(g) = 0$. Из предыдущего легко следуют условия (11).

Пример 2. Пусть $M = \mathbf{T}^n, n \geq 3$ (рассматриваем гидродинамику на торе со стандартными координатами $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$). Положим

$$u = \sin k\phi u_k, \quad v = \sin l\phi v_l, \quad (k, u_k) = (l, v_l) = 0 \quad (14)$$

и, кроме того, потребуем

$$(l, u_k) = 0. \quad (15)$$

Здесь u_k, v_l – постоянные векторные поля на торе, а векторы k, l – неколлинеарны. Непосредственно проверяется, что условия (10), (11) выполняются. Вычислим для этого случая алгебру Ли $V[u, v]$. Имеем

$$\begin{aligned} w_{2n-1} &= (-1)^n \langle k, v_l \rangle^{2n-1} \cos k\phi \sin^{2n-1} l\phi u_k, \\ w_{2n} &= (-1)^n \langle k, v_l \rangle^{2n} \sin k\phi \sin^{2n} l\phi u_k, \\ &n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда легко получить общий вид векторного поля из этой алгебры Ли

$$V[u, v] = \left\{ \beta \sin l\phi v_l + \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s \sin(k + sl)\phi u_k \right\}.$$

Здесь при $\beta = 0$ получаются стационарные решения (1), а при $\beta \neq 0$ – решения вида (3).

Примечание. Проведенные рассуждения проходят также для случая некомпактного риманова многообразия M . В этом случае необходимо рассматривать векторные поля, быстро убывающие на бесконечности со всеми производными [3; 8].

Заметим, что в случае некомпактного многообразия M в формулировке теоремы 1 быстрое убывание на бесконечности нужно требовать только для векторных полей u, v , а векторные поля a, b могут быть просто гладкими.

Пример 3. Пусть $M = \mathbf{T}^n \times \mathbf{R}, n \geq 3$ с координатами (ϕ, x) , где ϕ – координаты на \mathbf{T}^n , а x – на \mathbf{R} . Положим

$$u = \sin k\phi \exp(-x^2) u_k, v = \sin l\phi \exp(-x^2) v_l, \quad (16)$$

$$(k, u_k) = (l, v_l) = (l, u_k) = 0.$$

Здесь u_k, v_l – постоянные векторные поля, касающиеся \mathbf{T}^n , т.е. имеющие нулевую \mathbf{R} -компоненту, а векторы k, l неколлинеарны. Непосредственно проверяется, что, если взять $a = u_k, b = v_l, f = \sin k\phi \exp(-x^2), g = \sin l\phi \exp(-x^2)$, то для этого случая выполняется некомпактный аналог теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике. - М.: МЦНМО, 2007.
2. Лукацкий А.М. О применении одного класса бесконечномерных групп Ли в динамике несжимаемой жидкости // Прикладная математика и механика. - 2003. - № 5. - С. 784-794.
3. Лукацкий А.М. Структурно-геометрические свойства бесконечномерных групп Ли в применении к уравнениям математической физики. - Ярославль: Изд-во Ярославского государственного университета, 2010.
4. Зуланке Р., Витген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. - М.: Мир, 1975.
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. - М.: Мир, 1981. - Т. 1.
6. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. - М.: Мир, 1971.
7. Лукацкий А.М. Геометрический подход в динамике сплошной // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2011. - № 165. - С. 26-33.
8. Лукацкий А.М. О геометрии группы диффеоморфизмов, сохраняющих меру некомпактного многообразия // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2005. - № 91. - С. 36-47.

A GEOMETRICAL APPROACH TO SOLUTIONS IN THE HYDRODYNAMICS OF IDEAL FLUID

Lukatsky A.M.

A class of solutions of the Euler equations for an ideal incompressible fluid is described. Its members are obtained from initial conditions by a one-parameter group of diffeomorphisms; they generalize the travelling wave solutions obtained earlier by the author.

Key words: ideal fluid, Euler equations, Levi-Chivitta connection, covariant differentiation.

Сведения об авторе

Лукацкий Александр Михайлович, 1949 г.р., окончил МГУ (1972), доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник института энергетических исследований (ИНЭИ) РАН, автор 92 научных работ, область научных интересов - бесконечномерные группы Ли в применении к уравнениям математической физики.

УДК 514.763.8, 517.956

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ РАБЕЛО

О.И. МОРОЗОВ

Найден класс нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, обладающих представлением нулевой кривизны со структурной алгеброй $sl(2)$. Четыре уравнения из этого класса совпадают с уравнениями, предложенными М.Л. Рабело.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, накрытия, представления нулевой кривизны.

1. Введение

В работе [7] М.Л. Рабело нашел класс уравнений, допускающих псевдосферическое представление или, в терминах [2-5], дифференциальное накрытие со структурной алгеброй $sl(2)$ (в литературе накрытия также называются парами Лакса или представлениями нулевой кривизны). Уравнения из этого класса имеют вид

$$u_{tx} = ((\alpha g + \beta)u_x)_x + g', \quad (1)$$

где $g = g(u)$ - решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$g'' + \mu g = \theta; \quad (2)$$

$\alpha, \beta, \mu, \theta$ - произвольные константы. Автопреобразования Бэклунда для уравнений из этого класса были найдены в работе [1].

При $\alpha = 0$ уравнения (1), (2) эквивалентны относительно контактных преобразований либо уравнению \sin -Gordon $u_{tx} = \sin u$, либо уравнению Лиувилля $u_{tx} = e^u$. В статье [9] было показано, что в случае $\alpha \neq 0$ уравнения из этого класса контактно-эквивалентны одному из следующих уравнений

$$u_{tx} = \frac{1}{2}(u^2)_{xx} + 1; \quad (3)$$

$$u_{tx} = \frac{1}{6}(u^3)_{xx} + u; \quad (4)$$

$$u_{tx} = (e^u)_{xx} - e^u; \quad (5)$$

$$u_{tx} = (\sin u)_{xx} - \sin u. \quad (6)$$

Уравнение (4) известно как уравнение короткого импульса [8]. Уравнение (6) представляет собой обобщенное уравнение \sin -Gordon [6].

В данной статье мы приводим обобщение класса уравнений Рабело (1), (2). Все уравнения из этого нового класса обладают представлением нулевой кривизны со структурной алгеброй $sl(2)$.

2. Обобщение уравнений Рабело

Мы рассматриваем класс уравнений

$$u_{tx} = ((H'' + \kappa_1 H)u_x)_x - \kappa_2^2 H', \quad (7)$$

где $H = H(u)$ - произвольная (гладкая) функция; κ_1 и κ_2 - произвольные константы. Основной результат составляет следующая теорема, доказательство которой получается прямым вычислением.

ТЕОРЕМА. Уравнение (7) является условием совместности переопределенной системы

$$\begin{cases} q_x = & u_x q^2 + \kappa_2 q - \frac{\kappa_1}{4} u_x; \\ q_t = & \left((H'' + \kappa_1 H) u_x - \kappa_2 H' \right) q^2 + \kappa_1 \kappa_2 H q + \frac{\kappa_1}{4} \left((H'' + \kappa_1 H) u_x + \kappa_2 H' \right). \end{cases} \quad (8)$$

В терминах [2-5] система (8) определяет накрытие уравнения (7). Структурная алгебра этого накрытия порождена векторными полями ∂_q , $q\partial_q$, $q^2\partial_q$ и совпадает с алгеброй $sl(2)$.

3. Частные случаи

Покажем, что уравнения (3) - (6) являются частными случаями уравнения (7) при соответствующем выборе функции H и параметра κ_1 .

3.1. Квадратичное уравнение Рабело

Подстановка $H = -\kappa_2^{-2} u$ и $\kappa_1 = -\kappa_2^2$ в уравнение (7) дает уравнение (3), при этом (8) дает его накрытие

$$\begin{cases} q_x = & u_x q^2 + \kappa_2 q - \frac{\kappa_2^2}{4} u_x; \\ q_t = & \left(u u_x + \frac{1}{\kappa_2} \right) q^2 + \kappa_2 u q - \frac{\kappa_2}{4} (\kappa_2 u u_x - 1). \end{cases}$$

3.2. Кубичное уравнение Рабело

При $H = -\frac{1}{2\kappa_2^4} (\kappa_2^2 u^2 + 2)$ и $\kappa_1 = -\kappa_2^2$ уравнение (7) приобретает вид (4), а (8) дает накрытие

$$\begin{cases} q_x = & u_x q^2 + \kappa_2 q - \frac{\kappa_2^2}{4} u_x; \\ q_t = & \frac{1}{2\kappa_2} (\kappa_2 u^2 u_x + 2u) q^2 + \frac{1}{2\kappa_2} (\kappa_2^2 u^2 + 2) q - \frac{\kappa_2}{8} (\kappa_2 u^2 u_x - 2u) \end{cases}$$

уравнения (4).

3.3. exp-уравнение Рабело

При $H = \kappa_2^{-2} e^u$ и $\kappa_1 = \kappa_2^2 - 1$ мы получаем уравнение (5) и его накрытие

$$\begin{cases} q_x = & u_x q^2 + \kappa_2 q + \frac{\kappa_2^2 - 1}{4} u_x; \\ q_t = & \frac{e^u}{\kappa_2} \left((\kappa_2 u_x - 1) q^2 + (\kappa_2^2 - 1) q + \frac{\kappa_2^2 - 1}{4} (\kappa_2 u_x + 1) \right). \end{cases}$$

3.4. sin-уравнение Рабело

Наконец, в случае $H = -\kappa_2^{-2} \cos u$ и $\kappa_1 = 1 - \kappa_2^2$ уравнение (7) переходит в уравнение (6), в то время как (8) дает его накрытие

$$\begin{cases} q_x = u_x q^2 + \kappa_2 q + \frac{1 - \kappa_2^2}{4} u_x; \\ q_t = \frac{1}{\kappa_2} \left((\kappa_2 \cos u u_x - \sin u) q^2 + (\kappa_2^2 - 1) \cos u q + \frac{1 - \kappa_2^2}{4} (\kappa_2 \cos u u_x + \sin u) \right). \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Beals R., Rabelo M., Teneblat K.** Bäcklund transformations and inverse scattering solutions for some pseudo-spherical surface equations. Stud. Appl. Math., 1989. - Т. 81, pp. 125-151.
2. **Krasil' shchik I.S., Vinogradov A.M.** Nonlocal symmetries and the theory of coverings. Acta Appl. Math., 1984. - Т. 2, pp. 79-86.
3. **Krasil' shchik I.S., Lychagin V.V., Vinogradov A.M.** Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations. Gordon and Breach, New York, 1986.
4. **Krasil' shchik I.S., Vinogradov A.M.** Nonlocal trends in the geometry of differential equations: symmetries, conservation laws, and Bäcklund transformations. Acta Appl. Math., 1989. - Т. 15, pp. 161-209.
5. **Krasil' shchik I.S., Vinogradov A.M. (eds.)**. Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics. Transl. Math. Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, 1999.
6. **Lenells J., Fokas A.S.** On a novel integrable generalization of the sine-Gordon equation. J. Math. Phys. - 2010. - Т. 51. - № 023519. 2010.
7. **Rabelo M.L.** On equations which describe pseudospherical surfaces. Stud. Appl. Math., 1989. - Т. 81, pp. 221-248.
8. **Sakovich A., Sakovich S.** The short pulse equation is integrable. J. Phys. Soc. Japan, 2005. - Т. 74, pp. 239-241.
9. **Sakovich A., Sakovich S.** On transformations of the Rabelo equations. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 2007. - Т. 3. - № 086.

ZERO-CURVATURE REPRESENTATION FOR THE GENERALIZED RABELO EQUATION

Morozov O.I.

We find a class of second order nonlinear equations admitting a zero-curvature representation with the structure algebra $sl(2)$. Four of equations from this class coincide with equations introduced by M.L. Rabelo.

Key words: differential equations, coverings zero-curvature representation.

Сведения об авторе

Морозов Олег Игоревич, 1963 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1986), член Московского математического общества, доктор физико-математических наук, доцент МГТУ ГА, научный сотрудник института математики и статистики Университета Тромсё (Норвегия), автор 52 научных работ, область научных интересов - дифференциальные уравнения, симметрии, псевдогруппы Ли.

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА МУРАВЬИНЫХ КОЛОНИЙ К ЗАДАЧЕ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ СИСТЕМАМИ¹

А.В. ПАНТЕЛЕЕВ, Е.А. АЛЁШИНА

Рассмотрен вопрос применения метода муравьиных колоний к задачам оптимизации нелинейных дискретных детерминированных систем. Для решения задач указанного типа разработано алгоритмическое и программное обеспечение, работоспособность и эффективность которого продемонстрирована на тестовых примерах, представляющих собой системы управления сложной структуры.

Ключевые слова: оптимизация нелинейных дискретных детерминированных систем.

Введение

Непрерывная модификация метода муравьиных колоний является развитием концепции метода муравьиных колоний (Ant Colony Optimization, ACO), предложенной М. Dorigo [1]. Метод моделирует действия колонии муравьёв при поиске оптимального маршрута в изменяющейся среде обитания, таким образом он является методом «роевого интеллекта». Использование таких методов становится актуальным для решения прикладных задач оптимального управления, в частности задач проектирования сложных авиационно-космических комплексов.

Авторами статьи разработано программное обеспечение для решения задач оптимизации нелинейных дискретных детерминированных систем с помощью непрерывной модификации метода муравьиных колоний.

1. Постановка задачи

Поведение модели объекта управления описывается разностным уравнением

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad (1)$$

где t – дискретное время, $t \in T = [0, 1, \dots, N-1]$; x – вектор состояния системы, $x \in R^n$; u – вектор управления, $u \in U(t) \subseteq R^q$; $U(t)$ – множество допустимых значений управления, для каждого значения t представляющее собой прямое произведение отрезков $[a_i(t), b_i(t)]$, $i = 1, 2, \dots, q$; число шагов дискретного времени N задано; $f(t, x, u) = (f_1(t, x, u), \dots, f_n(t, x, u))^T$ – непрерывная вектор-функция.

Начальное состояние задано

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

Правый конец траектории $x(N)$ свободен. Предполагается, что при управлении используется информация только о дискретном времени t , т.е. применяется программное управление. Таким образом, рассматриваемая система управления является разомкнутой по состоянию.

Множество допустимых процессов $D(0, x_0)$ – это множество пар $d = (x(\cdot), u(\cdot))$, включающих траекторию $x(\cdot) = \{x_0, x(1), \dots, x(N)\}$ и допустимое управление $u(\cdot) = \{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$, где $u(t) \in U(t)$, удовлетворяющих уравнению состояния (1) и начальному условию (2).

На множестве допустимых процессов $D(0, x_0)$ определен функционал качества управления

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00892-а)

$$I(d) = \sum_{t=0}^{N-1} f^0(t, x(t), u(t)) + F(x(N)), \quad (3)$$

где $f^0(t, x(t), u(t))$, $F(x)$ – заданные непрерывные функции.

Требуется найти такую пару $d^* = (x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathbf{D}(0, x_0)$, что

$$I(d^*) = \min_{d \in \mathbf{D}(0, x_0)} I(d). \quad (4)$$

Искомые элементы пары d^* : траектория $x^*(\cdot) = \{x_0, x^*(1), \dots, x^*(N)\}$ и управление $u^*(\cdot) = \{u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)\}$ называются соответственно оптимальной траекторией и оптимальным управлением.

2. Стратегия поиска решения

При использовании метода муравьиных колоний для решения задачи (1)-(4) будем оптимизировать управление $u(\cdot)$. Позиция муравья под номером j на k -й итерации будет представлять собой вектор-строку $u^{j,k} = (u^{j,k}(0), u^{j,k}(1), \dots, u^{j,k}(N-1))$. На каждой итерации будет формироваться новая позиция муравья $u^{j,k+1} = (u^{j,k+1}(0), u^{j,k+1}(1), \dots, u^{j,k+1}(N-1))$, которую необходимо будет оценить с помощью критерия (3) - целевой функции метода муравьиных колоний. Для получения значения целевой функции потребуется: а) найти вектор $x^{j,k+1} = (x_0, x^{j,k+1}(1), \dots, x^{j,k+1}(N))$ последовательных состояний системы, соответствующий управлению $u^{j,k+1}$, из уравнения состояния (1) с учетом условия (2); б) вычислить значение критерия (3), соответствующее $u^{j,k+1}$ и $x^{j,k+1}$ по формуле

$$I(d^{j,k+1}) = \sum_{t=0}^{N-1} f^0(t, x^{j,k+1}(t), u^{j,k+1}(t)) + F(x^{j,k+1}(N)), \quad (5)$$

где $d^{j,k+1} = (x^{j,k+1}(\cdot), u^{j,k+1}(\cdot))$ – процесс из множества допустимых процессов $\mathbf{D}(0, x_0)$; $x^{j,k+1}(t), t = 0, \dots, N$ определяется уравнением состояния (1) и начальным условием (2)

$$x^{j,k+1}(t) = \begin{cases} f(t-1, x^{j,k+1}(t-1), u^{j,k+1}(t-1)), & t = 1, \dots, N, \\ x_0, & t = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Рассмотрим процесс поиска решений подробнее. На каждой итерации на множестве \mathbf{D} поиск решения производят m муравьев. Роль памяти муравьиной колонии играет архив решений – таблица, содержащая r лучших найденных решений. Величина r называется размером архива решений.

На каждой k -й итерации муравей с номером j по данным из архива решений (начальные значения координат генерируются с помощью равномерного распределения) должен получить новое решение $\tilde{u}^j = (\tilde{u}_1^j, \dots, \tilde{u}_n^j)^T$. При этом реализуется вероятностный выбор на основе известной плотности вероятности, представляющей собой гауссовское ядро. Для i -й координаты произвольной точки u плотность вероятности имеет вид

$$G(u_i) = \sum_{l=1}^r \omega_l g_l(u_i) = \sum_{l=1}^r \omega_l \frac{1}{\sigma_l^l \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(u_i - \mu_l^l)^2}{2(\sigma_l^l)^2}\right), \quad (7)$$

где $a_i \leq u_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, n$; ω_l , $l = 1, \dots, r$ – весовой коэффициент; $g_l(u_i)$ – гауссовская плотность вероятности, определяемая математическим ожиданием μ_l^l и среднеквадратическим отклонением σ_l^l . В результате моделирования для каждого муравья получаем новое решение, каждая

компонента которого порождается соответствующей плотностью $G(u_i)$, $i = 1, \dots, n$, изменяющейся при переходе от одного поколения к другому.

Данные о текущем поколении муравьев заносятся в архив решений, точки в котором затем упорядочиваются по возрастанию соответствующих значений целевой функции. Далее проводится селекция, в результате которой размер архива решений остается неизменным. Решения из архива используются для нахождения векторов ω , μ^j , σ^j , которые применяются для формирования плотностей $g_j(u_i)$, $i = 1, \dots, n$, определяющих движение муравьев в процессе поиска решения. Обновление данных в архиве соответствует процессам изменения уровня феромонов на путях следования муравьев в дискретном случае [1].

Для выбранной муравьем с номером j плотности вероятности $g_{j^*}(u_i)$ вектор математического ожидания μ^{j^*} принимается равным координатам точки с номером j^*

$$\mu_i^{j^*} = u_i^{j^*}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

а среднеквадратическое отклонение вычисляется следующим образом

$$\sigma_i^{j^*} = \xi \cdot \sum_{l=1}^r \frac{|u_i^l - u_i^{j^*}|}{r-1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

где $\xi > 0$ – параметр алгоритма. С ростом ξ замедляется сходимость [2], так как при этом в процессе поиска новые решения меньше тяготеют к решениям, найденным ранее. Эффект параметра ξ аналогичен процессу испарения феромонов в дискретном случае [1; 4] и проявляется следующим образом: плохие решения забываются, а поиск перемещается к новым точкам множества D , отличным от хранящихся в архиве.

Каждой плотности вероятности $g_l(u_i)$, $l = 1, \dots, r$ ставится в соответствие весовой коэффициент

$$\omega_l = \frac{1}{qr\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(l-1)^2}{2q^2r^2}\right), \quad (10)$$

причем $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_r$, т.е. чем меньше номер решения в архиве, тем больше вероятность, что оно будет выбрано.

На практике генерирование новой координаты u_i происходит в два этапа. Сначала с помощью метода рулетки на основе ω_l выбирается плотность вероятности $g_{j^*}(u_i)$. На втором этапе генерируется значение \tilde{u}_i^j в соответствии с выбранной гауссовской плотностью $g_{j^*}(u_i)$, определяемой параметрами $\mu_i^{j^*}$, $\sigma_i^{j^*}$. Здесь j^* – номер плотности вероятности, выбранной муравьем с номером j .

В результате получается множество решений $\{u^1, \dots, u^r, \tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^m\}$. Среди них выбираются r наилучших по величине функции, а остальные отбрасываются (объем архива сохраняется). Оставшиеся в архиве решения оказывают дальнейшее влияние на процесс поиска.

3. Алгоритм

Шаг 1. Расчет весов и вероятностей выбора решений.

Шаг 1.1. Задать число муравьев m , размер архива r , максимальное число поколений K , параметры q и ξ , используемые при вычислении скорости частицы. Положить номер поколения $k = 0$ (для сокращения записи далее в индексах не указывается).

Шаг 1.2. Сгенерировать r точек $\{u^1, \dots, u^r\}$ на множестве D , используя равномерное распределение. В каждой точке подсчитать значение целевой функции и упорядочить точки по величине целевой функции. Занести результат в архив решений.

Шаг 2. Расчет весов и вероятностей выбора решений.

Шаг 2.1. Для каждого решения u^l , $l = 1, \dots, r$ подсчитать вес ω_l в соответствии с (10).

Шаг 2.2. Вычислить вероятность p_l выбора l -й гауссовской плотности вероятности

$$p_l = \frac{\omega_l}{\sum_{s=1}^r \omega_s}, \quad l = 1, \dots, r.$$

Шаг 3. Выбор плотности вероятности.

Шаг 3.1. Положить $j = 1$.

Шаг 3.2. Методом рулетки выбрать плотность вероятности $g_{j^*}(u_i)$.

Шаг 4. Генерация вектора \tilde{u}^j .

Шаг 4.1. Положить $i = 1$.

Шаг 4.2. Вычислить математическое ожидание $\mu_i^{j^*}$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma_i^{j^*}$ в соответствии с (8) и (9).

Шаг 4.3. Генерировать случайную величину \tilde{u}_i^j на отрезке $[a_i, b_i]$ согласно плотности вероятности

$$g_{j^*}(u_i) = \frac{1}{\sigma_i^{j^*} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(u_i - \mu_i^{j^*})^2}{2(\sigma_i^{j^*})^2}\right). \quad (11)$$

Шаг 4.4. Если $i = n$, сформировать новое решение $\tilde{u}^j = (\tilde{u}_1^j, \dots, \tilde{u}_n^j)^T$ и перейти к *Шагу 5*. Если $i < n$, положить $i = i + 1$ и перейти к *Шагу 4.2*.

Шаг 5. Если $j = m$, процесс поиска решения поколением муравьев завершить и перейти к *Шагу 6*. Если $j < m$, положить $j = j + 1$ и перейти к *Шагу 3.2*.

Шаг 6. Сформировать новое поколение.

Шаг 6.1. Вычислить значения функции для новых точек $f(\tilde{u}^1), \dots, f(\tilde{u}^m)$.

Шаг 6.2. Среди точек $u^1, \dots, u^r, \tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^m$

- а) выбрать r наилучших;
- б) упорядочить их по величине функции;
- в) занести в архив решений.

Шаг 7. Проверка условий окончаний процесса поиска:

- если $k < K$, положить $k = k + 1$ и перейти к *Шагу 2*;
- если $k = K$, процесс закончить. В качестве решения задачи выбрать точку x^1 , которой, исходя из алгоритма, соответствует наименьшее значение целевой функции.

4. Программное обеспечение

На основе разработанного алгоритма сформировано программное обеспечение на языке C# в среде Microsoft Visual Studio 2005, включающее графический пользовательский интерфейс, аналогичный интерфейсу программы для поиска оптимального управления дискретной детерминированной системой, рассмотренной в [6]. С помощью программного обеспечения пользователь может выполнять следующие действия:

- вводить параметры постановки задачи;
- задавать параметры метода;
- просматривать результат решения задачи в виде графиков;
- анализировать полученный результат;
- сохранять результат в памяти компьютера для последующего анализа.

5. Решение тестовых примеров

Пример 1. Рассмотрим задачу оптимального управления, описанную в [5]. Система описывается конечно-разностными уравнениями:

$$\begin{aligned}
 x_1(t+1) &= \frac{x_1(t)}{1+0,01 u_1(t)(3+u_2(t))}; \\
 x_2(t+1) &= \frac{x_2(t)+u_1(t)x_1(t+1)}{1+u_1(t)(1+u_2(t))}; \\
 x_3(t+1) &= \frac{x_3(t)}{1+0,01 u_2(t)(1+u_3(t))}; \\
 t &= 0,1,\dots,N-1.
 \end{aligned}$$

Начальные условия $x(0) = [2 \ 5 \ 7]^T$.

Ограничения на управление $0 \leq u_1(t) \leq 4$; $0 \leq u_2(t) \leq 4$; $0 \leq u_3(t) \leq 0,5$.

Критерий оценки качества управления

$$\begin{aligned}
 I &= x_1^2(t_N) + x_2^2(t_N) + x_3^2(t_N) + \\
 &+ \left[\left(\sum_{t=1}^N x_1^2(t-1) + x_2^2(t-1) + 2u_3^2(t-1) \right) \left(\sum_{t=1}^N x_3^2(t-1) + 2u_1^2(t-1) + 2u_2^2(t-1) \right) \right]^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Необходимо минимизировать критерий.

В [5] рассмотрены случаи $N = 20$, $N = 50$ и $N = 100$.

Ниже приведены результаты решения задачи с помощью разработанного программного обеспечения для $N = 20$. При решении тестового примера использовались следующие значения параметров алгоритма: $K = 100$; $m = 30$; $r = 500$; $\xi = 0,85$; $q = 0,01$.

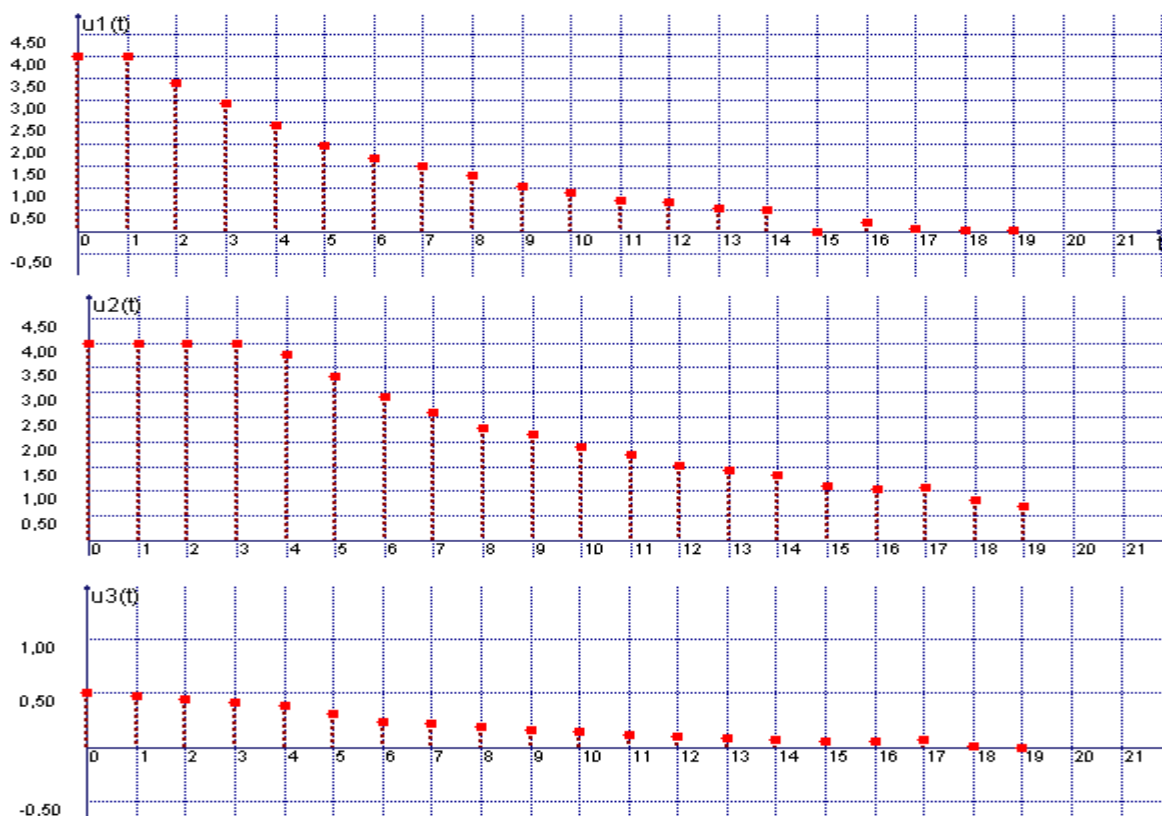


Рис. 1. Оптимальное управление, найденное с использованием метода муравьиных колоний

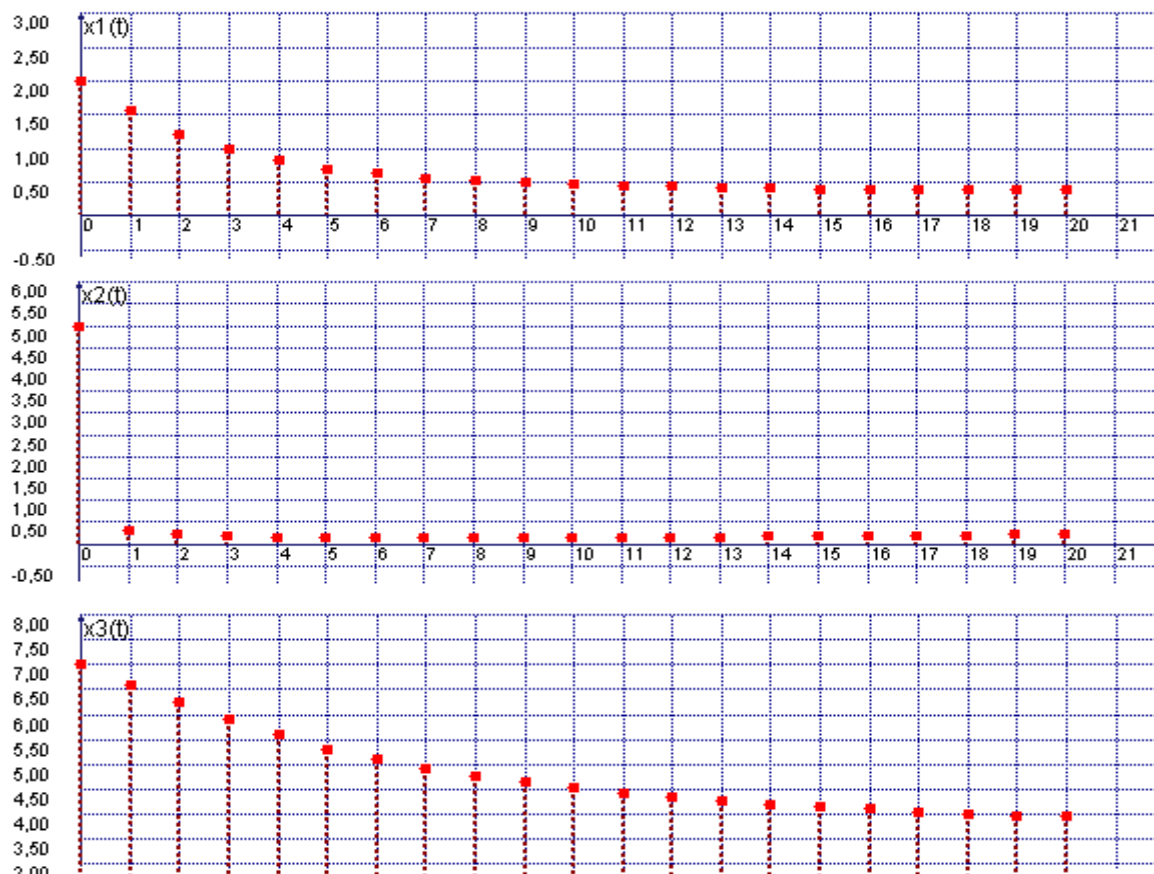


Рис. 2. Оптимальная траектория, соответствующая найденному управлению

Значение критерия, соответствующее найденному оптимальному управлению, равно 208,974533, оно меньше значения, найденного с помощью метода итеративного динамического программирования, приведенного в [5].

Разработанное программное обеспечение позволяет провести серию опытов и рассчитать статистические характеристики получаемой выборки значений. При проведении опытов запускалась серия из 100 решений (для $N = 20$) или 30 решений (для $N = 50$ и $N = 100$) одной и той же задачи с одними и теми же значениями параметров. Для полученной выборки $\{I^1, I^2, \dots, I^{100}\}$

вычислялись выборочное среднее $\bar{I} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} I^i$ и среднеквадратическое отклонение $\bar{\sigma}_I = \sqrt{\bar{S}_{100}}$,

$$\bar{S}_{100} = \frac{1}{99} \sum_{i=1}^{100} (I^i - \bar{I})^2.$$

При проведении серий опытов использовались следующие значения параметров алгоритма: для $N = 20$: $K = 100$, $m = 30$, $r = 50$, $\xi = 0,85$, $q = 0,01$; для $N = 50$: $K = 100$, $m = 30$, $r = 100$, $\xi = 0,5$, $q = 0,1$; для $N = 100$: $K = 100$, $m = 30$, $r = 300$, $\xi = 0,8$, $q = 0,01$.

В табл. 1 сведены результаты серий опытов при разных значениях времени функционирования системы N , а также для сравнения приведены результаты из [5], полученные с использованием метода итеративного динамического программирования.

Таблица 1

N	\bar{I}	$I_{\text{наим}}$	$\bar{\sigma}_I$	Значение из [5]
20	208,98633	208,91668	0,06615	209,26937
50	240,43818	240,43382	0,00266	240,917
100	262,36345	261,49076	0,40961	258,33922

Алгоритм муравьиных колоний при $N = 20$ и $N = 50$ в среднем находит значения критерия, меньшие, чем приведенные в [5]. При $N = 100$ полученные результаты хуже, чем результаты, найденные с помощью метода итеративного динамического программирования. Возможно, при более тщательном подборе параметров при $N = 100$ можно получить лучшие результаты.

Пример 2. Рассмотрим еще одну задачу оптимального управления из [5]. Система описывается конечно-разностными уравнениями:

$$x(1) = x(0)^{u(0)}; x(2) = [1 + u(1)]x(1); x(3) = x(2) + u(2).$$

Начальное условие $x(0) = 15$, ограничение на управление $-1 \leq u(t) \leq 1, t = 0, 1, 2$.

Критерий оценки качества управления

$$I = \left[x^2(0) + x^2(1) + (2x^2(2) + x^2(3)) \exp(x^2(1)) \right] \left[50 + u^2(0) + (u^2(1) + u^2(2)) \exp(u^2(0)) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Необходимо минимизировать критерий.

При решении задачи использовались следующие значения параметров алгоритма: $K = 100$; $m = 30$; $r = 50$; $\xi = 0,85$; $q = 0,01$. В табл. 2 содержатся результаты, полученные с помощью метода итеративного динамического программирования, приведенные в [5], а также результаты, полученные авторами с применением разработанного программного обеспечения. По табл. 2 видим, что по значению критерия оценки качества управления результаты полностью совпадают.

Таблица 2

	$u(t-1)$			$x(t)$			I
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	
[5]	-0,427163	-0,098968	-0,082382	0,314498	0,283373	0,200991	1596,4796778
Авторы	-0,427163	-0,098967	-0,082383	0,314497	0,283373	0,200990	1596,4796778

Заключение

Использование модификации метода муравьиных колоний для непрерывных пространств поиска решений при решении задач оптимального управления дискретными детерминированными системами сложной структуры является эффективным по сравнению с другими методами оптимизации, что позволяет в дальнейшем применять его для решения прикладных задач оптимального управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Dorigo M., Stutzle T.** Ant colony optimization. - MIT Press, 2004.
2. **Dorigo M., Socha K.** Ant colony optimization for continuous domains // European Journal of Operational Research 185 (2008), pp. 1155-1173.
3. **Алёшина Е.А.** Применение метода муравьиных колоний к задаче поиска условного глобального минимума функции многих переменных // Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения: межвуз. сб. науч. тр. - М.: МИРЭА, 2011. - С. 63-68.
4. **Пантелеев А.В., Алёшина Е.А.** Разработка алгоритмического и программного обеспечения метода муравьиных колоний // Научный Вестник МГТУ ГА, серия Прикладная математика. Информатика. - 2008. - С. 38-48.
5. **Luus R.** Iterative Dynamic Programming. - Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, London, UK: Chapman & Hall/CRC, 2000.
6. **Пантелеев А.В., Алёшина Е.А.** Метод частиц в стае в кн.: Метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума. - М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. - Гл. 4. - С. 85-106.

ANT COLONY CONTINUOUS OPTIMIZATION APPLIED TO OPTIMAL CONTROL OF DISCRETE DETERMINISTIC SYSTEM

Panteleyev A.V., Alyoshina E.A.

We consider the application of Ant Colony Method to the optimal control of discrete deterministic system. The special software for solving such problems is developed. The efficiency of this software is demonstrated on some test examples of control systems with a sophisticated structure.

Key words: optimization, nonlinear discrete determined systems.

Сведения об авторах

Пантелеев Андрей Владимирович, 1955 г.р., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана (1978), доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики МАИ (национального исследовательского университета), автор более 160 научных работ, область научных интересов – методы синтеза оптимальных нелинейных систем управления, методы оптимизации.

Алёшина Екатерина Александровна, окончила МАИ (2011), аспирантка МАИ, автор 2 научных работ, область научных интересов – методы оптимизации, численные методы.

УДК 681.514

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПУАССОНОВСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ¹

К.А. РЫБАКОВ

Статья представлена доктором технических наук, профессором Самохиным А.В.

В статье рассматриваются стохастические системы управления при импульсных воздействиях, образующих пуассоновские потоки событий и приводящих к разрывам траекторий системы. Решается задача нахождения плотности вероятности вектора состояния. В основе предлагаемого метода лежит использование спектральной формы математического описания систем управления.

Ключевые слова: задача анализа, импульсные воздействия, пуассоновский поток событий, пуассоновский процесс, спектральный метод, стохастическая система, уравнение Колмогорова-Феллера.

Введение

Для описания математических моделей различных явлений, например, процессов в сложных технических системах (управление движущимися объектами, радиолокационные и измерительные системы, электрические цепи с импульсными источниками), в финансовой математике (описание динамики курсов акций, страхование), в математической биологии и медицине (управление биомассой, действие лекарственных препаратов) широкое применение нашли стохастические дифференциальные уравнения с пуассоновской составляющей [1-4]. Такие модели, используя терминологию теории управления, называют стохастическими системами с импульсными воздействиями, а также системами со случайным периодом квантования. Наличие импульсных воздействий приводит к тому, что в случайные моменты времени вектор состояния системы получает случайные приращения, образующие пуассоновский поток событий.

В статье приводятся формы математического описания стохастических систем рассматриваемого класса, описывается разработанный метод приближенного анализа – нахождения вероятностных характеристик вектора состояния системы с помощью спектральной формы математического описания систем управления [5-8]. Спектральный метод анализа состоит в приближенном решении интегро-дифференциального уравнения в частных производных, описывающего эволюцию плотности вероятности вектора состояния (уравнение Колмогорова-Феллера [1; 2]), с помощью представления искомой плотности вероятности в виде функционального ряда по подходящему базису.

Преимущества предлагаемого подхода состоят в простоте реализации и универсальности, а именно, возможности решения задачи анализа для линейных и нелинейных, одномерных и многомерных моделей стохастических систем, для различных законов распределения величин приращений вектора состояния и их интенсивностей. Апробация предлагаемого метода проводится на примерах анализа воздействия импульсов на электрические цепи.

1. Постановка задачи

Приведем различные варианты описания стохастических систем с разрывами траекторий, образующими пуассоновский поток событий. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито с пуассоновской составляющей [3]

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где $X = [X_1 \dots X_n]^T \in R^n$ – вектор состояния; $t \in T$, $T = [t_0, t_1]$ – отрезок времени функционирования системы; $f(t, x): T \times R^n \rightarrow R^n$ – вектор-функция размерности $n \times 1$; $\sigma(t, x): T \times R^n \rightarrow R^{n \times s}$ –

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00892-а).

матричная функция размеров $n \times s$; $W(t)$ – s -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния X_0 ; $Q(t)$ – общий пуассоновский процесс, заданный в форме

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k.$$

В правой части последнего равенства $P(t)$ – пуассоновский процесс; Δ_k – независимые случайные величины из R^n , распределение которых задано плотностью вероятности $\psi(\tau_k, \Delta)$, т.е. вектор состояния X получает случайные приращения в моменты времени τ_1, τ_2, \dots

$$X(\tau_k) = X(\tau_k - 0) + \Delta_k.$$

Если величина приращения зависит от вектора состояния, то используется условная плотность вероятности $\psi(\tau_k, x | z)$, характеризующая распределение $X(\tau_k)$ при условии $X(\tau_k - 0) = z$. В частном случае $\psi(\tau_k, x | z) = \psi(\tau_k, x - z)$.

Пуассоновский поток событий и, следовательно, моменты времени τ_1, τ_2, \dots , а также пуассоновский процесс $P(t)$ определяются интенсивностью $\lambda(t)$.

Заметим также, что пуассоновская составляющая $dQ(t)$ может быть формально записана в виде [1; 2]

$$dQ(t) = \sum_k \Delta_k \delta(t - \tau_k) dt,$$

где $\delta(t)$ – асимметричная дельта-функция.

Для описания математической модели стохастической системы с пуассоновской составляющей может применяться уравнение Колмогорова-Феллера – интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее эволюцию плотности вероятности $\varphi(t, x)$ вектора состояния (в случае, если такая плотность существует)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x) \varphi(t, x)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x) \varphi(t, x)] - \\ & - \lambda(t) \varphi(t, x) + \lambda(t) \int_{R^n} \psi(t, x | z) \varphi(t, z) dz, \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \end{aligned} \quad (2)$$

где $g_{ij}(t, x)$ – элементы матрицы $g(t, x) = \sigma(t, x) \sigma^T(t, x)$; $\varphi_0(x)$ – плотность вероятности начального состояния X_0 .

Существуют и другие формы записи математической модели стохастических систем с пуассоновской составляющей [4], но далее они не используются.

Задача анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей заключается в нахождении вероятностных характеристик вектора состояния (плотности вероятности моментных характеристик) в соответствии с заданной математической моделью.

2. Спектральный метод анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей

Спектральный метод анализа базируется на применении спектральной формы математического описания систем управления [5]. В основе этого подхода лежит представление функций их спектральными характеристиками – упорядоченными совокупностями коэффициентов разложения в ряды по подходящей системе ортонормированных или биортонормированных функций. Применение спектральной формы математического описания позволяет перейти от операторных уравнений (в данном случае интегро-дифференциального уравнения (2)) к алгебраическим (для коэффициентов разложения), которые представляются в матричной форме. Специфика задач и методика формирования систем ортонормированных функций приводят к необходи-

мости использовать математический аппарат теории многомерных матриц, который в достаточном объеме изложен в [6; 7]. Там же содержатся определения спектральных характеристик и спектральных преобразований, их свойства.

Для применения спектральной формы математического описания удобнее использовать операторную форму записи уравнения (2)

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t, x) - \mathcal{L}\varphi(t, x) + \mathcal{H}\varphi(t, x), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \quad (3)$$

где линейные операторы \mathcal{A} , \mathcal{L} и \mathcal{H} определяются выражениями

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\varphi(t, x) &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x)\varphi(t, x)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x)\varphi(t, x)], \\ \mathcal{L}\varphi(t, x) &= \lambda(t)\varphi(t, x), \quad \mathcal{H}\varphi(t, x) = \lambda(t) \int_{R^n} \psi(t, x | z)\varphi(t, z) dz. \end{aligned}$$

Оператор \mathcal{A} называют оператором Фоккера-Планка-Колмогорова, \mathcal{L} - оператор умножения, \mathcal{H} - оператор Фредгольма.

Пусть $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ - ортонормированный базис пространства $L_2(T \times R^n)$, причем функции $e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)$ порождаются всевозможными произведениями функций, образующих ортонормированные базисы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ пространств $L_2(T)$ и $L_2(R^n)$ соответственно, т.е. $e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) = q(i_0, t)p(i_1, \dots, i_n, x)$, $i_0, i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots$

Напомним [6], что спектральной характеристикой некоторой функции $z(t, x)$, определенной относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$, называется $(n+1)$ -мерная бесконечная матрица $Z(n+1, 0)$ с элементами

$$\begin{aligned} z_{i_0 i_1 \dots i_n} &= (e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), z(t, x))_{L_2(T \times R^n)} = \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^n} e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) z(t, x) dt dx, \\ & i_0, i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

т.е. $z_{i_0 i_1 \dots i_n}$ - коэффициенты разложения функции $z(t, x)$ в ряд по функциям базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$, обозначение $\mathbb{S}[z(t, x)] = Z(n+1, 0)$. Спектральная характеристика плотности вероятности называется обобщенной характеристической функцией.

Применяя спектральное преобразование \mathbb{S} (отображение, ставящее в соответствие функции ее спектральную характеристику) к левой и правой частям уравнения (3), получаем

$$\mathbb{S} \left[\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \Big|_{\varphi(t_0, x) = \varphi_0(x)} \right] = \mathbb{S}[\mathcal{A}\varphi(t, x)] - \mathbb{S}[\mathcal{L}\varphi(t, x)] + \mathbb{S}[\mathcal{H}\varphi(t, x)]$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \mathbb{S} \left[\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \Big|_{\varphi(t_0, x) = \varphi_0(x)} \right] &= -\sum_{i=1}^n \mathbb{S} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x)\varphi(t, x)] \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{S} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x)\varphi(t, x)] \right] - \\ & - \mathbb{S}[\lambda(t)\varphi(t, x)] + \mathbb{S} \left[\lambda(t) \int_{R^n} \psi(t, x | z)\varphi(t, z) dz \right]. \end{aligned}$$

Согласно свойствам спектрального преобразования функций и линейных операторов имеем

$$\mathbb{S} \left[\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \Big|_{\varphi(t_0, x) = \varphi_0(x)} \right] = P(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0),$$

где $P(n+1, n+1) = \mathcal{P}(n+1, n+1) + (q(1, 0; t_0) \cdot q^T(1, 0; t_0)) \otimes E(n, n)$.

В этих соотношениях $\mathcal{P}(n+1, n+1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени [6], определенная относительно системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$; $\Phi(n+1, 0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(t, x)$ вектора состояния X (обобщенная характеристическая функция), определенная относительно той же базисной системы; $E(n, n)$ – $2n$ -мерная единичная матрица; $q(1, 0; t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$ при $t = t_0$

$$q(1, 0; t_0) = [q(0, t_0) \quad q(1, t_0) \quad q(2, t_0) \quad \dots]^T.$$

Через $\Phi_0(n, 0)$ обозначена спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0 , определенная относительно системы $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^\infty$. Это означает, что $\Phi_0(n, 0)$ – n -мерная бесконечная матрица с элементами

$$\varphi_{0i_1 \dots i_n} = (p(i_1, \dots, i_n, x), \varphi_0(x))_{L_2(R^n)} = \int_{R^n} p(i_1, \dots, i_n, x) \varphi_0(x) dx, \quad i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Далее

$$\mathbb{S}[\mathcal{A}\varphi(t, x)] = A(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0);$$

$$\mathbb{S}[\mathcal{L}\varphi(t, x)] = \Lambda(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0); \quad \mathbb{S}[\mathcal{H}\varphi(t, x)] = H(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0),$$

где $A(n+1, n+1)$, $\Lambda(n+1, n+1)$ и $H(n+1, n+1)$ – спектральные характеристики линейных операторов \mathcal{A} , \mathcal{L} и \mathcal{H} соответственно.

Спектральная характеристика линейного оператора \mathcal{A} – это $2(n+1)$ -мерная бесконечная матрица $A(n+1, n+1)$, элементы которой определяются соотношением

$$a_{i_0 i_1 \dots i_n j_0 j_1 \dots j_n} = (e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), \mathcal{A}e(j_0, j_1, \dots, j_n, t, x))_{L_2(T \times R^n)} = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^n} e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) \mathcal{A}e(j_0, j_1, \dots, j_n, t, x) dt dx, \quad i_0, i_1, \dots, i_n, j_0, j_1, \dots, j_n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Спектральные характеристики $\Lambda(n+1, n+1)$ и $H(n+1, n+1)$ линейных операторов \mathcal{L} и \mathcal{H} определяются аналогично.

Одно из преимуществ спектральной формы математического описания систем управления состоит в развитом алгоритмическом обеспечении: явным и рекуррентным формулам для расчета спектральных характеристик линейных операторов, соответствующих элементарным звеньям систем управления, для различных базисных систем [5–10]. Это операторы умножения, дифференцирования и интегрирования. Поэтому спектральную характеристику $A(n+1, n+1)$ линейного оператора \mathcal{A} целесообразно представлять следующим образом [6]

$$A(n+1, n+1) = - \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i(n+1, n+1) \cdot F_i(n+1, n+1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1) \cdot G_{ij}(n+1, n+1), \quad (7)$$

где $\mathcal{P}_i(n+1, n+1)$ и $\mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1)$ – спектральные характеристики операторов дифференцирования первого и второго порядков по координатам x_i и x_j , а через $F_i(n+1, n+1)$ и $G_{ij}(n+1, n+1)$ обозначены спектральные характеристики операторов умножения на функции $f_i(t, x)$ и $g_{ij}(t, x)$ соответственно; $i, j = 1, 2, \dots, n$. Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$.

Таким образом

$$P(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0) = A(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) - \\ - L(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) + H(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0)$$

или

$$(P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + L(n+1, n+1) - H(n+1, n+1)) \cdot \Phi(n+1, 0) = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0). \quad (8)$$

Эти уравнения, как и в случае отсутствия пуассоновской составляющей, будем называть уравнениями обобщенной характеристической функции [6].

Они представляют собой матричную запись системы линейных неоднородных алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются элементы $\varphi_{i_0 i_1 \dots i_n}$ матрицы $\Phi(n+1, 0)$ – коэффициенты разложения плотности вероятности $\varphi(t, x)$ в функциональный ряд по функциям базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$. Их решение записывается в форме

$$\Phi(n+1, 0) = (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + L(n+1, n+1) - H(n+1, n+1))^{-1} \cdot \\ \cdot (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0)). \quad (9)$$

С учетом (7) это решение можно представить так

$$\Phi(n+1, 0) = (P(n+1, n+1) + \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i(n+1, n+1) \cdot F_i(n+1, n+1) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1) \cdot G_{ij}(n+1, n+1) + L(n+1, n+1) - H(n+1, n+1))^{-1} \cdot (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0)).$$

Отметим, что более детальное представление для некоторых спектральных характеристик, входящих в уравнения обобщенной характеристической функции, дано в [6].

После нахождения обобщенной характеристической функции $\Phi(n+1, 0)$ плотность вероятности $\varphi(t, x)$ вектора состояния может быть представлена в виде ряда

$$\varphi(t, x) = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), \quad (t, x) \in T \times R^n. \quad (10)$$

Представление решения задачи анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей рядом (10) носит скорее теоретический характер. На практике получить всю совокупность коэффициентов разложения функции $\varphi(t, x)$ в общем случае вряд ли возможно. Для этого требуется, чтобы многомерная матрица $P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + L(n+1, n+1) - H(n+1, n+1)$ или ее сечения и структура имели специальный вид [6], например, треугольный или ленточный. Поэтому далее будем говорить о приближенном решении задачи анализа, т.е. о представлении решения в виде частичной суммы

$$\varphi(t, x) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \dots \sum_{i_n=0}^{L_n-1} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), \quad (11)$$

где числа L_0, L_1, \dots, L_n – порядки усечения спектральных характеристик. Индексы в формулах (4)–(6) в этом случае принимают лишь конечное число значений: $i_0, j_0 = 0, 1, \dots, L_0 - 1$, $i_1, j_1 = 0, 1, \dots, L_1 - 1$, ..., $i_n, j_n = 0, 1, \dots, L_n - 1$; все перечисленные спектральные характеристики будут конечными матрицами, а уравнение (8) – матричная запись системы конечного числа линейных алгебраических уравнений (число уравнений и число неизвестных: $L = L_0 \cdot L_1 \dots L_n$).

По найденной спектральной характеристике $\Phi(n+1, 0)$ могут быть определены маргинальные плотности вероятности (при $n > 1$) и моментные характеристики вектора состояния с использованием свойств спектральных характеристик линейных функционалов [11]. Для определения маргинальных плотностей вероятности спектральным методом достаточно, чтобы функ-

ции базисной системы $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ порождались всевозможными произведениями функций базисных систем $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}, \dots, \{p_n(i_n, x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(R)$, т.е. $p(i_1, \dots, i_n, x) = p_1(i_1, x_1) \cdots p_n(i_n, x_n)$, $i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots$. В качестве базисных систем $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}, \dots, \{p_n(i_n, x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$ могут применяться подходящие для конкретных задач системы ортонормированных функций: полиномиальные, тригонометрические, кусочно-постоянные и др. [5-10; 12].

3. Примеры анализа воздействия импульсов на электрические цепи

Рассмотрим задачу определения вероятностных характеристик напряжения на конденсаторе в RC-цепи (интегрирующей цепи; рис. 1а).

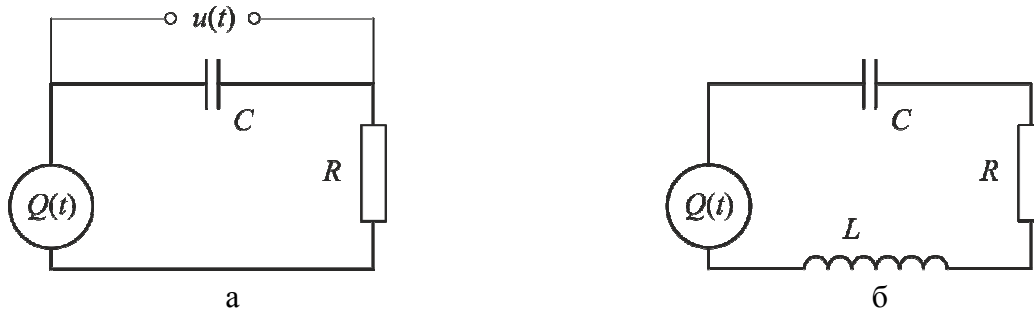


Рис. 1. RC-цепь и RCL-цепь с генераторами импульсов

Уравнение, описывающее динамику изменения напряжения на конденсаторе, задается в виде [2]

$$du(t) = -\frac{1}{RC}u(t)dt + \sigma dW(t) + dQ(t), \quad u(0) = u_0, \quad Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k,$$

где R – сопротивление; C – емкость конденсатора; σ – параметр, характеризующий интенсивность помехи; u_0 – начальное напряжение; Δ_k – амплитуды скачков напряжения (интенсивность импульсов – λ); $t \in [0, t_1]$, $t_1 = RC$ – время окончания процесса.

Для численных расчетов положим $R = 8 \cdot 10^3$ Ом (8 кОм), $C = 2.5 \cdot 10^{-4}$ ф (250 мкф), $\sigma = 0.14$, $\lambda = 0.1$, начальное напряжение u_0 имеет нормальное распределение с параметрами $m_{u_0} = 1.5$ В, $\sigma_{u_0} = 0.2$ В (дисперсия $D_{u_0} = 0.04$), случайные величины Δ_k имеют логарифмически нормальное распределение с параметрами $m_{\Delta} = 0.2$ и $\sigma_{\Delta} = 0.15$ – математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение для $\ln \Delta_k$.

При решении задачи спектральным методом в качестве базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ были выбраны полиномы Лежандра [6], а в качестве базисной системы $\{p(i_1, x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ – функции Эрмита [9] с параметрами $m = 7$ и $D = 1$, порядки усечения $L_0 = 16$ и $L_1 = 16$; для удобства вычислений предварительно была сделана линейная замена переменной: $5u \rightarrow X$. Результаты вычислений для плотности вероятности напряжения приведены на рис. 2а. На рис. 2б сплошной линией показано математическое ожидание напряжения, пунктиром для сравнения показано математическое ожидание без учета скачков напряжения ($\lambda = 0$).

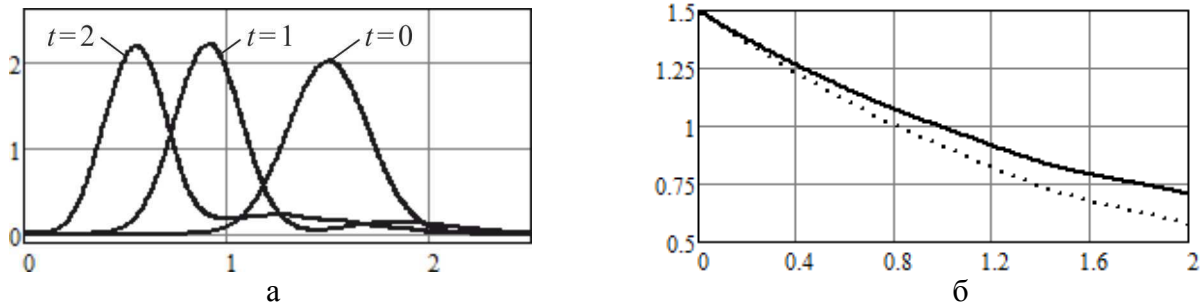


Рис. 2. Вероятностные характеристики напряжения для RC-цепи

Далее рассмотрим задачу определения вероятностных характеристик силы тока в RCL-цепи (колебательном контуре; рис. 1б). Следуя [2], будем использовать математическую модель

$$LC \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + RC \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}, \quad i(0) = i_0, \quad \frac{di(0)}{dt} = i'_0, \quad Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k,$$

где R – сопротивление; C – емкость конденсатора; L – индуктивность; i_0 и i'_0 – начальные данные; Δ_k – амплитуды скачков (интенсивность импульсов – λ); $t \in [0, t_1]$, $t_1 = 0.0001$ с – время окончания процесса.

Зададим числовые значения для параметров контура, начальных данных и параметров источника импульсов: $R = 80$ Ом; $C = 1.2 \cdot 10^{-6}$ ф (1.2 мкф); $L = 1.5 \cdot 10^{-2}$ Гн (15 мГн); $\lambda = 2000$. Начальная сила тока i_0 случайна и имеет нормальное распределение с параметрами $m_{i_0} = 0$ А и $\sigma_{i_0} = 0.1$ А; i'_0 имеет нормальное распределение с параметрами $m_{i'_0} = 2.5 \cdot 10^3$ А/с, $\sigma_{i'_0} = 10^3$ А/с. Случайные величины Δ_k имеют нормальное распределение с параметрами $m_{\Delta} = 9 \cdot 10^{-6}$ А·с, $\sigma_{\Delta} = 1.8 \cdot 10^{-6}$ А·с (дисперсия $D_{\Delta} = 3.24 \cdot 10^{-12}$).

При решении задачи спектральным методом в качестве базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ были выбраны полиномы Лежандра [6], а в качестве базисных систем $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ – функции Эрмита [9] с параметрами $m = 0$ и $D = 0.01$, порядки усечения $L_0 = 8$ и $L_1 = L_2 = 20$ (предварительно уравнение было преобразовано к эквивалентной системе двух уравнений: $i \rightarrow X_1$, $di/dt \rightarrow X_2$; кроме того, для увеличения точности расчетов был выбран другой масштаб времени, чтобы коэффициенты в уравнении, описывающем динамику изменения силы тока, были одного порядка: $t \in [0, 1]$, $\lambda = 0.2$). Результаты вычислений для плотности вероятности силы тока приведены на рис. 3а. На рис. 3б сплошной линией показано математическое ожидание силы тока; пунктиром для сравнения показано математическое ожидание без учета скачков напряжения ($\lambda = 0$).

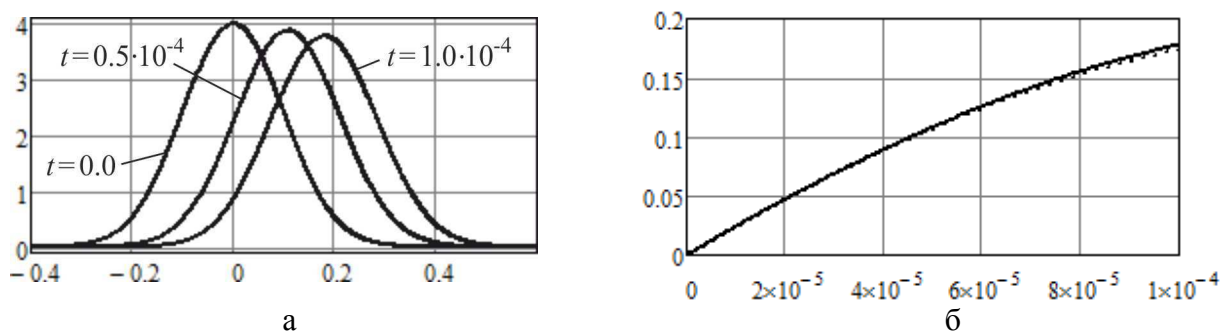


Рис. 3. Вероятностные характеристики силы тока для RCL-цепи

ЛИТЕРАТУРА

1. **Артемьев В.М., Ивановский А.В.** Дискретные системы управления со случайным периодом квантования. - М.: Энергоатомиздат, 1986.
2. **Тихонов В.И., Миронов М.А.** Марковские процессы. - М.: Сов. радио, 1977.
3. **Пугачев В.С., Синицын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. - М.: Наука, 1990.
4. **Hanson F.B.** Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions. – SIAM, 2007.
5. **Солодовников В.В., Семенов В.В.** Спектральная теория нестационарных систем управления. - М.: Наука, 1974.
6. **Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.** Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. - М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010.
7. **Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.** Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. - М.: Изд-во МАИ, 2012.
8. **Рыбин В.В.** Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. - М.: Изд-во МАИ, 2011.
9. **Романов В.А., Рыбаков К.А.** Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базе обобщенных функций Эрмита // Труды МАИ. - 2010. - № 39 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mai.ru>.
10. **Рыбаков К.А.** Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базе обобщенных функций Лагерра // Дифференциальные уравнения и процессы управления. - 2012. - № 1. - С. 114-141 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.
11. **Рыбаков К.А.** Спектральные характеристики линейных функционалов и их приложения к анализу и синтезу стохастических систем управления // Труды МАИ. - 2005. - № 18 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mai.ru>.
12. **Рыбаков К.А.** Многопараметрические ортонормированные системы функций для решения задач в спектральной форме математического описания // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. междунар. конф. - Воронеж: Изд.-полиграф. центр ВГУ, 2012. - Ч. 1. - С. 327-331.

**PROBABILITY ANALYSIS OF STOCHASTIC SYSTEMS
WITH POISSON COMPONENT****Rybakov K.A.**

The article deals with the stochastic control systems гтвук impulses generated by Poisson events flow resulting in discontinuities of the system trajectories. The problem of finding the probability density function for the system state is solved. The method is based on using the spectral form of the control systems' mathematical description.

Key words: analysis, impulse signals, Kolmogorov-Feller equation, Poisson flow of events, Poisson process, spectral method, stochastic system.

Сведения об авторе

Рыбаков Константин Александрович, 1984 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (2006), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики МАИ, автор более 80 научных работ, область научных интересов – анализ и синтез стохастических систем управления, спектральная форма математического описания систем управления.

УДК 514.7

ЭВОЛЮЦИЯ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА С ФИКСИРОВАННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ НА ГРАНИЦЕ

А.В. САМОХИН

Уравнение Бюргера описывает движение слабо нелинейных волн в газах, когда необходимо учесть эффекты диссипации в первом приближении. В работе изучается сходимость решений уравнения Бюргера с постоянными граничными условиями на ограниченном интервале к стационарным решениям.

Ключевые слова: нелинейные волны, инвариантные решения, начально-краевая задача, асимптотика.

1. Постановка задачи

Одно из уравнений механики сплошной среды - уравнение Бюргера - описывает движение слабо нелинейных волн в газах, когда необходимо учесть эффекты диссипации в первом приближении. В пределе исчезающе малой диссипации оно обеспечивает правильную интерпретацию решения в случае невязкой среды. Это уравнение имеет богатую историю. Оно было предложено Бюргерсом [1] как модельное уравнение для описания одномерной турбулентности. Лайтхилл [2] показал, что при правильной интерпретации это уравнение пригодно для описания распространения плоских волн небольшой амплитуды.

Уравнение Бюргера имеет вид

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + 2\eta u(x, t)u_x(x, t), \quad (1)$$

где коэффициент η при нелинейном слагаемом связан с вязкостью среды, в которой распространяются колебания.

Из физических соображений ясно, что вязкость приводит к затуханию колебаний, за исключением узкого класса стационарных решений (1), которые являются автомодельными для некоторой подалгебры алгебры высших симметрий уравнения Бюргера.

В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача для уравнения Бюргера на конечном интервале, что требует уточнения концепции симметрии и автомодельности в этой ситуации.

Работа устроена следующим образом. В разделе 2 изложена концепция симметрий начально-краевой задачи применительно к уравнению Бюргера и описаны важные решения уравнения типа "бегущая волна" и стационарные. В разделе 3 содержатся результаты по устойчивости автомодельных решений, полученные, в том числе, с помощью численного моделирования в среде Maple.

2. Решения и симметрии уравнения Бюргера

Опишем некоторые классы решений уравнения Бюргера, важные для дальнейшего изложения. Ниже мы принимаем, что $\eta = 1$: этого можно добиться за счёт нелинейности уравнения, масштабируя u .

Решениями типа "бегущая волна" называются решения вида $u(x, t) = f(ax + bt + c)$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$ — константы. Простое вычисление позволяет перечислить такие решения:

$$u(x, t) = c; \quad (2)$$

$$u(x, t) = \frac{b}{2a} + a \tanh(ax + bt + c); \quad (3)$$

$$u(x, t) = \frac{b}{2a} + a \coth(ax + bt + c); \quad (4)$$

$$u(x, t) = \frac{b}{2a} - a \tan(ax + bt + c); \quad (5)$$

$$u(x, t) = \frac{b}{2a} + \frac{a}{ax + bt + c}. \quad (6)$$

Обратим внимание, что только два первых решения из списка (2)-(6) ограничены на всей действительной оси. Соответственно, если начальная задача для уравнения (1) ставится на всей оси $x \in R$, то только эти два решения являются физически осмысленными. Если же рассматривается начально-краевая задача

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(\alpha, t) = l(t), \quad u(\beta, t) = r(t) \quad (7)$$

для интервала $x \in [\alpha, \beta]$, то в качестве начального распределения $f(x)$ может быть выбрана любая из функций списка (2)-(6), при условии, что сингулярность не попадает на интервал.

Ещё один вариант начально-краевой задачи

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(\alpha, t) = l(t), \quad u_x(\alpha, t) = r(t) \quad (8)$$

ставится для полупрямой $x \in [\alpha, \infty)$.

При $b = 0$ решения становятся *стационарными*:

$$u(x, t) = c; \quad (9)$$

$$u(x, t) = a \tanh(ax + c); \quad (10)$$

$$u(x, t) = a \coth(ax + c); \quad (11)$$

$$u(x, t) = -a \tan(ax + c); \quad (12)$$

$$u(x, t) = \frac{a}{ax + c}. \quad (13)$$

Отметим также, что все неограниченные решения (11)-(13) убывают, а ограниченные (9), (10) являются неубывающими.

Алгебра симметрий уравнения Бюргерса описана в [4]. Приведем здесь симметрии малого порядка (до третьего порядка по производным включительно):

$$X_1 = u_x; \quad (14)$$

$$X_2 = (1 + 2u_x t); \quad (15)$$

$$X_3 = 2uu_x + u_{xx}; \quad (16)$$

$$X_4 = uu_{xx} + \frac{1}{3}u_{xxx} + u_x^2 + u^2 u_x; \quad (17)$$

$$X_5 = \frac{1}{2}u + u_{xxt} + \frac{1}{2}xu_x + 2uu_{xt}. \quad (18)$$

Каждая симметрия X_i задает поток на пространстве решений уравнения (1) по правилу

$$u_\tau = X_i, \quad u|_{\tau=0} = u_0(x, t). \quad (19)$$

Здесь $u_0(x, t)$ - произвольное решение (1). Решения потока (19), если они существуют, также являются решениями (1) при любом τ .

Если $X_i|_{u_0} = 0$, то u_0 - его неподвижная точка; решение u_0 называется *автомодельным* (или *инвариантным*) относительно X_i .

Бегущая волна инвариантно относительно линейной комбинации $aX_3 - bX_1$, а стационар-

ные решения - относительно X_3 . Здесь уместно отметить, что потоки, порождённые X_3 и X_1 , суть трансляции по t и x соответственно.

На пространстве симметрий действует оператор рекурсии

$$R = D + u + u_x D^{-1}, \text{ где } D = \frac{d}{dx},$$

так что, если X - симметрия, то $R(X)$ - тоже симметрия. В частности, $R(X_1) = X_3$.

Рассмотрим простейшую начально-краевую задачу для уравнения (1) вида (7)

$$u(x,0) = f(x), \quad u(0,t) = A, \quad u(1,t) = B, \quad A, B \in R. \quad (20)$$

Если начальное условие $u(x,0) = f(x)$ игнорировать, то краевым данным соответствует единственное стационарное решение $y_{AB}(x)$, которое можно получить из обыкновенного дифференциального уравнения на $y(x)$

$$y'' + 2yy' = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(1) = B. \quad (21)$$

Именно к этому решению стремится при $t \rightarrow \infty$ решение задачи (20), каков бы ни был начальный профиль $u(x,0)$. Обычно переход $u(x,0) \rightarrow y_{AB}(x)$ происходит достаточно быстро.

Интегрируя один раз уравнение (21), получим $y' + y^2 = A^2 + B$. Отсюда легко получить, что в зависимости от начальных данных уравнение (21) имеет следующие решения (никаких других стационарных решений уравнения Бюргера нет!)

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = k \tan(-kx + m), \quad \text{при } A^2 + B < 0, k = \sqrt{-A^2 - B}, m = \arctan(A/k); \\ y(x) = \frac{A}{Ax+1}, \quad \text{при } A^2 + B = 0, B \neq 0; \\ y(x) = k \coth(kx + m), \quad \text{при } A^2 + B > 0, k = \sqrt{A^2 + B} < |A|, m = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k+A}{-k+A} \right); \\ y(x) = k \tanh(kx + m), \quad \text{при } A^2 + B > 0, k = \sqrt{A^2 + B} > |A|, m = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k+A}{k-A} \right); \\ y(x) = A, \quad \text{при } B = 0. \end{array} \right. \quad (22)$$

Эти решения инвариантны относительно симметрии X_3 , а также относительно башни симметрий вида $R^n(X_3)$. Например, решение $k \tanh(kx + m)$ инвариантно относительно

$$\frac{1}{3} R(X_3) = X_5 - \frac{k^2}{3} u_x = uu_{xx} + \frac{1}{3} u_{xxx} + u_x^2 + u^2 u_x - \frac{k^2}{3} u_x.$$

Поясним: оператор R содержит неопределённый интеграл D^{-1} и $-\frac{k^2}{3}$ — подходящая для данного решения константа интегрирования. Далее

$$\frac{1}{3} R^2(X_3) = \frac{1}{3} R(X_5 - \frac{k^2}{3} X_1) = X_7 - \frac{k^2}{3} X_3 + cu_x,$$

где новая константа интегрирования подбирается так, чтобы решение $k \tanh(kx + m)$ оставалось инвариантным и т.д.

Отметим, что симметрия $X_5 - \frac{k^2}{3} u_x$ имеет и другие инвариантные решения. Здесь мы не будем приводить их полного списка, укажем лишь один 3-параметрический класс, включающий гиперболические тангенсы и котангенсы из (22)

$$u = \frac{c(de^{cx} - e^{-cx})}{l + de^{cx} + e^{-cx}}, \quad c, d, l \in R. \quad (23)$$

3. Устойчивость инвариантных решений уравнения Бюргерса

Уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x \quad (24)$$

с нулевыми граничными условиями на интервале $[a, b]$

$$u(t, a) = u(t, b) = 0, \quad u(0, x)|_{[a, b]} = f(x) \quad (25)$$

монотонно сходится к нулю в L^2 -метрике и вот почему

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b u^2 dx &= \int_a^b 2uu_t dx = 2 \int_a^b u(u_{xx} + 2uu_x) dx = \\ &= 2 \int_a^b udu_x + \frac{2}{3} u^3 \Big|_a^b = 2uu_x \Big|_a^b - 2 \int_a^b u_x^2 dx = -2 \int_a^b u_x^2 dx \leq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Чем больше производная, тем выше сходимость! Это объясняет, почему в случаях разрывной начально-граничной задачи в наших экспериментах двухгодичной давности, [6], сначала затягивались разрывы - там производная близка к бесконечности.

Если условия ненулевые

$$u(0, x)|_{[a, b]} = f(x) \quad u(t, a) = f(a) = A, \quad u(t, b) = f(b) = B, \quad (27)$$

то можно ожидать сходимости к соответствующему стационарному решению уравнения Бюргерса, т.е.

$$\mu_{xx} + 2\mu\mu_x = 0, \quad \mu(a) = A, \quad \mu(b) = B \quad (28)$$

(такое решение существует в виде \tan или \tanh в зависимости от соотношения между A, B).

Посмотрим, как эволюционирует разница между μ и решением (28).

Обозначим $v(t, x) = u(t, x) - \mu(x)$, т.е. $u(t, x) = v(t, x) + \mu(x)$. Подставляя в (24)

$$\begin{aligned} u_t &= (v(t, x) + \mu(x))_t = v_t = u_{xx} + 2uu_x = \\ &= (v(t, x) + \mu(x))_{xx} + 2(v(t, x) + \mu(x))(v(t, x) + \mu(x))_x = \\ &= v_{xx} + 2vv_x + [\mu_{xx} + 2\mu\mu_x] + 2\{v_x\mu + v\mu_x\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю (28). Окончательно

$$v_t = v_{xx} + 2vv_x + 2(v\mu)_x. \quad (30)$$

При этом граничные условия для v нулевые по определению.

Вычислим скорость сходимости для v по аналогии с (26)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b v^2 dx &= \int_a^b 2vv_t dx = 2 \int_a^b v(v_{xx} + 2vv_x + 2(v\mu)_x) dx = \\ &= 2 \int_a^b vdv_x + \frac{4}{3} v^3 \Big|_a^b + 4 \int_a^b v d(v\mu) = \\ &= 2vv_x \Big|_a^b - 2 \int_a^b v_x^2 dx + 4v(v\mu) \Big|_a^b - 4 \int_a^b \mu vv_x dx = \\ &= -2 \int_a^b v_x^2 dx - 2 \int_a^b \mu dv^2 = -2 \int_a^b v_x^2 dx + 2 \int_a^b \mu_x v^2 dx - 2v^2 \mu \Big|_a^b = \\ &= -2 \int_a^b (v_x^2 - \mu_x v^2) dx. \end{aligned} \quad (31)$$

Окончательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b v^2 dx = -2 \int_a^b (v_x^2 - \mu_x v^2) dx. \tag{32}$$

Таким образом, монотонность L^2 - сходимость гарантирована не всегда, а например, при $\mu_x \leq 0$ (убывающие начальные данные).

Численные эксперименты подтверждают, что при больших значениях производной сходимости нет (рис. 1, 2).

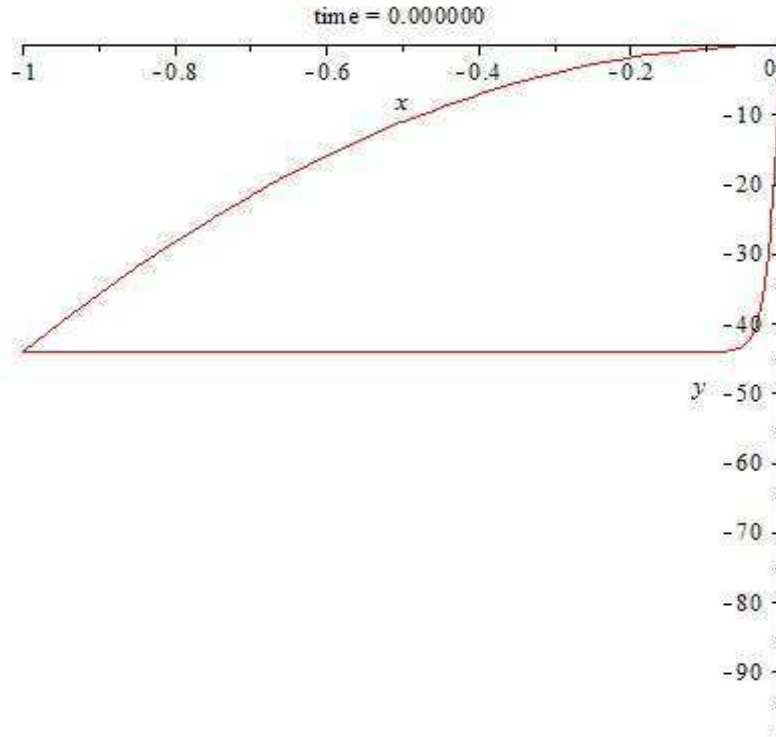


Рис. 1. Нижняя кривая - стационарное решение $\mu = 44 \tanh(44x)$;
 верхняя - начальная конфигурация $-44x^2$ при $t = 0$

Для растущих начальных данных разница не становится нулевой, а (для многих функций) застревает на полдороге. Вариационное исчисление учит нас искать такого рода стационарные точки притяжения в экстремальных функционала (32)

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} \int_a^b ((v + \varepsilon h)_x^2 - \mu_x (v + \varepsilon h)^2) dx = 0, \tag{33}$$

то есть
$$\int_a^b (v_x h_x - \mu_x v h) dx = v_x h \big|_a^b - \int_a^b (v_{xx} h - \mu_x v h) dx =$$

$$\int_a^b (-v_{xx} - \mu_x v) \cdot h dx = 0, \quad \forall h(x) (h(a) = h(b) = 0),$$

откуда
$$v_{xx} + \mu_x v = 0. \tag{34}$$

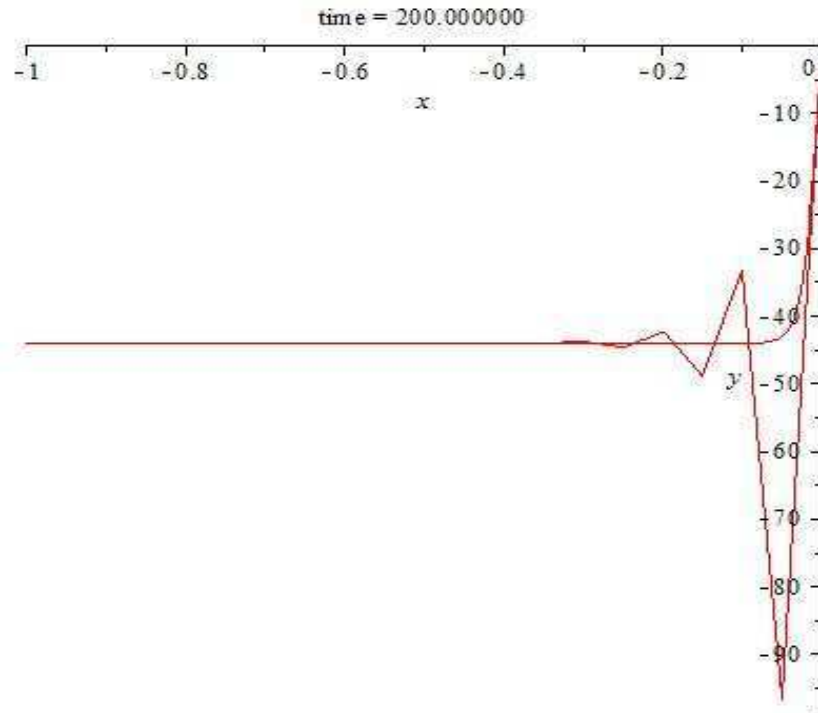


Рис. 2. Стационарное распределение $\mu = 44 \tanh(44x)$ и устойчивое численное решение при $t = 200$

Трудность сравнения экспериментальной экстремали (похожей на ударную волну) с решениями (34) состоит в том, что именно численные решения получить не так-то просто. Дело в том, что растущие стационарные решения уравнения Бюргерса - это функции вида $\mu(x) = a \tanh(ax + b)$ и потенциал линейной задачи (34) μ_x , фактически является финитным (рис. 3). Почти все решения (34) разрывны и это приводит к быстроосциллирующим решениям и хаосу на численном графике. Вот аналитическая форма решения в случае $\mu(x) = \tanh(x)$ и $v(-1) = 0$

$$\begin{aligned}
 v(x) = C \cdot & \frac{-H\left(\left[\frac{3+\sqrt{5}}{4}, \frac{3+\sqrt{5}}{4}\right], \left[\frac{2+\sqrt{5}}{2}, \frac{(e^2+1)^2}{4e^2}\right], \left(\frac{e^2+1}{2}\right)^{\sqrt{5}} (2\cosh(2x)-2)^{\frac{3}{4}}\right)}{e^{\sqrt{5}} H\left(\left[\frac{3-\sqrt{5}}{4}, \frac{3-\sqrt{5}}{4}\right], \left[\frac{2-\sqrt{5}}{2}, \frac{(e^2+1)^2}{4e^2}\right], \sqrt{\sinh(2x)}\right)} \times \\
 & \times H\left(\left[\frac{3-\sqrt{5}}{4}, \frac{3-\sqrt{5}}{4}\right], \left[\frac{2-\sqrt{5}}{2}, \frac{\cosh(2x)+1}{2}\right], \sqrt{2\cosh(2x)+2} \cosh(x)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} + \right. \\
 & \left. (2\cosh(2x)-2)^{\frac{3}{4}} H\left(\left[\frac{3+\sqrt{5}}{4}, \frac{3+\sqrt{5}}{4}\right], \left[\frac{2+\sqrt{5}}{2}, \frac{\cosh(2x)+1}{2}\right], \sqrt{2\cosh(2x)+2}\right)\right)} \\
 + C \cdot & \frac{}{\sqrt{\sinh(2x)} \cosh(x)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}}
 \end{aligned}$$

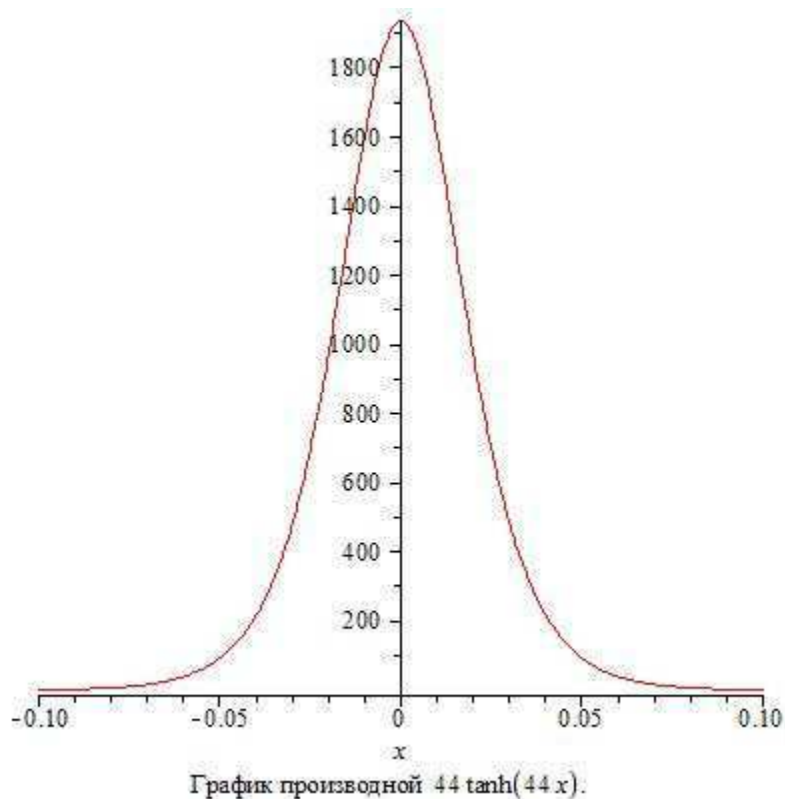


Рис. 3. Потенциал в случае $\mu = 44 \tanh(44x)$

Здесь C - произвольная постоянная, а H - гипергеометрическая функция. График этого решения при $C = 1$ представлен на рис. 4 и имеет конечный разрыв в нуле. Видимо, немонотонная часть численно устойчивого решения на рис. 2, отличная от стационарного решения уравнения Бюргера, кусочно составлена из экстремалей - решений уравнения (34). Этот вопрос ещё заслуживает дальнейшего рассмотрения.

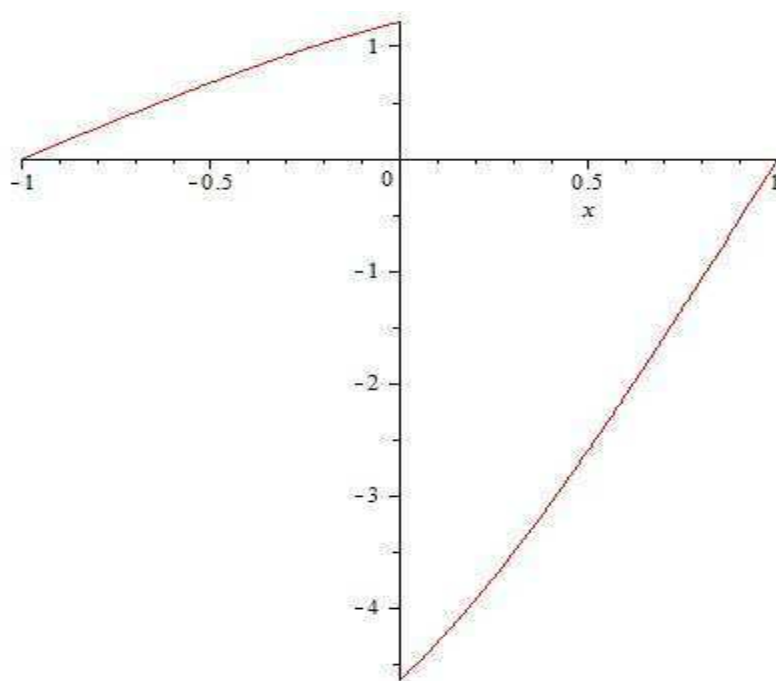


Рис. 4. Разрыв решения линейной задачи (34) при $\mu(x) = \tanh(x), v(-1) = 0$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Burgers J.M.** A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Adv. Appl. Mech., vol. 1, № 1, 1948.
2. **Lighthill M.J.** Viscosity in waves of final amplitude // in book: "Surveys in mechanics" (eds. G. Bachelor and R.M. Davis), Cambridge, Cambridge University Press, 1956.
3. **Habibullin I.T.** Symmetry approach in boundary value problem // arXiv:solv-mt/9508005v2, 1995.
4. **Samokhin A.V.** Symmetries of linear and linearizable systems of differential equations // Acta Applicandae Mathematicae, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London. V. 56, № 2&3, 1999.
5. **Самохин А.В.** Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Факториал, 2005.
6. **Самохин А.В.** Об устойчивости инвариантных решений уравнения Бюргерса на интервале // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2009. - № 140. - С. 29-35.

**AN EVOLUTION OF INITIAL VALUES FOR THE BURGERS
EQUATION WITH FIXED BOUNDARY CONDITIONS****Samokhin A.V.**

The Burgers equation describes weakly nonlinear waves in gases when it is necessary to take the dissipation's first approximation into account. The Burgers equation symmetry invariant solutions asymptotic stability is studied.

Key words: nonlinear waves, invariant solutions, initial-boundary problem, asymptotics.

Сведения об авторе

Самохин Алексей Васильевич, 1947 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1971), доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики МГТУ ГА, автор более 40 научных работ, область научных интересов - уравнения математической физики, симметрии, законы сохранения.

УДК 515.168

ГОМЕОМОРФИЗМЫ ПРЯМОЙ

В.В. СОЛОДОВ

Статья представлена доктором технических наук, профессором Самохиным А.В.

В статье рассмотрен вопрос о строении накрывающего слоения для слоения коразмерности один.

Ключевые слова: группы гомеоморфизмов, слоения, накрытия.

Изучение слоений F^{n-1} коразмерности один на дифференцируемом многообразии X^n привело к вопросам об устройстве \tilde{F} накрывающего слоения на универсальном накрытии \tilde{X}^n [2; 3].

Первый вопрос касается того, обязан ли слой \tilde{L} слоения \tilde{F} делить универсальную накрывающую \tilde{X} ? Если это так, то говорят о свойстве d слоения F .

Второй вопрос касается того, обязана ли существовать трансверсаль \tilde{t} , гомеоморфная \mathbb{R} и пересекающая все слои слоения \tilde{F} , такое свойство называется t [5].

Оказалось, что в общем случае оба вопроса имеют отрицательный ответ, но слоения, обладающие свойствами t и d встречаются чаще всего и будут рассматриваться в нашей работе.

В указанном случае (слоение F обладает свойствами t и d) действие фундаментальной группы $\pi_1(X)$ скольжениями на универсальной накрывающей \tilde{X} индуцирует действие группы $\pi_1(X)$ на трансверсали \tilde{t} , гомеоморфной \mathbb{R} , т.е. представление ϕ группы $\pi_1(X) = G$ в группу гомеоморфизмов прямой $\text{Homeo}(\mathbb{R})$

$$0 \rightarrow G \rightarrow \text{Homeo}(\mathbb{R}).$$

Такая ситуация рассматривается в [2; 3]. Там же начата классификация групп гомеоморфизмов прямой в зависимости от наличия у них неподвижных точек $\text{fix}(\alpha); \alpha \in G$.

Оказывается, что верно

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *В случае, когда множество $\text{fix}(\alpha); \alpha \in G$ при всех α состоит не более, чем из одной точки. Действие всей группы G сопряжено аффинному действию и имеет точная последовательность групп.*

$$0 \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow \mathbb{R},$$

где элементы $\$E\$$ сопряжены гомотетиям и имеют неподвижные точки, а второй гомоморфизм – число вращения.

Примеры действия разрешимых групп представляют потоки Аносова на трехмерных многообразиях и действие на прямой группы Томпсона (специальной подгруппы кусочно-линейных преобразований [4]).

Следующая теорема сформулирована Бекларяном в [1].

ТЕОРЕМА (УТВЕРЖДЕНИЕ 2). *Пусть группа G является подгруппой $\text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ - группы сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов прямой, содержащая свободно действующий на прямой элемент. Тогда либо фактор-группа G/H_G не аменабельна, либо фактор-группа разрешима, причем степень разрешимости не более 2.*

Альтернатива в этой теореме строгая в том смысле, что одновременно обе возможности не осуществимы.

Замечание. Из изложенного ниже следует, что полное утверждение этой теоремы ошибочно, что было замечено некоторыми математиками: А. Навазом, А. Ахмедовым и автором статьи.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Существует конечно-порожденная разрешимая подгруппа Γ группы $\text{Homeo}(\mathbb{R})$ такая, что её степень разрешимости больше 2.

Напомним, что для данной подгруппы $\Gamma \subset \text{Homeo}(\mathbb{R})$ непустое замкнутое Γ -инвариантное множество называется минимальным, если оно не содержит другого не пустого такого же множества.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для конечно порожденной подгруппы в $\text{Homeo}(\mathbb{R})$ существует всегда минимальное множество.

Для подгруппы $\Gamma \subset \text{Homeo}(\mathbb{R})$ определяется нормальная подгруппа H_Γ следующим образом:

- если Γ – минимальное множество не пусто и не дискретно, то $H_\Gamma = \{h \in \Gamma \mid E(\Gamma) \subseteq \text{Fix}(h)\}$;

- если минимальное дискретно и не пусто, то

$$H_\Gamma = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{Stab(t)\};$$

- если минимальное множество пусто, то H_Γ – единичная подгруппа.

Построим разрешимую подгруппу $\Gamma \subset \text{Homeo}(\mathbb{R})$ такую, что Γ / H_Γ - не является метаабелевой.

Пусть группа Γ - порождена элементами $t, a, b \in \Gamma$:

1) группа Γ – разрешима;

2) упорядочена с левым порядком $<$ таким, что

$$1 < t < a < b;$$

3) $t \cdot a \cdot t^{-1} = a^2$;

4) $a \cdot b \cdot a^{-1} = b^2$ C – подгруппа, порожденная t ; G – порожденная tua , а $S = \{a^{-i} \cdot b \cdot a^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$;

5) $[t^i \cdot b \cdot t^{-i}, a^j \cdot b \cdot a^{-j}] = 1$ при всех $i, j \in \mathbb{Z}$;

6) если $g \in C, f \in \Gamma \setminus C, 1 < f \rightarrow g < f$;

7) если $g \in G, f \in \Gamma \setminus G, 1 < f \rightarrow g < f$;

8) существует $h \in S$ такое, что $g < h < t^n \cdot b \cdot t^{-n}$ при всех $g \in G$ и $n \in \mathbb{Z}$.

Мы рассмотрим кольца:

- $A = \mathbb{Z}$;

- $B = \mathbb{Z} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$;

- $D = \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}, \dots \right]$

и отождествим t, a, b с единичными элементами колец *.

Мы получим вложение $\Gamma \subset \text{Homeo}(\mathbb{R})$.

Построение вложения (4) закончено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бекларян Л.А. Группы гомеоморфизмов прямой и окружности // Успехи математических наук. - 2004. - Т. 59. - № 4. - С. 3-68.
2. Новиков С.П. Топология слоений // Труды Московского математического общества. - 1965. - Т. 14. - С. 248-278.
3. Солодов В.В. Гомеоморфизмы окружности и слоения // Известия АН СССР. - 1984. - Т. 48. - № 3. - С. 599-613.
4. Солодов В.В. Топологические вопросы теории динамических систем // Успехи математических наук. - 1991. - Т. 46. - № 4. - С. 56-78.
5. Солодов В.В. Об отображениях окружности в слоения. Геометрические методы в задачах анализа и алгебры. - Ярославль, 1978. - С. 100-107.
6. Akhmedov A. Amenable subgroups of $\text{Homeo}(\mathbb{R})$ [Электронный ресурс] URL: <http://arxiv.org/pdf/1211.6165v1>.

HOMEOMORPHISMS OF THE LINE

Solodov V.V.

The paper deals with the structure of the covering over a foliation of codimension one.

Key words: homeomorphism groups, foliations, coverings.

Сведения об авторе

Солодов Виктор Владимирович, 1952 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1974), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МГТУ ГА, автор более 30 научных работ, область научных интересов - дифференциальная топология, слоения, динамические системы.

УДК 621.396.969

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКА РАЗНОХАРАКТЕРНЫХ ВОЗДУШНЫХ ЦЕЛЕЙ В УСЛОВИЯХ ОДНОВРЕМЕННОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ

Я.И. СТРЕКАЛОВСКАЯ

Статья представлена доктором технических наук, профессором Самохиным А.В.

На основе имитационного моделирования потока разнохарактерных воздушных целей проведен качественный анализ α - β фильтра и фильтра Калмана.

Ключевые слова: автосопровождение маневрирующей цели, имитационное моделирование.

В статье изучается вопрос отслеживания и прогнозирования характеристик целей, различающихся по скорости полета, траектории и маневренной возможности.

Цель настоящей работы заключается в исследовании точностных характеристик вторичной обработки информации в дискретном контуре автосопровождения маневрирующей цели при использовании α - β фильтра и модификаций фильтра Калмана в зависимости от периода дискретных измерений.

Выбрать оптимальный фильтр в случае диверсифицированных параметров воздушных целей (ВЦ) на основе имитационного моделирования траекторий полета.

Рассмотреть модели траектории ВЦ:

- самолет;
- вертолет;
- противокорабельные средства поражения (в первую очередь ракеты).

В устройстве вторичной обработки на основе отметок, полученных в нескольких соседних обзорах, решаются следующие основные задачи:

- определение параметров движения целей (курс, скорость, ускорение и т. д.) по данным, полученным за несколько обзоров радиолокационной станции (РЛС);
- выделение области пространства, в которой с некоторой вероятностью ожидается появление отметки в следующем обзоре (экстраполяция отметок);
- сличение экстраполированных координат с вновь полученными и привязка новой отметки к траектории цели (продолжение траектории).

Основными данными, определяющими траекторию движения цели, являются пространственные координаты отметок цели, изменение которых соответствует закону движения цели в пространстве. Траектория движения цели зависит от типа цели, высоты полета, скорости, маневренных возможностей. Таким образом, движение целей - процесс со случайно изменяющимися во времени параметрами.

Наше устройство предназначено для обработки траекторий самолетов, вертолетов или крылатых ракет, т.е. модели их движения представляют собой совокупность участков с прямолинейным и равномерным движением и участков маневра. Для устройства за основу взята полиномиальная модель движения. Она основана на представлении процесса изменения координат цели на ограниченном участке наблюдения в виде полинома степени n относительно времени

$$y(t) = \sum_{i=0}^n b_i \cdot t^i = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + \dots + b_n \cdot t^n ,$$

где b_i - коэффициент, определяющий параметры траектории, на которые накладываются те или иные ограничения.

Исходя из характера движения целей, формируются три основных требования к системам автосопровождения:

- на участках прямолинейного полета и на участках маневра гипотезы о характере изменения координат во времени должны быть различными;
- на участке прямолинейного полета изменение координат во времени проще описывать полиномами первой степени

$$x(t) = x_0 + v_x \cdot t; \quad y(t) = y_0 + v_y \cdot t; \quad z(t) = z_0 + v_z \cdot t;$$

- на участке маневра процесс изменения координат во времени лучше всего описывать полиномами второй степени

$$x(t) = x_0 + v_x \cdot t + \frac{a_x}{2} \cdot t^2; \quad y(t) = y_0 + v_y \cdot t + \frac{a_y}{2} \cdot t^2; \\ z(t) = z_0 + v_z \cdot t + \frac{a_z}{2} \cdot t^2 ,$$

где a_x, a_y, a_z – ускорения по каждой координате.

Процесс вторичной обработки разбивается на два самостоятельных этапа: обнаружение траекторий и слежение за траекториями.

Для рассматриваемой задачи характерна сложность выделения (селекции) радиолокационных отметок истинных целей на фоне ложных.

Радиолокационные отметки ложных целей формируются по результатам обнаружения мешающих отражений (МО) от сосредоточенных отражателей, размеры которых не превышают разрешающего объема РЛС или сравнимы с ним. Эти МО называются дискретными мешающими отражениями (ДМО). ДМО относят к классу имитирующих помех или ложных целей, так как их простейшие радиолокационные портреты (например, мощностной) близки к портретам воздушных целей и наблюдаются на индикаторах РЛС в виде “целеподобных” отметок.

Источником длительно наблюдаемых на индикаторах РЛС кругового обзора ложных целей также могут быть и остатки компенсации МО от объемно или поверхностно распределенных отражателей.

Под задачей селекции будем понимать задачу распознавания двух классов объектов радиолокационного наблюдения: цель и ДМО. При этом в класс ДМО будем включать как МО от сосредоточенных отражателей, так и остатки компенсации МО от поверхностно или объемно распределенных отражателей. Класс “цель” будет содержать все аэродинамические летательные аппараты, скорости движения которых превышают максимально возможную скорость ветра.

Если в обзорной РЛС не реализовано сигнальное распознавание (по дальностному, частотному, поляризационному портретам), то нет физических предпосылок для селекции радиолокационных отметок цели на фоне ДМО за один обзор. Значения частоты Допплера принятого сигнала и его мощности не позволяют за один обзор принять решение о классе отметки (сформирована она по цели либо по ДМО), так как частота Допплера ОС целей, наблюдаемых на ракурсах $90 \pm 15^\circ$, близка к нулю, а их мощность может колебаться в широком диапазоне. По этим причинам в нашей работе используется селекция радиолокационных отметок целей на фоне ДМО за несколько обзоров (межобзорная селекция). Такая селекция основывается на различии пространственно-временных (траекторных) признаков целей и помех.

Метод межобзорного сопровождения и селекции движущихся целей (СДЦ) с измерением-распознаванием подразумевает сопровождение всех объектов, обнаруженных в зоне обзора РЛС, и фильтрацию их параметров. По результатам измерения параметров движения сопровождаемого объекта оцениваются траекторные признаки распознавания (скорость и модель входного воздействия) и принимается решение о его классе (цель или ДМО). Радиолокационные отметки, принадлежащие скоростным траекториям, выдаются потребителям РЛИ всегда, а отметки, принадлежащие малоскоростным траекториям, потребителю могут не выдаваться.

Траектории вертолетов могут быть классифицированы как скоростные (цель) и как малоскоростные (ДМО) ввиду особенностей траекторного движения вертолетов.

В алгоритме межобзорного сопровождения и СДЦ с измерением-распознаванием в качестве составной части используется многогипотезный измеритель с межобзорной памятью гипотез (МИМПП).

В траекторное описание целей и ДМО включаем:

- распределение траекторий по высотам и скоростям движения (высотно-скоростные характеристики);
- вид и параметры задающего воздействия;
- характеристики возмущающего воздействия.

По высотно-скоростным характеристикам цели (кроме вертолета) и ДМО распределены следующим образом (для районов с континентальным климатом):

- цели летают на высотах от 0,05 до 25 км, ДМО – от 0 до 12 км;
- диапазон скоростей цели лежит в пределах от 50...70 (на посадке) до 850 (и более) м/с, ДМО – от 0 до 35 м/с.

По параметрам моделей возмущающих воздействий цели отличаются от ДМО наличием незначительного “шума” по измеряемым координатам (им можно пренебречь для измерителей обзорных РЛС средней и большой дальностей ввиду того, что разрешаемый объем РЛС намного превышает геометрические размеры целей), в то время как у ДМО среднеквадратическое отклонение (СКО) “шумов” по измеряемым координатам значительно.

Задающие воздействия целей (кроме вертолетов) описываются моделями первого или второго порядков с некоррелированными приращениями или моделями первого порядка с коррелированными приращениями. Задающие воздействия ДМО описываются моделями нулевого или первого порядков с некоррелированными приращениями, или нулевого порядка с коррелированными приращениями.

Виды и порядки моделей задающего воздействия целей (кроме вертолетов) и ДМО оказываются различными, за исключением модели первого порядка с некоррелированными приращениями.

Для исследования были выбраны фильтр Калмана и $\alpha - \beta$ фильтр. Формульные зависимости для обоих фильтров приведены ниже.

Описание фильтра Калмана.

В уравнениях калмановской фильтрации от класса наблюдаемого объекта ϑ_i ($i = \overline{1, M}$, где M – число классов, равно 2) и вида модели входного воздействия γ_l ($l = \overline{1, N_\gamma^{(i)}}$) зависят следующие элементы:

- $B(\vartheta_i, \gamma_l) = B_{i,l}$ – динамическая матрица пересчета с k -го на $(k+1)$ -й шаг измерения;
- $H(\vartheta_i, \gamma_l) = H_{i,l}$ – статическая матрица пересчета вектора состояния в вектор наблюдаемых параметров $\theta_{k+1}(\vartheta_i, \gamma_l) = H_{i,l} \alpha_{k+1}(\vartheta_i, \gamma_l)$;
- $M(\vartheta_i, \gamma_l)$ – матрица случайного маневра;
- $\hat{\theta}_{k+1}(\vartheta_i, \gamma_l)$ – разовая оценка вектора наблюдаемых параметров;
- $R_{\theta_{k+1}}(\vartheta_i, \gamma_l)$ – корреляционная матрица ошибок разовых измерений.

Другие элементы, входящие в уравнение калмановской фильтрации, выражаются через вышеперечисленные и поэтому тоже зависят от ϑ_i и γ_l .

Рекуррентные уравнения калмановской фильтрации вектора состояния α для случая косвенных измерений записываются с учетом введенных обозначений в следующем виде

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{0k+1}(\vartheta_i, \gamma_l) &= B_{i,l} \hat{\alpha}_k(\vartheta_i, \gamma_l); \\ \hat{\alpha}_{k+1}(\vartheta_i, \gamma_l) &= \hat{\alpha}_{0k+1}(\vartheta_i, \gamma_l) + K_{i,l(k+1)} [\hat{\theta}_{k+1}(\vartheta_i, \gamma_l) - H_{i,l} \hat{\alpha}_{0k+1}(\vartheta_i, \gamma_l)]; \\ K_{i,l(k+1)} &= R_{0k+1}(\vartheta_i, \gamma_l) H_{i,l}^T [H_{i,l} R_{0k+1}(\vartheta_i, \gamma_l) H_{i,l}^T + R_{\theta_{k+1}}(\vartheta_i, \gamma_l)]^{-1}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$R_{k+1}(\vartheta_i, \gamma_l) = (E - K_{i,l(k+1)}H_{i,l})R_{0k+1}(\vartheta_i, \gamma_l),$$

где $\hat{\alpha}_{0k+1}(\vartheta_i, \gamma_l)$ – экстраполированное значение вектора состояния на $(k+1)$ -й шаг;

$R_{0k+1}(\vartheta_i, \gamma_l)$ – корреляционная матрица ошибок экстраполяции;

$\hat{\alpha}_{k+1}(\vartheta_i, \gamma_l)$ – фильтрованное значение вектора состояния на $(k+1)$ -м шаге;

$R_{k+1}(\vartheta_i, \gamma_l)$ – корреляционная матрица ошибок фильтрации;

$H_{i,l}\hat{\alpha}_{0k+1}(\vartheta_i, \gamma_l) = \hat{\theta}_{0k+1}(\vartheta_i, \gamma_l)$ – экстраполированное значение вектора наблюдаемых параметров.

Корреляционная матрица ошибок экстраполяции вектора состояния выражается через динамическую матрицу пересчета $V_{i,l}$ и матрицу случайного маневра $M(\vartheta_i, \gamma_l)$

$$R_{0k+1}(\vartheta_i, \gamma_l) = V_{i,l}R_k(\vartheta_i, \gamma_l)V_{i,l}^T + M(\vartheta_i, \gamma_l). \quad (2)$$

Корреляционная матрица случайного маневра $M(\vartheta_i, \gamma_l)$ определяется видом и параметрами модели задающего воздействия, а корреляционная матрица ошибок разового оценивания определяется параметрами модели возмущающего воздействия. При допущении, что от обзора к обзору СКО “шумов” объекта по измеряемым координатам изменяется незначительно и зависит только от класса объекта, выражение для $R_{\theta k+1}(\vartheta_i, \gamma_l)$ может быть представлено в следующем виде

$$R_{\theta k+1}(\vartheta_i, \gamma_l) \approx R_{\theta}(\vartheta_i) = R_{\theta_0} + R_{\theta_{ш}}(\vartheta_i), \quad (3)$$

где R_{θ_0} – корреляционная матрица ошибок измерения вектора наблюдаемых параметров, возникающих из-за зашумленности принимаемых сигналов, которая зависит от технических характеристик РЛС и отношения сигнал-шум, и медленно изменяется от обзора к обзору так, что на интервале принятия решения о классе наблюдаемого объекта ее можно зафиксировать; $R_{\theta_{ш}}(\vartheta_i)$ – корреляционная матрица ошибок, обусловленных “шумом” объекта i -го класса по измеряемым координатам, зависящая от условий наблюдения и также изменяющаяся достаточно медленно.

Описание $\alpha - \beta$ фильтра.

Алгоритм фильтрации разовых измерений координат описывается следующими формульными зависимостями

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon(i) = \varepsilon_{вх}(i) - \varepsilon_3(i); \\ \varepsilon_{сгл}(i) = \varepsilon_3(i) + \alpha \cdot \Delta\varepsilon(i); \\ \dot{\varepsilon}(i) = \dot{\varepsilon}(i-1) + \beta \cdot \left(\frac{\Delta\varepsilon(i)}{T_0}\right); \\ \varepsilon_3(i+1) = \varepsilon_{сгл}(i) + \dot{\varepsilon}(i) \cdot T_0, \end{cases}$$

где T_0 – период обращения к цели; α, β – коэффициент $\alpha - \beta$ фильтра; ε_3 – экстраполированное значение параметра; $\varepsilon_{вх}$ – входное измеренное значение параметра; $\varepsilon_{сгл}$ – сглаженное значение параметра; $\Delta\varepsilon$ – невязка; $\dot{\varepsilon}$ – скорость изменения параметра.

Для рассматриваемой задачи характерны следующие оценки параметров.

Коэффициенты фильтра α и β корректируются в зависимости от расстояния до цели R .

При $R > 20$ км $\alpha = \frac{20}{R}$, $\beta = \frac{4}{R}$, $0,2 \leq \alpha \leq 0,5$; $0,01 \leq \beta \leq 0,2$.

При $R < 20$ км $\alpha = 0,5$; $\beta = 0,2$.

Для имитационного моделирования использована программа «Пахота», разработанная сотрудниками ОАО «МКБ «Компас». Программа состоит из 3-х блоков: имитатор, $\alpha - \beta$ фильтр, фильтр Калмана.

Первый блок имитирует перемещение цели относительно станции, рассчитывая текущие значения дальностей, пеленгов и углов места цели. Второй и третий блоки позволяют отобразить значения экстраполированных координат траектории с использованием $\alpha - \beta$ фильтра и фильтра Калмана соответственно.

Интерфейс программы показан на рис. 1. Показаны модели траекторий самолета (поднимающаяся кривая), вертолета (кривая на постоянной высоте) и противокорабельной ракеты типа «Си Сьюа» (снижающаяся кривая).

Подробное описание работы модели в указанном диапазоне параметров и сделанные на этом этапе выводы будут изложены автором в последующих статьях.

Автор приносит благодарности Самохину Алексею Васильевичу и Карюкину Геннадию Ефимовичу за полезные обсуждения при работе над задачей.

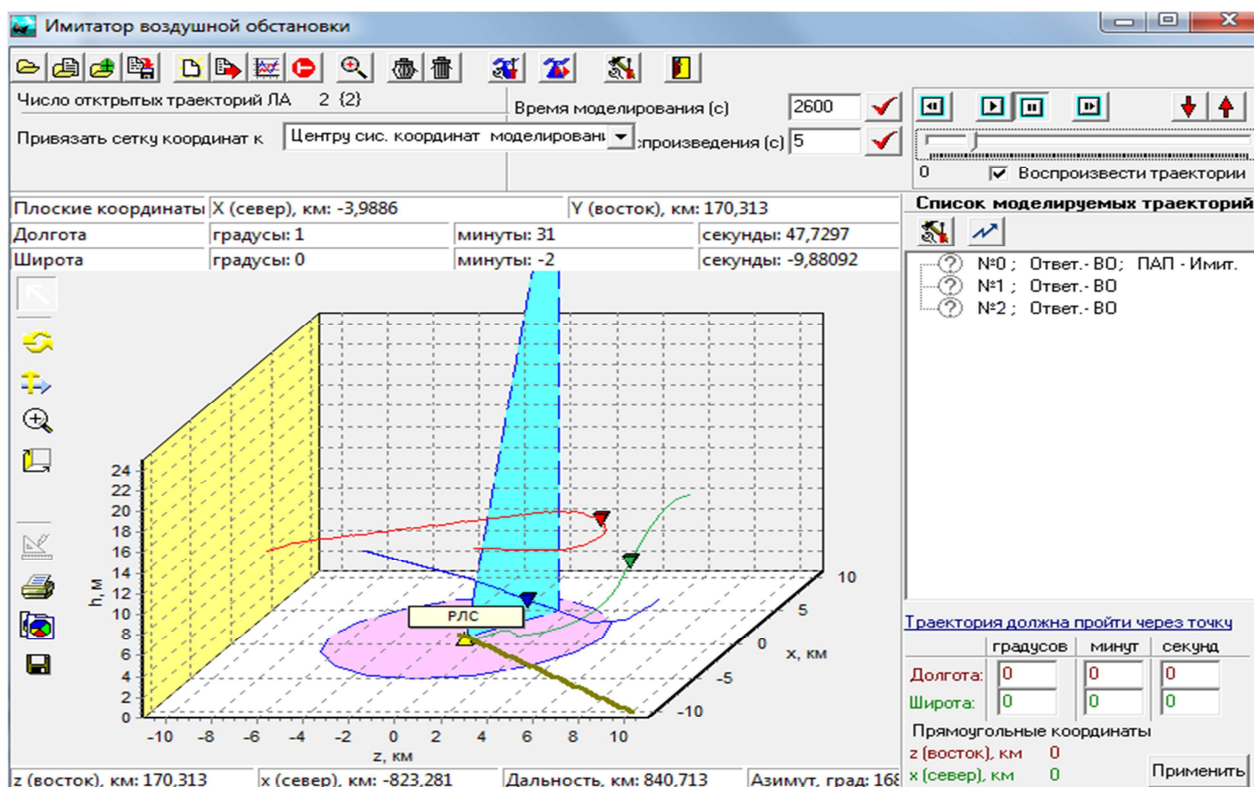


Рис. 1. Интерфейс программы «Пахота»

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьмин С.З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации. - М.: Сов. радио, 1974.
2. Кузьмин С.З. Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации. - М.: Радио и связь, 1986.
3. Бакулев П.А. Радиолокационные системы: учебник для вузов. - М.: Радиотехника, 2004.

IMITATION MODELING FOR A FLOW OF HETEROGENEOUS AIR TARGETS IN THE CASE THEY ARE SIMULTANEOUSLY TRACED

Strekalovskaya Y.I.

Using an imitation model for a flow of heterogeneous air targets the qualitative and comparative assessment of the α - β and the Kalman filters is obtained.

Key words: maneuvering target auto-tracing, Imitation modeling.

Сведения об авторе

Стрекаловская Яна Иннокентьевна, окончила МГТУ ГА (2011), аспирантка МГТУ ГА, автор 2 научных работ, область научных интересов - вторичная обработка радиолокационной информации.

УДК 621.396.969

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА В СЛУЧАЕ РАДИОЛОКАЦИОННОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ ВОЗДУШНОЙ ЦЕЛИ С ДИВЕРСИФИЦИРОВАННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Я.И. СТРЕКАЛОВСКАЯ

Статья представлена доктором технических наук, профессором Самохиным А.В.

На основе имитационного моделирования потока воздушных целей проведен количественный анализ α - β фильтра и фильтра Калмана. Результаты демонстрируют работоспособность алгоритмов и позволяют определить сравнительные точности оценивания.

Ключевые слова: вторичная обработка, фильтр Калмана, имитационное моделирование.

Решалась задача выбора оптимального фильтра в случае радиолокационного сопровождения воздушной цели с диверсифицированными параметрами.

С этой целью при помощи компьютерной модели исследованы точностные характеристики вторичной обработки информации в дискретном контуре автосопровождения маневрирующей цели. Сравнительному анализу подвергнуты α - β фильтр и модификации фильтра Калмана (в зависимости от периода дискретных измерений).

Моделировались траектории следующих воздушных целей: самолета, вертолета и противокорабельных средств поражения (в первую очередь ракет).

Процесс вторичной обработки разбивается на два самостоятельных этапа: обнаружение траекторий и слежение за траекториями.

Для рассматриваемой задачи характерна сложность выделения (селекции) радиолокационных отметок истинных целей на фоне ложных.

Введём терминологию и принятые в статье сокращения следуя [1]. Радиолокационные отметки ложных целей формируются по результатам обнаружения мешающих отражений (МО) от сосредоточенных отражателей, размеры которых не превышают разрешающего объема РЛС или сравнимы с ним. Эти МО называются дискретными мешающими отражениями (ДМО). ДМО относят к классу имитирующих помех или ложных целей: их простейшие радиолокационные портреты (например, мощностной) близки к портретам воздушных целей и наблюдаются на индикаторах РЛС в виде “целеподобных” отметок.

Виды и порядки моделей задающего воздействия целей (кроме вертолетов) и ДМО оказываются различными, за исключением модели первого порядка с некоррелированными приращениями. Однако значения параметров возмущающего воздействия для перекрывающихся моделей оказываются различными: дисперсия случайного маневра целей лежит в диапазоне $0,001 \dots 0,5 \text{ м}^2/\text{с}^4$, а ДМО – в диапазоне $0,01 \dots 0,1 \text{ м}^2/\text{с}^4$.

Диапазоны значений среднеквадратического отклонения (СКО) “шумов” ДМО по дальности и азимуту остатков компенсации МО от облаков гидрометеоров лежат в пределах $\sigma_{r_{\text{дмо}}} = 50 \dots 60 \text{ м}$ и $\sigma_{\beta_{\text{дмо}}} = 0,2 \dots 0,72^\circ$.

Для исследования были выбраны фильтр Калмана и α - β фильтр. Формульные зависимости для обоих фильтров и более подробная постановка задачи приведены в [1].

Для имитационного моделирования использована программа «Пахота», разработанная сотрудниками ОАО «МКБ «Компас». Программа состоит из 3-х блоков: имитатор, α - β фильтр, фильтр Калмана. Интерфейс программы приведен в [1].

Основной задачей моделирования является получение статистических оценок точности измерений угловых координат при различных периодах обращения к цели для алгоритмов фильтрации.

При этом автором рассматривались следующие виды маневров цели:

- «Змейка горизонтальная», «Змейка объемная»;
- «Отворот горизонтальный», «Отворот объемный».

По результатам моделирования получены зависимости среднеквадратических и максимальных динамических ошибок сопровождения маневрирующей цели в зависимости от периода получения первичных измерений – частоты дискретного обращения к цели в процессе сопровождения (рис. 1-4). Исследования проводились при условии динамично изменяющегося азимутального угла при типовых маневрах «змейка» и «отворот». Количество реализаций - 1000.

Графики зависимости среднеквадратических ошибок от периода дискретного сопровождения для фильтра Калмана и α - β фильтра приведены на рис. 1.

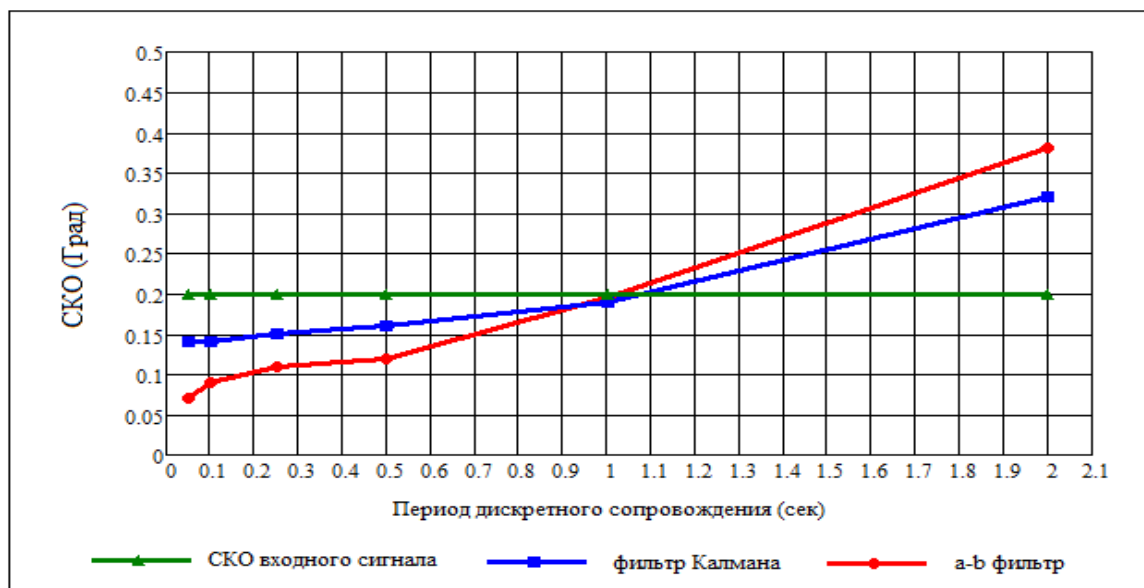


Рис. 1. Графики СКО сопровождения цели по азимуту для траектории полета с маневром «змейка»

Зависимости динамических ошибок от периода работы дискретного контура сопровождения для фильтра Калмана и α - β фильтра приведены на рис. 2.

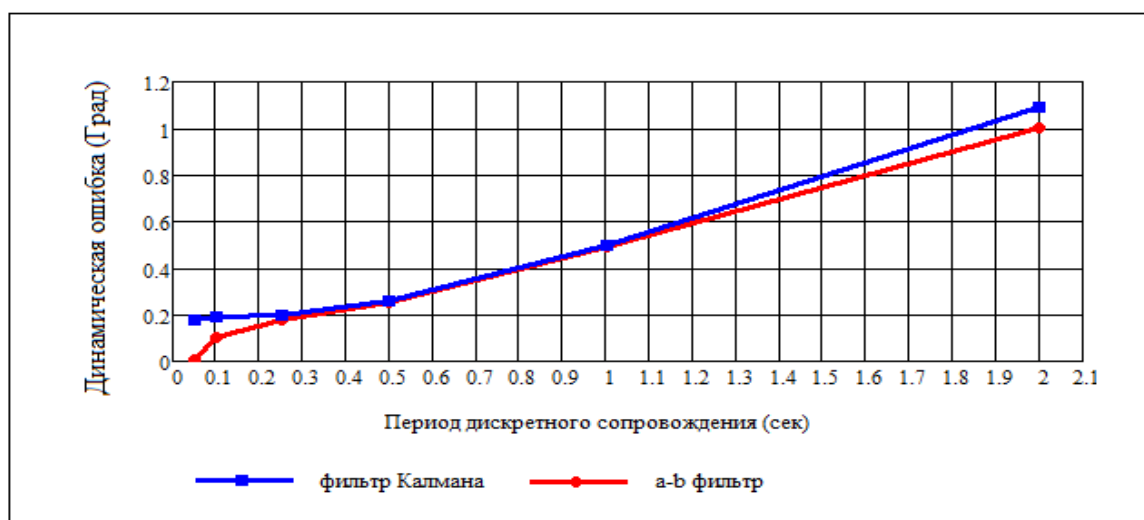


Рис. 2. Графики динамических ошибок сопровождения цели по азимуту для траектории полета цели с маневром «змейка»

Зависимости погрешностей измерений от периода дискретного сопровождения для фильтра Калмана и α - β фильтра на участке траектории без маневра в виде графиков среднеквадратических ошибок приведены на рис. 3. Графики зависимостей максимальных динамических ошибок на участке траектории полета цели с маневром «отворот» – на рис. 4.

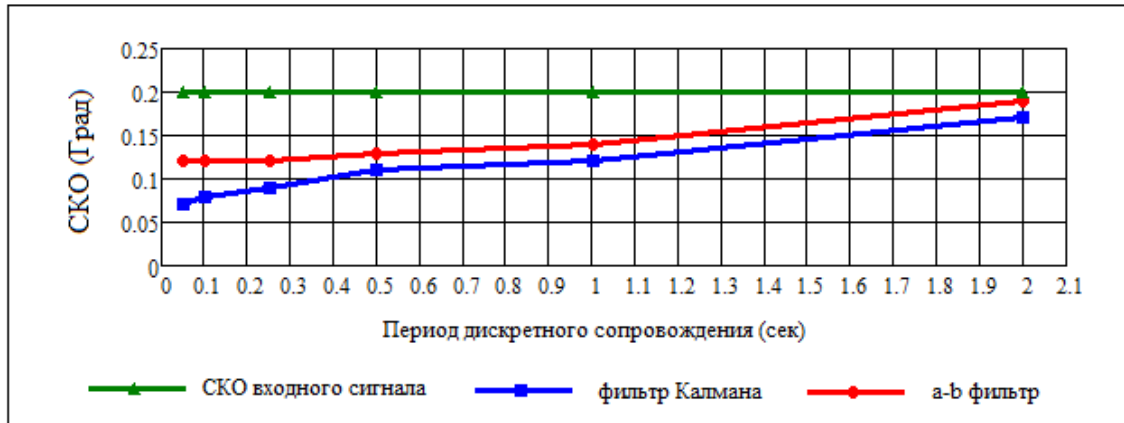


Рис. 3. Графики СКО сопровождения цели по азимуту для траектории полета с маневром «отворот» на участке без маневра

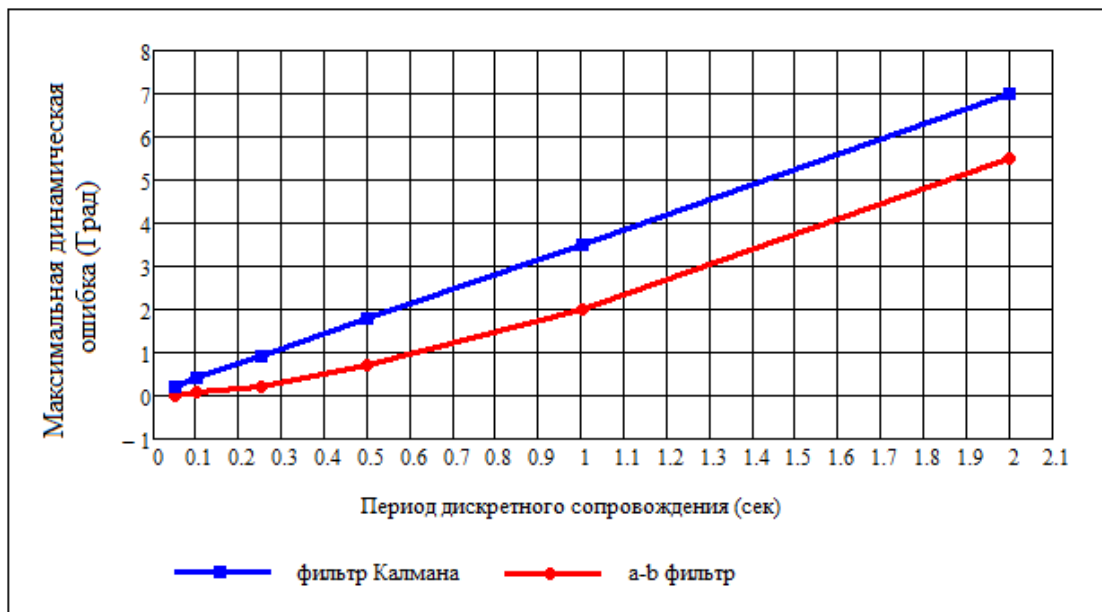


Рис. 4. Графики динамических ошибок сопровождения цели по азимуту для траектории с маневром «отворот» на участке маневра

Выводы

1. Результаты моделирования, полученные в данном разделе, будут использованы при разработке оптимальных алгоритмов фильтрации и распределения временного ресурса при проектировании угломерных систем высокой точности.

2. Критичным для устойчивого сопровождения является период дискретного времени работы контура сопровождения, превышающий $T(k) \geq 250$ мс, так как в этом случае динамические ошибки сопровождения и для фильтра Калмана и для α - β фильтра превышают ширину характерной для самолетных РЛС остронаправленной ДН, что может приводить к срыву сопровождения маневрующей цели по угловым координатам.

3. Среднеквадратическая и динамическая ошибки сопровождения (измерения угловых координат) цели увеличиваются при увеличении периода дискретных измерений.

4. СКО экстраполированных оценок угловых координат цели для фильтра Калмана при периоде дискретного времени работы контура сопровождения от 50 до 100 мс примерно в 2 раза меньше, чем СКО $\alpha - \beta$ фильтра на участках траектории цели, где отсутствует маневр.

5. Динамическая ошибка сопровождения для фильтра Калмана 2-го порядка при периоде дискретного времени работы контура сопровождения от 1 до 2 с примерно в 2 раза больше, чем для $\alpha - \beta$ фильтра на участках траектории с интенсивным маневром цели и становится сравнима с ошибкой $\alpha - \beta$ фильтра при периоде от 50 до 100 мс.

Планируется апробировать описанные алгоритмы в ситуации массивной атаки ВЦ с диверсифицированными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стрекаловская Я.И.** Имитационное моделирование потока разнохарактерных воздушных целей в условиях одновременного сопровождения // Статья в данном Вестнике.
2. **Кузьмин С.З.** Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации. - М.: Сов. радио, 1974.
3. **Кузьмин С.З.** Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации. - М.: Радио и связь, 1986.
4. **Бакулев П.А.** Радиолокационные системы: учебник для вузов. - М.: Радиотехника, 2004.

AN OPTIMAL RADIOLOCATION FILTER CHOICE FOR TRACING HETEROGENEOUS AIR TARGETS

Strekalovskaya Y.I.

Using an imitation model for a flow of heterogeneous air targets the quantitative analysis of the $\alpha - \beta$ and the Kalman filters is obtained. The filters' efficiency is demonstrated and their accuracy evaluated.

Key words: secondary data processing, Kalman filter, Imitation modeling.

Сведения об авторе

Стрекаловская Яна Иннокентьевна, окончила МГТУ ГА (2011), аспирантка МГТУ ГА, автор 2 научных работ, область научных интересов – вторичная обработка радиолокационной информации.

УДК 514.75

КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

И.С. СТРЕЛЬЦОВА

Статья представлена доктором технических наук, профессором Кузнецовым В.Л.

В работе приводится решение задачи локальной эквивалентности кривых на плоскости Лобачевского относительно группы движений. Для этого построена алгебра дифференциальных инвариантов кривых.

Ключевые слова: дифференциальные инварианты, инвариантные дифференцирования, алгебра инвариантов, группы Ли.

1. Собственные движения плоскости Лобачевского

Мы будем рассматривать модель Пуанкаре плоскости Лобачевского - полуплоскость

$$M = R_+^2 = \{(x, y) \in R^2 \mid y > 0\},$$

снабженную метрикой

$$g_L = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Собственные движения полуплоскости R_+^2 порождают группу Ли, которую мы обозначим G_L . Базис соответствующей алгебры Ли G_L имеет вид

$$X = \frac{\partial}{\partial x};$$

$$Y = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y};$$

$$H = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

2. Размерность алгебры дифференциальных инвариантов

Пусть $J^k(\pi)$ - пространство k -джетов расслоения кривых [2] и x, y_0, y_1, \dots, y_k - локальные канонические координаты на нем.

Производящие функции [4] этих векторных полей имеют вид

$$h_x = -y_1, h_y = xy_0 + \frac{y_1}{2}(y_0^2 - x^2), h_H = y_0 - xy_1$$

соответственно.

Функция J на пространстве k -джетов называется *дифференциальным инвариантом* порядка k группы Ли G_L , если $\varphi^*(J) = J$ для любого преобразования $\varphi \in G_L$ [1].

Теорема 1. Размерность алгебры дифференциальных инвариантов порядка k относительно группы Ли G_L равна $k-1$.

Доказательство. Для доказательства используем идеи работы [5]. Зафиксируем некоторую точку $a(a_x, a_y)$ на M и найдем алгебру G_a . Найдем векторное поле $Z \in G_a$ такое, что точка a является для него особой. Так как векторное поле $Z \in G_a$, то оно имеет вид

$$Z = \alpha X + \beta Y + \gamma H$$

для некоторых постоянных α, β, γ .

То есть
$$Z = (\gamma x + \frac{1}{2}(\beta x^2 - \beta y_0^2) + \alpha) \frac{\partial}{\partial x} + (\gamma y_0 + \beta x y_0) \frac{\partial}{\partial y_0}.$$

Так как точка a - особая, то должны выполняться равенства

$$\gamma a_x + \frac{1}{2}(\beta a_x^2 - \beta a_y^2) + \alpha = 0; \quad \gamma a_y + \beta a_x a_y,$$

откуда находим

$$\alpha = \beta \frac{a_x^2 + a_y^2}{2}; \quad \gamma = -\beta a_x,$$

β - произвольный параметр, который мы положим равным единице. Тогда получаем, что

$$Z = \frac{a_x^2 + a_y^2}{2} X + Y - a_x H.$$

Производящая функция этого векторного поля равна

$$h_Z = \frac{1}{2} \left(-(x - a_x)^2 + y_0^2 - a_y^2 \right) y_1 + (x - a_x) y_0.$$

Учитывая, что в точке a $x = a_x$, $y_0 = a_y$, получаем

$$N^{(2)}|_{N^{(k)}(a)} = (0, a_y(1 + y_1^2), (1 + y_1^2 + a_y y_2) y_1 + 2a_y y_1 y_2).$$

Так как $a_y > 0$, то ранг этой матрицы равен 1. Поэтому и коразмерности орбиты в $J^2(R)$ равны 1.

Для произвольного k ранг матрицы $N^{(k)}$ также равен 1, а размерность многообразия $N^{(k)}(a)$ равна k . Поэтому в размерности k существуют $k-1$ дифференциальных инварианта порядка $\leq k$. Поэтому всякий раз при переходе от пространства $(k-1)$ -джетов к пространству k -джетов возникает только один новый дифференциальный инвариант, который имеет порядок k . Теорема доказана.

3. Кривизна кривой на плоскости Лобачевского

Из теоремы 1 следует, что первый нетривиальный дифференциальный инвариант имеет порядок два. Найдем его. Продолжим векторные поля X, Y, H в $J^2(R)$

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial x}; \\ Y^{(2)} &= \frac{1}{2} \left(x^2 - y_0^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} + x y_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + \left(y_0 + y_0 y_1^2 \right) \frac{\partial}{\partial y_1} + \left(y_1 + y_1^3 + 3y_0 y_1 y_2 - x y_2 \right) \frac{\partial}{\partial y_2}; \\ H^{(2)} &= x \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y_0} - y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}. \end{aligned}$$

Пусть $J \in C^\infty(J^2(R))$ - искомый дифференциальный инвариант. Решая систему дифференциальных уравнений

$$X^{(2)}(J) = 0, Y^{(2)}(J) = 0, H^{(2)}(J) = 0,$$

мы находим, что

$$J = F \left(\frac{y_2 y_0 + y_1^2 + 1}{(y_1^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

где F - произвольная гладкая функция от одной переменной.

Таким образом, в качестве базисного дифференциального инварианта второго порядка можно выбрать функцию

$$J_2 = \frac{y_2 y_0 + y_1^2 + 1}{(y_1^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1)$$

которую будем называть *кривизной Лобачевского*.

Функцию $J_2(f)$ будем называть *кривизной кривой* s_f .

Аналогичное выражение дифференциального инварианта найдено в [3].

4. Инвариантное дифференцирование и алгебра дифференциальных инвариантов

Теорема 2. Оператор

$$\nabla = \frac{y_0}{\sqrt{y_1^2 + 1}} \frac{d}{dx}$$

является инвариантным дифференцированием группы движений G .

Доказательство.

Продолжения векторных полей X, Y, H в пространство 1-джетов имеют следующий вид

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial x}; \\ Y^{(1)} &= \frac{1}{2}(x^2 - y_0^2) \frac{\partial}{\partial x} + x y_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + (y_0 + y_0 y_1^2) \frac{\partial}{\partial y_1}; \\ H^{(1)} &= x \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y_0}. \end{aligned}$$

Поэтому функция $\lambda = \lambda(x, y_0, y_1)$ должна удовлетворять следующей системе уравнений [6]

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= 0; \\ \frac{1}{2}(x^2 - y_0^2) \frac{\partial \lambda}{\partial x} + x y_0 \frac{\partial \lambda}{\partial y_0} + (y_0 + y_1^2 y_0) \frac{\partial \lambda}{\partial y_1} - \lambda(x - y_1 y_0) &= 0; \\ x \frac{\partial \lambda}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \lambda}{\partial y_0} - \lambda &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ее общее решение имеет вид

$$\lambda = \frac{C y_0}{\sqrt{y_1^2 + 1}},$$

где C - произвольная постоянная. Теорема доказана.

Инвариант третьего порядка получим, применяя к инварианту J_2 оператор ∇

$$J_3 = \frac{y_0^2 (y_3 y_1^2 - 3 y_2^2 y_1 + y_3)}{(y_1^2 + 1)^3}.$$

Укажем также вид дифференциального инварианта четвертого порядка в координатах

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{y_0^2}{(1 + y_1^2)^{\frac{5}{2}}} (2 y_3 y_1^5 + y_0 y_4 y_1^4 - 6 y_2^2 y_1^4 + 4 y_3 y_1^3 - 10 y_0 y_2 y_3 y_1^3 + \\ &+ 2 y_0 y_4 y_1^2 + 15 y_0 y_1^2 y_2^3 - 6 y_1^2 y_2^2 - 10 y_0 y_1 y_2 y_3 + 2 y_1 y_3 + \\ &+ y_0 y_4 - 3 y_0 y_2^3). \end{aligned}$$

С учетом теоремы 1 мы получаем следующее описание алгебры дифференциальных инвариантов.

Теорема 3. Функции $J_2, J_3, \dots, J_k, \dots$ образуют полную систему локальных дифференциальных инвариантов кривой относительно группы Ли собственных движений на плоскости Лобачевского.

5. Эквивалентность кривых

Будем рассматривать регулярные кривые, т.е. такие, дифференциал кривизны которых невырожден $dJ_2(f) \neq 0$.

Итак, пусть s_f - регулярная кривая на плоскости. Тогда функцию $J_2(f)$ можно принять за новый параметр на кривой, и ограничение дифференциального инварианта J_3 на кривую s_f может быть представлено в виде некоторой функции от этого параметра

$$J_3(f) = \Phi_f(J_2(f)). \quad (2)$$

Теорема 4. Пусть на двух регулярных кривых s_f и s_g на плоскости Лобачевского выполнены следующие условия: функции Φ_f и Φ_g не обращаются в нуль.

Кривые s_f и s_g эквивалентны относительно движений плоскости Лобачевского тогда и только тогда, когда $\Phi_f \equiv \Phi_g$.

Доказательство. Пусть для кривых s_f и s_g выполняется условие $\Phi_f \equiv \Phi_g \equiv \Phi$. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$J_3 = \Phi(J_2), \quad (3)$$

определяющее гиперповерхность E в пространстве $J^3(R)$. Так как функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ являются решениями этого дифференциального уравнения, то поднятия $s_f^{(3)}$ и $s_g^{(3)}$ этих кривых в пространство $J^3(R)$ лежат на этой гиперповерхности.

Запишем уравнение (3) в координатах и разрешим его относительно старшей производной

$$y_3 = \frac{1}{y_0^2(y_1^2 + 1)} \left(\Phi \left(\frac{y_0 y_2 + y_1^2 + 1}{(y_1^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) (y_1^2 + 1)^3 + 3y_0^2 y_1 y_2^2 \right). \quad (4)$$

Выберем на каждой кривой точки $a_0 \in s_f^{(3)}$ и $b_0 \in s_g^{(3)}$. Без ограничения общности можно считать, что $x(a_0) = x(b_0) = a$. Рассмотрим пространство $N^{(2)}(a) \subset J^2(R)$. Матрица $N^{(2)}$ имеет вид

$$N^{(2)} = \begin{pmatrix} -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ xy_0 - y_1 A & y_0 - xy_1 + y_1(x + y_0 y_1) - y_2 A & -xy_2 + y_1(y_1^2 + 3y_0 y_2 + 1) + y_3 A \\ y_0 - xy_1 & -xy_2 & -y_2 - xy_3 \end{pmatrix},$$

где $A = \frac{1}{2}(x^2 - y_0^2)$. Ее определитель равен

$$\det N^{(2)} = y_0^2(-3y_1 y_2^2 + y_3(1 + y_1^2)).$$

Ограничивая его на уравнение (4), находим

$$\det N^{(2)}|_E = (1 + y_1^2)^3 \Phi \left(\frac{y_0 y_2 + y_1^2 + 1}{(y_1^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Из условий теоремы следует, что $\det N^{(2)}|_E \neq 0$ и, следовательно, группа Ли движений на

пространстве $N^{(2)}(a)$ действует транзитивно. Таким образом, с помощью подходящего преобразования ϕ из этой группы Ли можно добиться того, чтобы $a_0 = b_0$. Таким образом, без ограничения общности мы можем считать, что функции $\phi^*(f)$ и g , будучи решениями дифференциального уравнения (4), имеют одинаковые начальные данные. В силу теоремы единственности решений дифференциальных уравнений (по крайней мере локально) функции f и g совпадают. Таким образом, с помощью подходящего движения кривая s_f может быть (локально) переведена в кривую s_g . Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В.** Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техники, серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. - М.: ВИНТИ, 1988. - Т. 28.
2. **Стрельцова И.С.** Дифференциальные инварианты кривых на двумерных многообразиях // Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского. - 2011. - Т. 6. - С. 209-217.
3. **Фукс Б.А.** Неевклидова геометрия в теории конформных и псевдоконформных отображений / Б.А. Фукс. - М.-Л.: ГТТИ, 1951.
4. **Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N.** Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge: Cambridge University Press. 2007. - Т. 101.
5. **Lychagin V.V.** Dimension formulae for algebra of differential invariants // Геометрия в Кисловодске - 2010: тезисы докладов междунар. конф. - Кисловодск, 2010. - С. 49.
6. **Lychagin V.V.** Feedback Equivalence of 1-dimensional Control Systems of the 1-st Order // Геометрія, топологія та їх застосування: збірник праць Ін-ту математики НАН України. - 2009. - Т. 6. - С. 288-302.

CLASSIFICATION OF CURVES ON THE LOBACHEVSKY PLANE

Streltsova I.S.

We solve the problem of local classification on the Lobachevsky plane. We construct the algebra of differential invariant of curve.

Key words: differential invariants, invariant differentiations, algebra of invariants, Lie groups.

Сведения об авторе

Стрельцова Ирина Станиславовна, окончила Астраханский государственный университет (2003), ассистент кафедры высшей математики АГУ, автор 19 научных работ, область научных интересов - дифференциальная геометрия, дифференциальные уравнения.

УДК 514.7

СУБМЕРСИИ В КАТЕГОРИИ БЕСКОНЕЧНО ПРОДОЛЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Н. ЧЕТВЕРИКОВ¹

Известная процедура продолжения локальных диффеоморфизмов пространств джетов обобщается на случай субмерсий. При этом доказывается и используется новое описание R - плоскостей и объясняется, почему эта процедура не применима в случае иммерсий.

Ключевые слова: многообразие джетов, бесконечно продолженные дифференциальные уравнения, бесконечномерные многообразия, продолжения отображений дифференциальных уравнений.

1. Введение

Понятие, которое исследуется в данной работе, есть обобщение известного [1] понятия накрытия дифференциальных уравнений. Напомним, что *бесконечное продолжение дифференциального уравнения* E (точнее системы дифференциальных уравнений) интерпретируется как бесконечномерное многообразие E^∞ , снабженное вполне интегрируемым конечномерным распределением C . Каждая точка E^∞ представляет собой ряд Тейлора $[s]_t^\infty$ некоторого решения s системы E в некоторой точке t . Распределение C в точке $[s]_t^\infty$ совпадает с касательным пространством к графику в E^∞ решения s . *Морфизмами* упомянутой в названии категории называют гладкие отображения бесконечно продолженных уравнений, отображающие распределение C в распределение C .

Размерностью объекта (E^∞, C) рассматриваемой категории называют размерность распределения C , т.е. количество независимых переменных системы E . Сюръективное отображение $F: E^\infty \rightarrow S^\infty$ бесконечно продолженных уравнений E^∞ и S^∞ одной размерности называют *накрытием*, если оно изоморфно отображает распределение C на E^∞ в распределение C на S^∞ , т.е. в каждой точке $\theta \in E^\infty$ касательное отображение $F_{*,\theta}$ изоморфно отображает плоскость C_θ на плоскость $C_{F(\theta)}$. Накрытие, которое имеет обратное, называют *C -диффеоморфизмом*.

Субмерсией мы называем отображение $F: E^\infty \rightarrow S^\infty$, если $\dim E^\infty \geq \dim S^\infty$ и в каждой точке $\theta \in E^\infty$ касательное отображение $F_{*,\theta}$ эпиморфно отображает C_θ на $C_{F(\theta)}$.

Используя такого типа отображения, мы собираемся исследовать плоские системы с управлением [2]. Этим вызван наш интерес к этому понятию.

Отметим, что термин "субмерсия" условен и основан на введенном понятии размерности. Однако существуют и другие способы определения размерности объекта категории бесконечно продолженных дифференциальных уравнений. Например, в случае динамической системы с управлением, т.е. недоопределенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, под размерностью иногда понимают "степень недоопределенности" системы [3]. По нашему мнению, размерностью следует называть целочисленный вектор, каждая компонента которого характеризует "размер" множества решений системы в каком-то своем смысле.

Частным случаем C -диффеоморфизмов являются преобразования Ли [1], которые представляют собой бесконечные продолжения диффеоморфизмов пространств конечных джетов. В [4] выделен другой класс C -диффеоморфизмов, которые представляют собой бесконечные

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант 3659.2012.1) и грантов РФФИ 12-07-00267 и 13-07-00736.

продолжения отображений пространств конечных джетов, причем не обязательно диффеоморфизмов. Можно показать, что любое гладкое отображение бесконечно продолженных уравнений определяет цепочку гладких отображений конечных продолжений уравнений, однако отображения из такой цепочки могут быть не связаны между собой какой-либо процедурой продолжения.

В данной работе строим субмерсии бесконечно продолженных уравнений как бесконечные продолжения субмерсий пространств конечных джетов. В изложении основ геометрии дифференциальных уравнений следуем, в основном, главам 3 и 4 [1]. Для построения продолжения субмерсий доказываем и используем новое описание R -плоскостей, основанное на понятии n -формы (теорема 1).

2. Пространства конечных джетов

Рассмотрим дифференциальное уравнение на векторную функцию $u = (u^1, \dots, u^m)$ переменных $t = (t_1, \dots, t_n) \in R^n$. отождествим такую функцию с сечением тривиального расслоения $\pi: R^m \times R^n \rightarrow R^n$. Напомним, что сечением расслоения $\pi: E \rightarrow M$ называется такое отображение $s: M \rightarrow E$, что композиция $\pi \circ s$ есть тождественное отображение многообразия M . Иными словами, отображение s переводит точку $t \in M$ в некоторую точку слоя $E_t = \pi^{-1}(t)$. В частном случае тривиального расслоения $\pi: R^m \times R^n \rightarrow R^n$ слой E_t отождествляется с R^m , а сечения расслоения - с отображениями из R^n в R^m .

Рассмотрим произвольное гладкое m -мерное локально-тривиальное расслоение $\pi: E \rightarrow M$ над n -мерным многообразием M . Для простоты изложения будем считать, что рассматриваемые расслоения являются векторными расслоениями, а их слоями являются векторные пространства R^m . Пусть $U \subset M$ - некоторая окрестность, над которой расслоение π тривиально, т.е. $\pi^{-1}(U) \cong U \times R^m$. Обозначим через e_1, \dots, e_m базис в слое расслоения π - пространстве R^m . Тогда всякое сечение над U представляется в виде $s = u^1 e_1 + \dots + u^m e_m$, где u^i - гладкие функции на U . Если U - одновременно координатная окрестность на многообразии M с локальными координатами (t_1, \dots, t_n) , то любая точка слоя определяется своей проекцией на U и координатами (u^1, \dots, u^m) относительно выбранного базиса. Функции $(t_1, \dots, t_n, u^1, \dots, u^m)$ являются координатами в $\pi^{-1}(U)$ и называются *адаптированными* координатами для данного расслоения. Таким образом, в адаптированных координатах сечение задается векторной функцией $u = (u^1, \dots, u^m)$ переменных (t_1, \dots, t_n) . Переменные t_1, \dots, t_n называют *независимыми*, а переменные u^1, \dots, u^m - *зависимыми*.

Сечения s_1, s_2 расслоения π называют *касающимися над точкой $t_0 \in M$ с порядком k* , если векторные функции $u(t), v(t)$, описывающие эти сечения, имеют в точке t_0 одинаковые частные производные до порядка k включительно.

Условие касания сечений с порядком k равносильно совпадению многочленов Тейлора порядка k векторных функций. При $k = 0$ условие касания сводится к совпадению значений $u(t_0)$ и $v(t_0)$, т.е. графики сечений s_1 и s_2 должны пересекать слой E_{t_0} в одной и той же точке.

Касание сечений s_1 и s_2 над точкой t с порядком k задает отношение эквивалентности, которое будем обозначать через $s_1 \stackrel{k,t}{\sim} s_2$. Множество классов эквивалентных сечений, т.е. множество всевозможных многочленов Тейлора порядка k , обозначают через J_t^k и называют *пространством k -джетов расслоения π в точке t* . Точку этого пространства, которая есть класс эквивалентности сечения s , обозначают через $[s]_t^k$. Таким образом, если $s_1 \stackrel{k,t}{\sim} s_2$, то $[s_1]_t^k = [s_2]_t^k$. Про-

пространство (многообразие) k -джетов расслоения π - это объединение J_t^k по всем точкам $t \in M$

$$J^k \pi = \bigcup_{t \in M} J_t^k.$$

Для любой точки $\theta = [s]_t^k \in J^k \pi$ положим $\pi_k(\theta) = t$. Тем самым определена проекция $\pi_k : J^k \pi \rightarrow M$, причем $\pi_k^{-1}(t) = J_t^k$. При $k=0$ получаем, что $J^0 \pi = \bigcup_{t \in M} E_t = E$, т.е. $J^0 \pi$ совпадает с тотальным пространством расслоения π .

В качестве локальных координат на многообразии k -джетов расслоения π можно рассматривать функции t_i, u^j и u_σ^j , соответствующие независимым, зависимым переменным и частным производным независимых по зависимым переменным. Действительно, пусть $(t_1, \dots, t_n, u^1, \dots, u^m)$ - адаптированная система координат для расслоения π над некоторой окрестностью $U \subset M$. Рассмотрим множество $\pi_k^{-1}(U) \subset J^k \pi$. Локальные координаты $(t_1, \dots, t_n, u^1, \dots, u^m)$ дополним функциями $u_\sigma^j, j=1, \dots, m, |\sigma| \leq k$, которые для мультииндекса $\sigma = i_1 \dots i_l, l=|\sigma| \leq k$ определяются по формуле

$$u_\sigma^j([s]_t^k) = \frac{\partial^l s^j}{\partial t_{i_1} \dots \partial t_{i_l}}.$$

Координаты (t_i, u^j, u_σ^j) называют *каноническими координатами*, ассоциированными с адаптированной системой координат (t_i, u^j) . В случае одной независимой переменной ($n=1$) вместо u_σ^j обычно пишут $u_j^{(l)}$, где $l=|\sigma|$.

Так как при $k > q$ класс эквивалентности $[s]_t^k \in J^k \pi$ однозначно определяет класс $[s]_t^q \in J^q \pi$, то определены проекции

$$\pi_{k,q} : J^k \pi \rightarrow J^q \pi, \quad \pi_{k,q}([s]_t^k) = [s]_t^q, \quad \forall k > q.$$

Проекция π_k и $\pi_{k,q}$ являются расслоениями. Заметим также, что если s - сечение расслоения π , то для любой точки $t \in M$ можно определить элемент $j_k(s)(t) = [s]_t^k \in J_t^k \pi$. Отображение $j_k(s) : M \rightarrow J^k \pi$ есть гладкое сечение расслоения π_k , которое называется *k -джетом сечения s* .

Рассмотрим теперь произвольную систему дифференциальных уравнений порядка k на сечении расслоения π . отождествим переменные t_i, u^j, u_σ^j , входящие в запись этой системы, с соответствующими координатами пространства k -джетов $J^k \pi$ и получим подмногообразие $E \subset J^k \pi$. Сечение s расслоения π есть решение этой системы, если образ его k -джета лежит в E .

3. Характеризация R -плоскостей

Касание с порядком l графиков k -джетов $j_k(s_1)$ и $j_k(s_2)$ означает касание сечений s_1 и s_2 с порядком $k+l$. Поэтому система дифференциальных уравнений порядка k продолжается до эквивалентной ей системы дифференциальных уравнений порядка $k+l$. Если гладкое отображение пространств джетов отображает сюръективно графики k -джетов сечений в графики q -джетов сечений, оно сохраняет касание таких графиков и продолжается до отображения пространств джетов более высокого порядка. Точное определение этих конструкций мы приведем в следующем пункте, а здесь сформулируем и докажем вспомогательный факт.

Касательное пространство в точке $\theta \in J^k \pi$ к графику k -джета некоторого сечения s расслоения π называют *R -плоскостью* (здесь $\theta = [s]_t^k$ для некоторого t из M).

Заметим, что R -плоскость в точке $[s]_t^k$ определяется $(k+1)$ -джетом сечения s . Более того,

точку $\theta' \in J^{k+1}\pi$ можно рассматривать как пару, состоящую из точки $\theta = \pi_{k+1,k}(\theta') \in J^k\pi$ и R -плоскости $R_{\theta'} \subset T_{\theta}(J^k\pi)$, которая представляет собой касательную плоскость к графику k -джета такого сечения s , что $[s]_t^{k+1} = \theta'$, $t = \pi_{k+1}(\theta')$. Говоря иначе, θ' — это набор значений производных до порядка $k+1$, а плоскость $R_{\theta'} \subset T_{\theta}(J^k\pi)$ определяется значениями первых производных от k -х производных.

Плоскостью Картана $C_{\theta} = C_{\theta}^k(\pi)$ в точке $\theta \in J^k\pi$ называется линейная оболочка всех плоскостей $R_{\theta'}$ при $\theta' \in \pi_{k+1,k}^{-1}(\theta)$, т.е. линейная оболочка всех касательных плоскостей к графикам k -джетов сечений расслоения π . Соответствие $C: \theta \mapsto C_{\theta}^k(\pi)$ называется *распределением Картана* на $J^k\pi$.

В канонических координатах на $J^k\pi$ распределение Картана задается набором 1-форм

$$\omega_{\sigma}^j = du_{\sigma}^j - \sum_{i=1}^n u_{\sigma+1_i}^j dt_i, \quad j=1, \dots, m, \quad |\sigma| \leq k-1.$$

Любая $C^{\infty}(J^k\pi)$ - линейная комбинация таких форм называется *формой Картана* на $J^k\pi$.

Дадим описание R -плоскостей в $J^k\pi$, используя формы Картана и n -формы.

Теорема 1. Пусть $L \subset T_{\theta}(J^k\pi)$, M - база расслоения π , $n = \dim M$. Тогда L есть R -плоскость тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия: для любой формы Картана ω , определенной в окрестности точки θ , имеем 1) $\omega|_L \equiv 0$; 2) $(d\omega)|_L \equiv 0$; для какой-либо ненулевой n -формы Ω в $T_t(M)$, $t = \pi_k(\theta)$, имеем 3) $\pi_k^*(\Omega)|_L \neq 0$.

Доказательство. Необходимость. График k -джета сечения расслоения π есть интегральное многообразие распределения Картана на $J^k\pi$, а формы Картана равны нулю на распределении Картана. Поэтому ограничение такой формы на график k -джета тождественно равно нулю. А так как R -плоскость есть касательная плоскость к графику k -джета, то выполняются условия 1 и 2 теоремы.

Проекция $\pi_{k,*}$ изоморфно отображает R -плоскость L на пространство $T_t(M)$. Поэтому, если (ξ_1, \dots, ξ_n) - базис R -плоскости L , то $(\pi_{k,*}(\xi_1), \dots, \pi_{k,*}(\xi_n))$ - базис пространства $T_t(M)$. А так как Ω - ненулевая n -форма в $T_t(M)$, то

$$\pi_k^*(\Omega)(\xi_1, \dots, \xi_n) = \Omega(\pi_{k,*}(\xi_1), \dots, \pi_{k,*}(\xi_n)) \neq 0,$$

т.е. выполняется условие 3.

Достаточность. Условие 1 теоремы означает, что $L \subset C_{\theta}^k(\pi)$. В канонических координатах на $J^k\pi$ плоскость Картана $C_{\theta}^k(\pi)$ имеет базис

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \Big|_{\theta} + \sum_{|\sigma'| < k} \sum_{j=1}^m u_{\sigma'+1_i}^j(\theta) \frac{\partial}{\partial u_{\sigma'}^j} \Big|_{\theta}, \quad \frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^s} \Big|_{\theta}, \quad i=1, \dots, n, \quad s=1, \dots, m, \quad |\sigma|=k.$$

Условие 3 теоремы означает, что L содержит n векторов вида

$$\xi_i = \frac{\partial}{\partial t_i} \Big|_{\theta} + \sum_{|\sigma'| < k} \sum_{j=1}^m u_{\sigma'+1_i}^j(\theta) \frac{\partial}{\partial u_{\sigma'}^j} \Big|_{\theta} + \sum_{|\sigma|=k} \sum_{s=1}^m a_{i,\sigma}^s \frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^s} \Big|_{\theta}, \quad i=1, \dots, n, \quad (1)$$

где $a_{i,\sigma}^s$ - некоторые числа.

Из условия 2 теоремы следует, что L содержит только линейную оболочку векторов (1). Действительно, предположим, что вектор

$$\xi = \sum_{|\sigma|=k} \sum_{s=1}^m b_{\sigma}^s \frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^s} |_{\theta}, \quad b_{\sigma_0}^{s_0} \neq 0,$$

принадлежит L . Выберем такой мультииндекс σ_1 , что $\sigma_0 = \sigma_1 + 1_{i_1}$. Тогда для формы Картана $\omega_{\sigma_1}^{s_0}$ имеем

$$d\omega_{\sigma_1}^{s_0} = \sum_{i=1}^n dt_i \wedge du_{\sigma_1+1_i}^{s_0} \quad \text{и} \quad d\omega_{\sigma_1}^{s_0}(\xi_{i_1}, \xi) = b_{\sigma_0}^{s_0} \neq 0,$$

а это противоречит условию 2.

Наконец, для произвольной формы Картана вида ω_{σ}^j имеем

$$d\omega_{\sigma}^j(\xi_{\alpha}, \xi_{\beta}) = a_{\alpha, \sigma+1_{\beta}}^j - a_{\beta, \sigma+1_{\alpha}}^j = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n. \quad (2)$$

В слое $\pi_{k+1, k}^{-1}(\theta)$ рассмотрим точку θ' с координатами

$$u_{\sigma+1_i}^j(\theta') = a_{i, \sigma}^j, \quad j = 1, \dots, m, \quad |\sigma| = k.$$

Покажем, что данное условие корректно определяет координаты точки θ' . Действительно, если $\sigma + 1_i = \sigma' + 1_s$, то $\sigma = \sigma_0 + 1_s$, $\sigma' = \sigma_0 + 1_i$, где $|\sigma_0| = k - 1$, и из соотношения (2) получаем равенство

$$u_{\sigma'+1_s}^j(\theta') = a_{s, \sigma'}^j = a_{s, \sigma_0+1_i}^j = a_{i, \sigma_0+1_s}^j = a_{i, \sigma}^j = u_{\sigma+1_i}^j(\theta').$$

Таким образом, векторы (1) имеют вид

$$\xi_i = \frac{\partial}{\partial t_i} |_{\theta} + \sum_{|\sigma| \leq k} \sum_{j=1}^m u_{\sigma+1_i}^j(\theta') \frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^j} |_{\theta}, \quad i = 1, \dots, n,$$

а значит, принадлежат R -плоскости $R_{\theta'}$. Поскольку эти векторы образуют базис плоскости L , то $L = R_{\theta'}$. Теорема 1 доказана.

4. Продолжение уравнений и их отображений

Пусть $E \subset J^k \pi$. Множество $E^{(1)} \subset J^{k+1} \pi$, состоящее из таких точек $\theta' \in J^{k+1} \pi$, что R -плоскость $R_{\theta'}$ касается уравнения E в точке $\theta = \pi_{k+1, k}(\theta')$, называют первым продолжением уравнения E . Продолжение $E^{(l)}$ порядка l уравнения E определяется индуктивно, как первое продолжение продолжения $E^{(l-1)}$ порядка $l-1$: $E^{(l)} = (E^{(l-1)})^{(1)}$. Многообразие $E^{(l)}$ лежит в $J^{k+l} \pi$ и задается всеми дифференциальными следствиями уравнения E вплоть до порядка l включительно.

Распределение Картана $C(E)$ на уравнении $E \subset J^k \pi$ определяется как ограничение на E распределения Картана на $J^k \pi$, т.е. $C_{\theta}(E) = C_{\theta}^k(\pi) \cap T_{\theta}(E)$ для $\theta \in E$.

Напомним, что *формой объема* на многообразии \mathbb{M} называют дифференциальную форму максимальной степени, т.е. степени $n = \dim \mathbb{M}$, не равную нулю ни в одной точке \mathbb{M} .

Теорема 2. Пусть $E \subset J^k \pi$, $\pi: E \rightarrow \mathbb{M}$ - второе расслоение, Ω - форма объема на второй базе \mathbb{M} , гладкое отображение $F: E \rightarrow J^q \pi$ сохраняет распределение Картана, т.е. $F_{*, \theta}(C_{\theta}(E)) \subseteq C_{F(\theta)}^q(\pi)$ для $\theta \in E$. Тогда формула

$$R_{F^{(1)}(\theta')} = F_*(R_{\theta'}) \quad (3)$$

однозначно определяет гладкое отображение $F^{(1)} : E_1 \rightarrow J^{q+1}\pi$, где подмногообразие $E_1 \subset E^{(1)}$ определяется условием

$$\theta' \in E_1 \Leftrightarrow (\pi_q \circ F)^*(\Omega)|_{R_{\theta'}} \neq 0. \quad (4)$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $F_*(R_{\theta'})$ есть R -плоскость. Используем для этого теорему 1. Так как F сохраняет распределение Картана, а $R_{\theta'}$ - подпространство плоскости Картана, то $L = F_*(R_{\theta'})$ - также подпространство плоскости Картана. Это доказывает выполнимость первого условия теоремы 1.

Поскольку F сохраняет распределение Картана, то индуцированное отображение F^* сохраняет модуль форм Картана, т.е. если ω - форма Картана на $J^q\pi$, то $F^*(\omega)$ - форма Картана на E . Поэтому для произвольной пары векторов ξ, η из $R_{\theta'}, \theta' \in E_1$ имеем

$$d\omega(F_*(\xi), F_*(\eta)) = F^*(d\omega)(\xi, \eta) = dF^*(\omega)(\xi, \eta) = 0,$$

т.е. выполняется условие 2 теоремы 1.

Наконец, по определению E_1 имеем $(\pi_q \circ F)^*(\Omega)|_{R_{\theta'}} \neq 0$. Следовательно, найдутся такие n векторов ξ_1, \dots, ξ_n из $R_{\theta'}$ (где $n = \dim M$ - степень формы объема Ω), что

$$(\pi_q \circ F)^*(\Omega)(\xi_1, \dots, \xi_n) = \pi_q^*(\Omega_x)(F_*(\xi_1), \dots, F_*(\xi_n)) \neq 0, \quad x = (\pi_q \circ F \circ \pi_{k+1,k})(\theta').$$

Но $F_*(\xi_1), \dots, F_*(\xi_n) \in L$, а Ω_x - ненулевая n -форма в $T_x(M)$. Поэтому выполняется и условие 3 теоремы 1, а значит, $L = F_*(R_{\theta'})$ есть R -плоскость, и отображение $F^{(1)}$ определено. Теорема 2 доказана.

Отметим, что подмногообразие E_1 определяется только многообразием E и отображением F и не зависит от выбора формы объема Ω . Действительно, любые две формы объема на многообразии M отличаются на ненулевой множитель, а значит, если условие (4) выполняется для одной из них, то оно выполняется и для второй.

Возможна ситуация, когда $E_1 = E^{(1)}$ [2], но возможен случай и пустого E_1 . Например, если в условиях теоремы 2 размерность расслоения π меньше $\dim M = n$, то степень формы $(\pi_q \circ F)^*(\Omega)$ больше размерности любой R -плоскости $R_{\theta'}$ в E , а значит, для любой точки $\theta' \in E^{(1)}$ имеем $(\pi_q \circ F)^*(\Omega)|_{R_{\theta'}} \equiv 0$, т.е. $E_1 = \emptyset$.

Теорема 3. Отображение $F^{(1)}$, определенное в теореме 2, обладает свойствами:

- 1) $\pi_{q+1,q} \circ F^{(1)} = F \circ \pi_{k+1,k} |_{E_1}$;
- 2) отображение $F^{(1)}$ сохраняет распределение Картана;
- 3) $(\pi_{q+1} \circ F^{(1)})^*(\Omega)|_{R_{\theta'}} \neq 0$ для любой точки $\theta' \in E_1^{(1)}$.

Доказательство. По определению R -плоскость $R_{F^{(1)}(\theta')}$, $\theta' \in E_1$ лежит в касательном пространстве к $J^q\pi$ в точке $\pi_{q+1,q}(F^{(1)}(\theta'))$. Так как F отображает касательное пространство к E в точке $\pi_{k+1,k}(\theta')$ в касательное пространство к $J^q\pi$ в точке $F(\pi_{k+1,k}(\theta'))$, то из равенства (3) следует соотношение $\pi_{q+1,q}(F^{(1)}(\theta')) = F(\pi_{k+1,k}(\theta'))$. Поскольку это рассуждение верно для любой точки θ' из E_1 , то справедливо свойство 1.

Для доказательства второго свойства используем доказанное первое свойство и следующее описание плоскостей Картана:

$$C_\theta^{k+1}(\pi) = (\pi_{k+1,k})_*^{-1}(R_\theta), \quad \theta \in J^{k+1}\pi,$$

[4, гл. 3, теорема 2.1]. Для произвольной точки $\theta \in E_1$ имеем

$$(\pi_{k+1,k})_*(C_\theta(E_1)) \subseteq (\pi_{k+1,k})_*(C_\theta^{k+1}(\pi)) = R_\theta$$

и поэтому

$$(\pi_{q+1,q})_*(F_*^{(1)}(C_\theta(E_1))) = (F \circ \pi_{k+1,k})_*(C_\theta(E_1)) \subseteq F_*(R_\theta) = R_{F^{(1)}(\theta)}.$$

А значит, $F_*^{(1)}(C_\theta(E_1)) \subseteq (\pi_{q+1,q})_*^{-1}(R_{F^{(1)}(\theta)}) = C_{F^{(1)}(\theta)}^{q+1}(\pi)$, т.е. отображение $F^{(1)}$ сохраняет распределение Картана.

Наконец, из определений проекций $\pi_q, \pi_{q+1,q}$ и свойства 1 этой теоремы следует, что

$$\pi_{q+1} \circ F^{(1)} = \pi_q \circ \pi_{q+1,q} \circ F^{(1)} = \pi_q \circ F \circ \pi_{k+1,k} \big|_{E_1}.$$

Кроме того, для произвольной точки $\theta'' \in E_1^{(1)}$ имеем $(\pi_{k+1,k})_*(R_{\theta''}) = R_{\pi_{k+2,k+1}(\theta'')}$ и $\pi_{k+2,k+1}(\theta'') \in E_1$. Используя эти факты и определение E_1 , получаем

$$(\pi_{q+1} \circ F^{(1)})^*(\Omega) \big|_{R_{\theta''}} = (\pi_q \circ F)^*(\Omega) \big|_{(\pi_{k+1,k})_*(R_{\theta''})} = (\pi_q \circ F)^*(\Omega) \big|_{R_{\pi_{k+2,k+1}(\theta'')}} \neq 0.$$

Это доказывает свойство 3 и завершает доказательство теоремы.

Отображение $F^{(l)}$ называют первым продолжением отображения F . Из теорем 2 и 3 следует, что определено продолжение продолжения отображения $F : (F^{(1)})^{(1)} : E_1^{(1)} \rightarrow J^{q+2}\pi$. Продолжение $F^{(l)} : E_1^{(l-1)} \rightarrow J^{q+l}\pi$ порядка l отображения F определяется как первое продолжение продолжения порядка $l-1$: $F^{(l)} = (F^{(l-1)})^{(1)}$.

Формулы для $F^{(l)}$ удобно записать, используя бесконечные продолжения уравнений и полные производные по независимым переменным.

5. Бесконечные продолжения уравнений и отображений

Пространство бесконечных джетов $J^\infty\pi$ определяется как обратный предел цепочки проекций

$$M \xleftarrow{\pi_0} J^0\pi \xleftarrow{\pi_{1,0}} J^1\pi \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{\pi_{k+1,k}} J^k\pi \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{\pi_{k+1,k}} J^{k+1}\pi \xleftarrow{\dots}$$

А именно, элементом $J^\infty\pi$ является последовательность таких точек $t \in T$, $\theta_k \in J^k\pi$, $k \geq 0$,

$$\text{что } t \xleftarrow{\pi_0} \theta_0 \xleftarrow{\pi_{1,0}} \theta_1 \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{\pi_{k+1,k}} \theta_k \xleftarrow{\dots} \theta_{k+1} \xleftarrow{\dots}$$

Канонические координаты на многообразиях конечных джетов порождают канонические координаты на $J^\infty\pi : (t_i, u^j, u_\sigma^j)$, где $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, а мультииндекс σ может иметь любую длину $|\sigma| \geq 0$.

На множестве $J^\infty\pi$ определяются аналоги основных дифференциально-геометрических понятий, встречающихся в дифференциальном исчислении на конечномерных многообразиях. Определим их кратко [4, гл. 4, §1]. Касательный вектор X_θ к многообразию $J^\infty\pi$ в точке $\theta = \{t, \theta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in J^\infty\pi$ определяется как совокупность $\{X_t, X_{\theta_k}\}$ таких касательных векторов к мно-

гообразиям M и $J^k \pi$ в точках t и θ_k соответственно, что

$$X_t \xleftarrow{\pi_{0,*}} X_{\theta_0} \xleftarrow{(\pi_{1,0})_*} X_{\theta_1} \xleftarrow{\dots} X_{\theta_k} \xleftarrow{(\pi_{k+1,k})_*} X_{\theta_{k+1}} \xleftarrow{\dots} \quad (5)$$

Как и в случае конечномерных многообразий, касательный вектор к $J^\infty \pi$ интерпретируется как дифференцирование алгебры гладких функций со значениями в R , а векторное поле - как дифференцирование этой алгебры. При этом гладкие функции на $J^\infty \pi$ определяются следующим образом. Обозначим через $F_k(\pi)$ алгебру гладких функций на конечномерном многообразии $J^k \pi$. Для чисел k, l таких, что $k \geq l$, имеем вложение $(\pi_{k,l})^* : F_l(\pi) \rightarrow F_k(\pi)$. отождествляя функции $f \in F_l(\pi)$ и $(\pi_{k,l})^*(f) \in F_k(\pi)$, положим

$$F(\pi) = \bigcup_{k \geq 0} F_k(\pi).$$

Элементы $F(\pi)$ называются *гладкими функциями* на $J^\infty \pi$. Аналогично, *дифференциальные формы* на $J^\infty \pi$ определяются как элементы множества

$$\Lambda^i(J^\infty \pi) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Lambda^i(J^k \pi).$$

В канонических координатах на $J^\infty \pi$ векторные поля, т.е. дифференцирования алгебры $F(\pi)$, представляют собой $F(\pi)$ -линейные комбинации (возможно бесконечные) частных производных по координатам. Например, выражение

$$D_{t_i} = \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{|\sigma|=0}^{\infty} \sum_{j=1}^m u_{\sigma+i}^j \frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^j}$$

задает векторное поле на $J^\infty \pi$, которое называют *полной производной по переменной t_i* .

Распределения Картана на $J^k \pi$, $k \geq 0$, порождают *распределение Картана $C(\pi)$* на $J^\infty \pi$. А именно, в точке $\theta = \{t, \theta_k\} \in J^\infty \pi$ вектор (5) принадлежит плоскости Картана $C_\theta(\pi)$, если для любого натурального k вектор X_{θ_k} принадлежит плоскости Картана $C_{\theta_k}^k(\pi)$. Распределение Картана на $J^\infty \pi$ n -мерно и порождается полными производными по независимым переменным [4, гл.4, утверждение 2.2].

Определим *бесконечное продолжение E^∞* (или *диффеотоп*) *уравнения $E \subset J^k \pi$* как подмножество $J^\infty \pi$, состоящее из таких точек $\theta = \{t, \theta_l\} \in J^\infty \pi$, что для любого натурального l точка θ_{k+l} принадлежит $E^{(l)}$. Распределение Картана на E^∞ определяется как ограничение на E^∞ распределения Картана на $J^\infty \pi$. Полная производная D_{t_i} по любой независимой переменной t_i системы E касается E^∞ . Поэтому определено ее ограничение $D_{t_i}|_{E^\infty}$ на E^∞ , а значит, распределение Картана на E^∞ порождается полями $D_{t_1}|_{E^\infty}, \dots, D_{t_n}|_{E^\infty}$.

Совокупность ограничений на $E^{(l)}$ гладких функций, определенных на объемлющем пространстве $J^{k+l} \pi$, обозначим через $F_l(E)$. Для любого $l \geq 0$ имеем вложение $F_l(E) \subset F_{l+1}(E)$.

Элементы множества $F(E) = \bigcup_{l=0}^{\infty} F_l(E)$ называют *гладкими функциями на диффеотопе E^∞* .

Наконец, *гладким отображением диффеотопов* называют такое отображение $G : E^\infty \rightarrow S^\infty$, для которого индуцированное отображение G^* действует из гладких функций в гладкие: $G^*(F(S)) \subset F(E)$, где $G^*(g) = g \circ G$.

Семейство $\{F^{(l)} : E_1^{(l-1)} \rightarrow J^{q+l} \pi\}_{l \in \mathbb{N}}$ продолжений отображения $F : E \rightarrow J^q \pi$ (теорема 2)

определяет гладкое отображение $F^\infty : E_1^\infty \rightarrow J^\infty \pi$, которое точку $\theta = \{t, \theta_l\} \in E^\infty \subset J^\infty \pi$ отображает в точку

$$F^\infty(\theta) = \{(\pi_q \circ F)(\theta_k), (\pi_{q,i} \circ F)(\theta_k), i=0,1,\dots,q-1, F(\theta_k), F^{(l)}(\theta_{k+l}), l>0\}.$$

Действительно, последовательность $F^\infty(\theta)$ есть точка в $J^\infty \pi$, так как из свойства 1 из теоремы 3 следует, что

$$\begin{aligned} \pi_{q+l,q+l-1}(F^{(l)}(\theta_{k+l})) &= (\pi_{q+l,q+l-1} \circ (F^{(l-1)})^{(1)})(\theta_{k+l}) = \\ &= \left(F^{(l-1)} \circ \pi_{k+l,k+l-1} \Big|_{E_1^{(l-1)}} \right)(\theta_{k+l}) = F^{(l-1)}(\theta_{k+l-1}). \end{aligned}$$

Будем называть отображение F^∞ *бесконечным продолжением отображения F* .

Так как для любого $l>0$ отображение $F^{(l)} : E_1^{(l-1)} \rightarrow J^{q+l} \pi$ сохраняет распределение Картана, то отображение $F^\infty : E_1^\infty \rightarrow J^\infty \pi$ также сохраняет распределение Картана. Пусть t_1, \dots, t_n - независимые переменные системы E_1 , $x_1, \dots, x_{\tilde{n}}$ - координаты на базе расслоения π . Тогда полные производные D_{x_j} , $j=1, \dots, \tilde{n}$ задают распределение Картана на $J^\infty \pi$, а ограничения $D_i \Big|_{E_1^\infty}$, $i=1, \dots, n$ - распределение Картана на E_1^∞ . Поэтому в произвольной точке $\theta \in E_1^\infty$ имеем

$$(F^\infty)_{*,\theta}(D_i \Big|_{E_1^\infty}) = \sum_{j=1}^{\tilde{n}} A_{ij}(\theta) D_{x_j} \Big|_{F^\infty(\theta)}, \quad i=1, \dots, n, \quad (6)$$

где $A_{ij}(\theta)$ - значение функции $D_i \Big|_{E_1^\infty}(F^*(x_j))$ в точке θ . Из условия (4) следует, что матрица $(A_{ij}(\theta))$ имеет ранг \tilde{n} в каждой точке $\theta \in E_1^\infty$. А значит, $n \geq \tilde{n}$, F^∞ есть субмерсия при $n > \tilde{n}$ или накрытие при $n = \tilde{n}$. Фиксируем точку $\theta \in E_1^\infty$ и переобозначим переменные t_1, \dots, t_n так, чтобы матрица $(A_{ij}(\theta))_{i,j=1,\dots,\tilde{n}}$ была невырожденной. Тогда в некоторой окрестности точки $\theta \in E_1^\infty$ соответствующая матрица также невырожденная. Обратную матрицу к матрице $(A_{ij})_{i,j=1,\dots,\tilde{n}}$ обозначим через $(B_{ij})_{i,j=1,\dots,\tilde{n}}$. Эта матрица есть матрица функций, и она определена в указанной окрестности. Из формул (6) следуют равенства операторов

$$(F^\infty)^* \circ D_{x_j} = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} B_{ji} D_i \Big|_{E_1^\infty} \circ (F^\infty)^*, \quad i=1, \dots, \tilde{n}. \quad (7)$$

В координатах отображение F^∞ определяется действием индуцированного отображения $(F^\infty)^*$ на координатные функции x_i, u_σ^l многообразия $J^\infty \pi$. Координатная функция u_σ^l есть функция на $J^p \pi$, где $p = |\sigma|$. Из определения F^∞ следует, что $(F^\infty)^*(u_\sigma^l) = (F^{(p-q)})^*(u_\sigma^l)$ при $p > q$ и $(F^\infty)^*(u_\sigma^l) = F^*(u_\sigma^l)$ при $p \leq q$, а также $(F^\infty)^*(x_i) = F^*(x_i)$. Кроме того, при $|\sigma| = q+1$ имеем $\sigma = \sigma_0 + 1_j$ для некоторых σ_0 и j , а также $u_\sigma^l = D_{x_j}(u_{\sigma_0}^l)$. Используя (7), получаем

$$(F^{(1)})^*(u_\sigma^l) = (F^\infty)^*(D_{x_j}(u_{\sigma_0}^l)) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} B_{ji} (D_i \Big|_{E_1^\infty} \circ F^*)(u_{\sigma_0}^l).$$

Учитывая свойство 1 отображения $F^{(1)}$ (теорема 3), имеем также

$$(F^{(1)})^*(x_i) = F^*(x_i), \quad (F^{(1)})^*(u_\sigma^l) = F^*(u_\sigma^l), \quad i=1, \dots, \tilde{n}, \quad l=1, \dots, m, \quad |\sigma| \leq q.$$

Таким образом, получены формулы, выражающие $F^{(1)}$ через F . Так как $F^{(l)} = (F^{(l-1)})^{(1)}$ для любого $l > 0$, то аналогичные формулы пишутся для $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ и т.д.

6. Заключение

Приведенная конструкция гладкого отображения $F^\infty : E_1^\infty \rightarrow J^\infty \pi$ бесконечно продолженных уравнений как бесконечного продолжения отображения $F : E \rightarrow J^q \pi$, $E \subset J^k \pi$, конечномерных многообразий возможна только в случае субмерсий или накрытий. Действительно, в других случаях (например, в случае иммерсии) образ $F(j_k(s))$ есть подповерхность меньшей размерности поверхности $j_q(\tilde{s})$. Из касания подповерхностей не следует касание поверхностей. Поэтому в этом случае нет однозначности в выборе точки $F^{(1)}([s]_t^{k+1})$ в $J^{q+1} \pi$, а значит, и отображения $F^{(1)} : E_1 \rightarrow J^{q+1} \pi$. При этом такое отображение F^∞ по-прежнему представляется как цепочка отображений конечномерных многообразий, однако отображения из этой цепочки не связаны процедурой продолжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Факториал. - 2005.
2. Четвериков В.Н. Джеты плоских систем с управлением // статья в данном Вестнике.
3. Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. Nonlinear control and diffieties, with an application to physics // Contemporary Mathematics. - 1998. - V. 219. - P. 81-92.
4. Chetverikov V.N. On the structure of integrable C -fields // Differential Geom. Appl. - 1991. - V. 1. - P. 309-25.

SUBMERSIONS IN THE CATEGORY OF INFINITE PROLONGED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Chetverikov V.N.

The well-known procedure of prolongation of local diffeomorphisms of jet spaces is generalised on the case of submersions. Some new description of R -planes is proved and used. Why this procedure is not applicable in the case of an immersion is explained.

Key words: jet manifolds, infinite prolonged differential equations, infinite-dimensional manifolds, prolongations of maps of differential equations.

Сведения об авторе

Четвериков Владимир Николаевич, 1958 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1980), доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования МГТУ им. Н.Э. Баумана, автор 47 научных работ, область научных интересов - преобразования уравнений в частных производных, функционально-дифференциальные уравнения, симметрии, законы сохранения, нелинейные динамические системы с управлением, динамическая обратная связь, плоские системы.

УДК 517.935.4

ДЖЕТЫ ПЛОСКИХ СИСТЕМ С УПРАВЛЕНИЕМ

В.Н. ЧЕТВЕРИКОВ¹

Плоские системы образуют наиболее широкий класс систем, для которых разработаны методы управления. Любую плоскую систему можно представить как образ гладкого отображения пространства джетов. В статье выведено уравнение на такие отображения, а каждому джету решения этого уравнения поставлен в соответствие джет функции, определяющей плоскую систему. Каждая функция, равная нулю на этом множестве джетов, задает необходимое условие плоскостности.

Ключевые слова: плоские системы с управлением, многообразия джетов, продолжения отображений дифференциальных уравнений.

1. Введение. Плоские системы с управлением

Мы рассматриваем системы с управлением вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in R^n, u \in R^m, \quad (1)$$

где t - независимая переменная, вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ - состояние, вектор $u = (u_1, \dots, u_m)$ - управление, $f = (f_1, \dots, f_n)$ - гладкая векторная функция, а $\dot{x} \equiv dx/dt$. Под гладкостью здесь и далее мы понимаем бесконечную дифференцируемость.

Пусть l - некоторое неотрицательное целое. Считая переменные

$$t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_m, \ddot{u}_1, \dots, u_m^{(l)} \quad (2)$$

независимыми, рассмотрим пространство с такими координатами. Через $U^{(l)}$ будем обозначать какую-либо область этого пространства.

Систему (1) называют *плоской* [1] в области $U^{(l)}$, если на $U^{(l)}$ определены такие функции

$$y_1 = h_1(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}), \quad \dots, \quad y_r = h_r(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}), \quad (3)$$

что переменные x и u выражаются через t , функции (3) и их производные в силу системы (1) до какого-то конечного порядка, а любой конечный набор функций (3), их производных в силу системы (1) и функции t функционально независим. При этом набор функций (3) называется *плоским* (или *линеаризирующим*) выходом системы (1).

Систему (1) называют *регулярной*, если ранг матрицы $(\partial f_i / \partial u_j)$ равен m в каждой точке области определения системы. Можно показать [1], что в случае регулярной системы плоский выход (3) состоит из m функций, т.е. $r = m$.

По теореме о неявной функции в окрестности каждой точки регулярной системы переменные управления u_1, \dots, u_m выражаются через переменные состояния x_1, \dots, x_n и их производные $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$. Заменяя u_1, \dots, u_m на эти выражения и, по необходимости, переобозначая переменные состояния, преобразуем систему (1) к виду

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m), \quad i = m+1, \dots, n. \quad (4)$$

Для плоских систем разработаны методы управления и показано, что многие технические системы описываются плоскими системами [1]. Задача проверки плоскостности систем является актуальной и в данный момент ее полное решение неизвестно. Особенную трудность вызывает доказательство неплоскостности систем. Единственному известному необходимому условию, полученному П. Рушоном [2], удовлетворяет очень широкий класс систем. Поэтому, используя только это условие, доказать, что данная система не является плоской, как правило, не удается.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант 3659.2012.1) и грантов РФФИ 12-07-00267 и 13-07-00736.

В этой работе предлагается способ вычисления серии необходимых условий плоскостности. В п. 2 мы получаем первое такое условие для систем наименьшей нетривиальной размерности ($n=3, m=2$). Этот результат достигнут теми же методами, которые использовал П. Рушон в [2], а ранее применил Д. Гильберт [3] для доказательства непараметризуемости уравнения $\dot{x} = (\ddot{y})^2$. Однако найти таким способом другие необходимые условия плоскостности не представляется возможным ввиду громоздкости получающихся формул. Мы ставим перед собой задачу описания условий плоскостности на языке геометрии пространств джетов [4]. В п. 3 на основе результатов из [5] строится геометрический образ системы дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют правые части плоских систем вида (4). Серия уравнений, определяющих эту систему, и есть упомянутая серия необходимых условий плоскостности.

2. Первое необходимое условие плоскостности

В случае $n=3, m=2$ система (4) состоит из одного уравнения вида

$$\dot{x}_3 = f(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2). \tag{5}$$

Если исходная система была плоской, то плоской является и система (5). Из определения плоскостности, в частности, следует, что переменные x_1, x_2, x_3 выражаются через t , функции плоского выхода вида (3) и их производные в силу системы (5) до какого-то конечного порядка. Обозначим этот порядок через l . Тогда

$$x_i = X_i(t, y_1, y_2, \dot{y}_1, \dots, y_2^{(l)}), \quad i=1, 2, 3, \tag{6}$$

причем, по крайней мере, одна из функций X_1, X_2 или X_3 зависит, по крайней мере, от одной из старших производных $y_1^{(l)}$ или $y_2^{(l)}$. Для определенности будем считать, что одна из этих функций зависит от $y_1^{(l)}$. Имеем

$$EX_3 = f(t, X_1, X_2, X_3, EX_1, EX_2), \tag{7}$$

где EX_i обозначает полную производную функции X_i по t , т.е.

$$EX_i = \frac{\partial X_i}{\partial t} + \sum_{j=1,2} \sum_{s=0}^l y_j^{(s+1)} \frac{\partial X_i}{\partial y_j^{(s)}}.$$

Отметим, что в выражении (7) от $y_1^{(l+1)}$ могут зависеть только функции EX_1, EX_2, EX_3 , причем зависеть линейно. Дифференцируя выражение (7) по $y_1^{(l+1)}$ три раза и используя стандартные обозначения для производных функции f по пятому (u_1) и шестому (u_2) аргументам: $f_5 = f'_{u_1}, f_{56} = f''_{u_1 u_2}$ и т.д., получаем

$$\frac{\partial X_3}{\partial y_1^{(l)}} = f_5 \frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} + f_6 \frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}}; \tag{8}$$

$$0 = f_{55} \left(\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \right)^2 + 2f_{56} \frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} + f_{66} \left(\frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} \right)^2; \tag{9}$$

$$0 = f_{555} \left(\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \right)^3 + 3f_{556} \left(\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \right)^2 \frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} + 3f_{566} \frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \left(\frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} \right)^2 + f_{666} \left(\frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} \right)^3. \tag{10}$$

Умножая уравнение (9) на $\left(\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \right)^2$, на $\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}}$ и на $\left(\frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} \right)^2$, а уравнение (10) на $\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}}$ и на $\frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}}$, получим 5 уравнений, которые можно представить в матричном виде $A X = 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} f_{55} & 2f_{56} & f_{66} & 0 & 0 \\ 0 & f_{55} & 2f_{56} & f_{66} & 0 \\ 0 & 0 & f_{55} & 2f_{56} & f_{66} \\ f_{555} & 3f_{556} & 3f_{566} & f_{666} & 0 \\ 0 & f_{555} & 3f_{556} & 3f_{566} & f_{666} \end{pmatrix};$$

$$X = \left(\left(\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \right)^4 \left(\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \right)^3 \frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} \left(\frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \right)^2 \left(\frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} \right)^2 \frac{\partial X_1}{\partial y_1^{(l)}} \left(\frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} \right)^3 \left(\frac{\partial X_2}{\partial y_1^{(l)}} \right)^4 \right)^T.$$

По выбору l столбец X не может быть нулевым. Поэтому определитель матрицы A равен нулю. Вычисляя его, получаем уравнение

$$\begin{aligned} & f_{555}^2 f_{66}^3 - 6f_{555} f_{556} f_{56} f_{66}^2 + 6f_{555} f_{566} (2f_{56}^2 - f_{55} f_{66}) f_{66} + 9f_{556}^2 f_{55} f_{66}^2 + \\ & + 2f_{555} f_{666} (3f_{55} f_{66} - 4f_{56}^2) f_{56} - 18f_{556} f_{566} f_{55} f_{56} f_{66} + 9f_{566}^2 f_{55} f_{66} + \\ & + 6f_{556} f_{666} (2f_{56}^2 - f_{55} f_{66}) f_{55} - 6f_{566} f_{666} f_{55}^2 f_{56} + f_{666}^2 f_{55}^3 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, если система (5) плоская, то функция $f(t, x_1, x_2, x_3, u_1, u_2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (11).

Используя аналогичные рассуждения, из соотношений (7), (8) можно получить и другие дифференциальные уравнения на функцию f в случае плоской системы (5). Более того, такого типа рассуждения применимы и к общему случаю, когда m и n произвольны. Однако получить таким способом другие необходимые условия плоскостности не удастся ввиду сложности уравнений.

3. Система уравнений на функции, задающие плоскую систему

Для описания всего множества уравнений вида (11) мы используем теорию, изложенную в [5].

Для простоты изложения ограничимся случаем $n = 3$, $m = 2$. Как отмечалось в п. 2, если система (5) плоская, то существуют функции (6), удовлетворяющие уравнению (7). Функции (6) задают отображение из $J^1\pi$ в $J^0\bar{\pi}$, где расслоения π и $\bar{\pi}$ определяются соотношениями $\pi: (t, y_1, y_2) \mapsto t$ и $\bar{\pi}: (t, x_1, x_2, x_3) \mapsto t$. Бесконечное продолжение этого отображения есть накрытие из пространства $J^\infty\pi$ бесконечных джетов в диффеотоп системы (5) [5]. В [6] доказано, что если такое накрытие существует, то система (5) плоская. Таким образом, условие существования функций (6), удовлетворяющих уравнению (7), является не только необходимым, но и достаточным условием плоскостности.

Назовём l -плоской систему вида (5), для которой существуют функции (6), удовлетворяющие уравнению (7).

Заменяя y_1, y_2 на \dot{y}_1, \dot{y}_2 , получим из условия l -плоской системы условие $(l+1)$ -плоской системы. Поэтому любая l -плоская система является $(l+1)$ -плоской.

Фиксируем $l \in \mathbb{N}$ и поставим задачу поиска всех l -плоских систем. Увеличивая l , в пределе $l \rightarrow \infty$ получим описание всех плоских систем вида (5).

Рассмотрим случай, когда от t не зависят ни функция f в (5), ни функции (6). Из соотношения (7) следует равенство

$$dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3 \wedge dE(X_1) \wedge dE(X_2) \wedge dE(X_3) = 0. \quad (12)$$

Обратно, если функции X_1, X_2, X_3 таковы, что

$$dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3 \wedge dE(X_1) \wedge dE(X_2) \neq 0, \quad (13)$$

то из равенства (12) следует существование функции f , удовлетворяющей условию (7).

Условие (12) представляет собой систему уравнений в частных производных на функции X_1, X_2, X_3 , зависящих от $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dots, y_2^{(l)}$, причем

$$E = \sum_{j=1,2} \sum_{s=0}^l y_j^{(s+1)} \frac{\partial}{\partial y_j^{(s)}}$$

есть векторное поле на пространстве аргументов этих функций и переменных $y_2^{(l+1)}, y_2^{(l+1)}$. Поэтому будем считать, что система (12) имеет независимые переменные

$$y_1, y_2, \dot{y}_1, \dots, y_2^{(l)}, y_2^{(l+1)}, y_2^{(l+1)}$$

и зависимые переменные X_1, X_2, X_3 , при этом

$$\frac{\partial X_i}{\partial y_j^{(l+1)}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

Условие (12) представляется в виде системы уравнений в частных производных следующим образом. Из частных производных $\frac{\partial X_i}{\partial y_j^{(s)}}$ и $\frac{\partial (EX_i)}{\partial y_j^{(s)}}$, где $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, s = 0, 1, \dots, l+1$, со-

ставим матрицу M из 6 строк и $2l+2$ столбцов. Тогда условие (12) означает, что ранг этой матрицы меньше 6. Записывая равенство нулю всех миноров порядка 6 матрицы M , получаем систему уравнений в частных производных, которая эквивалентна условию (12).

Отметим, что полученная система имеет много лишних уравнений. Как известно, для вычисления ранга матрицы достаточно рассматривать только последовательность окаймляющих миноров. Поэтому выберем какой-либо ненулевой минор порядка 5 матрицы M и рассмотрим только окаймляющие его миноры порядка 6. Равенство нулю только этих миноров порядка 6 определяет указанную систему. Учтем, что нас интересуют только те решения уравнения (12), которые удовлетворяют условию (13), а это условие означает, что строки матрицы M , соответствующие $X_1, X_2, X_3, E(X_1), E(X_2)$, линейно независимы. Поэтому в качестве ненулевого минора порядка 5 возьмем минор в этих строчках. Пусть

$$M_0 = \det \frac{\partial (X_1, X_2, X_3, E(X_1), E(X_2))}{\partial (y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)} \neq 0. \quad (15)$$

Тогда неравенство (13) выполняется, а условие (12) переписывается в виде системы уравнений

$$\det \frac{\partial (X_1, X_2, X_3, E(X_1), E(X_2), E(X_3))}{\partial (y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, z)} = 0, \quad \text{где } z = \ddot{y}_1, y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \dots, y_2^{(l+1)}. \quad (16)$$

Приведем пример накрытия, для которого неравенство (15) выполняется.

Пример. Функции

$$X_1 = y_2 - \frac{\dot{y}_1 \dot{y}_2}{\ddot{y}_1} \ln \dot{y}_1; \quad X_2 = -\frac{\dot{y}_1 \dot{y}_2}{\ddot{y}_1}; \quad X_3 = y_1$$

определяют накрытие из пространства джетов в уравнение

$$\dot{x}_3 = e^{\frac{x_1}{x_2}}.$$

Итак, мы получили систему уравнений (14), (16) и неравенства (15), которой удовлетворяют все накрытия рассматриваемого нами вида. Эту систему обозначим через Y и назовем *системой на определяющие накрытия*.

Система Y состоит из уравнений первого и второго порядков. Действительно, выражение для $E(X_i)$ содержит только производные функции X_i первого порядка, и поэтому элемент

$\frac{\partial(EX_i)}{\partial y_j^{(s)}}$ матрицы M содержит производные функции X_i второго порядка, но не содержит производные третьего порядка.

Всякое решение (X_1, X_2, X_3) системы Y определяет плоскую систему вида (5), где функция f находится из соотношения (7). Задачу поиска всех плоских систем вида (5) переформулируем в задачу поиска всех q -джетов, соответствующих функциям f . Для этого необходимо выразить производные функции f через производные функций X_1, X_2, X_3 . Найдем сначала выражения для первых производных. Раскладывая определители (16) по последнему столбцу, соответствующему переменной z , получаем

$$M_1 dX_1 + M_2 dX_2 + M_3 dX_3 + M_4 dE(X_1) + M_5 dE(X_2) - M_0 dE(X_3) = 0, \quad (17)$$

где

$$M_1 = \det \frac{\partial(X_2, X_3, E(X_1), E(X_2), E(X_3))}{\partial(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)}; M_4 = -\det \frac{\partial(X_1, X_2, X_3, E(X_2), E(X_3))}{\partial(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)};$$

$$M_2 = -\det \frac{\partial(X_1, X_3, E(X_1), E(X_2), E(X_3))}{\partial(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)}; M_5 = \det \frac{\partial(X_1, X_2, X_3, E(X_1), E(X_3))}{\partial(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)}.$$

$$M_3 = \det \frac{\partial(X_1, X_2, E(X_1), E(X_2), E(X_3))}{\partial(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)};$$

Учитывая (7), получаем

$$f'_{\xi_i} = \frac{M_i}{M_0}, \quad \text{где } \xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_3, \quad \xi_4 = \dot{x}_1, \quad \xi_5 = \dot{x}_2.$$

Рассмотрим теперь многообразие $J^q \pi$ q -джетов с одной зависимой переменной u и пятью независимыми переменными ξ_1, \dots, ξ_5 [5]. Рассмотрим отображение $F: Y \rightarrow J^1 \pi$, заданное соотношениями

$$\xi_1 = X_1; \quad \xi_2 = X_2; \quad \xi_3 = X_3; \quad \xi_4 = EX_1; \quad \xi_5 = EX_2; \quad u = EX_3; \quad u_i = \frac{M_i}{M_0}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Отображение F сохраняет распределение Картана [5]. Действительно, распределение Картана на $J^1 \pi$ задается одной 1-формой $\omega = du - \sum_{i=1}^5 u_i d\xi_i$ и F отображает ее в форму Картана $F^*(\omega)$ на Y , так как ограничение $F^*(\omega)$ на любом решении системы Y равно нулю (17).

Подмногообразие E_1 , соответствующее отображению F (теорема 2 в [5]), совпадает с первым продолжением $Y^{(1)}$ уравнения Y . Действительно, рассмотрим форму объема

$$\Omega = d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\xi_3 \wedge d\xi_4 \wedge d\xi_5$$

на базе расслоения π . Имеем

$$(\pi_1 \circ F)^*(\Omega) = dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3 \wedge dE(X_1) \wedge dE(X_2),$$

а значит, из (15) следует неравенство $(\pi_1 \circ F)^*(\Omega)|_{R_{\theta'}} \neq 0$ для любой точки $\theta' \in Y^{(1)}$.

Из теорем 2 и 3 в [5] следует, что для любого $q = 1, 2, \dots, \infty$ определено продолжение $F^{(q)}: Y^{(q)} \rightarrow J^{q+1} \pi$. Образ отображения $F^{(q-1)}$ состоит из q -джетов функций f , соответствующих плоским системам вида (5). Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо найти функции на $J^q \pi$, которые равны нулю на $\text{im } F^{(q-1)}$.

Для координатного описания $F^{(q)}$, $q = 1, 2, \dots, \infty$ можно использовать полные производные

$D_{y_j^{(s)}}$ на Y^∞ и D_{ξ_i} на $J^\infty \mathcal{P}$ [5], а также формулы, их связывающие,

$$(F^\infty)_*(D_{y_j^{(s)}}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial X_i}{\partial y_j^{(s)}} D_{\xi_i} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial(EX_i)}{\partial y_j^{(s)}} D_{\xi_{i+3}}, \quad j=1,2, \quad s=0,1,\dots,l+1.$$

Из этих формул и неравенства (15) получаем соотношения

$$D_{\xi_i} = \sum_{y=y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2} B_{iy} (F^\infty)_*(D_y), \quad i=1,\dots,5, \quad (18)$$

где (B_{iy}) - матрица функций обратная к матрице определителя (15).

Отображение $F^{(q)}$ определяется действием индуцированного отображения $(F^{(q)})^*$ на координатные функции канонической системы координат многообразия $J^{q+1} \mathcal{P}$. В свою очередь действие $(F^{(q)})^*$ определяется действием $(F^{(q-1)})^*$ ($F^{(0)} = F$) и формулами (18). Действительно, вложение $(\pi_{q+1,q})^*$ отображает координатные функции на $J^q \mathcal{P}$ в координатные функции на $J^{q+1} \mathcal{P}$. Из свойства 1 (теорема 3 в [5]) следует, что на таких функциях действие $(F^{(q)})^*$ совпадает с действием $(F^{(q-1)})^*$. Остальные координатные функции на $J^{q+1} \mathcal{P}$ соответствуют производным u порядка $q+1$. Они получаются из координатных функций на $J^q \mathcal{P}$ действием полных производных, если понимать эти функции как функции на $J^\infty \mathcal{P}$. Соотношения (18) позволяют выводить формулы для действия $(F^{(q)})^*$ на них из формул для $(F^{(q-1)})^*$.

Например, отображение $F^{(1)}$ определяется формулами

$$(F^{(1)})^*(\xi_i) = F^*(\xi_i) = X_i, \quad i=1,2,3, \quad (F^{(1)})^*(\xi_i) = EX_{i-3}, \quad i=4,5;$$

$$(F^{(1)})^*(u) = EX_3; \quad (F^{(1)})^*(u_i) = \frac{M_i}{M_0}, \quad i=1,\dots,5;$$

$$(F^{(1)})^*(u_{ji}) = (F^{(1)})^*(D_{\xi_i} u_j) = \sum_y B_{iy} D_y \left((F^{(1)})^*(u_j) \right), \quad 1 \leq i \leq j \leq 5.$$

Аналогичные формулы пишутся для $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ и т.д.

Из соотношения (18) следует, что если функция g равна нулю на $\text{im } F^{(q-1)}$, то ее полная производная по любой переменной ξ_1, \dots, ξ_5 равна нулю на $\text{im } F^{(q)}$. Можно показать, что существует такой конечный набор функций g_1, \dots, g_s , что системе $D_\sigma(g_i) = 0, i=1, \dots, s, |\sigma| \geq 0$ удовлетворяют точки $\text{im } F^\infty$ и только они. Это означает, что $\text{im } F^\infty$ есть бесконечное продолжение системы дифференциальных уравнений $g_i = 0, i=1, \dots, s$.

Таким образом мы получаем систему уравнений на правые части l -плоских систем. С ростом l порядок этой системы растет, а соответствующее подмножество в $J^\infty \mathcal{P}$ (диффеотоп уравнения l -плоских систем) расширяется. Видимо, множество всех бесконечных джетов функций f , задающих плоские системы вида (5) (объединение диффеотопов уравнений l -плоских систем для всех l), не является бесконечным продолжением какой-либо системы уравнений, а имеет более сложную структуру.

4. Заключительное замечание

Выведено уравнение Y на накрытия из пространства джетов в плоские системы. Построено отображение из Y в множество джетов l -плоских систем. Хотя рассмотрен только случай $n=3$, $m=2$, в общем случае построения аналогичны. Как нам видится, возможны два пути продолжения данных исследований. Первый заключается в переписывании уравнений на l -плоские системы в уравнения вида (12), т.е. содержащие дифференциальные формы. Второй путь состоит в

применении методов компьютерной алгебры и системы символьных вычислений MAPLE для последовательного вычисления функций, равных нулю на $\text{im } F^{(q)}$. Каждая такая функция определяет необходимое условие плоскостности, примером которого является уравнение (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Fliess, M., Lévine, J., Martin, Ph., Rouchon, P.** A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. - 1999. - V. 44, 5. - P. 922-937.
2. **Rouchon P.** Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization // J. Math. Systems Estim. Control. - 1994. - V.4, 2. - P. 1-14.
3. **Hilbert D.** Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen // Math. Ann. - 1912. - V. 73. - P. 95-108. (Also in Gesammelte Abhandlungen, V. III. - Chelsea, New York, 1965. - P. 81-93).
4. **Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. и др.** Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Факториал, 2005.
5. **Четвериков В.Н.** Субмерсии в категории бесконечно продолженных дифференциальных уравнений // Статья в данном Вестнике.
6. **Четвериков В.Н.** Плоскостность динамически линеаризуемых систем // Дифференциальные уравнения. - 2004. - Т. 40. - С. 1665-1674.

JETS OF FLAT CONTROL SYSTEMS

Chetverikov V.N.

Flat systems form the widest class of systems for which control methods are developed. Any flat system can be presented as the image of a smooth map of a jet space. In the paper an equation on such maps is deduced, and to each jet of solution of this equation assign the jet of the function describing a flat system. Every function vanishing on this set of jets, gives a necessary flatness condition.

Key words: flat control systems, jet manifolds, prolongations of maps of differential equations.

Сведения об авторе

Четвериков Владимир Николаевич, 1958 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1980), доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования МГТУ им. Н.Э. Баумана, автор 47 научных работ, область научных интересов - преобразования уравнений в частных производных, функционально-дифференциальные уравнения, симметрии, законы сохранения, нелинейные динамические системы с управлением, динамическая обратная связь, плоские системы.

УДК 514.7

ОДИН ИЗ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Л.Д. ЖУЛЕВА

Статья представлена доктором физико-математических наук, профессором Козловым А.И.

В статье рассмотрен один из методов исследования линейной динамической системы с переменными коэффициентами. Исследование проведено в матричном виде. Показано, что совокупность весовых функций является полной характеристикой поведения системы, а метод сопряженных систем позволяет найти весовые функции системы.

Ключевые слова: динамические системы, весовые функции, метод сопряжённых систем.

1. Предположим, что динамическая система описывается следующей системой линейных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^N f_{jk}(D)y_k = x_j(t), \quad (1)$$

где $j = 1, \dots, n$; $D = \frac{d}{dt}$; $f_{jk}(D) = a^{(0)}_{jk}(t)D^L + a^{(1)}_{jk}(t)D^{L-1} + \dots + a^{(L)}_{jk}(t)$.

Исследование системы (1) проводится при следующих ограничениях:

- 1) $x_j(t)$ входит в (1) без оператора;
- 2) y_k входит в (1) своей " m_k "-й производной

$$y_k^{m_k} = \frac{d^{m_k} y_k}{dt^{m_k}},$$

где m_k – порядок старшей производной ($m_k \geq 1$);

3) определитель $\Delta^*(t)$ из коэффициентов при старших производных $y_1^{m_1}, y_2^{m_2}, \dots, y_n^{m_n}$ отличен от нуля, что позволяет произвольно задавать начальные условия

$$y_k^{m_k-1}(0), y_k^{m_k-2}(0), \dots, y_k(0)$$

Запишем систему уравнений (1) в форме Коши

$$Z'_j + \sum_{k=1}^N a_{jk}(t)z_k = X_j(t), \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

или в матричном виде

$$Z' + a(t)Z = X(t), \quad (2)$$

где

$$Z = \| \| Z_n \| \|, \quad a(t) = \| \| a_{nn} \| \|, \quad X(t) = \| \| X_n(t) \| \|.$$

Пусть известна матрица линейно-независимых частных решений системы однородных уравнений

$$\theta(t) = \| \| \theta_{Nn}(t) \| \|$$

- фундаментальная матрица, т.е. $\theta'(t) + a(t)\theta(t) = 0$.

Решение неоднородного матричного уравнения найдем методом вариации производных постоянных

$$Z(t) = \theta(t)\chi(t), \quad (3)$$

где $\chi(t) = \| \| \chi_j(t) \| \|$.

При этом $\chi(t)$ должны быть определены так, чтобы удовлетворялась система неоднородных уравнений

$$\theta'(t)\chi(t) + \theta(t)\chi'(t) + a(t)\theta(t)\chi(t) = X(t) \Rightarrow \theta(t)\chi'(t) = X(t),$$

где $\theta(t)$ – невырожденная матрица; значит, для нее существует обратная

$$\begin{aligned} \theta^{-1}(t) \theta(t) \chi(t) = \theta^{-1}(t) X(t) &\Rightarrow \chi'(t) = \theta^{-1}(t) X(t) \Rightarrow \\ X(t) = \int_{t_0}^t \theta^{-1}(\tau) X(\tau) d\tau + C, \end{aligned} \quad (4)$$

где C - матрица столбец.

Подставляя (4) в (3), получим

$$Z(t) = \theta(t) \int_{t_0}^t \theta^{-1}(\tau) X(\tau) d\tau + \theta(t) C.$$

Для начальных условий при $t = t_0$, $z(t) = z(t_0)$ получаем $C = \theta^{-1}(t_0) z(t_0)$.

Тогда общее решение, удовлетворяющее любым наперед заданным начальным условиям, принимает вид

$$Z(t) = \theta(t) \theta^{-1}(t_0) z(t_0) + \theta(t) \int_{t_0}^t \theta^{-1}(\tau) X(\tau) d\tau.$$

Введем в рассмотрение квадратную матрицу, каждый элемент которой представляет собой произведение элементов, зависящих от каждого аргумента в отдельности

$$\begin{aligned} N(t, \tau) &= \theta(t) \theta^{-1}(\tau), \\ N(t, \tau) &= \parallel N_{nm} \parallel. \end{aligned}$$

Тогда
$$Z(t) = N(t, t_0) Z(t_0) + \int_{t_0}^t N(t, \tau) X(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где $N(t, \tau)$ – функция Грина или весовые функции линейной динамической системы. Название «весовые функции» объясняется тем обстоятельством, что функции $N(t, \tau)$ при каждом данном значении t определяют удельный вес значений возмущающей функции $X(t)$ в момент τ в суммарной реакции системы в момент t .

Совокупность весовых функций является полной характеристикой поведения линейной динамической системы с переменными параметрами. Поэтому вопрос об определении весовых функций весьма важен для практики.

Если нас интересует весовая функция по отношению к возмущению x_j , то получим следующее

$$Z_j(t) = \sum_{k=1}^N N_{jk}(t, t_0) Z_k(t_0) + \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^n N_{jk}(t, \tau) X_k(\tau) d\tau$$

Если $X_k = 0$ (при $j \neq \sigma_i$, $X \equiv 0$), то можно записать

$$Z_j(t) = \sum_{k=1}^N N_{jk}(t, t_0) Z_k(t_0) + \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^n N_j \sigma_i(t, \tau) X_{\sigma_i}(\tau) d\tau$$

и, принимая во внимание, что

$$X_{\sigma_i} = \sum_{l=1}^n \frac{B_{li}}{\Delta^*(\tau)} x_e(\tau),$$

получим в окончательном виде общее решение системы уравнений (2)

$$Z_j = \sum_{k=1}^N N_{jk}(t, t_0) Z_k(t) + \int_{t_0}^t \sum_{l=1}^n \left[\sum_{i=1}^n N_{j\sigma_i}(t, \tau) \frac{B_{li}}{\Delta^*(\tau)} \right] x_e(\tau) d\tau$$

Здесь $N_{j\sigma_i}(t, \tau)$ являются элементами матрицы весовой функции, которая представляет собой обобщенную весовую функцию системы, зависящую от двух переменных

$$N(t, \tau) = \parallel N_{jk}(t, \tau) \parallel.$$

2. Рассмотрим пример. Предположим, что на динамическую систему действует единичный ударный импульс

$$Z(t_0) = 0; \quad x_s(t) \neq 0,$$

а все остальные $x_v(t) \equiv 0$, ($v = 1, 2, \dots, s-1, s+1, n$).

Тогда получим

$$Z_j(t) = \int_{t_0}^t W_{js}(t, \tau) x_s(\tau) d\tau,$$

где

$$W_{js}(t, \tau) = \sum_{l=1}^n N_{j\sigma_l}(t, \tau) \frac{B_{s_l}(\tau)}{\Delta^*(\tau)}$$

- весовая функция системы по координате j при воздействии на входе s ; $\rho = W_{js}(t, \tau)$ - семейство поверхностей.

Если поверхность пересечь плоскостью $\tau = \tau_j$, то получим семейство кривых для фиксированного τ . Пусть $x_s(\tau)d\tau = I$ – импульс силы, равный единице, приложен в момент $(\tau_j, \tau_j + d\tau)$.

Тогда $Z_j(t) = W_{js}(t, \tau_j)$ - закон движения системы по j -й координате, при воздействии на s -м входе единичного импульса в момент τ_j .

Определим состояние динамической системы в момент $t = t_1$

$$Z_j(t_1) = \sum_{n=1}^N N_{jk}(t_1, t_0)Z_k(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^n [\sum_{i=1}^n W_{jl}(t, \tau)] x_s(\tau) d\tau, \tag{6}$$

где

$$W_{jl}(t, \tau) = \sum_{i=1}^n N_{j\sigma_i}(t, \tau) \frac{B_{l_i}(\tau)}{\Delta^*(\tau)},$$

т.е. нужно знать сечение $W(t, \tau)$ при $t = t_1$ и текущем τ .

Чтобы получить W_{je} обратимся к сопряженной системе. Пусть исходное матричное уравнение имеет вид

$$\frac{dz}{dt} + a(t)z = X(t) \tag{7}$$

Тогда сопряженное матричное уравнение имеет вид

$$\frac{dz}{dt} - a^T(t)z = 0,$$

где $a^T(t)$ – матрица, транспонированная для $a(t)$.

Запишем матричное уравнение в виде систем

$$\begin{aligned} z'_j + \sum_{k=1}^N a_{jk}(t)z_k &= x_j(t), & (j = 1, 2, \dots, N); \\ Z'_\mu - \sum_{k=1}^N a_{k\mu}(t)z_k &= 0, & (\mu = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \tag{*}$$

Умножим первое уравнение на Z_j , второе на z_μ и сложим. Тогда получим

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^N (z'_\mu Z_\mu + z_\mu Z'_\mu) &= \sum_{\mu=1}^N Z_\mu X_\mu(t) \Rightarrow \sum_{\mu=1}^N \frac{d}{dx} (z_\mu Z_\mu) = \sum_{\mu=1}^N Z_\mu X_\mu(t); \\ \sum_{\mu=1}^N [z_\mu(t_1)Z_\mu(t_1) - z_\mu(t_0)Z_\mu(t_0)] &= \sum_{\mu=1}^N \int_{t_0}^{t_1} Z_\mu(\tau)X_\mu(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где z_μ, Z_μ есть решения системы дифференциальных уравнений при любых начальных условиях.

Это известная формула Лагранжа, связывающая между собой интеграл исходной системы дифференциальных уравнений с интегралом сопряженной для исходной системой уравнений. Эта формула справедлива для всех возможных общих, а следовательно, для всех возможных частных интегралов систем (*).

Попробуем добиться, чтобы $Z_j(t_1) = 1$, где j – фиксированное; $Z_k(t_1) = 0$, т.е. сопряженная система решается при конечных условиях, которые однозначно определяют начальные условия.

Тогда получим

$$Z_j(t_1) = \sum_{\mu=1}^N Z_\mu(t_0)z_\mu(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\mu=1}^N [Z_\mu(\tau)X(\tau)] d\tau. \tag{8}$$

Из сравнения (6) и (8) следует, что

$$Z_\mu(\tau) = N_{j\mu}(t_1, \tau), \tag{9}$$

т.е. весовая функция системы представляет собой решение сопряженной системы дифференциальных уравнений при конечных условиях.

Например, если имеем динамическую систему и нас интересует ее состояние в момент t , тогда

$$Z_j(t_1) = \sum_{k=1}^N N_{jk}(t_1, t)z_k(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^n W_{jl}(t, \tau)x_l(\tau) d\tau.$$

Отсюда получим некоторые частные случаи

а) если $z_k(t_0) = 0, x_s(t) \neq 0$, то

$$Z_j(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} W_{js}(t_1, \tau) x_s(\tau) d\tau;$$

б) если $|x_s(\tau)| \leq s$, то

$$Z_j(t_1) = s \int_{t_0}^{t_1} |W_{js}(t, \tau)| d\tau;$$

в) если на вход динамической системы действует «белый шум», то

$$\sigma^2 = F_0 \int_{t_0}^{t_1} W_{js}^2(t, \tau) d\tau,$$

где F_0 – уровень «белого шума»; σ^2 – дисперсия.

Полагая в (3) $j = 1, 2, \dots, N$, можно получить значения всех весовых функций рассматриваемой динамической системы при $t = t_1$ путем интегрирования сопряженной системы дифференциальных уравнений. Для полного определения весовых функций $N_{ju}(t, \tau)$ как функций двух переменных придется повторить интегрирование сопряженной системы для различных значений $t = t_1$, отделенных друг от друга достаточно малым интервалом.

Однако практически часто бывает достаточно знать весовые функции системы для одного определенного (конечного) значения $t = t_1$ и вдобавок не для всех выходов. В этих случаях достаточно проинтегрировать сопряженную систему уравнений столько раз, сколько выходных величин рассматриваемой системы нас интересует.

При интегрировании сопряженной системы целесообразно перейти к новой переменной $S = t_1 - t$ и конечным условиям будут соответствовать начальные условия: $Z_j(0) = 1; Z_k(0) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, N$).

Интегрируя сопряженную систему при начальных условиях в интервале $0 \leq s \leq t_1 - t_0$ и возвращаясь после этого к переменной t , мы получим интересующие нас весовые функции в интервале $t_0 \leq t \leq t_1$.

Выводы

1. В статье рассмотрен один из методов исследования линейной динамической системы с переменными коэффициентами. Исследование проведено в матричном виде. Показано, что совокупность весовых функций является полной характеристикой поведения линейной динамической системы с переменными коэффициентами. Поэтому вопрос об определении весовых функций важен для практики.

2. Изложенный метод сопряженных систем позволяет найти весовые функции системы. Формула Лагранжа устанавливает связь между интегралом исходной системы дифференциальных уравнений и интегралом сопряженной для исходной системы уравнений. Весовые функции системы представляют собой решение сопряженной системы дифференциальных уравнений при конечных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1995.
2. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1996.

A METHOD FOR ANALYSIS OF LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Zhuleva L.D.

A method for analysis of linear dynamical systems with variable coefficients is outlined, with a systematic use of matrix notations. It is shown that the set of the weight functions completely characterizes the system behavior; these functions are obtained using the adjoint systems method.

Key words: dynamical systems, weight functions, adjoint systems method.

Сведения об авторе

Жулева Людмила Дмитриевна, окончила МГУ им. М.В. Ломоносова (1953), кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики МГТУ ГА, автор более 100 научных работ, область научных интересов – методы оптимизации динамических систем, философские вопросы математики, проблемы вузовской педагогики.

УДК 629,735.083(075.8)

ПОТЕНЦИАЛ ВОДОРОДНОГО ТОПЛИВА ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ БУДУЩЕГО

Ю.С. КИРДЮШКИН

Статья представлена доктором технических наук, профессором Чинючиным Ю.М.

Рассматриваются основные преимущества жидкого водорода как альтернативы авиационному керосиновому топливу и отдельные фрагменты расчета газодинамических параметров водородного двигателя, проведенного итерационным методом.

Ключевые слова: жидкий водород, водородный двигатель, газодинамические параметры, альтернативные топлива, криогенные топлива, стехиометрический анализ.

Общие положения

Привлекательность использования водородного топлива для газотурбинных двигателей (ГТД) в будущем обусловлена тем, что *водород* - возобновляемый источник энергии, имеющий следующие основные термодинамические характеристики и специфические свойства:

- ✓ значительная теплотворная способность (удельная теплота сгорания у водорода выше, чем у керосина, в 3 раза (у водорода - $120,9 \cdot 10^6$ Дж/кг, у керосина - $40,8 \cdot 10^6$ Дж/кг);
- ✓ возможность эффективного охлаждения горячих деталей двигателя жидким водородом, обладающим высоким хладоресурсом;
- ✓ устойчивость горения в составе бедных топливных смесей;
- ✓ высокая скорость сгорания.

Эти преимущества водородного топлива ученые в США оценили еще в 1957 году, когда были проведены первые успешные испытания двигателя *J-57* американской фирмы «Пратт-Уитни» на жидком водороде. В том же году в исследовательском центре Льюиса (США) был испытан самолет В-57 с водородной топливной системой, который совершил несколько успешных полетов. С середины 60-х годов советские ученые также принимали активное участие в исследованиях в области водородной энергии и вошли в состав Международной ассоциации по водородной энергетике. Однако, как утверждают специалисты в области криогенных видов топлива, широкое использование водорода как альтернативы керосина в гражданской авиации развитых стран ожидается не ранее 2030 года. Это связано со следующими обстоятельствами:

1. Применение водородного топлива вызывает необходимость обеспечения особых требований к компоновке летательного аппарата (ЛА). Жидкий водород имеет меньшую плотность по сравнению с традиционным топливом - керосином. Плотность жидкого водорода – $0,07$ г/см³, тогда как у керосина – $0,82$ г/см³, следовательно, для получения того же теплового эквивалента потребуется увеличить емкости топливных баков для хранения топлива примерно в 3,8 раза при снижении общей массы топлива в 3 раза. В связи с этим, например, в США предложено размещать топливо в подвесных топливных баках или дополнительных баках, устанавливаемых над удлиненной частью фюзеляжа ЛА. Также необходима надежная теплоизоляция топливных баков для предотвращения выкипания жидкого водорода, которое может привести к разрыву баков.

2. Водород обладает способностью, в случае его утечек из магистрали, образовывать взрывоопасные смеси с кислородом. Пределы взрывоопасности водородо-кислородной смеси составляют по объему от 4 до 94% H₂, а водородно-воздушной смеси - от 4 до 74% H₂. Смесь двух объемов H₂ и одного объема O₂, в связи с особой взрывоопасностью, получила название *гремучего газа*. Следовательно, применение водородного топлива требует, помимо всего прочего, более высокой квалификации обслуживающего персонала.

Наряду с указанными особенностями, перевод ГТД на водород имеет и ряд серьезных преимуществ, которые делают его наиболее привлекательным альтернативным топливом будущего

с технической и экологической точки зрения. Так по оценкам фирмы «Локхид» и результатам летных испытаний, полученных исследователями ОКБ Туполева на самолете Ту-156, силовые установки, работающие на водородном топливе, в связи с отсутствием нагарообразования в газозооудшном тракте, будут иметь ресурс примерно на 25% больше, чем двигатели, работающие на керосине. Теплотворная способность жидкого водорода в три раза больше чем у керосина, за счет чего более высокая стоимость водородного топлива компенсируется снижением его удельного расхода в целом.

Вышеуказанные положительные факторы и тот факт, что водород является возобновляемым источником энергии, характеризует его как идеальное топливо будущего, но применение в авиации на ГТД водородного топлива невозможно без детального расчета газодинамических параметров проектируемого водородного двигателя.

Считается, что при сжигании жидкого водорода в смеси с кислородом, единственными продуктами сгорания являются высокотемпературное тепло и вода. Следовательно, при использовании водорода не образуются парниковые газы. Чтобы убедиться в этом, возьмем за основу такого рода утверждения расчет продуктов сгорания двигателя ПС-90А2К («криогенный»), проектируемого для работы на водороде [1].

В процессе расчета определяются: дроссельные характеристики газового (водородного) ГТД, состав, теплоемкость продуктов сгорания водородного топлива на первой ступени турбины и показатель адиабаты.

Так как температура газового потока ГТД может изменяться в широких пределах, рекомендуется производить расчет теплоемкости продуктов сгорания по итерационному методу, предложенному В.И. Янкиным [2].

Расчет газодинамических параметров водородного двигателя

Данный метод расчета учитывает влияние отношения расхода топлива к расходу воздуха и тип использованного топлива. Причем, степень влияния количества подаваемого топлива на теплоемкость продуктов сгорания и газовую постоянную зависит от величины коэффициента избытка воздуха α или от величины отношения расхода топлива к расходу воздуха - q_t . Параметры α и q_t связаны отношением

$$q_t = \frac{G_T}{G_B} = \frac{1}{\alpha L_0}, \quad (1)$$

где G_T - секундный весовой расход топлива, кг/с; G_B - секундный весовой расход воздуха, кг/с; L_0 - количество воздуха, теоретически необходимое для сгорания 1 кг/с топлива.

При расчете отношения расхода водородного топлива к расходу воздуха формула (1) будет иметь следующий вид

$$q_t = \frac{C_p \cdot (T_2^* - T_1^*)}{\eta_{к.с.} \cdot H_u \cdot 10^3}, \quad (2)$$

где C_p - теплоемкость продуктов сгорания при постоянном давлении, Дж/кг·К; T_2^* - температура газа перед турбиной, К; T_1^* - температура газа за турбиной, К; H_u - удельная теплота сгорания жидкого водорода, Дж/кг; $\eta_{к.с.}$ - коэффициент газодинамического совершенства камеры сгорания.

Далее, для определения состава продуктов сгорания водородного топлива рассчитываем теплоемкость смеси газов $C_p(T, q_t)$ (чистого водородного топлива - H_2 с воздухом) при $\alpha < 1$, с учетом работы [2], по формуле

$$C_p(T, q_t) = \frac{C'_{py}(T) + q_t \cdot C_{PT}(T)}{1 + q_t}, \quad (3)$$

где $C_{pT}(T)$ - теплоемкость чистого топлива (водорода), Дж/кг·К; $C'_{py}(T)$ - условная теплоемкость чистых продуктов сгорания при температуре T , в случае работы двигателя на водороде (режимы при $\alpha < 1$), которая определяется по формуле

$$C'_{py}(T) = (1 + \frac{1}{L_0})C_{p\alpha}^{\alpha=1}(T) - \frac{1}{L_0}C_{p\alpha}(T), \quad (4)$$

где $C_{p\alpha}^{\alpha=1}(T)$ - теплоемкость продуктов сгорания при заданной температуре T , Дж/кг·К; $C_{p\alpha}(T)$ - теплоемкость воздуха при температуре T , Дж/кг·К.

Для вычисления теплоемкости смеси газов при постоянном давлении и заданной температуре $C_p(T, q_t)$ необходимо рассчитать условную теплоемкость чистых продуктов сгорания по формулам с учетом коэффициентов полиномов n -го порядка, аппроксимирующих зависимости $C'_{py}(T)$ и $C_{p\alpha}(T)$ для водородного топлива

$$C'_{py}(T) = \sum_{j=1}^n a'_{yj} \left(\frac{T}{1000}\right)^j; \quad (5)$$

$$C_{p\alpha}(T) = \sum_{j=1}^n a_{ej} \left(\frac{T}{1000}\right)^j. \quad (6)$$

После подстановки в формулу (3) полиномов (5) и (6) получим формулу вида

$$C_p(T, q_t) = \frac{(a_{ej} + q_t \cdot a'_{yj})}{(1 + q_t)} \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^j, \quad (7)$$

где a_{ej}, a'_{yj} - коэффициенты полиномов, аппроксимирующие зависимости теплоемкости от температуры.

Для проведения расчетов по формулам (3), (4) необходимо вычислить зависимость $C_{p\alpha}^{\alpha=1}(T)$ и величину газовой постоянной продуктов сгорания R_2 .

Формула для вычисления R_2 (при $\alpha < 1$) имеет следующий вид

$$R_2 = R_0' \frac{1 + m \cdot q_t}{1 + q_t}, \quad (8)$$

где R_0' - газовая постоянная воздуха (Дж/моль·К), которая рассчитывается по формуле

$$R_0' = (1 + \frac{1}{L_0})R_2^{\alpha=1} - \frac{1}{L_0}R_T;$$

R_T - газовая постоянная чистого топлива (водорода), Дж/моль·К, m - масса газа (кг), определяется отношением

$$m = R_T / R_0'.$$

Зависимость $C_p(T)$ и величина газовой постоянной продуктов сгорания R_2 могут быть рассчитаны, если известны химический состав топлива, зависимости теплоемкостей от температуры воздуха и состав отдельных химических соединений продуктов полного сгорания топлива в воздухе, а также газовые постоянные этих соединений.

Преобразованные формулы расчета теплоемкости $C_p(T)$ и газовой постоянной продуктов сгорания R_2 приобретают следующий вид:

$$C_p(T) = \bar{G}_{H_2O}(C_p)_{H_2O}(T) + \bar{G}_{O_2}(C_p)_{O_2}(T) + \bar{G}_{N_2}(C_p)_{N_2}(T) + \bar{G}_{Ar}(C_p)_{Ar}(T); \quad (9)$$

$$R_2 = \bar{G}_{H_2O}R_{H_2O} + \bar{G}_{O_2}R_{O_2} + \bar{G}_{N_2}R_{N_2} + \bar{G}_{Ar}R_{Ar}, \quad (10)$$

где $\bar{G}_{H_2O}, \bar{G}_{O_2}, \bar{G}_{N_2}, \bar{G}_{Ar}$ – относительные весовые доли H_2O, H_2, N_2, Ar в продуктах сгорания при $\alpha < 1$, которые могут быть вычислены по формулам:

$$\bar{G}_{H_2O} = \frac{(2\mu_0 + \mu_H)n}{1 + L_0}; \quad (11)$$

$$\bar{G}_{O_2} = \frac{g_{O_2} L_0}{1 + L_0}; \quad (12)$$

$$\bar{G}_{N_2} = \frac{g_{N_2} L_0}{1 + L_0}; \quad (13)$$

$$\bar{G}_{Ar} = \frac{g_{Ar} L_0}{1 + L_0}. \quad (14)$$

Здесь g_{O_2}, g_{N_2}, g_{Ar} – весовые доли газов в составе воздуха; μ_H, μ_O, μ_C – атомные веса водорода, кислорода и углерода; n и p_B – количество атомов углерода и водорода, в условной молекуле топлива.

Исходя из полученных отношений, предоставляется возможность определить доли продуктов сгорания водородного топлива:

$$g_{H_2O} = 0,075; g_{O_2} = 0,162;$$

$$g_{N_2} = 0,748; g_{Ar} = 0,013;$$

$$\sum_{i=1}^4 g_i = 0,999.$$

Выводы

1. По результатам расчетов продуктами сгорания газозоудушной смеси водорода с кислородом являются не только температурное тепло и вода, а по возрастающей: аргон (Ar), вода (H_2O), кислород (O_2), азот (N_2), изначально входящие в состав воздуха, и, в незначительной степени, сам водород (H_2).

2. Так как данный метод расчета газодинамических параметров двигателя учитывает зависимость теплоемкости газов при постоянном давлении $C_p(T, q_t)$, дальнейший расчет параметров водородного двигателя может быть произведен с наименьшими погрешностями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирдюшкин Ю.С. Анализ состояния и перспективы применения альтернативных видов топлив на отечественных магистральных самолетах: магистерская дисс. ... - М.: МГТУ ГА, 2008.
2. Янкин В.И. Система программ для расчета характеристик ВРД на ЭЦВМ. - М.: Машиностроение, 1976.

POTENTIAL OF HYDROGEN FUEL APPLICATION IN CIVIL AVIATION

Kirdyushkin Y.S.

The main advantages of liquid hydrogen fuel as an alternative source of energy to traditional kerosine are considered. Moreover, the fragments of gas dynamic parameters calculations for liquid hydrogen combustion process conducted by the method of iterations are shown.

Key words: liquid hydrogen, hydrogen powered jet engine, gas-dynamic parameters, liquid hydrogen combustion products, balance equation for liquid hydrogen combustion, stoichiometric combustion analysis for liquid hydrogen.

Сведения об авторе

Кирдюшкин Юрий Сергеевич, 1985 г.р., окончил МГТУ ГА (2008), аспирант МГТУ ГА, автор 8 научных работ, область научных интересов – применение альтернативных видов топлив в сфере гражданской авиации.

ББК 05
Н 34
Св. план 2013 г.

Научный Вестник МГТУ ГА
№ 194

ISBN 978-5-86311-892-5

Свидетельство о регистрации в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) ПИ № ФС77-47989 от 27 декабря 2011 г.

Редакторы Т.М. Приорова, И.В. Вилкова
Компьютерная верстка Т.Н. Котиковой

Подписано в печать 08.07.13 г.

Печать офсетная
14,25 усл. печ. л.

Формат 60x90/8
Заказ № 1639/

12,67 уч.-изд. л.
Тираж 100 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д. ба

Подписной индекс в каталоге Роспечати 84254
© Московский государственный
технический университет ГА, 2013