

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)**

---

**Кафедра аэродинамики, конструкции и прочности  
летательных аппаратов  
М.С. Кубланов**

## **ГИДРОГАЗОДИНАМИКА**

Рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по образованию в области эксплуатации авиационной и космической техники для межвузовского использования в качестве учебного пособия

**Москва-2013**

УДК [532+533.6](075.8)

ББК 22.253я73-1

К 88

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В.Г. Ципенко;  
д-р техн. наук, проф. В.Т. Калугин

Кубланов М.С.

К 88 Гидрогазодинамика: учебное пособие. – М.: МГТУ ГА, 2013. – 80 с.,  
рис. 38.

ISBN 978-5-86311-861-1

Данное учебное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины Б.2.7 "Гидрогазодинамика" естественнонаучного цикла Учебного плана подготовки бакалавров по направлению 162300 "Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей", а также в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины Б.3.27 "Гидрогазодинамика" профессионального цикла Учебного плана подготовки бакалавров по направлению 280700 "Техносферная безопасность" для студентов II курса всех форм обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 29.08.2012 г. и методических советов 11.09.2012 г. и 4.09.2012 г.

ББК 22.253я73-1

Св. план 2013 г.

поз. 18

КУБЛАНОВ Михаил Сергеевич

ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

Учебное пособие

Редактор И.В. Вилкова

Подписано в печать 31.10.12 г.

Печать офсетная

Формат 60x84/16

4,32 уч.-изд. л.

4,65 усл.печ.л.

Заказ № 1519/

Тираж 150 экз.

*Московский государственный технический университет ГА*

125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

*Редакционно-издательский отдел*

125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а

ISBN 978-5-86311-861-1

© Московский государственный  
технический университет ГА, 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	4
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	5
<b>1. КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ</b> .....	7
1.1. Основные гипотезы механики сплошной среды .....	7
1.2. Переменные Эйлера и Лагранжа .....	8
1.3. Деформация и скорость деформации .....	10
1.4. Термины механики сплошной среды .....	12
1.5. Уравнение неразрывности .....	15
1.6. Безвихревое и вихревое движение .....	16
<b>2. ДИНАМИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ</b> .....	21
2.1. Силы и моменты в механике сплошной среды .....	21
2.2. Уравнения движения сплошной среды .....	24
2.3. Виды сплошной среды .....	26
<b>3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА</b> .....	30
3.1. Уравнения Навье-Стокса .....	30
3.2. Уравнения движения вязкой несжимаемой изотропной среды .....	31
3.3. Уравнения движения идеальной среды .....	32
3.4. Интеграл Бернулли .....	33
3.5. Взаимодействие жидкостей и газов с обтекаемыми телами .....	37
3.6. Постановка задач в теории жидкости и газа .....	39
3.7. Понятие о методах решения задач теории жидкости и газа .....	43
<b>4. ЗАДАЧИ ГИДРОМЕХАНИКИ</b> .....	55
4.1. Гидростатик .....	55
4.2. Кавитация .....	56
4.3. Установившееся движение вязкой жидкости между плоскостями .....	58
4.4. Движение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических трубах ..	61
4.5. Глиссирование .....	63
<b>5. ЗАДАЧИ АЭРОМЕХАНИКИ</b> .....	65
5.1. О ламинарных и турбулентных течениях .....	65
5.2. Пограничный слой .....	66
5.3. Понятие о вихревой теории .....	71
5.4. Динамика сжимаемого газа.....	75
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	80

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие Гидрогазодинамика издается в соответствии с учебным планом подготовки бакалавров по направлению 162300 «Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей», а также в соответствии с учебным планом подготовки бакалавров по направлению 280700 «Техносферная безопасность» для студентов всех форм обучения.

Данное учебное пособие дает краткое, но завершенное и достаточно строгое представление о механике сплошной среды – фундаментальной основе авиации. Оно может быть полезно студентам всех форм и ступеней обучения, а также аспирантам всех специальностей Московского государственного технического университета гражданской авиации (МГТУ ГА). Учитывая современные требования к фундаментальности и глубине образования, изложение материала дается на современном университетском уровне. Это позволило включить в курс материал, который не читался ранее в МГТУ ГА, но без которого невозможны единое представление о науке и дальнейшее самообразование.

В конце учебного пособия предлагается список литературы, минимально необходимый для более глубокого изучения механики сплошной среды.

Современное состояние образования в области авиации характерно высокой плотностью общеинженерных и специальных дисциплин. Изучение их в отрыве друг от друга уже невозможно. Особенно остро этот вопрос сегодня стоит при профессиональной подготовке эксплуатационников, которые обязаны обеспечивать безопасность полетов. Эксплуатационник обязан быть специалистом не только в области организации технического обслуживания и ремонта, но и в области конструкции и принципов действия отдельных систем и всего летательного аппарата (ЛА) в целом. А для этого требуется более высокий, более абстрактный подход, дающий единое, фундаментальное, математическое обоснование на первый взгляд разрозненных дисциплин. При таком подходе обеспечивается более фундаментальное усвоение учебного материала и требуется меньше времени на весь период обучения.

В основу данного курса легли лекции, читавшиеся автором в МГТУ ГА в рамках различных дисциплин, а в основу данного учебного пособия - ранние издания: Гарбузов В.М., Ермаков А.Л., Кубланов М.С., Ципенко В.Г. Аэромеханика: учебник для студентов вузов. - М.: Транспорт, 2000 и Кубланов М.С. Аэродинамика и динамика полета: учебное пособие. - М.: МГТУ ГА, 2000.

Следует отметить особый подход к формированию данной дисциплины. От канонических университетских учебников по механике сплошной среды (например, Седов Л.И. Механика сплошной среды) он отличается более упрощенным, адаптированным математическим языком. Указанные упрощения базируются в основном лишь на более широком применении гипотезы о едином евклидовом пространстве, т.е. на ньютоновской модели механики.

## ВВЕДЕНИЕ

Развитие современной техники невозможно без решения сложных задач гидродинамики, аэродинамики, газодинамики, динамики многофазных сред и процессов горения, волновых процессов, упругости, пластичности и прочности конструкций. Современная наукоемкая авиация – именно та область техники, в которой требуется решение таких задач. Это теория полета, теория двигателей, расчет конструкций и систем на работоспособность и прочность, расчет тушения пожаров и движения ЛА по земле и воде.

Теория полета (аэродинамика и динамика полета) – наука фундаментальная и строгая, опирающаяся на математический аппарат. Но, как и о всякой науке, о ней можно говорить на кухне, опираясь лишь на интеллект соответствующего уровня. К сожалению, и сегодня появляются "ученые", пытающиеся на кухонном уровне объяснить основные законы природы, в том числе и аэродинамики и динамики полета. Но когда с помощью этих объяснений пытались решить серьезные задачи в авиации, это приводило к плачевным результатам: после отрыва от земли самолеты "вдруг" круто пикировали; при большой скорости на самолетах с первыми турбореактивными двигателями (ТРД) "вдруг" появлялась тряска, и самолет рассыпался; преодоление звукового барьера долго не давалось; перегруженные самолеты не могли завершить взлет и т.п. Многие из таких и других катастроф случаются и сегодня. К сожалению, в большинстве случаев это происходит по причине человеческого фактора, именно из-за непонимания происходящего явления.

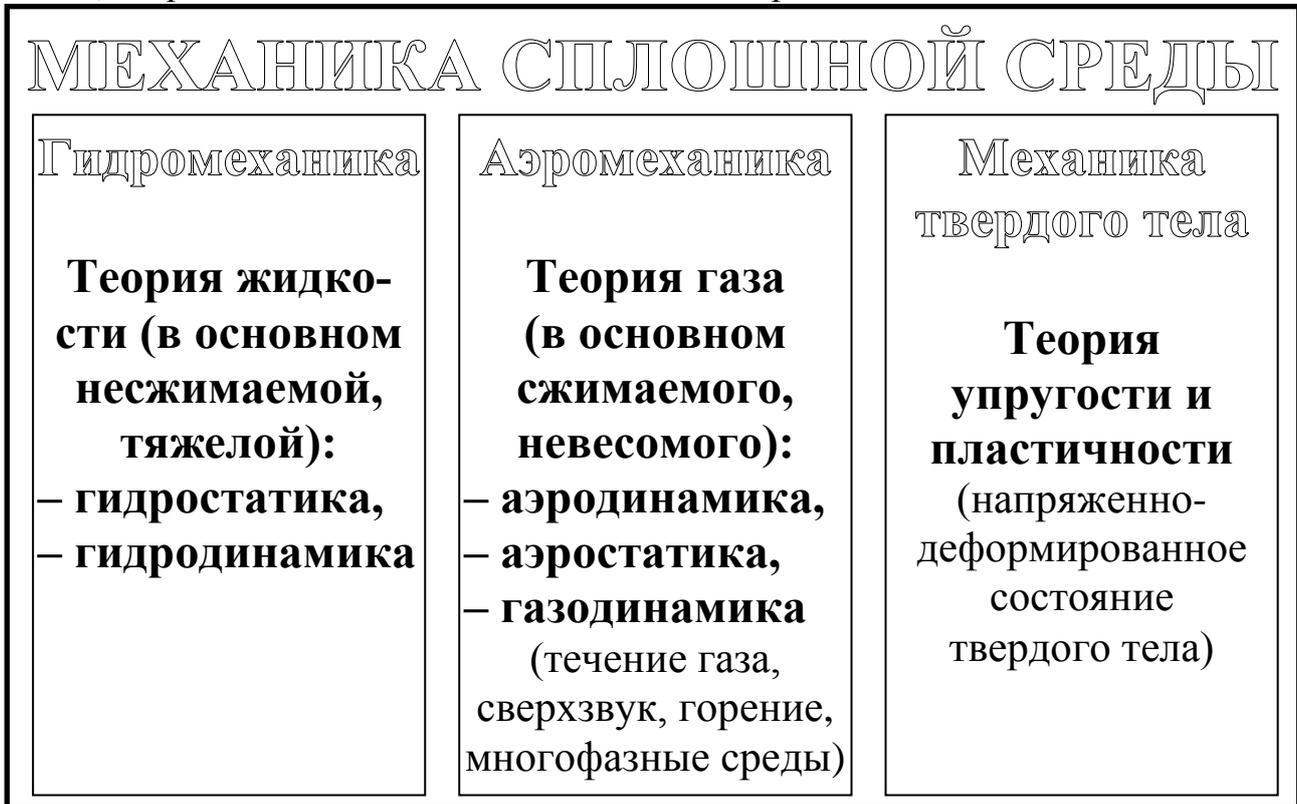
Поэтому мы с Вами будем изучать науку на уровне высшего образования. А для этого придется хорошо вспомнить высшую математику, физику и теоретическую механику.

Человек очень давно хотел летать как птица – пытался это делать, но безуспешно. И только Ньютон смог четко выделить факторы, определяющие возможность полета тела тяжелее воздуха.

Давайте повторим эти рассуждения Ньютона. С одной стороны, птицы тяжелее воздуха, но летают! С другой стороны, по своему опыту мы знаем, что шарообразное тяжелое тело без посторонних внешних сил подняться в воздух не может. А почему простейшая модель птицы – воздушный змей взмывает в воздух?

Для того чтобы змей полетел, необходимо наличие следующих факторов: **плотность среды** (на Луне змей не полетит), **скорость** (ветра или бегуна) и **специальная геометрия тела** (угол атаки, создаваемый специально подобранными веревочками). Эти феноменологические рассуждения необходимо облечь в форму строгой теории (модели), с помощью которой можно было бы проводить расчет полета любого ЛА в любых условиях. Ведь при создании Ил-96 никто не прыгал с прототипом его крыла с колокольни, чтобы убедиться в возможности полета!

Не менее фундаментальными и математизированными являются и теория двигателей, расчет конструкций и систем на работоспособность и прочность, расчет тушения пожаров и движения ЛА по земле и воде. Но именно эти общие для них фундаментальность и математизированность и послужили в середине прошлого века толчком к их объединению в одну крупную науку, изучающую единые законы поведения трех видов фазовых состояний вещества: газа, жидкости, твердого тела. Это механика сплошной среды.



Проблематика механики сплошной среды, конечно, значительно шире, чем это показано на схеме. Наука занимается такими явлениями, как циклоны и цунами, движение грунтов, взрывное и ветровое воздействие в атмосфере, поведение плазмы и сильно сжатых или очень разреженных газов, сред с магнитными и электрическими свойствами и т.д. В авиации механика сплошной среды решает множество задач: движение тел в воздухе, движение газов и жидкостей в трубах, расчет упругости, прочности, усталости, ползучести, наследственности в различных конструкциях, создание горючих смесей и определенных свойств их горения, взлет и посадка летательных аппаратов с воды, пожаротушение и распылительные работы и т.д. Все это усложняется явлениями турбулентности, термочувствительности, волновыми процессами, кавитацией и т.п.

Уверенность в правильном решении задач в данной науке основывается на применении строгого математического аппарата и методов вычисления. Во второй половине XX века великое множество математических методов, разработанных в рамках механики сплошной среды, обогатили прикладную математику. И это было не самоцелью фанатиков-ученых, а жизненной необходимостью обеспечения безопасности и эффективности воздушного транспорта.

# 1. КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

## 1.1. Основные гипотезы механики сплошной среды

Прежде всего займемся изучением среды. Для ее описания необходимы полные и непротиворечивые модели движения газообразных, жидких и твердых деформируемых тел, основанные на методах теоретической механики и некоторых дополнительных гипотезах. Согласованная система таких моделей носит название *механики сплошной среды*.

Все тела состоят из множества отдельных элементарных частиц, взаимодействующих сложным образом в электромагнитном и гравитационном полях. Существуют предположения и о других, пока неизвестных полях. Поэтому изучение материальных тел как **совокупности** элементарных **частиц** требует введения дополнительных гипотез об их свойствах и взаимодействиях. Кроме того, для решения уравнений динамики необходимо знать начальные условия, т.е. координаты и скорости всех частиц, что принципиально невозможно. Однако для решения практических задач совсем не обязательно знать движение каждой частицы – достаточно определить некоторые осредненные характеристики. Такой научный подход применяется на основе вероятностного описания и использования законов распределения и называется *статистическим*.

Механика сплошной среды использует другой подход – *феноменологический*, основанный на эмпирических **гипотезах**, подтвержденных человеческим опытом [1].

- Гипотеза *сплошности* постулирует тело как непрерывную среду, заполняющую некоторый объем, и необходима для применения математического аппарата дифференциального и интегрального исчисления.

Земную атмосферу по отношению к самолету можно считать сплошной средой, так как расстояния между частицами среды много меньше характерного размера самолета. На Луне это не так.

- Гипотезу *непрерывности метрического пространства* вводят для определения координат и расстояний.

- Следующая гипотеза предполагает возможность *введения единой* для всех точек пространства *декартовой системы координат*.

Такие пространства называются *евклидовыми*, а построенная на их основе механика – *ньютоновской*. Напомним, что в декартовой системе координат каждая точка пространства имеет свои действительные координаты, а в евклидовом пространстве результат двойного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования. Эта гипотеза совместно с предыдущей позволяет применять аппарат аналитической геометрии.

На самом деле в существующей на сегодня механике сплошной среды эта гипотеза ослаблена до возможности введения декартовой системы координат лишь **отдельно в каждой точке** пространства (как плоская система координат в точке, расположенной на сфере). Это, однако, требует введения специального

метрического тензора  $g$ , описывающего "близость" такого пространства к евклидовому. В данном пособии такое усложнение опущено.

- В механике сплошной среды постулируется *абсолютность времени* для всех систем отсчета, т.е. не учитываются эффекты теории относительности.

Эти гипотезы естественны с точки зрения человеческого опыта и вполне оправданы при исследовании явлений, происходящих в не слишком больших и не слишком малых объемах с небольшими скоростями – в макром мире. Исходя из них, строятся все последующие положения и выводы теории – строится математическая модель механики сплошной среды.

## 1.2. Переменные Эйлера и Лагранжа

С точки зрения, предложенной Лагранжем, объектом изучения являются характеристики **отдельной частицы** среды. Описание движения по Лагранжу представляет собой задание *закона движения*, т.е. координат положения рассматриваемой частицы  $x$ ,  $y$ ,  $z$  как функций времени  $t$  и ее начальных координат  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$x = x(a, b, c, t); \quad y = y(a, b, c, t); \quad z = z(a, b, c, t), \quad (1.1)$$

или в векторной форме:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t)$ ,

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор положения рассматриваемой частицы в выбранной системе координат.  $t$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  называются *переменными Лагранжа*.

В силу гипотезы о непрерывности метрического пространства мы обязаны предполагать непрерывность и дифференцируемость функций (1.1). В некоторых случаях движение среды не удастся в полной мере описывать такими функциями. Например, разбрызгивание жидкости или образование каверн ("полостей") должно описываться с помощью функций (1.1), терпящих разрыв. Однако следует оговориться, что разрыва среды в перечисленных примерах не наблюдается, так как между частицами жидкости, ранее близкими, а позднее существенно удаленными, появляется среда с другими характеристиками – воздух или пар. Общая среда остается сплошной.

В переменных Лагранжа *скорость каждой отдельной частицы* с неизменными начальными координатами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  определяется вектором частной производной от радиус-вектора по времени

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \text{ с координатами: } V_x = \frac{\partial x}{\partial t}; \quad V_y = \frac{\partial y}{\partial t}; \quad V_z = \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (1.2)$$

Здесь весьма важно не забывать, что эти производные вычисляются для определенной частицы сплошной среды – для фиксированных значений  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – поэтому и берутся **частные** производные по одной переменной  $t$  из четырех переменных Лагранжа  $t$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

С точкой зрения Лагранжа связаны все привычные представления об известных физических законах, относящихся, как правило, к движению частиц.

С точки зрения, предложенной Эйлером, следует рассматривать характеристики среды **в отдельных точках пространства**, т.е. как скалярные и векторные поля, в виде функций  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ , задающих изменение параметра в выбранной точке пространства с течением времени (в общем случае для разных частиц). Переменные  $t, x, y, z$  называются *переменными Эйлера*.

В переменных Эйлера скорость задается как поле вектора в каждой точке пространства, а поскольку координаты  $x, y, z$  меняются вместе со временем  $t$ , производная берется полная

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\text{или по координатам: } V_x \llcorner y, z, t \rceil \equiv \frac{dx}{dt}; V_y \llcorner y, z, t \rceil \equiv \frac{dy}{dt}; V_z \llcorner y, z, t \rceil \equiv \frac{dz}{dt}. \quad (1.3)$$

Точка зрения Лагранжа полезна при выводах некоторых фундаментальных положений и будет оговариваться специально.

Переход от аргументов - переменных Лагранжа к аргументам - переменным Эйлера осуществляется решением уравнений (1.1) в каждый момент времени относительно переменных Лагранжа:

$$a = a(x, y, z, t); \quad b = b(x, y, z, t); \quad c = c(x, y, z, t). \quad (1.4)$$

Это означает, что любую величину, заданную в переменных Лагранжа  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(a, b, c, t)$ , можно выразить через переменные Эйлера простой подстановкой уравнений (1.5). Однако следует заметить, что (1.5) можно получить из (1.1) только в том случае, если переменные Лагранжа и переменные Эйлера в каждый фиксированный момент времени  $t$  являются взаимнооднозначными функциями. С математической точки зрения это возможно только тогда, когда Якобиан преобразования (1.1) не обращается в ноль

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Физическая интерпретация такого условия заключается в том, что образованная из частиц среды замкнутая поверхность переходит в замкнутую поверхность, а замкнутая линия – в замкнутую линию. Переходы конечного объема в линию или в точку, а также замкнутой линии в разомкнутую невозможны. Обычные физические представления о движении среды этому не противоречат.

Для того чтобы осуществить обратный переход, перейти от аргументов - переменных Эйлера к аргументам - переменным Лагранжа, необходимо разрешить дифференциальные уравнения (1.3) относительно  $x, y, z$ . Появляющиеся

при этом произвольные постоянные определяются по значениям переменных Эйлера  $x, y, z$  в определенный момент времени (например, в начальный, чему соответствуют переменные Лагранжа  $a, b, c$ ).

### 1.3. Деформация и скорость деформации

Рассмотрим перемещение бесконечно малой деформируемой частицы среды за время  $\Delta t$  (рис. 1). Очевидно, что бесконечно малый радиус-вектор в частице  $\rho = \{dx, dy, dz\}$  сместится и деформируется  $\rho' = \rho + (\mathbf{V}' - \mathbf{V}) \cdot \Delta t$ . Скорость можно разложить в ряд Тейлора с точностью до малых первого порядка по  $\rho$

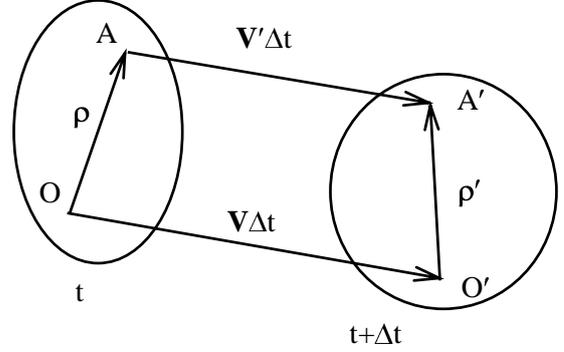


Рис. 1

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}} \right)_0 \mathbf{d}\rho = \mathbf{V} + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \right)_0 dx + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \right)_0 dy + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right)_0 dz, \quad (1.5)$$

где производные берутся в центре частицы  $O$ . Каждую производную скорости можно представить в виде суммы двух слагаемых, например

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \equiv e_{21} + \omega_{21},$$

где использованы обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial x} &\equiv e_{11}, & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) &\equiv e_{12}, & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) &\equiv e_{13}, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) &\equiv e_{21}, & \frac{\partial V_y}{\partial y} &\equiv e_{22}, & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) &\equiv e_{23}, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) &\equiv e_{31}, & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) &\equiv e_{32}, & \frac{\partial V_z}{\partial z} &\equiv e_{33}, \\ 0 &\equiv \omega_{11}, & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) &\equiv \omega_{12}, & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) &\equiv \omega_{13}, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) &\equiv \omega_{21}, & 0 &\equiv \omega_{22}, & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) &\equiv \omega_{23}, \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) &\equiv \omega_{31}, & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) &\equiv \omega_{32}, & 0 &\equiv \omega_{33}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Элементы  $e_{ij}$  и  $\omega_{ij}$  являются компонентами некоторых матриц (в декартовой системе координат) и представляют в общем случае *тензоры*.

Введем функцию, равную половине суммы произведений всех элементов  $e_{ij}$  на соответствующие составляющие вектора  $\rho$

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{2} \left( e_{11} dx^2 + e_{22} dy^2 + e_{33} dz^2 + e_{12} dydx + e_{13} dzdx + e_{23} dzdy + e_{21} dydx + e_{31} dzdx + e_{32} dzdy \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( e_{11} dx^2 + e_{22} dy^2 + e_{33} dz^2 + 2e_{21} dydx + 2e_{31} dzdx + 2e_{32} dzdy \right)\end{aligned}$$

Тогда в (1.5) можно усмотреть присутствие слагаемого вида  $\mathbf{grad}\Phi$ , так как, например,  $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \mathbf{grad}\Phi \cdot \mathbf{e}_y = e_{22} dy + e_{21} dx + e_{32} dz$ . В выражениях  $\omega_{ij}$  при  $i \neq j$  можно заметить (1.11) "смежную" координату вектора ротора скорости  $\left(\frac{1}{2}\mathbf{rotV}\right)_k$  при  $i \neq k \neq j$ , например,  $\omega_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \mathbf{rotV} \cdot \mathbf{e}_x$ . Это значит, что в (1.5) будет присутствовать слагаемое вида  $\frac{1}{2}\mathbf{rotV} \times \rho$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{V}' &= \mathbf{V} + \mathbf{grad}\Phi + \frac{1}{2}\mathbf{rotV} \times \rho, \\ \rho' &= \rho + \Delta\rho = \rho + \mathbf{grad}\Phi \Delta t + \left( \frac{1}{2}\mathbf{rotV} \times \rho \right) \Delta t.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Смысл слагаемых в правой части уравнения (1.7) становится ясным из сравнения с известной из теоретической механики формулой Эйлера  $\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \rho$  для скорости произвольной точки твердого тела. Последнее слагаемое в обеих этих формулах описывает вращение точки А вокруг О (рис. 1).  $\mathbf{grad}\Phi$  в формуле Эйлера для твердого тела отсутствует, так как отражает деформацию среды. Зависимость  $\Phi$  от координат изменяющегося вектора  $\rho$  непосредственно указывает на это.

Можно установить и смысл отдельных составляющих тензора  $e_{ij}$ . Если рассмотреть случай, когда  $\rho$  направлено строго по оси одной из координат, например, по  $x$  (т.е.  $\rho = \mathbf{i}dx$ ), а перемещения точки О и поворота частицы нет (рис. 1:  $\mathbf{V}\Delta t = \mathbf{V} = 0$ ,  $\rho \parallel \rho' \parallel \mathbf{V}'$  и  $\mathbf{V}'$  по сути означает скорость смещения точки А в направлении  $\rho = \mathbf{i}dx$ ), то в (1.7) обнулятся все члены, кроме одного  $\mathbf{V}' = e_{11}dx$ , имеющего смысл скорости удлинения элемента  $dx$ . Таким образом, диагональные компоненты  $e_{ii}$  задают **скорости относительного удлинения** элементов деформируемой среды вдоль осей координат.

Если ввести тензор с компонентами

$$\varepsilon_{ij} \equiv e_{ij}\Delta t,\tag{1.8}$$

то его компоненты  $\varepsilon_{ii}$  будут задавать **относительные удлинения** по осям координат, а  $\varepsilon_{ij}$  при  $i \neq j$  – **скашивание прямых углов** при чистой деформации среды (без перемещения и вращения). Тензор с компонентами  $e_{ij}$  называют *тензором скоростей деформации*,  $\varepsilon_{ij}$  – *тензором деформации*, а  $\omega_{ij}$  – *тензором вращения*.

В итоге из уравнения (1.7) следует, что скорость любой точки частицы среды состоит из трех составляющих: поступательной, вращательной и скорости чистой деформации. Так формулируется *теорема Коши-Гельмгольца*.

#### 1.4. Термины механики сплошной среды

Введенные в 1.2 фундаментальные понятия закона движения (1.1) и скорости (1.2) позволяют построить понятийный аппарат механики сплошной среды.

Если поле вектора скорости сплошной среды  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r})$  не зависит от времени в каждой точке пространства, то движение называется *стационарным* или *установившимся*. В общем случае  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , и движение называется *нестационарным* или *неустановившимся*.

Уравнения (1.1), задающие положение точки в пространстве в каждый момент времени, можно рассматривать как *траекторию* ее движения в переменных Лагранжа. В переменных Эйлера траектория задается уравнениями (1.3) или (1.4) – дифференциальными уравнениями, требующими своего решения. Необходимые для отыскания частного решения произвольные постоянные определяются по значениям переменных Эйлера  $x, y, z$  в определенный момент времени (например, в начальный, чему соответствуют переменные Лагранжа  $a, b, c$ , которые "индивидуализируют" избранную частицу среды).

*Линиями тока* в механике сплошной среды называются линии, которые в каждый **фиксированный момент времени** имеют в каждой своей точке касательные, совпадающие с вектором скорости. Таким образом, частицы жидкости, попавшие на линию тока, не имеют составляющей скорости поперек нее и не могут ее пересечь. На практике линии тока в прозрачной жидкости с взвешенными частицами нерастворимой краски можно зафиксировать фотографированием с маленькой выдержкой – короткие следы этих частиц, сливаясь, вырисовывают линии тока. Уравнение линии тока в момент времени  $t$  запишется в терминах аналитической геометрии как условие коллинеарности векторов

$$\frac{dx}{V_x(\mathbf{r}, t)} = \frac{dy}{V_y(\mathbf{r}, t)} = \frac{dz}{V_z(\mathbf{r}, t)}. \quad (1.9)$$

Таким образом, линии тока в нестационарном движении все время изменяются.

При установившемся движении (и только в этом случае!) отсутствие в уравнении (1.9) времени  $t$  приводит к совпадению линий тока с траекториями частиц. Понятие линии тока необходимо для получения математически строгих выводов, поэтому весьма важно их различать.

Если компоненты вектора скорости не обращаются в нуль и вместе со своими первыми производными однозначны и не имеют разрывов, то решение уравнения (1.9) существует и единственно. В противоположном случае существование или единственность может нарушаться, т.е. в некоторых точках пространства линии тока могут ветвиться или вырождаться в точку. Такие точки называются *особыми* или *критическими*.

Трубчатая поверхность, образованная линиями тока, проходящими через некоторую замкнутую кривую, называется *трубкой тока*.

Напомним некоторые математические термины [4] применительно к скорости, заданной в пространстве переменных Эйлера – *полю скоростей*.

Вектором  $\mathbf{S}$  будем обозначать поверхность с указанным направлением нормали  $\mathbf{n}$ , выражающимся через единичные векторы осей координат:  $\mathbf{n} = \cos(\mathbf{n},x)\mathbf{i} + \cos(\mathbf{n},y)\mathbf{j} + \cos(\mathbf{n},z)\mathbf{k}$ , а скаляром  $S$  – только площадь этой поверхности (рис. 2).

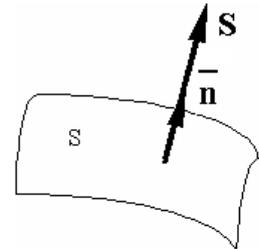


Рис. 2

*Потоком скорости* через поверхность  $\mathbf{S}$  с заданным вектором нормали называется поверхностный интеграл

$$\int_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S V_n dS = \int_S [V_x \cos(\mathbf{n},x) + V_y \cos(\mathbf{n},y) + V_z \cos(\mathbf{n},z)] dS, \quad (1.10)$$

где  $V_n$  – проекция скорости на единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  поверхности  $\mathbf{S}$ .

*Ротор скорости (вихрь)* и *градиент скаляра* определяются известным образом

$$\mathbf{rotV} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}, \quad \mathbf{gradA} = \frac{\partial A}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial A}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial A}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (1.11)$$

(заметим, что  $\mathbf{rot grad A} \equiv 0$  всегда), а *дивергенция скорости* может быть выражена через компоненты тензора скоростей деформации

$$\mathbf{divV} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = e_{11} + e_{22} + e_{33}. \quad (1.12)$$

Если выбрать в пространстве малый прямоугольный параллелепипед  $W$  со сторонами, параллельными осям координат, то объемный интеграл  $\int_W \mathbf{divV} dW$  в силу (1.12) и смысла компонент тензора скоростей деформации из п.1.3 может трактоваться как элементарное расширение частицы среды. В таком случае дивергенция означает скорость расширения частицы среды.

Циркуляцией скорости по замкнутому контуру  $L$  с определенным направлением обхода называется криволинейный интеграл

$$\oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \oint_L V_x dx + V_y dy + V_z dz. \quad (1.13)$$

Известные теоремы векторных полей [4] применимы и к полю скоростей. Теорема Стокса

$$\oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \oint_L V_x dx + V_y dy + V_z dz = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.14)$$

справедлива при ориентации обхода контура  $L$  и нормали к натянутой на него поверхности  $S$  по правилу правого винта, а теорема Остроградского-Гаусса

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{V} d\mathbf{S} &= \int_S \mathbf{V} \mathbf{n} dS = \int_S V_n dS = \int_S [V_x \cos(\mathbf{n}, x) + V_y \cos(\mathbf{n}, y) + V_z \cos(\mathbf{n}, z)] dS = \\ &= \int_W \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dW = \int_W \operatorname{div} \mathbf{V} dW \end{aligned} \quad (1.15)$$

– при условии, что замкнутая поверхность  $S$  ограничивает объем  $W$ .

Полную производную по времени от скаляра  $A(\mathbf{r}, t)$ , заданного в переменных Эйлера, можно определить по известной [4] формуле

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} V_x + \frac{\partial A}{\partial y} V_y + \frac{\partial A}{\partial z} V_z = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} A. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Производную  $\frac{d}{dt} \int_W f(\mathbf{r}, t) dW$  от интеграла по произвольному подвижному объему  $W$ , где от  $t$  зависит не только подынтегральная функция, но и объем, вычислим с помощью определения производной

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_W f(\mathbf{r}, t) dW &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{W'} f(\mathbf{r}, t + \Delta t) dW - \int_W f(\mathbf{r}, t) dW}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_W [f(\mathbf{r}, t + \Delta t) - f(\mathbf{r}, t)] dW + \int_{W' - W} f(\mathbf{r}, t + \Delta t) dW}{\Delta t} = \\ &= \int_W \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dW + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{W' - W} f(\mathbf{r}, t + \Delta t) dW}{\Delta t}. \end{aligned}$$

В последнем пределе  $W' - W$  образуется сдвигом элементарных площадок  $dS$  поверхности  $S$ , ограничивающей  $W$ , на расстояние  $V_n dS$ . Кроме того, при  $\Delta t \rightarrow 0$  значение функции  $f(\mathbf{r}, t + \Delta t) \rightarrow f(\mathbf{r}, t)$  и деформированная поверхность

$S' \rightarrow S$ , поэтому предел принимает значение  $\int_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int_S V_n dS = \int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$  (сравните с (1.10)) или  $\int_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int_W \operatorname{div} \mathbf{V} dW$  по теореме Остроградского-Гаусса (1.15). Откуда в силу уравнения (1.16)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_W \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_W \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{V} \right] dW = \\ &= \int_W \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + f \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} f \right] dW = \int_W \left[ \frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{V} \right] dW. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Вектор  $\operatorname{rot} \mathbf{V} \neq \mathbf{0}$  тоже можно рассматривать как поле вектора ротора скорости  $\operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  – вихревое поле. Непосредственной проверкой легко убедиться, что  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$ . Отсюда по теореме Остроградского-Гаусса следует, что поток ротора скорости сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю

$$\oint_S \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (1.18)$$

В вихревом поле по аналогии с полем скоростей выделяют *вихревую линию*

$$\frac{dx}{(\operatorname{rot} \mathbf{V})_x} = \frac{dy}{(\operatorname{rot} \mathbf{V})_y} = \frac{dz}{(\operatorname{rot} \mathbf{V})_z} \quad (1.19)$$

и *вихревую трубку*. Так как через боковую поверхность вихревой трубки по определению нет потока ротора скорости, то из (1.18) вытекает постоянство такого потока через любое ее поперечное сечение (*первая кинематическая теорема Гельмгольца о вихрях*). Эта величина называется интенсивностью вихревой трубки. Согласно теореме Стокса (1.14) она равна циркуляции скорости по контуру, образующему вихревую трубку

$$\oint_S \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma. \quad (1.20)$$

Отсюда можно сделать вывод: внутри объема сплошной среды вихревые трубки (а также вихревые линии) не могут ни начинаться, ни заканчиваться (*вторая кинематическая теорема Гельмгольца о вихрях*).

### 1.5. Уравнение неразрывности

Как известно, плотность вещества вводится предельным переходом:  $\rho = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta W}$ , где в механике сплошной среды следует понимать под  $\Delta m$  массу вещества, заключенную в объеме  $\Delta W$ . Посмотрим, как будет выглядеть закон

сохранения массы  $\frac{dm}{dt} = 0$  для произвольного подвижного объема сплошной среды, для которого  $m = \int_W \rho dW$ . Из (1.17) следует

$$0 = \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_W \rho dW = \int_W \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{V}) \right] dW = \int_W \left[ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} \right] dW,$$

или в силу произвольности объема  $W$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{V}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (1.21)$$

Это уравнение носит название *уравнения неразрывности (непрерывности)*

Рассмотрим частные случаи уравнения неразрывности. Так, для **стационарного** (установившегося) движения сплошной среды из (1.21) с помощью (1.5) следует

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (1.22)$$

а если, кроме того, среда **несжимаемая** ( $\rho(x, y, z) = \operatorname{const}$ , в общем случае неоднородная), то

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (1.23)$$

Т.е. по теореме Остроградского-Гаусса (1.15) несжимаемый установившийся поток скорости (1.10) сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю. Так как через боковую поверхность трубки тока по определению нет потока скорости, то поток через любое ее поперечное сечение одинаков

$$\int_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (1.24)$$

и численно равен объемному расходу жидкости. Отсюда можно сделать вывод: внутри объема несжимаемой сплошной среды трубки тока (а также линии тока) не могут ни начинаться, ни заканчиваться.

## 1.6. Безвихревое и вихревое движение

Движение сплошной среды в некоторой области называется *безвихревым*, если в ней  $\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$ , и *вихревым*, если  $\operatorname{rot} \mathbf{V} \neq 0$  хотя бы в части этой области.

Из теоремы Стокса (1.14) для безвихревого движения следует равенство нулю циркуляции скорости по любому замкнутому контуру. Т.е. в безвихревом движении невозможны замкнутые линии тока (вдоль которых циркуляция не обращается в нуль).

Свойства безвихревого движения рассмотрим, исходя из его определения, записанного в проекциях

$$\mathbf{rot}\mathbf{V} = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0.$$

Из математики [4] известно, что это необходимое и достаточное условие существования некоторой функции  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , называемой *потенциалом скорости*, производными которой являются компоненты вектора скорости

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{V} = \mathbf{grad}\varphi. \quad (1.25)$$

Иными словами, существование потенциала скорости и равенство нулю ротора скорости – условия эквивалентные. Поэтому безвихревое движение называют также *потенциальным*, а скалярную функцию потенциала изучают вместо вектора скорости.

Подстановка потенциала в уравнение неразрывности для несжимаемой среды дает уравнение Лапласа

$$\mathbf{div}\mathbf{grad}\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \equiv \Delta\varphi = 0 \quad (1.26)$$

для *гармонической* функции  $\varphi$ , где  $\Delta$  – символ оператора Лапласа. Из свойств гармонической функции, хорошо известной в математике [4], вытекают следствия для потенциального движения сплошной среды:

- а) внутри сплошной среды не может быть экстремальных значений потенциала скорости;
- б) внутри сплошной среды не может быть максимальных значений скорости;
- в) скорость сплошной среды равна нулю во всех точках объема, ограниченного замкнутой поверхностью, во всех точках которой потенциал постоянен;
- г) в односвязанном объеме сплошной среды, ограниченном твердыми стенками, не может существовать потенциальное (безвихревое) движение.

Рассмотрим примеры **потенциальных** движений.

1.  $\varphi = \text{const}$ . В этом случае все компоненты скорости согласно (1.25) обращаются в нуль, т.е. движения нет.

2.  $\varphi = ax$ . В этом случае только одна составляющая скорости отлична от нуля  $V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a$  и определяет поступательное движение вдоль оси  $x$ .

3.  $\varphi = \frac{q}{4\pi r}$ . На каждой концентрической сфере радиусом  $r$  потенциал принимает постоянное значение – такие поверхности называются *экипотенциаль-*

ными. Поэтому вектор скорости  $\mathbf{V} = \mathbf{grad}\phi$ , нормальный к эквипотенциальной поверхности, направлен всегда по лучу, исходящему (для  $q > 0$ ) из начала координат, а его абсолютная величина одинакова во всех точках сферы. Через любую сферу  $S$  радиусом  $r$  проходит поток вектора скорости

$$\int_S \mathbf{V} d\mathbf{S} = V \int_S dS = |\mathbf{grad}\phi| 4\pi r^2 = 4\pi r^2 \left| \frac{\partial\phi}{\partial r} \right| = 4\pi r^2 \frac{|q|}{4\pi r^2} = |q|,$$

не зависящий от радиуса. Таким образом,  $V \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  и  $V \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ , а  $q$  можно назвать расходом. Если  $q > 0$ , то такое движение называется *источником*, если  $q < 0$ , то – *стоком* (рис. 3).

Заметим, что проведенные рассуждения справедливы и при зависимости  $q$  от времени. При этом очевидно, что изменение поля скорости во всем пространстве, вызванное изменением расхода, происходит мгновенно. В реальности распространение возмущений происходит всегда с конечной скоростью, поэтому такое потенциальное движение следует рассматривать лишь как идеализированную модель.

4.  $\phi = c\theta$ , где  $\theta$  – полярный угол в цилиндрической системе координат (полярный радиус  $r$  и высота  $z$ ). В этом случае по правилам дифференцирования в цилиндрических координатах

$$V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = 0, \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{c}{r}, \quad V_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0,$$

т.е. линии тока имеют вид горизонтальных концентрических окружностей, а скорость растет от нулевой при  $r \rightarrow \infty$  до бесконечной при  $r \rightarrow 0$  (рис. 4). На расстоянии  $r = 1$  абсолютная величина скорости равна  $c$ . Ввиду особенности при  $r = 0$  движение можно считать потенциальным только вне некоторого ядра в виде цилиндра или нити. Поэтому циркуляция по любому контуру, охватывающему ось  $z$ , не равна нулю

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \frac{c}{r} r d\theta = 2\pi c.$$

С вихревым движением тесно связана циркуляция вектора скорости (1.20), с помощью которой можно измерять интенсивность вихревой трубки. Однако наличие ненулевого вектора  $\mathbf{rot} \mathbf{V}$  не связано ни с вихревой трубкой, ни с каким-либо объемом. Векторное поле вихря определено в каждой точке пространства и характеризует **вращательное движение любой сколь угодно малой частицы среды**.

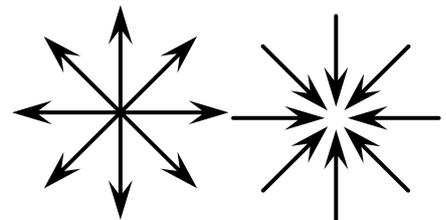


Рис. 3

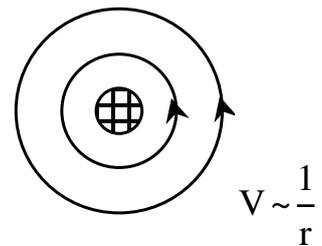


Рис. 4

Этот факт иллюстрируется рис. 5, на котором крайние точки бесконечно малой частицы среды имеют разные скорости в предположении наличия ненулевой величины  $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ . Если центр этой частицы покоится, а все другие частные производные скорости равны нулю, то очевидно, что  $\mathbf{rot} \mathbf{V} \neq 0$  характеризует именно вращение бесконечно малой частицы среды.

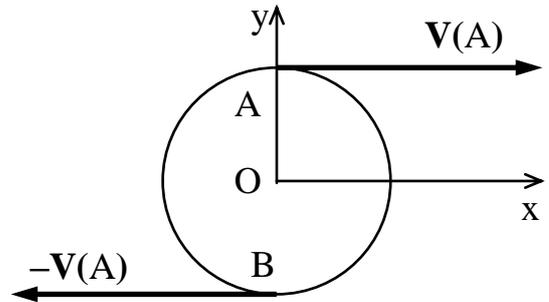


Рис. 5

В безвихревом движении такого вращения нет, и каждая частица среды совершает лишь поступательное движение. Вообще говоря, в реальной природе вихревое движение возникает благодаря наличию границ (свободной поверхности, твердых стенок или твердых тел), а также явлению вязкости.

Поучительны следующие примеры **вихревых** движений.

1. Плоский сдвиг горизонтальных слоев:  $V_x = cz$ ,  $V_y = V_z = 0$  (рис. 6). Скорость частиц вдоль плоскости  $z = 0$  в направлении оси  $x$  пропорциональна расстоянию от этой плоскости  $z$ . В координатной записи с помощью (1.11) нетрудно убедиться, что в этом случае  $\mathbf{rot} \mathbf{V} = c\mathbf{j}$ , т.е. вращение частиц сплошной среды происходит вокруг оси  $y$ .

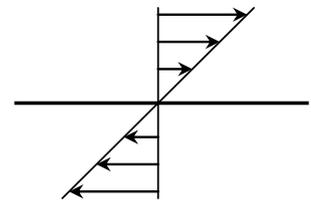


Рис. 6

2. Вращение сплошной среды вокруг оси  $z$ , как твердого тела, с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 7). В цилиндрической системе:  $V_r = 0$ ,  $V_\theta = \omega r$ ,  $V_z = 0$ , а компоненты вихря:

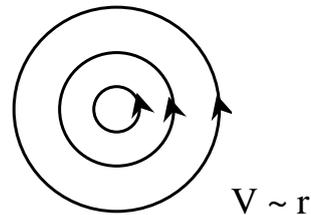


Рис. 7

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{V} \Big|_x &= \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} = 0, & \mathbf{rot} \mathbf{V} \Big|_\theta &= \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0, \\ \mathbf{rot} \mathbf{V} \Big|_z &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] = 2\omega. \end{aligned}$$

Т.е. вихревые линии представляют собой прямые, параллельные оси  $z$ . Этот пример отличается от примера 4 потенциального движения (рис. 4) значением модуля окружной скорости  $V_\theta$ .

3. Вихревое ядро при  $r = 0$  примера 4 потенциального движения (заштрихованная область на рис. 4). В качестве такого идеализированного ядра может выступать изолированная вихревая нить (вихревая трубка бесконечно малого сечения) из частиц той же среды с интенсивностью  $\Gamma = 2\pi c$ , в которой  $|\mathbf{rot} \mathbf{V}| = \infty$ . Ясно, что практически реализовать такое течение невозможно. Это связано с математическими требованиями теоремы Стокса: на гладкой поверхности, натянутой на замкнутый контур, поле  $\mathbf{V}$  должно быть непрерывно и дифференцируемо.

Более широкий взгляд на эти требования приводит к выводу о том, что наличие вихрей в реальной природе, связанное с особенностями поля скоро-

стей, обуславливается многосвязностью рассматриваемой области сплошной среды, т.е. существованием каких-либо границ (свободной поверхности, твердых стенок, твердых тел). В рассмотренном примере ядром течения может быть газовая трубка или твердый стержень.

Замечание к примеру 3 потенциального движения фиксировало внимание на мгновенности распространения возмущений на всю область сплошной среды. Выясним, как обстоит дело в вихревом движении. Пусть бесконечное пространство заполнено несжимаемой средой  $\text{div} \mathbf{V} = 0$ , покоящейся в бесконечности  $\mathbf{V} = 0$ . Пусть также задан вектор  $\mathbf{\Omega} = \text{rot} \mathbf{V}$ , который отличен от нуля только в определенном конечном объеме  $W$ . Заметим, что  $\text{div} \mathbf{\Omega} = \text{div} \text{rot} \mathbf{V} = 0$ . В силу несжимаемости (1.23) существует такой вектор  $\mathbf{P}$ , что  $\mathbf{V} = \text{rot} \mathbf{P}$ . Тогда  $\text{rot} \text{rot} \mathbf{P} = \mathbf{\Omega}$ . Решение такого дифференциального уравнения второго порядка в математике известно [4] и может быть представлено в виде

$$\mathbf{P} \llcorner \supseteq \frac{1}{4\pi} \int_W \frac{\mathbf{W} \phi}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|} dW \quad \text{или} \quad \mathbf{V} \llcorner \supseteq \text{rot} \mathbf{P} = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int_W \frac{\mathbf{W} \phi}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|} dW, \quad (1.27)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор произвольной точки пространства  $\{x, y, z\}$ , в которой вычисляется скорость, по  $\{x, y, z\}$  ведется и дифференцирование в операторе  $\text{rot}$ ,  $\boldsymbol{\rho}$  – радиус-вектор текущей точки объема  $W$ .

Из (1.27) ясно, что и в вихревом поле всякое возмущение распространяется мгновенно на все пространство сплошной среды.

Рассмотрим изолированную вихревую нить. Элемент ее объема можно представить в виде произведения бесконечно малого поперечного сечения  $dS$  на элемент ее длины  $d\mathbf{l}$ :  $dW = dS \cdot d\mathbf{l}$ . Для каждого ее бесконечно малого поперечного сечения согласно (1.20)

$$\Gamma = \int_{dS} \mathbf{W} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{W} \cdot d\mathbf{S}.$$

Таким образом, уравнение (1.27) с учетом правил векторного анализа [4] можно записать в виде

$$\mathbf{P} \llcorner \supseteq \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|}, \quad \text{или} \quad \mathbf{V} \llcorner \supseteq \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \text{rot} \left( \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|} \right) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^3} \times d\mathbf{l}.$$

Для элемента вихревой нити  $\Delta\mathbf{l}$  это выражение примет вид

$$|\Delta\mathbf{V}| = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^2} \Delta\mathbf{l}, \quad (1.28)$$

где  $\alpha$  – угол между касательной к  $\Delta\mathbf{l}$  и вектором  $\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}$ , проведенным из  $\Delta\mathbf{l}$  в текущую точку пространства.

Это выражение трактуется как составная часть скорости, которая "наводится" элементом вихря  $\Delta\mathbf{l}$  в точке пространства. Ввиду очевидной аналогии с электродинамикой соотношение (1.28) характеризует *вихревое влияние* и получило наименование *формулы Био и Савара*.

## 2. ДИНАМИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

### 2.1. Силы и моменты в механике сплошной среды

В классической динамике приходится иметь дело с силами и моментами, приложенными к материальной точке или к твердому телу. В механике сплошной среды дело обстоит сложнее и приходится рассматривать силы и моменты, приложенные в общем случае к изменяющимся элементам среды конечного размера, так как понятия материальной точки не существует. Рассматривать случаи сосредоточенных (в точке) сил, отнесенных к бесконечно малой массе  $dm$ , мы не будем, так как по второму закону Ньютона  $\mathbf{F} = dm \cdot \mathbf{a}$  следовало бы, что в этой точке ускорение должно быть бесконечным.

Силы, распределенные по объему  $W$ , называются *объемными* или *массовыми*. Они обозначаются  $\mathbf{F}$  и относятся к элементу массы  $\Delta m = \rho \cdot \Delta W$ . Т.е. сила, действующая на элемент массы, равна  $\mathbf{F} \cdot \Delta m = \mathbf{F} \cdot \rho \cdot \Delta W$ , следовательно, размерность  $\mathbf{F}$  совпадает с размерностью ускорения. Примерами массовых сил могут служить гравитационные, электромагнитные, инерционные.

Силы, распределенные по поверхности  $S$ , называются *поверхностными*. Поверхностные силы будем обозначать  $\mathbf{p}_S$  и относить к элементу поверхности  $\Delta S$  сплошной среды, а силой в обычном смысле будет произведение  $\mathbf{p}_S dS = \mathbf{p}_S n dS$ . Т.е.  $\mathbf{p}_S$  имеет размерность давления. Такие силы возникают, например, на свободной поверхности среды, при взаимодействии среды с твердыми телами, а также внутри среды (внутренние поверхностные силы).

*Внутренние поверхностные силы* необходимо рассматривать при изучении движения отдельных частиц среды с учетом их механического влияния друг на друга. Так, например, происходит при относительном движении двух соседних соприкасающихся частиц. Это явление может наблюдаться в любом месте сплошной среды, причем для бесконечно малых частиц поверхности соприкосновения  $dS$  можно построить любым образом. Тогда и  $\mathbf{p}_S$ , зависящую от такого выбора, можно определить по-разному в зависимости от  $dS$ , т.е. ориентации нормали этой площадки, поэтому такое взаимодействие и обозначают вектором  $\mathbf{p}_S$  – с индексом  $S$ . В силу третьего закона Ньютона на одну из пары соприкасающихся частиц действует сила  $\mathbf{p}_S dS = \mathbf{p}_S n dS$ , на другую  $-\mathbf{p}_S dS = -\mathbf{p}_S n dS$ . Таким образом, внутренние поверхностные силы можно рассматривать в любой точке пространства, занятого сплошной средой, поэтому их часто называют по-другому *силами внутренних напряжений*.

Вектор  $\mathbf{p}_S$  в общем случае не перпендикулярен к  $dS$  (рис. 8), поэтому различают нормальную составляющую  $\mathbf{p}_{Sn}$ , называемую *нормальным напряжением* или *нормальным давлением*, и тангенциальную  $\mathbf{p}_{St}$ , называемую *касательным напряжением* или *внутренним трением*:  $\mathbf{p}_S dS = \mathbf{p}_{Sn} n dS + \mathbf{p}_{St} \tau dS$ .

Рассматривая предыдущее равенство с математи-

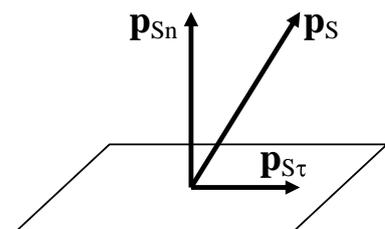


Рис. 8

ческой точки зрения, можно заметить, что  $\mathbf{p}_S$  не обычный вектор. Поэтому его смысл надо детально проанализировать.

Свойство вектора  $\mathbf{p}_S$  изучим с помощью представления бесконечно малой частицы в виде тетраэдра с ребрами, параллельными осям координат (рис. 9). Площади граней такого тетраэдра равны:  $S$ ,  $S \cdot \cos(\mathbf{n}, x)$ ,  $S \cdot \cos(\mathbf{n}, y)$ ,  $S \cdot \cos(\mathbf{n}, z)$ . Единичный вектор нормали к грани ABC выразится через единичные векторы осей координат известным образом  $\mathbf{n} = \cos(\mathbf{n}, x)\mathbf{i} + \cos(\mathbf{n}, y)\mathbf{j} + \cos(\mathbf{n}, z)\mathbf{k}$ .

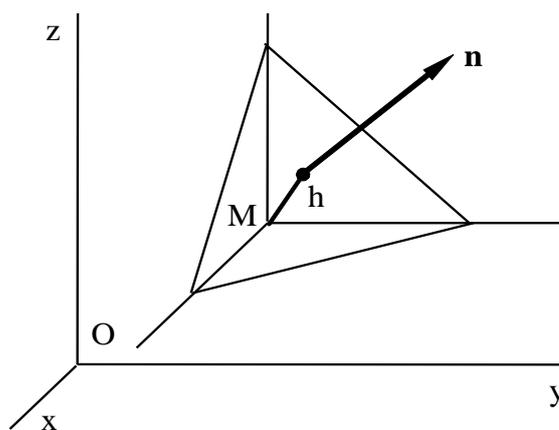


Рис. 9

Массовые силы будем считать постоянными во всем объеме  $W = hS/3$  частицы, а внутренние поверхностные силы  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{p}_3$ ,  $\mathbf{p}_S$ , приложенные к соответствующим граням частицы, постоянными на своих гранях с нормальными, соответственно:  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{n}$ . Это позволяет применить к частице начало Даламбера из теоретической механики

$$\left( \mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) \rho \frac{hS}{3} + \mathbf{p}_S - \mathbf{p}_1 \cos(\mathbf{n}, x) - \mathbf{p}_2 \cos(\mathbf{n}, y) - \mathbf{p}_3 \cos(\mathbf{n}, z) \bar{\mathbf{S}} = 0,$$

откуда, сократив на  $S$  и перейдя к пределу при  $h \rightarrow 0$ , получаем инвариантное к выбору площадки равенство

$$\mathbf{p}_S = \mathbf{p}_1 \cos(\mathbf{n}, x) + \mathbf{p}_2 \cos(\mathbf{n}, y) + \mathbf{p}_3 \cos(\mathbf{n}, z). \quad (2.1)$$

Это означает, что в любой точке пространства, занятого сплошной средой, существует некоторый объект, компонентами которого можно рассматривать векторы  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{p}_3$ . Иными словами, этот объект может быть представлен матрицей  $(p_{ij})$  размерностью  $3 \times 3$ , составленной из компонент векторов  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{p}_3$ . С подобной ситуацией мы сталкивались в п.1.3 при рассмотрении тензоров деформаций и скоростей деформации. Объект с компонентами  $p_{ij}$  называется *тензором внутренних напряжений*.

Следует заметить, что в прикладных дисциплинах механики твердого тела принята особая система обозначений компонент тензора внутренних напряжений, подчеркивающая их физический смысл. Так, компоненты нормального напряжения обозначаются  $\sigma$ , а компоненты касательного напряжения –  $\tau$ . Поэтому в единой системе декартовых координат (и только в этом случае) можно применять тождественность обозначений компонент тензора внутренних напряжений

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Равенство (2.1) позволяет применить теорему Остроградского-Гаусса к расчету поверхностных сил, приложенных к некоторому объему  $W$  сплошной среды, ограниченному замкнутой поверхностью  $S$

$$\int_S \mathbf{p}_S d\mathbf{S} = \int_S \left[ p_1 \cos(\mathbf{n}, x) \mathbf{i} + p_2 \cos(\mathbf{n}, y) \mathbf{j} + p_3 \cos(\mathbf{n}, z) \mathbf{k} \right] dS = \int_W \left( \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} + \frac{\partial p_3}{\partial z} \right) dW. \quad (2.2)$$

Рассмотрим на примере, как определить силу, действующую на частицу сплошной среды по ее поверхности  $\mathbf{p}_S d\mathbf{S} = \mathbf{p}_S n dS$ . Пусть тензор внутренних

напряжений задается матрицей своих компонент  $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ , которая характе-

ризует изотропную среду (п. 2.3 – для изотропной среды тензор внутренних напряжений симметричен). Определим координаты вектора силы, приложенной к элементарной единичной ( $dS = 1$ ) площадке  $d\mathbf{S}$ , параллельной координатной

плоскости  $YOZ$ , с вектором нормали  $\mathbf{i}$  (т.е.  $d\mathbf{S} = \mathbf{i}$ ):  $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Таким

образом, вектор искомой силы может быть представлен в виде суммы нормального напряжения (или нормального давления)  $\mathbf{p}_{Sn} = \mathbf{p}_{Sx} = 4 \cdot \mathbf{i}$  и одной составляющей тангенциального напряжения (касательного напряжения или внутреннего трения)  $\mathbf{p}_{S\tau} = \mathbf{p}_{Sz} = 1 \cdot \mathbf{k}$  (рис. 10). В обозначениях механики твердого тела:  $\sigma_{xx} = 4$ ,  $\tau_{xz} = 1$ . На рисунке схематически показаны лишь направления напряжений (без масштаба), стрелка, выходящая за границы площадки, обозначает силу, направленную перпендикулярно ее плоскости, в отличие от стрелок, расположенных целиком внутри площадки, обозначающих касательные силы, действующие вдоль ее плоскости.

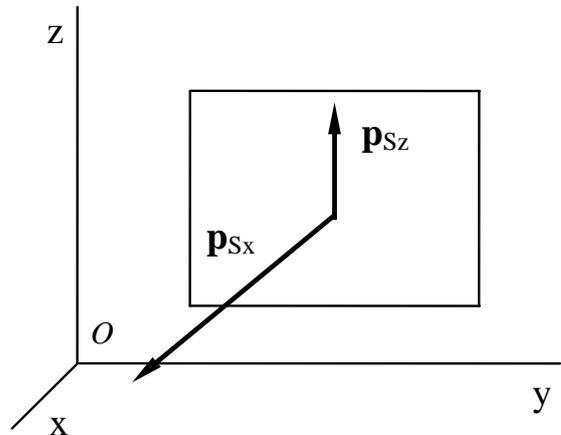


Рис. 10

Кроме внешних сил на каждую частицу жидкости могут действовать и внешние моменты. Примером может служить момент магнитного поля Земли, действующий на каждый элемент стрелки компаса. Такой внешний момент, который действует на элемент массы  $\Delta m$ , будем обозначать  $\mathbf{H}$ . Его принято называть *массовой парой* (*массовым моментом*). Размерность  $\mathbf{H}$  совпадает с размерностью квадрата скорости.

Внешний момент, который действует на элемент поверхности  $\Delta S$ , будем обозначать  $\mathbf{Q}$ . Он называется *поверхностной парой* (*поверхностным моментом*) и имеет размерность силы, деленной на длину.

## 2.2. Уравнения движения сплошной среды

В теоретической механике известно уравнение количества движения материальной точки

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{nV} \rangle = \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{F}$  – сумма всех действующих на нее сил. Обобщим это уравнение на конечный объем сплошной среды, состоящей из частиц, как системы материальных точек, подверженных действию рассмотренных в п.2.1 сил

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}} \mathbf{V} \rho dW = \int_{\mathcal{W}} \mathbf{F} \rho dW + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{p}_s dS. \quad (2.3)$$

Уравнение количества движения конечного объема сплошной среды (2.3), являющееся аналогом второго закона Ньютона, имеет такое же фундаментальное значение для описания движения сплошной среды. Оно справедливо и для разрывных движений, характеризующихся разрывными функциями координат и времени (но не нарушениями гипотезы сплошности – п. 1.1).

Однако решать такое интегро-дифференциальное уравнение очень сложно.

Заменив последнее слагаемое в (2.3) с помощью (2.2), получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}} \mathbf{V} \rho dW = \int_{\mathcal{W}} \left[ \mathbf{F} \rho + \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial z} \right] dW.$$

Левую часть преобразуем с помощью (1.17)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}} \mathbf{V} \rho dW = \int_{\mathcal{W}} \left[ \frac{d\mathbf{V}\rho}{dt} + \mathbf{V}\rho \operatorname{div} \mathbf{V} \right] dW.$$

Подынтегральное выражение в правой части этого уравнения в свою очередь можно преобразовать с помощью уравнения неразрывности (1.21)

$$\frac{d\mathbf{V}\rho}{dt} + \mathbf{V}\rho \operatorname{div} \mathbf{V} = \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{V} \frac{d\rho}{dt} + \rho \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{V} = \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{V} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} \right) = \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Это позволит записать равенство подынтегральных выражений для элементарного объема и получить *основное дифференциальное уравнение движения сплошной среды*

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial z}, \quad (2.4)$$

или в проекциях на оси декартовой системы координат

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dV_x}{dt} &= \rho F_x + \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dV_y}{dt} &= \rho F_y + \frac{\partial p_{21}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{23}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dV_z}{dt} &= \rho F_z + \frac{\partial p_{31}}{\partial x} + \frac{\partial p_{32}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

где  $F_x, F_y, F_z$  – компоненты массовой силы  $\mathbf{F}$ .

Отметим, что уравнения (2.4), (2.5) получены при предположениях:

- непрерывность и дифференцируемость векторов напряжений  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ ;
- неразрывность среды;
- непрерывность характеристик движения.

Итак, для описания движения сплошной среды имеются: скалярное уравнение неразрывности (1.21) и одно векторное (2.4) или четыре скалярных (2.5) уравнения движения. В этой системе уравнений при заданных внешних массовых силах  $\mathbf{F}(F_x, F_y, F_z)$  неизвестными функциями пространственных координат и времени являются: плотность  $\rho$ , скорость  $\mathbf{V}(V_x, V_y, V_z)$  и три вектора напряжений  $\mathbf{p}_1(p_{11}, p_{21}, p_{31}), \mathbf{p}_2(p_{12}, p_{22}, p_{32}), \mathbf{p}_3(p_{13}, p_{23}, p_{33})$  со своими девятью координатами. Так как число уравнений меньше числа неизвестных, то система незамкнута. Для ее замыкания необходимо использовать дополнительные соотношения между неизвестными.

В том случае, когда существенное значение для описания движения среды имеет эффект вращения каждой частицы (вихревое движение п.1.6), необходимо дополнить полученное выше описание уравнением момента количества движения. В теоретической механике уравнение момента количества движения материальной точки имеет вид

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r} \times m\mathbf{V} \stackrel{?}{=} \mathbf{M},$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор ее положения относительно некоторой неподвижной точки  $O$  пространства, а  $\mathbf{M}$  – сумма всех действующих на нее внешних моментов.

Обобщим это уравнение на конечный объем сплошной среды, состоящий из частиц, подверженных действию рассмотренных в п.2.1 сил и моментов. Но прежде необходимо вспомнить, что при описании вращения каждой частицы существенно рассмотрение скорости движения ее точек, как суммы скорости поступательного движения ее центра масс  $\mathbf{V}$  и движения относительно ее центра масс  $\mathbf{V}_{\text{отн}}$  (как, например, вращение электронов вокруг ядра атома). Это значит, что левая часть уравнения примет вид (сравните с (2.3))

$$\frac{d}{dt} \int_W \mathbf{r} \times \mathbf{V} \rho dW + \frac{d}{dt} \int_W \mathbf{r} \times \mathbf{V}_{\text{отн}} \rho dW = \frac{d}{dt} \int_W \mathbf{r} \times \mathbf{V} \rho dW + \frac{d}{dt} \int_W \mathbf{K} \rho dW,$$

где  $\mathbf{K}$  – *собственные (внутренние) моменты количества движения*. Таким образом, учитывая все виды сил и моментов, уравнение момента количества движения для конечного объема сплошной среды следует записать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_W \mathbf{r} \times \mathbf{V} \rho dW + \frac{d}{dt} \int_W \mathbf{K} \rho dW = \int_W \mathbf{r} \times \mathbf{F} \rho dW + \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{p}_S dS + \int_W \mathbf{H} \rho dW + \int_S \mathbf{Q} dS. \quad (2.6)$$

Собственные моменты количества движения и внешние моменты стали рассматриваться в механике сплошной среды только в последнее время, когда появились такие ее разделы, как электрогазодинамика и магнитная гидродинамика. Мы будем рассматривать классическую часть теории (ньютоновскую среду) и вторым слагаемым в левой части уравнения (2.6) будем пренебрегать, так же как и двумя последними в правой части

$$\frac{d}{dt} \int_w \mathbf{r} \times \mathbf{V} \rho dW = \int_w \mathbf{r} \times \mathbf{F} \rho dW + \int_s \mathbf{r} \times \mathbf{p}_s dS. \quad (2.7)$$

Для этого случая можно получить уравнение момента количества движения в дифференциальной форме для ньютоновской среды, если преобразовать последний интеграл с помощью теоремы Остроградского-Гаусса (понимая под  $V$  в формуле (1.15)  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}_s$ )

$$\begin{aligned} \int_s \mathbf{r} \times \mathbf{p}_s dS &= \int_s \left\{ \mathbf{i} \times p_1 \cos \mathbf{e}, x \right\} + \mathbf{r} \times p_2 \cos \mathbf{e}, y \left\} + \mathbf{r} \times p_3 \cos \mathbf{e}, z \right\} dS = \\ &= \int_w \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} \times \mathbf{p}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \times \mathbf{p}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \times \mathbf{p}_3 \right\} dW. \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение правой части преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \mathbf{p}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \times \mathbf{p}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \times \mathbf{p}_3 + \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x} + \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial y} + \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial z} = \\ = \mathbf{i} \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{j} \times \mathbf{p}_2 + \mathbf{k} \times \mathbf{p}_3 + \mathbf{r} \times \left( \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

так как  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ . А так как  $\mathbf{p}_1 = p_{11}\mathbf{i} + p_{21}\mathbf{j} + p_{31}\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}_2 = p_{12}\mathbf{i} + p_{22}\mathbf{j} + p_{32}\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}_3 = p_{13}\mathbf{i} + p_{23}\mathbf{j} + p_{33}\mathbf{k}$  то:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{j} \times \mathbf{p}_2 + \mathbf{k} \times \mathbf{p}_3 &= \mathbf{i} \times p_{21}\mathbf{j} + \mathbf{i} \times p_{31}\mathbf{k} + \mathbf{j} \times p_{12}\mathbf{i} + \mathbf{j} \times p_{32}\mathbf{k} + \mathbf{k} \times p_{13}\mathbf{i} + \mathbf{k} \times p_{23}\mathbf{j} = \\ &= \mathbf{i}(p_{32} - p_{23}) + \mathbf{j}(p_{13} - p_{31}) + \mathbf{k}(p_{21} - p_{12}), \end{aligned}$$

учитывая, что  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$ . Таким образом, из (2.7) получаем

$$\int_w \mathbf{r} \times \left[ \frac{d\mathbf{V}}{dt} - \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial z} \right) \right] \rho dW = \int_w \left\{ p_{32} - p_{23} \right\} \mathbf{i} + \left\{ p_{13} - p_{31} \right\} \mathbf{j} + \left\{ p_{21} - p_{12} \right\} \mathbf{k} dW$$

или, в силу (2.4), уравнение момента количества движения в дифференциальной форме

$$\mathbf{i}(p_{32} - p_{23}) + \mathbf{j}(p_{13} - p_{31}) + \mathbf{k}(p_{21} - p_{12}) = 0. \quad (2.8)$$

Т.е. уравнение момента количества движения в классическом случае сводится к условию симметричности тензора напряжений

$$p_{32} = p_{23}, p_{13} = p_{31}, p_{21} = p_{12}.$$

Однако, несмотря на три дополнительных уравнения (являющиеся следствием закона сохранения момента количества движения), полученная система уравнений движения сплошной среды остается незамкнутой. Дополнительные соотношения могут дать модели конкретной среды, рассматриваемые в 2.3.

### 2.3. Виды сплошной среды

Раздел механики, посвященный построению моделей сплошной среды, называется реологией. Она основывается на экспериментальном изучении свойств сред и, как нетрудно видеть из перечня неизвестных в п.2.2, имеет целью определить дополнительные соотношения для компонент тензора внутренних напряжений  $P$ .

Экспериментальные данные показывают, что большинство сред обладает специфическим свойством: отсутствием или малостью касательных напряжений  $\mathbf{p}_{S\tau}$ , т.е. вектор  $\mathbf{p}_S$  можно считать перпендикулярным любой площадке взаимодействия  $d\mathbf{S}$  и совпадающим с нормальным напряжением  $\mathbf{p}_{Sn}$  (рис. 8). Среду, обладающую таким свойством, называют *идеальной жидкостью* или *идеальным газом*.

Указанное свойство для любой площадки с нормалью  $\mathbf{n}$  можно выразить соотношением, вытекающим из (2.1)

$$\mathbf{p}_S \mathbf{n} = p_1 \mathbf{i} = p_2 \mathbf{j} = p_3 \mathbf{k} = -p,$$

где  $-p$  – общее значение скалярных произведений. Величину  $p$  называют давлением. Его особенность заключается в независимости от рассматриваемого направления взаимодействия частиц (следствием этого является закон Паскаля). При  $p > 0$  среда, как показывает опыт, находится в сжатом состоянии, поэтому и использован знак минус. Таким образом, матрица компонент тензора внутренних напряжений в идеальной жидкости (газе) имеет вид

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

и целиком определяется скаляром  $p$ .

Понятно, что идеальная жидкость не единственно возможная модель сплошной среды, позволяющая определить компоненты тензора внутренних напряжений. Можно, например, рассматривать компоненты тензора внутренних напряжений как функции компонент тензора деформации

$$p_{ij} = f(\varepsilon_{\mu\nu}). \quad (2.10)$$

Такая среда в общем случае называется *упругой (упруго-пластической)*. В частном случае линейности  $f$  (без свободных членов) это соотношение приобретает вид обобщенного закона Гука

$$p_{ij} = \sum_{\mu} \sum_{\nu} A_{ij\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Изучением таких сред, которые описываются компонентами тензора  $A_{ij\mu\nu}$ , занимается *теория упругости и пластичности*.

Особое место в механике сплошной среды занимает модель *вязкой жидкости (вязкого газа)*, предполагающая связь тензора внутренних напряжений с тензором скоростей деформации

$$p_{ij} = f(e_{\mu\nu}). \quad (2.12)$$

В частном случае линейности связь представляется в виде *закона Навье-Стокса* (или обобщенного закона вязкости Ньютона)

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\sum_{\mu} \sum_{\nu} B_{ij\mu\nu} e_{\mu\nu} =$$

$$= -p\delta_{ij} + 2\sum_{\mu} \sum_{\nu} B_{ij\mu\nu} \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

где  $\delta_{ij}$  – элементы единичной матрицы (с единицами на главной диагонали и нулями на всех остальных местах), а тензорный коэффициент линейности  $B_{ij\mu\nu}$ , содержащий 81 компоненту, описывает свойства вязкой жидкости.

Тесно связаны с тензорами  $A_{ij\mu\nu}$  и  $B_{ij\mu\nu}$  понятия изотропии и анизотропии. Если свойства среды в разных направлениях одинаковы, то она называется *изотропной*, в противном случае – *анизотропной*. В изотропной среде указанные тензоры симметричны и не зависят от выбора системы координат. Можно показать [1], что в этом случае все компоненты тензоров  $A_{ij\mu\nu}$  и  $B_{ij\mu\nu}$  выражаются всего лишь через два независимых параметра ( $\lambda_1$  и  $\mu_1$  для  $A_{ij\mu\nu}$  и  $\lambda$  и  $\mu$  для  $B_{ij\mu\nu}$ ), называемых *коэффициентами Ламе*.

В итоге закон Гука для изотропной упругой среды приобретет вид

$$p_{ij} = \lambda_1 (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \delta_{ij} + 2\mu_1 \sum_{\mu} \sum_{\nu} \delta_{i\mu} \delta_{j\nu} \epsilon_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

а закон Навье-Стокса для вязкой изотропной жидкости (газа)

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{V} + 2\mu \sum_{\mu} \sum_{\nu} \delta_{i\mu} \delta_{j\nu} e_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

В теории упругости принято рассматривать следующие характеристики материалов, связанные с коэффициентами Ламе:

*модуль Юнга* 
$$E = \mu_1 \frac{3\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1},$$

характеризующий сопротивление материала сжатию или растяжению,

и *коэффициент Пуассона* 
$$\sigma = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 + \mu_1)},$$

показывающий во сколько раз уменьшается поперечное сечение образца из данного материала при его растяжении. Размерность  $\lambda_1$  и  $\mu_1$  в СИ –  $[Н/м^2]$ .

В теории вязкой жидкости (вязкого газа)  $\mu$  называется *коэффициентом внутреннего трения* или *динамическим коэффициентом вязкости*. Последнее слагаемое в правой части (2.15) задает компоненты тензора вязких напряжений  $\tau_{ij}$ , т.е. силы внутреннего трения (касательного напряжения, вязкости, рис. 8 в

п.2.1). Используются также такие характеристики среды, как  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  – *кинематический коэффициент вязкости* (*коэффициент линейной вязкости*) и

$\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  – второй коэффициент вязкости (коэффициент объемной вязкости). Размерность  $\mu$ ,  $\lambda$  и  $\zeta$  в СИ –  $[\text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2]$ , а  $\nu$  –  $[\text{м}^2/\text{с}]$ .

Нетрудно видеть, что упомянутые модели для идеальной и вязкой среды вводят еще одну неизвестную, которой не было в уравнениях движения – давление  $p$ . Т.е. для замыкания системы уравнений движения жидкости и газа оказывается необходимым еще одно скалярное соотношение. В этом качестве чаще всего применяются уравнения, представляющие различные гипотезы связи плотности с давлением

$$\rho = \Phi(p). \quad (2.16)$$

Жидкость и газ в этом случае называются *баротропными*. Заметим, что в теории упругости и пластичности нет места для давления, распространяющегося во всей толще среды, поэтому система уравнений движения (деформации) твердого тела не требует для своего замыкания уравнения баротропии.

Некоторые виды баротропии перечислены ниже.

1.  $\Phi(p) = \text{const}$  – случай *несжимаемой жидкости* или  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ .

2.  $\Phi(p) = Cp$ , где  $C$  – постоянная, – случай *изотермического* процесса.

3.  $\Phi(p) = Cp^{1/n}$ , где  $C$  и  $n$  – постоянные, – случай *политропного* процесса,  $n$  называется *показателем политропы*.

4.  $\Phi(p) = \frac{p\mu}{RT}$  – уравнение Клапейрона-Менделеева для *совершенного газа*,

где  $R = 8,31432 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль} \cdot \text{град}}$  – *универсальная газовая постоянная*;

$\mu \left[ \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}} \right]$  – масса вещества в кг, численно равная молекулярному весу;  $T$  – аб-

солютная температура, которую необходимо задавать еще одним дополнительным соотношением. Для воздуха молекулярный вес принимается равным 28,95

и *удельная газовая постоянная*  $V = \frac{R}{\mu} = 287,05 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$ , тогда уравнение баро-

тропы можно записать в виде  $\Phi(p) = \frac{p}{VT}$ .

Сплошной средой, в которой температура не одинакова и может изменяться, занимается *термодинамика*, которую тоже можно рассматривать как часть механики сплошной среды. При таком подходе наиболее общее описание механики и термодинамики сплошной среды будет содержать следующие уравнения, записываемые в зависимости от рассматриваемой задачи в интегральной или в дифференциальной форме (как, например, уравнение количества движения конечного объема сплошной среды (2.3) или дифференциальное уравнение движения сплошной среды (2.4) соответственно):

- уравнение неразрывности (закон сохранения массы);
- уравнение импульсов (закон сохранения количества движения);
- уравнение закона сохранения моментов количества движения;
- уравнение закона сохранения энергии;
- уравнение энтропии (второй закон термодинамики).

### 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Исторически так сложилось, что теория, описывающая движение жидкости и газа, развивалась как одна наука, а теория, описывающая состояние деформированного твердого тела, как другая. Это можно понять, так как особенность газов и жидкостей заключается в том, что отдельные их частицы движутся не только относительно друг друга, но и все вместе, и именно описание их перемещения (1.3) является целью теории. Поэтому в дальнейшем мы не будем делать принципиального различия между жидкостью и газом, используя и то и другое понятие. Целью же теории упругости и пластичности является определение взаимного смещения частиц друг относительно друга – деформации (1.3) твердого тела, а скорость перемещения не играет существенной роли.

#### 3.1. Уравнения Навье-Стокса

Рассмотрим наиболее общий случай жидких и газообразных тел, встречающихся на Земле, **изотропную вязкую сжимаемую жидкость**. Для описания ее движения выразим компоненты тензора внутренних напряжений  $p_{ij}$  в основном дифференциальном уравнении движения сплошной среды (2.5) с помощью соответствующей модели (2.15). Так, последние слагаемые в уравнении по оси  $x$  примут вид:

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{V}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial e_{11}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial e_{12}}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial e_{13}}{\partial z}.$$

Подставляя сюда выражения компонент тензора скоростей деформации из (1.6), получим с использованием оператора Лапласа (1.26) выражение:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{V}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{V}}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{V}}{\partial x} + \mu \Delta V_x + \mu \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{V}}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{V}}{\partial x} + \mu \Delta V_x. \end{aligned}$$

В итоге, после деления на  $\rho$  и раскрытия полной производной по времени (1.16), получаем из (2.5) систему *дифференциальных уравнений движения изотропной вязкой сжимаемой жидкости*:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{V}}{\partial x} + \nu \Delta V_x \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{V}}{\partial y} + \nu \Delta V_y \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{V}}{\partial z} + \nu \Delta V_z \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

или в векторном виде:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad (3.2)$$

называемых *уравнениями Навье-Стокса*.

Эти уравнения вместе с уравнением неразрывности (1.21) составляют принципиально разрешимую относительно  $\mathbf{V}$  и  $p$  систему уравнений, если заданы  $\mathbf{F}$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  и  $\lambda$ . Однако ее решение в аналитическом виде для произвольного случая невозможно. Численное решение для обтекания реального крыла самолета было впервые получено только в конце 60-х годов XX века, благодаря появлению мощных вычислительных машин. Но и до сих пор такое решение представляет собой сложную задачу вычислительной математики.

Поскольку уравнения (3.1), (3.2) описывают движение классической жидкости и газа в случае наиболее общей их модели, то их исследование позволяет построить практически всю гидрогазодинамику (гидродинамику, аэродинамику, газодинамику).

### 3.2. Уравнения движения вязкой несжимаемой изотропной среды

Поскольку большинство известных жидкостей (не газов) являются практически **несжимаемыми**, постольку описание их движения представляет особый интерес. Из уравнений Навье-Стокса (3.1) или (3.2) легко получить *уравнения движения вязкой несжимаемой изотропной жидкости*. Для этого достаточно использовать уравнение неразрывности в форме уравнения несжимаемости (1.23):  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ , благодаря чему выпадает предпоследнее слагаемое, содержащее  $\lambda$ :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad (3.3)$$

или в координатной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta V_x, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta V_y, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta V_z. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Модель вязкой несжимаемой жидкости можно представить в виде:

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \sum_{\mu} \sum_{\nu} \delta_{i\mu} \delta_{j\nu} e_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

вытекающем из закона Навье-Стокса (2.15) в силу (1.23), т.е. для несжимаемой жидкости понятие второго коэффициента вязкости теряет смысл. Но зато открывается смысл именно второго коэффициента вязкости  $\zeta$  – коэффициента объемной вязкости – сопротивление изменению объема.

### 3.3. Уравнения движения идеальной среды

Из сравнения выражений (2.9) и (2.13) следует, что идеальная жидкость и газ характеризуются как **невязкие**. Это же вытекает и из физической сущности вектора внутренних напряжений  $\mathbf{p}_s$  при отсутствии касательных составляющих напряжения (см. 2.1). Приведенные рассуждения позволяют очень просто получить уравнения движения идеальной жидкости из уравнений Навье-Стокса – достаточно опустить в них слагаемые с коэффициентами вязкости  $\mu$  и  $\lambda$ :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p, \quad (3.6)$$

или в координатной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Эти уравнения называются *уравнениями Эйлера*.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в справедливости равенства:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}V^2 - \mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{V},$$

что позволяет записать *уравнения Эйлера в форме Громеки-Лемба*:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}V^2 - \mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p. \quad (3.8)$$

Составим *полную систему уравнений движения идеальной жидкости в случае ее несжимаемости*. В нее войдут уравнения Эйлера, и уравнение неразрывности. Однако уравнение неразрывности для случая несжимаемости (постоянства  $\rho$ ) распадается на два независимых уравнения: (1.23) и  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ . Таким

образом для определения полей вектора скорости  $\mathbf{V}(x, y, z, t)$  и давления  $p(x, y, z, t)$  при заданных полях вектора внешних сил  $\mathbf{F}(x, y, z, t)$  и независимой от времени плотности  $\rho(x, y, z)$  служит замкнутая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \\ \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0, \\ \frac{d\rho}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Заметим, что последнее уравнение служит лишь для того, чтобы задать независимость плотности от времени.

Если жидкость однородна, т.е. плотность одинакова не только во времени, но и в разных точках пространства:  $\rho = \text{const}$ , то замкнутая полная *система уравнений движения идеальной однородной несжимаемой жидкости* состоит из двух первых уравнений (3.9).

Однако даже для однородной идеальной несжимаемой жидкости в общем случае аналитическое решение полной системы уравнений по-прежнему невозможно. Только введение дополнительных предположений позволит получить аналитическое решение, которое можно будет физически интерпретировать.

### 3.4. Интеграл Бернулли

Рассмотрим такие предположения для идеальной жидкости. Наличие в уравнении Эйлера в форме Громеки-Лемба нескольких операторов **grad** наталкивает на мысль о возможности внесения под него и других членов при определенных условиях.

**Случай А. Установившееся движение идеальной жидкости в поле потенциальных внешних сил.**

**Предположение 1.** Движение установившееся:  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0$ .

**Предположение 2.** Внешние массовые силы допускают *потенциал*  $U$ , т.е.  $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$ .

При этих предположениях рассмотрим проекцию уравнения Эйлера в форме Громеки-Лемба на произвольную линию  $L$  с текущим направлением  $l$ :

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} - \frac{\partial U}{\partial l} = \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_l.$$

**Вдоль линии  $L$**  можно ввести *функцию давления*

$$P_{\mathbf{V}, L} \stackrel{\rhd}{=} \int \frac{dp}{\rho_{\mathbf{V}, L} \cdot} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial P}{\partial l},$$

определенную только на данной линии, тогда предыдущее уравнение приобретает удобный для анализа вид:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[ \frac{\mathbf{V}^2}{2} + P_{\mathbf{V}, L} \cdot - U \right] = \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_l.$$

Правая часть этого уравнения безусловно обращается в нуль, если линия  $L$  в каждой своей точке имеет направление  $\mathbf{l}$ , совпадающее с  $\mathbf{V}$  или  $\text{rot } \mathbf{V}$ . Такими линиями служат: в первом случае линии тока, совпадающие при установившемся движении с траекториями частиц (см. 1.4), а во втором случае вихревые линии. Этот факт позволяет получить *первый интеграл* уравнений **установившегося движения идеальной жидкости в поле потенциальных внешних сил вдоль линии тока или вихревой линии**:

$$\frac{V^2}{2} + P(\Phi, L) - U = \text{const}(\mathcal{C}), \quad (3.10)$$

называемый *интегралом Бернулли*.

Постоянную в правой части уравнения (3.10) достаточно определить в одной точке линии тока (или вихревой линии) по значению левой части. Если кроме этого на выбранной линии (тока или вихревой) известна функция давления  $P(p)$ , то по скорости и внешним силам можно однозначно определить давление в любой точке этой линии. Интеграл Бернулли имеет фундаментальное значение в теории идеальной жидкости и идеального газа, является основным уравнением в гидравлике и пневматике, поэтому иногда называется *законом Бернулли*.

Заметим, что в частном случае **потенциального (безвихревого)** движения  $\mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V} = 0$  **во всей области** потенциальности, и интеграл Бернулли справедлив для всей этой области, а не только вдоль линий тока или вихревых линий, и называется *интегралом Бернулли-Эйлера*.

В другом частном случае – **несжимаемой** жидкости интеграл Бернулли или интеграл Бернулли-Эйлера принимает вид:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} + U - \frac{V^2}{2}, \quad (3.11)$$

а еще и **при отсутствии внешних массовых сил**:

$$\text{const} \equiv p_0 = p + \frac{\rho V^2}{2}. \quad (3.12)$$

Немаловажное прикладное значение имеет вид интеграла Бернулли и в других частных случаях баротропной жидкости (см. 2.3). Так, для **изотермического** течения газа, при котором  $\rho = \Phi(p) = C p$  и внешними массовыми силами можно пренебречь, функция давления  $P(\Phi, L) \equiv \int \frac{dp}{\rho(\Phi, L)} = \frac{1}{C} \ln p$  и интеграл Бернулли приобретает вид:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{1}{C} \ln p = \text{const}(\mathcal{C}).$$

Для **политропного** течения газа  $\rho = \Phi(p) = C p^{1/n}$  нетрудно получить  $P(\Phi, L) \equiv \int \frac{dp}{\rho(\Phi, L)} = \frac{n}{n-1} \frac{p}{\rho}$ . Тогда в отсутствии внешних массовых сил можно записать интеграл Бернулли в виде:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{n}{n-1} \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (3.12)$$

В случае отсутствия притока тепла извне течение называется *адиабатическим*, показатель политропы для совершенного газа вырождается в *показатель адиабаты*  $\gamma$ , а интеграл Бернулли для **адиабатического течения сжимаемого совершенного газа** в отсутствии внешних массовых сил принимает вид:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (3.13)$$

Уравнения (3.12) и (3.13) обычно (в прикладных науках: гидравлике и аэродинамике) называются *уравнениями Бернулли*, соответственно, для несжимаемой и сжимаемой сред.

Случай Б. **Потенциальное движение идеальной баротропной жидкости.**

**Предположение 1.** Движение потенциальное, тогда  $\text{rot} \mathbf{V} = 0$  и можно ввести потенциал скоростей  $\phi$  так, что  $\mathbf{V} = \text{grad} \phi$  (см. 1.6).

**Предположение 2.** Жидкость баротропная, тогда  $\rho = \Phi(p)$  (см. 2.3) и можно ввести *потенциал давления* для всего пространства, занятого жидкостью:

$$P \phi = \int \frac{dp}{\rho}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} P.$$

При этих предположениях уравнение Эйлера в форме Громеки-Лемба приобретает вид

$$\text{grad} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + P \right) = \mathbf{F},$$

позволяющий сделать два вывода:

а) так как в левой части этого уравнения находится градиент некоторой потенциальной функции, то в правой части должно быть так же, т.е. массовые силы должны обладать *потенциалом*  $U$ , так что  $\mathbf{F} = \text{grad} U$  (т.е. для потенциального движения идеальной жидкости условия потенциальности внешних сил и условие баротропности среды эквивалентны);

б) учитывая предыдущий вывод и перенеся все слагаемые в левую часть уравнения, можно утверждать, что существует некоторая потенциальная функция – **первый интеграл** дифференциального уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + P - U = f(t), \quad (3.14)$$

где  $f(t)$  – некоторая произвольная функция времени. Это выражение выполняется **во всех точках** области **потенциального движения идеальной баротропной жидкости** и называется *интегралом Коши-Лагранжа*.

Неизвестную функцию  $f(t)$  можно найти по изменению значения левой части (3.14) в какой-то одной точке пространства. Так, в частности, можно найти распределение давления по поверхности тела в жидкости по известным потенциалам  $\phi$  и  $U$ .

В частном случае **установившегося потенциального** движения идеальной баротропной жидкости интеграл Коши-Лагранжа приобретает вид:

$$\frac{V^2}{2} + P - U = \text{const}$$

– интеграла Бернулли-Эйлера, в котором const одна для **всей массы баротропной жидкости**, в которой потенциал давления зависит только от давления.

Рассмотрим интеграл Бернулли для **несжимаемой жидкости в поле силы тяжести**, действующей по оси  $z$ , ( $U = gz$ ):

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{V_A^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} + gz_A, \quad (3.15)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести, правая часть вычислена для определенной точки  $A$  выбранной линии тока, а левая – для произвольной ее точки. Разрешив это уравнение относительно давления в точке на линии тока:

$$p = p_A + \rho g(z_A - z) + \frac{\rho V_A^2}{2} - \frac{\rho V^2}{2}, \quad (3.16)$$

можно заметить, что оно распадается на две части различной физической природы. Выражение  $p_A + \rho g(z_A - z)$  не зависит от движения и определяется лишь глубиной погружения точки относительно исходной – оно называется *гидростатическим (аэростатическим) давлением*. Напротив, выражение  $\frac{\rho V_A^2}{2} - \frac{\rho V^2}{2}$  определяется только скоростью и называется *динамическим давлением*.

Предположим, что линия тока расположена в горизонтальной плоскости ( $z = z_A$ ) или сила тяжести пренебрежимо мала. Тогда второе слагаемое в правой части выражения для давления пропадает и в критической точке линии тока (где  $V = 0$ , см. 1.4)

$$p \equiv p_0 = p_1 + \frac{\rho V_A^2}{2}$$

давление максимально, его называют *полным давлением* и обозначают  $p_0$ . В любой другой точке линии тока давление будет меньше полного на величину  $\frac{\rho V^2}{2}$ , называемую *скоростным напором*. Разность между полным давлением и скоростным напором называется *статическим давлением* или просто *давлением*, оно и обозначалось через  $p$ .

Проведенный анализ интеграла Бернулли позволяет построить некоторые практические приложения, как для жидкости, так и для газа.

*Трубка Пито-Прандтля* (рис. 11) представляет собой

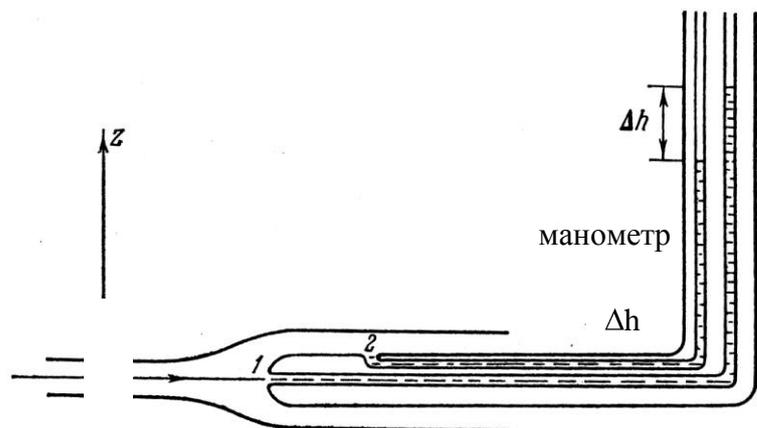


Рис. 11.

тонкий прибор, состоящий из двух трубок, соединенных с манометром. Другой конец 1 одной из трубок вводится в поток прямо навстречу ему – в этой точке скорость равна нулю, а давление – полному. Отверстие 2 другой трубки расположено в боковой части прибора так, чтобы потока жидкости в него не было, и линии тока проходили бы мимо него, не искажаясь. В этой точке скорость течения и статическое давление с небольшой погрешностью, вносимой присутствием трубки, соответствуют скорости и давлению в этой точке течения в отсутствии прибора. Таким образом, манометр покажет разность между полным и статическим давлением, т.е. величину скоростного напора. Если известна плотность жидкости, то можно вычислить скорость потока. Трубка Пито-Прандтля под названием *приемника воздушного давления* получила широкое применение в авиации для измерения скорости полета.

При безотрывном течении несжимаемой жидкости по горизонтальной (в поле сил тяжести) трубке переменного сечения можно применить интеграл Бернулли для  $z = z_A$  в виде:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const.}$$

В силу несжимаемости и неразрывности объемный расход жидкости через каждое сечение, в котором скорость можно считать постоянной, неизменен:  $VS = \text{const.}$  Таким образом, в минимальном сечении трубки скорость максимальна, а давление минимально. Этот эффект используется в *струйных насосах* (рис. 12), когда в минимальном сечении  $S_{\min}$  трубки I создается давление меньшее, чем давление в опустошаемом сосуде II.

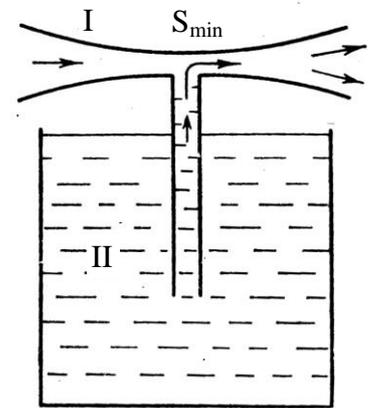


Рис. 12.

### 3.5. Взаимодействие жидкостей и газов с обтекаемыми телами

Основная задача теории жидкости и газа – определение их механического взаимодействия с соприкасающимися телами. Для выявления общих свойств такого взаимодействия рассмотрим **установившееся поступательное** движение произвольной сплошной среды. Выберем некоторый объем  $W$  таким образом, чтобы в нем сохранялось общее количество массы жидкости. Для этого достаточно ограничить его поверхностью  $S$ , состоящей из боковой поверхности трубки тока  $\Sigma_0$ , ее торцевых поверхностей на входе  $S_1$  и выходе  $S_2$  и поверхности  $\Sigma_1$  обтекаемого тела, расположенного внутри трубки тока (рис. 13).

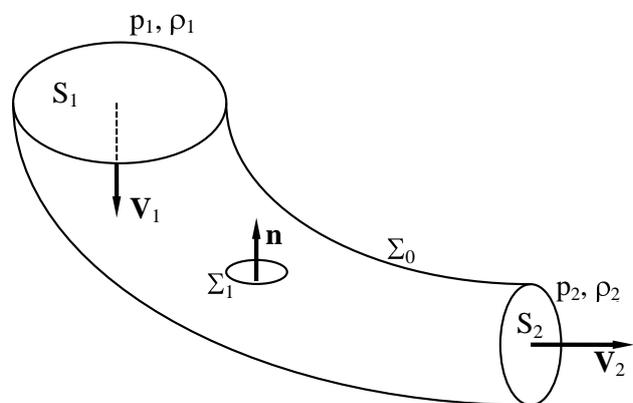


Рис. 13.

В этом случае справедливы уравнение неразрывности (1.22) и уравнение количества движения конечного объема сплошной среды (2.3).

В силу стационарности движения уравнение неразрывности, проинтегрированное по поверхности  $S$ , даст уравнение сохранения массы в виде условия равенства входящей в трубку тока жидкости и выходящей из нее:

$$\int_S \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \rho V_n dS = \int_{S_1} \rho V_n dS + \int_{S_2} \rho V_n dS = 0, \quad (3.17)$$

в котором учтено условие ( $V_n = 0$ ) непротекания жидкости через боковую поверхность трубки тока  $\Sigma_0$  и поверхность тела  $\Sigma_1$ .

Преобразуем левую часть уравнения (1.22) с помощью первого из равенств (1.17) и теоремы Остроградского-Гаусса (1.15) с учетом движения:

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \mathbf{V} dW = \int_W \operatorname{div} \rho \mathbf{V} \mathbf{V} dW = \int_S \rho \mathbf{V} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \rho \mathbf{V} V_n dS,$$

тогда уравнение количества движения примет вид:

$$\int_S \rho \mathbf{V} V_n dS = \int_W \mathbf{F} \rho dW + \int_S \mathbf{p}_s dS.$$

Обозначим в этом уравнении часть последнего интеграла через  $-\mathbf{R}_0$ :

$$-\mathbf{R}_0 = \int_{\Sigma_0 + \Sigma_1} \mathbf{p}_s dS,$$

что представляет собой главный вектор поверхностных сил, действующих на жидкость со стороны тела и боковых границ трубки тока. Соответственно  $\mathbf{R}_0$  — главный вектор поверхностных сил, действующих на тело и боковые границы трубки тока со стороны жидкости или газа.

Введем несколько предположений, упрощающих дальнейшие рассуждения.

1. **Внешних массовых сил нет.** Тогда из условия непротекания жидкости через  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_1$  следует:

$$\mathbf{R}_0 = - \int_{S_1} \rho \mathbf{V} V_n dS - \int_{S_2} \rho \mathbf{V} V_n dS + \int_{S_1 + S_2} \mathbf{p}_s dS. \quad (3.18)$$

2. Жидкость **идеальна**. Тогда в сечениях  $S_1$  и  $S_2$  напряжения  $\mathbf{p}_s$  сводятся к давлениям  $-p_1$  и  $-p_2$ .

3. Жидкость **несжимаемая**. Тогда в сечениях  $S_1$  и  $S_2$ , плотность  $\rho_1 = \rho_2$ , и справедлив интеграл Бернулли в виде (3.12).

4. Поверхности  $S_1$  и  $S_2$  расположены настолько далеко от обтекаемого тела, что **первоначально однородный поступательный поток на  $S_1$  выравнивается** на  $S_2$  и на них плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , давления  $p_1$  и  $p_2$  и модули скорости  $V_1$  и  $V_2$  постоянны, а скорости нормальны к ним. Тогда из (3.17) и (3.18) с учетом направления внешних нормалей следует:

$$\rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2, \\ |\mathbf{R}_0| = \left( \rho_1 + \rho_1 V_1^2 \right) \vec{S}_1 - \left( \rho_2 + \rho_2 V_2^2 \right) \vec{S}_2,$$

а в интеграле Бернулли (2.25) можно использовать одну и ту же постоянную  $p_0$  для **всех** линий тока:

$$p = p_0 - \frac{\rho V^2}{2}.$$

5. Поверхности  $S_1 = S_2$ , т.е. за телом **в жидкости нет полостей**, распространяющихся в бесконечность. Тогда из предыдущих соотношений следует:  $\rho V_1 = \rho V_2$ ,  $V_1 = V_2$ ,  $p_1 = p_2$  и, следовательно,  $\mathbf{R}_0 = 0$ .

Устремим поперечный размер трубки тока к бесконечности. Если других обтекаемых тел нет, то на бесконечном удалении от обтекаемого тела поток невозмущен и его линии тока представляют собой прямые линии. Поэтому форма боковой поверхности  $\Sigma_0$  стремится к цилиндрической. Но тогда часть силы  $\mathbf{R}_0$ , действующая на  $\Sigma_0$ , направлена перпендикулярно образующим трубки тока и, следовательно, скорости течения жидкости. Так как вся  $\mathbf{R}_0 = 0$ , то и другая часть силы  $\mathbf{R}_0$ , **действующая на обтекаемое тело**, должна быть **перпендикулярна скорости**. Таким образом, в продольном направлении сила воздействия потока на тело равна нулю, т.е. **сопротивление равно нулю**.

Этот вывод, противоречащий человеческому опыту, называется *парадоксом Даламбера-Эйлера*. Причина его во введенных предположениях, каждое из которых в реальных средах невыполнимо. Этот пример ярко показывает, что с предположениями, упрощающими постановку задачи, необходимо обращаться очень осторожно.

В реальных средах сопротивление движению тела всегда существует. Главный вектор воздействия среды на тело:

$$\mathbf{R} = - \int_{\Sigma_1} \mathbf{p}_s dS \quad (3.19)$$

всегда ненулевой и направлен, в общем случае, под углом к скорости в противоположную движению сторону. Только в случае строго симметричного обтекания симметричного тела этот вектор прямо противоположен вектору скорости. Поэтому парадокс Даламбера-Эйлера для шара вообще отрицает наличие какой бы то ни было силы взаимодействия со средой.

### 3.6. Постановка задач в теории жидкости и газа

Таким образом, необходимо уметь вычислять главный вектор (а также главный момент) воздействия среды на тело. Формула (3.19) дает возможность вычислить главный вектор по известному распределению поверхностных сил. В свою очередь, распределение поверхностных сил может быть найдено в результате решения основного уравнения движения сплошной среды (2.4) или (2.5) совместно с уравнением неразрывности (1.21) – для непрерывного обтекания. Рассмотрим подробнее, какие дополнительные соотношения и условия необходимо использовать для возможности решения этих дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Одним из аргументов производных в этих уравнениях является время. Поэтому необходимо задать *начальные условия*: значения всех параметров среды в

начальный момент, от которого можно производить отсчет времени. Начальные условия имеют вид функций, заданных во всех точках описываемой области.

Наличие производных по пространственным координатам требует знания *граничных условий*: значения всех параметров среды на ее границе (на стенках сосуда, на свободной поверхности, на поверхности обтекаемых тел). Корректность задания граничных условий определяется математическими требованиями [4] и здесь не рассматривается. В случае неустановившегося движения граничные условия имеют вид функций не только от координат граничных точек, но и от времени.

В качестве граничных условий в зависимости от постановки конкретной задачи могут быть использованы следующие:

– *условия прилипания*:

$$\mathbf{V}_{\text{среды}} = \mathbf{V}_{\text{границы}}, \quad (3.20)$$

которые постулируют равенство векторов скоростей движения границ среды (свободных поверхностей и поверхностей тел) и частиц среды, попавших на них;

– *условия непроникания*:

$$\mathbf{V}_{\text{n среды}} = \mathbf{V}_{\text{n границы}}, \quad (3.21)$$

которые постулируют отсутствие движения частиц среды через границу, например, твердого тела, при этом движение вдоль поверхности (для идеальной жидкости) может присутствовать;

– *условия на свободной поверхности* в общем случае задаются в виде распределения поверхностных сил:

$$\mathbf{p}_s = \mathbf{f}(x, y, z, t)|_{\text{границы}},$$

имеющих как нормальные, так и касательные составляющие; в некоторых случаях (например, для идеальных жидкостей) эти условия сводятся к простейшему условию, наложенному на давление:  $p = p_0$ .

Особой разновидностью граничных условий являются *условия в бесконечности*, если среда простирается до бесконечности. Чаще всего в роли таких условий выступают нулевые (или заданные) значения скорости и заданное значение давления, как пределы соответствующих характеристик среды.

Если система уравнений (2.4), (1.21) замкнута с помощью одной из моделей сплошной среды (см. 2.3), то начальных и корректных граничных условий достаточно для математической постановки задачи динамики жидкости и газа. Т.е. такая задача в принципе разрешима. Но даже для современных компьютеров она требует разработки весьма сложных методов вычислительной математики. Поэтому большое значение имеют упрощения постановки задач, основанные на особенностях рассматриваемых движений, позволяющих уменьшить количество неизвестных.

*Установившееся движение* (см. 1.4) позволяет исключить зависимость параметров движения от времени и отказаться от начальных условий.

*Плоскопараллельным движением* называется такое движение, в котором можно ввести систему декартовых координат, одна из которых оказывается не-

существенной. Обычно в таком случае существенные координаты обозначают  $x$  и  $y$ . Картину такого движения можно изобразить на плоскости, что очень важно для понимания сути многих процессов в теории жидкости и газа.

Если движение можно описать с помощью цилиндрической системы координат, в которой полярный угол несущественен, то оно носит название *осесимметрического движения*.

В некоторых задачах существенной остается только одна координата, в общем случае криволинейная. Такое движение называется *одномерным*. Если такое движение еще и установившееся, то единственная производная становится обыкновенной, что существенно облегчает решение.

*Автомодельным движением* называется такое движение, которое может быть описано тремя существенными независимыми аргументами:

$$\frac{x}{t^\alpha}, \frac{y}{t^\alpha}, \frac{z}{t^\alpha},$$

вместо четырех координат  $x, y, z, t$ , здесь  $\alpha$  – некоторая постоянная. Автомодельные одномерные неустановившиеся движения позволяют обойтись одной независимой переменной вида  $\xi = x/t^\alpha$  и использовать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Уравнения механики сплошной среды являются нелинейными дифференциальными уравнениями. С одной стороны, нелинейность привносит в решение задач значительные математические трудности. С другой стороны, она связана с особыми физическими эффектами. Однако ряд задач можно поставить таким образом, чтобы они решались как линейные. В некоторых случаях это позволяет на основе теории линейных дифференциальных уравнений получить даже аналитическое решение.

Для упрощения задач в этом направлении применяются два приема: принцип малых возмущений и линеаризация. *Принцип малых возмущений* предполагает возможность рассматривать движение, как состоящее из двух (а иногда и более) налагаемых друг на друга движений. Например, малые отклонения от установившегося поступательного движения или малые возмущения в покоящейся среде. В общем случае для этого достаточно, чтобы на определенной стадии можно было бы записать параметры общего движения в виде суммы:  $s = s_0 + s_\varepsilon$  **известной** функции  $s_0$  и искомого **мало** добавка  $s_\varepsilon$ . Подстановка такой суммы в уравнения движения или в граничные условия позволяет произвести *линеаризацию* – пренебрежение членами более высокого порядка малости, чем первый. Получающиеся в результате такой процедуры линейные задачи обладают замечательным свойством: их частные решения можно суммировать. Таким образом, используется *принцип суперпозиции* линейных решений. В некоторых задачах можно проводить линеаризацию и суперпозицию в несколько последовательных приемов, отыскивая на каждом из них добавки (уточнения) все более высокого порядка.

Но наиболее мощным методом теоретических и экспериментальных исследований в механике сплошной среды является *теория подобия*. Основу ее со-

ставляет *П-теорема* (по названию греческой буквы "пи"). Она утверждает, что всякое физическое явление может быть описано определенным числом безразмерных степенных комплексов (*критериев подобия*) вида:

$$u_1^{m_1} \cdot u_2^{m_2} \cdot \dots \cdot u_n^{m_n} = C,$$

составленных из характерных размерных параметров  $u_i$  этого явления. Здесь  $m_i$  и  $C$  – безразмерные числа. Показатели степеней могут быть определены решением системы линейных алгебраических уравнений, исходя из соотношения размерностей, а  $C$  – из эксперимента. Таким образом, можно определить значения критериев подобия, характеризующих особенности течения среды, которые необходимо сохранять при построении подобных моделей исследуемых явлений. Иначе говоря, теория размерности позволяет построить дополнительные соотношения между параметрами изучаемого явления, которые могут помочь замкнуть систему уравнений или заменить некоторые из уравнений более простыми.

Из основных физических параметров движения сплошной среды можно составить следующие критерии подобия.

*Число Маха:*

$$M = \frac{V}{a}, \quad (3.22)$$

характеризующее сжимаемость газа – чем больше  $M$ , тем сильнее проявляется сжимаемость.

*Число Рейнольдса:*

$$Re = \frac{\rho V l}{\mu} = \frac{V l}{\nu}, \quad (3.23)$$

где  $l$  – характерный линейный размер задачи, учитывает влияние вязкости среды – чем больше  $Re$ , тем слабее эффекты вязкости и тем ближе среда к идеальной.

*Число Струхаля:*

$$Sh = \frac{V t}{l}, \quad (3.24)$$

где  $t$  – характерный интервал времени в задаче, является оценкой нестационарности явления.

*Число Фруда:*

$$Fr = \frac{V^2}{lg}, \quad (3.25)$$

характеризующее влияние силы тяжести.

*Число Эйлера:*

$$Eu = \frac{p}{\rho V^2}, \quad (3.26)$$

характеризующее влияние давления.

*Число Ньютона:*

$$Ne = \frac{F}{\rho V^2 l^2}, \quad (3.27)$$

характеризующее влияние внешних сил.

Для некоторых задач может выявиться существенность и других критериев подобия. Однако и этот перечень достаточно велик. Если учесть, что в экспериментах стремятся сохранить еще и геометрическое подобие по трем координатам, то становится ясно, что выдержать все критерии одновременно практически невозможно. Поэтому эксперименты никогда не носят единичный характер, а строятся с сохранением различного набора критериев подобия.

### 3.7. Понятие о методах решения задач теории жидкости и газа

⇒ Многие фундаментальные выводы в теории жидкости и газа позволяет получить *теория функций комплексного переменного* [4]. Ее применение рассмотрим на примере изучения **плоского установившегося безвихревого (потенциального) движения несжимаемой однородной жидкости.**

Для такого движения уравнение неразрывности (1.23) принимает вид:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \text{ или } \frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{\partial V_y}{\partial y}.$$

Уравнение линии тока (1.9) для плоского случая дает:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y}, \text{ или } -V_y dx + V_x dy = 0.$$

Т.е. уравнение неразрывности служит для последнего уравнения условием существования полного дифференциала  $d\psi = 0$  некоторой функции  $\psi(x, y)$ :

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.28)$$

Вдоль линии тока  $\psi(x, y) = \text{const}$ , поэтому  $\psi(x, y)$  называется *функцией тока*. Заметим, что согласно (1.25) функция тока связана с потенциалом скорости безвихревого движения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.29)$$

Из дифференцирования первого из этих уравнений по  $y$ , а второго по  $x$ , следует, что функция тока удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta\psi = 0$ , как и потенциал скорости.

В теории функций комплексного переменного [4] уравнение (3.29) известно, как условие Коши-Римана для существования аналитической (имеющей производную) функции  $w(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$  (где  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица):

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (3.30)$$

которая называется *комплексным потенциалом скорости*. Его производная определяется выражением:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i \frac{\partial\varphi}{\partial y} = V_x - iV_y, \quad (3.31)$$

откуда следует, что модуль производной комплексного потенциала скорости равен модулю скорости:

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = |\mathbf{V}|.$$

Мы будем рассматривать *комплексную скорость*:

$$\mathbf{V} = V_x + iV_y = \overline{V_x - iV_y} = \overline{\frac{dw}{dz}}, \quad (3.32)$$

где  $\overline{\phantom{x}}$  — означает комплексно-сопряженную величину, отличающуюся знаком мнимой части (перед  $i$ ). Нетрудно заметить, что:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 = \overline{V_x + iV_y} (V_x - iV_y) = \mathbf{V}\overline{\mathbf{V}} = \frac{dw}{dz} \overline{\frac{dw}{dz}}. \quad (3.33)$$

Рассмотрим несколько примеров комплексного потенциала скорости.

1.  $w = Cz$ . Если  $C = C_1 + iC_2$  и  $z = x + iy$  комплексные, то  $w = (C_1 + iC_2)(x + iy) = C_1x - C_2y + i(C_2x + C_1y)$  и линии тока опишутся уравнениями  $C_2x + C_1y = \text{const}$ , т.е. прямыми. Нетрудно получить и величины компонент скорости:  $V_x = C_1$ ,  $V_y = -C_2$ . Т.е.  $C = \overline{\mathbf{V}} = V_x - iV_y = |\mathbf{V}| e^{-i\alpha}$ . Таким образом, данный случай  $w = \overline{\mathbf{V}}z$  описывает равномерное поступательное плоскопараллельное безвихревое движение несжимаемой жидкости (рис. 14).

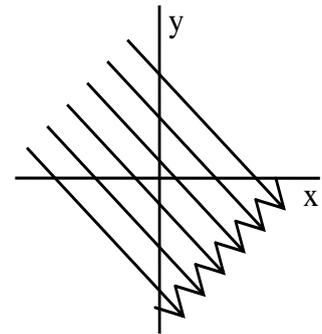


Рис. 14.

2.  $w = q \frac{\ln z}{2\pi}$ , где  $q$  вещественное число. Любую ком-

плексную величину можно представить через модуль  $r$  и аргумент  $\theta$  в виде:  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ . Тогда выражение

$$w = \varphi + i\psi = \frac{q}{2\pi} \ln r + i \frac{q}{2\pi} \theta$$

дает возможность из условия  $\psi = \text{const}$  найти линии тока:  $\theta = \text{const}$ , т.е. прямые лучи, исходящие из начала координат. Так как с увеличением  $r$  при  $q > 0$   $\varphi$  растет, то по определению потенциала скорости (1.25) такое течение представляет собой *источник* (рис. 15), а при  $q < 0$  *сток*. Количество жидкости, протекающее через окружность радиуса  $r$ , определится с помощью модуля

скорости  $|\mathbf{V}| = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| \frac{q}{2\pi z} \right| = \left| \frac{q}{2\pi r e^{i\theta}} \right| = \frac{|q|}{2\pi r}$  по формуле

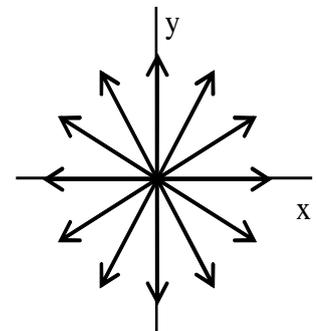


Рис. 15.

$2\pi r \frac{|q|}{2\pi r} = |q|$ , как независящая от  $r$  величина. Таким образом,  $q$  определяет рас-ход источника или стока.

3.  $w = -\frac{\Gamma i}{2\pi} \ln z$ , где  $\Gamma$  вещественное число. В этом

случае  $w = \varphi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln r$  и линии тока из усло-

вия  $\psi = \text{const}$  представляют собой окружности  $r = \text{const}$ . Если  $\Gamma > 0$ , то движение по этим окружно-стям осуществляется против часовой стрелки. Цирку-ляция скорости по любой из таких замкнутых линий тока определится согласно (1.13) и (1.25):

$$\oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \oint_L V_x dx + V_y dy = \oint_L \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \oint_L d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi} d\theta = \Gamma,$$

что позволяет считать коэффициент  $\Gamma$  циркуляцией, а течение циркуляционным (круговым – рис. 16). В этом случае говорят, что в центре такого течения рас-положен *точечный вихрь*.

4.  $w = \frac{C}{z}$ , где  $C > 0$  вещественное. В этом случае

$$w = \frac{C}{r} e^{-i\theta} = \frac{C}{r} (\cos\theta - i \sin\theta) = \frac{C}{x^2 + y^2} (-iy)$$

описываются уравнениями  $\psi = \frac{Cy}{x^2 + y^2} = \text{const}$ , т.е. окруж-

ностями радиуса  $\frac{C}{2\text{const}}$ , проходящими через начало коор-

динат. Такое течение называется *диполем*. Оно может быть представлено, как суперпозиция источника и стока, поме-щенных на бесконечно малом расстоянии около начала координат (рис. 17).

5.  $w = Cz + \frac{R^2 C}{z}$ , где  $R$  и  $C > 0$  вещественные. В си-

лу линейности уравнения Лапласа, которому удовле-творяют и потенциал скорости, и функция тока, это те-чение можно рассматривать, как суперпозицию посту-пательного движения (пример 1) и диполя (пример 4) – *обтекание диполя*. Уточним вид этого течения. Так как

комплексный потенциал  $w = \varphi + i\psi = Cx + iCy + \frac{R^2 C}{x^2 + y^2} x - i \frac{R^2 C}{x^2 + y^2} y$ , то функ-

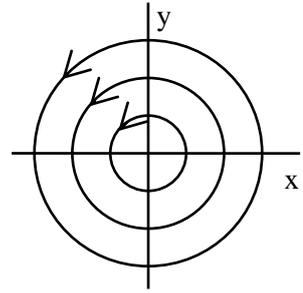


Рис. 16.

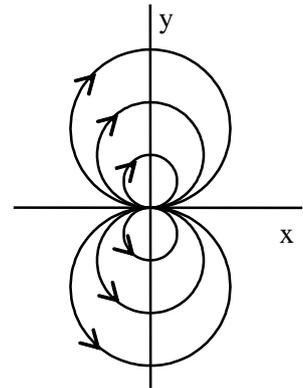


Рис. 17.

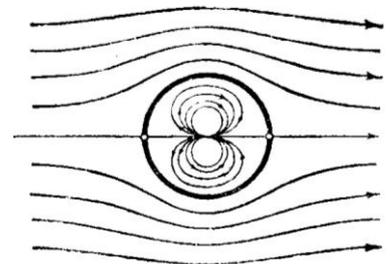


Рис. 18.

ция тока имеет вид:  $\psi = Cy \left( 1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right)$ . Отсюда видно, что одна из линий тока, а именно,  $\psi = 0$ , состоит из двух частей: координатной оси абсцисс  $y = 0$  и окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат  $x^2 + y^2 = R^2$  (рис. 18). Как известно, в потенциальном движении линии тока не пересекаются, поэтому другие линии тока  $\psi = \text{const}$  не могут пересечь рассмотренную. Это значит, что движение распадается на два изолированных течения: вне круга радиуса  $R$  и внутри.

Так как  $\frac{dw}{dz} = V_x - iV_y = C - \frac{R^2 C}{z^2}$ , то  $V_x \xrightarrow{z \rightarrow \infty} C$ ,  $V_y \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ .

Обычно в этом случае используют обозначение  $V_\infty = C$ . Т.е. из бесконечности в бесконечность жидкость движется поступательно вдоль оси  $x$ , набегая на круг радиуса  $R$  около центра координат. Круг можно заменить твердым телом, поэтому данный пример интерпретируется как обтекание круглого цилиндра бесконечным потоком. На линии тока  $\psi = 0$  частицы жидкости, выходя со скоростью  $C$  из бесконечно удаленной точки  $x = -\infty$ ,  $y = 0$ , движутся строго по оси  $x$  с уменьшающейся скоростью. В левой особой точке  $x = -R$ ,  $y = 0$  на круге скорость обращается в нуль, линия тока разветвляется на обтекающие круг сверху и снизу дуги. В правой особой точке  $x = R$ ,  $y = 0$  на круге скорость опять обращается в нуль и дуги вновь сливаются в одну линию тока, на которой в бесконечно удаленной точке  $x = \infty$ ,  $y = 0$  скорость достигает значения  $C$ . На окружности  $z = Re^{i\theta}$  выполняется равенство  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = R$  и модуль скорости:

$$\begin{aligned} |\mathbf{V}| &= \left| \frac{dw}{dz} \right|_{|z|=R} = C |1 - e^{-i2\theta}| = C |1 - \cos 2\theta + i \sin 2\theta| = \\ &= C \sqrt{(-\cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta} = C \sqrt{2(-\cos 2\theta)} = 2C |\sin \theta| = \frac{2C}{R} |y|. \end{aligned} \quad (3.34)$$

симметричен относительно и оси  $x$ , и оси  $y$ . Но тогда в идеальной жидкости в силу интеграла Бернулли при отсутствии внешних сил (3.12) симметрично и распределение давления. Это значит, что результирующая **сила воздействия установившегося безвихревого (потенциального) потока идеальной несжимаемой однородной жидкости на круг (цилиндр) равна нулю** – еще один вид парадокса Даламбера-Эйлера.

6.  $w = Cz + \frac{R^2 C}{z} - \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln z$ , где  $R$ ,  $\Gamma > 0$  и  $C > 0$  вещественные. Нетрудно видеть, что это течение представляет собой *обтекание цилиндра* радиуса  $R$  однородным потоком со скоростью  $C$  в бесконечности (пример 5) *с циркуляцией*  $\Gamma$  скорости по цилиндру (пример 4). Действительно, функция тока в этом случае

принимает вид:  $\psi = Cy \left( 1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ , допускающий среди ли-

ний тока окружность радиуса  $R$ , на которой  $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln R$ . Из производной комплексного потенциала скорости  $\frac{dw}{dz} = C - \frac{R^2 C}{z^2} - \frac{\Gamma i}{2\pi z}$  найдем особые точки, в которых скорость обращается в нуль:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2C} \left[ \frac{\Gamma i}{2\pi} \pm \sqrt{-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 4R^2 C^2} \right].$$

Очевидно, что таких точек в общем случае две. В случае  $4R^2 C^2 < \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}$  оба корня мнимые и особые точки располагаются на мнимой оси. Одна из них находится внутри цилиндра, другая снаружи (рис. 19). В этом случае на поверхности цилиндра совершается чисто циркуляционное движение без точек торможения. В случае  $4R^2 C^2 > \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}$  оба корня комплексные и особые точки, в которых скорость обращается в нуль (точки торможения), располагаются на контуре цилиндра (рис. 20). В случае  $4R^2 C^2 = \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}$  корни совпадают, и единственная особая точка, располагающаяся на мнимой оси на контуре цилиндра (рис. 21), совмещает в себе функции двух рассмотренных в предыдущем случае.

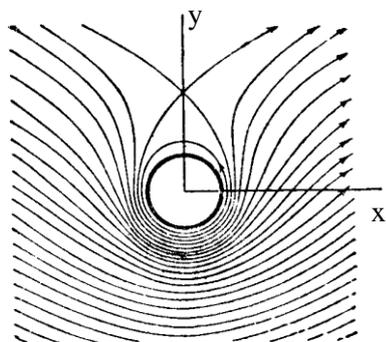


Рис. 19.

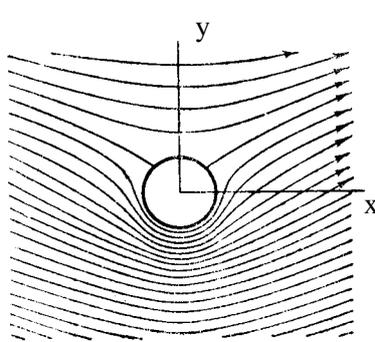


Рис. 20.

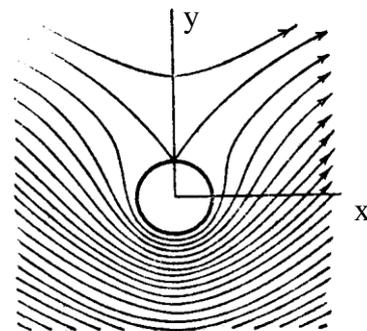


Рис. 21.

Из замечаний в примерах 3 и 5 о физическом смысле коэффициентов  $\Gamma$  и  $C$  следует, что рассмотренные на рис. 19 – 21 случаи соответствуют различным сочетаниям значений скорости набегающего потока  $C = V_\infty$  и циркуляции  $\Gamma$ . Сосредоточим свое внимание на случае рис. 20. Этот случай отличается от случая примера 5 (рис. 18) несимметрией обтекания цилиндра. Если при симметричном обтекании **идеальной** жидкостью кругового цилиндра "естественно" было ожидать нулевой силы воздействия со стороны среды, то для несимметричного остается надежда на другой результат.

Для отыскания силы воздействия по (3.19) **плоского установившегося безвихревого (потенциального) потока идеальной несжимаемой однородной жидкости** на цилиндр воспользуемся формулами (2.9) и (2.1) с учетом того, что роль поверхности тела играет окружность радиуса  $R$ , а вектор нормали к ней направлен внутрь:

$$\mathbf{R} = - \int_{\Sigma_1} \mathbf{p}_n dS = \oint \mathbf{p} n dS = - \int_0^{2\pi} \mathbf{i} \rho \cos\theta; \mathbf{j} \sin\theta R d\theta.$$

Выразив  $p$  из интеграла Бернулли без учета внешних массовых сил (3.12), будем иметь:

$$\mathbf{R} = - \int_0^{2\pi} p_0 \mathbf{i} \cos\theta; \mathbf{j} \sin\theta R d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\rho V^2}{2} \mathbf{i} \cos\theta; \mathbf{j} \sin\theta R d\theta,$$

где первый интеграл обращается в нуль в силу постоянства  $p_0$  вдоль обтекаемого контура. Используя преобразования из (3.34), выразим сопряженную комплексную скорость на границе тела:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \frac{dw}{dz} \Big|_{|z|=a} = C \left( -\cos 2\theta + i \sin 2\theta \right) \frac{\Gamma i e^{-i\theta}}{2\pi R} = \\ &= C \left( \sin^2 \theta + i 2 \sin \theta \cos \theta \right) \frac{\Gamma}{2\pi R} \left( \sin \theta + i \cos \theta \right) = \left( 2C \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \right) \left( \sin \theta + i \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

В этом выражении последняя скобка по модулю равна единице, поэтому, подставляя в полученную для силы  $\mathbf{R}$  формулу выражение  $V^2 = V\bar{V} = \left( 2C \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2$ , полученное из (3.33) и (3.35), и раскладывая  $\mathbf{R}$  на координаты, имеем:

$$R_x = \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{2} \left( 4C^2 \sin^2 \theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2} - 2 \frac{C}{\pi R} \Gamma \sin \theta \right) R \cos \theta d\theta = 0, \quad (3.36)$$

так как все подынтегральные функции имеют вид  $\sin^n \theta \cos \theta$ .

$$R_y = \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{2} \left( 4C^2 \sin^2 \theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2} - 2 \frac{C}{\pi R} \Gamma \sin \theta \right) R \sin \theta d\theta = -\rho C \Gamma. \quad (3.37)$$

где  $C = V_\infty$  скорость набегающего потока в бесконечности, по направлению которой выбрана ось  $x$ . Таким образом, результирующая сила воздействия **установившегося безвихревого (потенциального) потока идеальной несжимаемой однородной жидкости с циркуляцией** на бесконечный цилиндр направлена **перпендикулярно** скорости набегающего потока **против** направления циркуляции.

Эта основная формула в аэродинамике носит название *формулы Н.Е. Жуковского*. Следует особо отметить, что эта формула не является дополнительной моделью или предположением, а **доказана** Жуковским в 1906 г., как *теорема*, исходя из указанной модели среды. В 1934 г. М.В. Келдыш и Ф.И. Франкль доказали эту теорему для сжимаемого газа при дозвуковых ско-

ростях, а в 1948 г. Л.И. Седов распространил ее и на сверхзвуковые неразрывные течения. Таким образом, сегодня можно дать такую формулировку *теоремы Жуковского*:

**если круговой цилиндр обтекается под прямым углом к его оси  
установившимся,  
безвихревым,  
циркуляционным  
поток  
идеального,  
баротропного  
газа,**

**то на цилиндр действует сила, равная произведению плотности газа, скорости набегающего потока и циркуляции скорости. Направление этой силы определяется поворотом вектора скорости набегающего потока на прямой угол против направления циркуляции.**

В рассмотренном примере  $\Gamma > 0$  циркуляция скорости направлена против часовой стрелки, т.е. по окружности круга течение в **основном** организовано **против** часовой стрелки. Это особенно очевидно из рис. 20, где течение по длинной нижней части линии тока, раздвоившейся после передней критической точки, должно быть быстрее, чем по верхней короткой. Это необходимо для соединения этих частей линии тока в задней критической точке. Таким образом, мы имеем полное право говорить о том, что течение в **основном** организовано **против** часовой стрелки.

Но при меньшей скорости течения (сверху), согласно интегралу Бернулли, реализуется большее давление. Поэтому результирующая сила воздействия на цилиндр  $R_y$  направлена вниз при набегающем слева потоке, о чем свидетельствует наличие множителя  $(-i)$  в формуле Жуковского. Если организовать циркуляцию по часовой стрелке ( $\Gamma < 0$ ), то  $R_y$  будет направлена вверх, и силу Жуковского естественно будет назвать *подъемной*. Фундаментальный смысл теоремы Н.Е. Жуковского заключается в том, что подъемная сила возникает только за счет наличия циркуляции скорости.

Для того же эффекта у несимметричных тел специально заботиться об этом не нужно: сама форма тела может создавать условия возникновения циркуляции. Кроме того, наличие у реальных жидкостей и газов вязкости приводит к подобному эффекту при вращении круглого тела, когда небольшой слой воздуха или воды вокруг тела захватывается во вращение. Этот факт хорошо иллюстрируется известным из физики *эффектом Магнуса*, которым пользуются спортсмены: сильно закрученный при ударе мяч летит не по прямой, а по дуге из-за появляющейся силы Жуковского.

Уравнение (3.36) дает еще одно подтверждение *парадокса Эйлера-Даламбера*, являющееся следствием сделанных предположений. В реальных средах, конечно, сопротивление существует, но полученный результат свидетельствует о **возможности сделать его малым**. Таким образом, главный век-

тор воздействия среды на тело при реальном несимметричном обтекании всегда имеет две составляющие: вдоль скорости набегающего потока и поперек ее. Искусство прикладной аэродинамики состоит в том, чтобы управлять ими.

Найдем выражение  $\bar{\mathbf{R}} = R_x - iR_y$  при обтекании **произвольного бесконечного цилиндра установившимся потоком несжимаемой идеальной жидкости в отсутствии внешних массовых сил**. Для этого заметим, что из (3.19) при векторе внутренней нормали  $\mathbf{n} = -\{\mathbf{i}\sin\theta; \mathbf{j}\cos\theta\}$  к контуру  $L$  цилиндра, обходимого против часовой стрелки, следует:

$$\bar{\mathbf{R}} = R_x - iR_y = \oint_L \mathbf{p} \mathbf{n} dl = - \int_L p(\cos\theta + i\sin\theta) dl = -i \int_L p e^{-i\theta} dl.$$

Из  $e^{-i\theta} dl = (\cos\theta - i\sin\theta) dl = dl\cos\theta - idl\sin\theta = dx - idy = d\bar{z} = e^{-2i\theta} dz$  получим:

$$\bar{\mathbf{R}} = -i \int_L p e^{-i\theta} dl = -i \int_L p e^{-2i\theta} dz,$$

а применение интеграла Бернулли (3.12) по замкнутому контуру приведет к:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}} &= R_x - iR_y = \\ &= -i \int_L p_0 e^{-2i\theta} dz + i \frac{\rho}{2} \int_L \mathbf{V}^2 e^{-2i\theta} dz = i \frac{\rho}{2} \int_L \left( \mathbf{V} e^{-i\theta} \right)^2 dz = i \frac{\rho}{2} \int_L \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz \end{aligned} \quad (3.38)$$

где интеграл от постоянной  $p_0$  по обтекаемому замкнутому контуру равен нулю, а последнее равенство можно записать, если известен комплексный потенциал. Выражение (3.38) носит название *формулы Блазиуса-Чаплыгина* и позволяет вычислить силу воздействия потока идеальной жидкости на цилиндрическое тело, если известно распределение скорости на его поверхности.

Однако есть методы, позволяющие без отыскания распределения скорости определить силу воздействия жидкости или газа на тело. Для этого по *методу источников, диполей и вихрей* (чаще называемому кратко *методом вихрей* [2]) предполагается, что течение вокруг тела потенциально. Ранее мы выяснили, что это возможно при плоском установившемся безвихревом движении несжимаемой однородной жидкости. Кроме того, предполагается, что тело можно заменить системой источников, стоков, диполей и вихрей, расположенных внутри его контура, имеющих суммарный нулевой расход и обеспечивающих замкнутую линию тока, совпадающую с контуром тела. Такое разбиение пространства обеспечивает условие непроникания на контуре, т.е. те же граничные условия, что и при обтекании тела. В этом случае комплексный потенциал скорости представляет собой сумму слагаемых, содержащих логарифмическую или дробно-рациональную функцию (см. примеры 2 и 4), а комплексная скорость выражается только суммой рациональных дробей.

$\Rightarrow$  *Метод конформных отображений* [2, 4] позволяет использовать взаимно однозначное соответствие между внешностью произвольного плоского контура в комплексной плоскости  $z$  и внешностью круга в комплексной плоскости  $\zeta$  в виде функций  $\zeta = f(z)$  и  $z = f^{-1}(\zeta)$ .

В примере 6 был рассмотрен случай комплексного потенциала при обтекании с циркуляцией круга радиуса  $R$  с центром в начале координат потоком па-

раллельным оси X. Рассмотрим более сложный случай такого обтекания: потоком под углом  $\alpha$ . Тогда суперпозиция примера 1, примера 4 (для диполя внутри круга радиуса R) и примера 3 дает комплексный потенциал в плоскости  $\zeta$ :

$$w(\zeta) = \overline{V_\infty} \zeta + \frac{V_\infty R^2}{\zeta} - \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln \zeta = |V_\infty| e^{-i\alpha} \zeta + \frac{|V_\infty| e^{i\alpha} R^2}{\zeta} - \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln \zeta.$$

Поэтому, подставив функцию  $\zeta = f(z)$ , можно получить выражение комплексного потенциала для обтекания **произвольного** контура в плоскости z:

$$w(z) = w(\zeta) = \overline{V_\infty} f(z) + \frac{V_\infty R^2}{f(z)} - \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln f(z) = |V_\infty| e^{-i\alpha} f(z) + \frac{|V_\infty| e^{i\alpha} R^2}{f(z)} - \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln f(z).$$

Этот прием блестяще использовал Н.Е. Жуковский, заметив, что конформное преобразование

$$z = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

отображает окружность единичного радиуса в плоскости  $\zeta$  на отрезок вещественной оси в плоскости z. Он модернизировал это преобразование таким образом, чтобы получать дугообразный контур в плоскости z с острой кромкой (рис. 22):

$$z = e^{-i\varepsilon} \left[ k + \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{k^2}{\zeta} \right) \right], \quad (3.39)$$

где k – масштабный коэффициент,  $\varepsilon$  – угол изогнутости профиля. Выражение (3.39) получило название *функции Жуковского*, а такой контур (*профиль Жуковского*) стал использоваться в качестве основы для построения профилей поперечного сечения авиационного крыла.

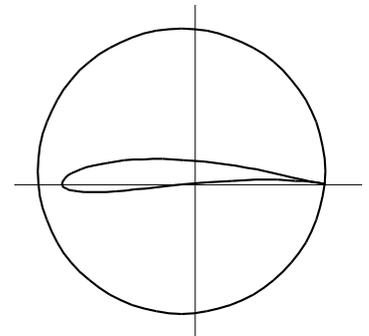


Рис. 22.

Сопряженная (комплексная) скорость определяется производной  $\overline{V} = V_x - iV_y = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} : \frac{dz}{d\zeta}$ , а последний делитель  $\frac{dz}{d\zeta}$

становится в ноль (это действительно на задней острой кромке). Во избежание этой математической особенности, не наблюдаемой в реальности, Н.Е. Жуковский предложил *постулат* о конечности скорости на задней кромке профиля. Для его соблюдения достаточно подобрать такое значение циркуляции скорости  $\Gamma$ , чтобы и числитель  $\frac{dw}{d\zeta}$  тоже обращался в ноль. Из зависимости  $w(\zeta)$  видно, что

это всегда возможно единственным образом:

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2\pi i \zeta \left| V_\infty \left( \frac{R^2}{\zeta^2} e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \right) \right|_{\zeta=R} = \\ &= 2\pi R |V_\infty| (\cos \alpha - \sin \alpha - i \cos \alpha - \sin \alpha) = -4\pi R |V_\infty| \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.40)$$

Таким образом, математика подтверждает, что в природе идеальной среды циркуляция скорости устанавливается "разумным" образом и обеспечивает появление силы Жуковского – подъемной силы.

⇒ Для иллюстрации *метода характеристик* рассмотрим уравнения **плоского установившегося движения идеальной политропной жидкости без массовых сил**. Вместо уравнений движения Эйлера (3.6) используем определенные ротора скорости (1.11) для плоского случая:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} = \Omega. \quad (3.41)$$

Интеграл Коши-Лагранжа (3.14) с учетом модели политропного процесса  $\rho = C p^{1/n}$  можно записать в виде:

$$\frac{V_x^2 + V_y^2}{2} + \frac{n}{n-1} \frac{p}{\rho} = \frac{V_x^2 + V_y^2}{2} + \frac{a^2}{n-1} = \text{const}, \quad (3.42)$$

где введено обозначение  $a^2 = n \frac{p}{\rho} = n C^{-n} \rho^{n-1}$ . Уравнение неразрывности (1.21) в установившемся случае после несложных преобразований (деления на  $\rho$ , замены  $\ln(\rho)$  через  $a$  с учетом постоянства  $n$  и  $C$ , умножения на  $a^2$  и замены  $\frac{a^2}{n-1}$

через  $\frac{V_x^2 + V_y^2}{2}$  по (3.42)) получит вид:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - V_x^2 \frac{\partial}{\partial x} - V_x V_y \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial y} - V_y^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.43)$$

Система уравнений (3.41), (3.43) относительно частных производных – линейная алгебраическая. Такая система в некоторых точках рассматриваемого двумерного пространства может иметь неединственное решение. Допустим, что это не изолированные точки, а некоторые линии  $L: y = y(x)$ , которые назовем *характеристиками*. Вдоль этих линий:

$$\frac{dV_x}{dx} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} y', \quad \frac{dV_y}{dx} = \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} y',$$

что можно использовать для исключения  $\frac{\partial V_x}{\partial x}$  и  $\frac{\partial V_y}{\partial x}$ :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial V_x}{\partial y} + y' \frac{\partial V_y}{\partial y} = \Omega + \frac{dV_y}{dx}, \\ & \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} - V_y^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) - V_x V_y \frac{\partial}{\partial y} \right] + \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} - V_y^2 \frac{\partial}{\partial y} + V_x V_y y' \frac{\partial}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} - V_x^2 \frac{\partial}{\partial x} + V_x V_y \frac{d}{dx} \right) \right] \end{aligned} \right\}$$

Тогда условие неединственности решения этой системы сводится к равенствам нулю ее определителей:

$$\Delta = \left| \begin{array}{cc} 1 & y' \\ - (V_x^2 - V_y^2) y' - V_x V_y & a^2 - V_y^2 + V_x V_y y' \end{array} \right| = 0,$$

$$\Delta_1 = \left| \begin{array}{cc} 1 & \Omega + \frac{dV_y}{dx} \\ - (V_x^2 - V_y^2) y' - V_x V_y & - (V_x^2 - V_y^2) \frac{dV_x}{dx} + V_x V_y \frac{dV_y}{dx} \end{array} \right| = 0.$$

Из первого квадратного уравнения следуют дифференциальные уравнения для двух семейств характеристик:

$$y' = \frac{V_x V_y \pm a \sqrt{V_x^2 + V_y^2 - a^2}}{V_x^2 - a^2},$$

которые существуют в вещественном пространстве только при  $V_x^2 + V_y^2 > a^2$ .

Эту скорость  $a$  назвали *скоростью звука*. Из второго уравнения, используя найденное  $y'$ , можно получить линейные связи между  $\frac{\partial V_x}{\partial x}$  и  $\frac{\partial V_y}{\partial x}$ , действительные вдоль характеристик.

Перейдя в этих связях от полных производных к дифференциалам, можно получить дополнительные соотношения для приближенного вычисления конечных приращений скорости  $\Delta V_x$  и  $\Delta V_y$ . Таким образом, если в каких-то **двух** близких точках пространства (например, точки  $\bullet$  на границе обтекаемого тела рис. 23) известны значения скорости, то можно найти приближенное значение скорости в **третьей** точке ( $\circ$ ), находящейся на пересечении двух характеристик различных семейств, проходящих через известные точки. Этот численный метод носит название *метода характеристик*.

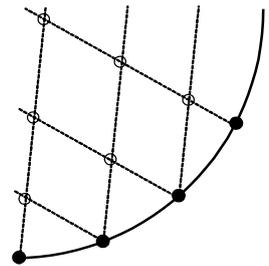


Рис. 23.

$\Rightarrow$  Существуют и другие численные методы решения задач механики сплошной среды, в том числе и аэродинамики, использующие разбиение пространства на малые конечные фрагменты. Так, например, *разностные методы* решения дифференциальных уравнений с частными производными, применяемые в механике сплошной среды под названием методов *конечных разностей*, основаны на приближенной замене производных соотношением конечных малых приращений. Преобразованные таким образом уравнения решаются, как алгебраические, и позволяют найти решение в виде табличных значений функций, заданных в сетке узловых точек, покрывающих все пространство среды.

$\Rightarrow$  В *методах конечных элементов*, в частности, в *панельном методе*, поверхность твердого тела, находящегося в жидкой или газообразной среде, заменяется мозаикой плоских пластин малого размера. Воздействие на каждую из таких пластин рассчитывается отдельно на основе других методов, но при этом

учитывается их взаимное влияние (*интерференция*, подобная влиянию вихрей по формуле Био и Савара – раздел 1.6).

⇒ В *методе дискретных вихрей* и в *методе дискретных особенностей* вся область, занятая сплошной средой, разбивается на малые, но конечные участки – ячейки, в которых основные параметры среды считаются постоянными. В этом случае дифференциальные уравнения движения сплошной среды можно представить в виде системы алгебраических уравнений. В этой системе столько уравнений, сколько ячеек выбрано для разбиения, т.е. достаточно много. Современные компьютеры могут в обозримое время решить подобные системы для сотен тысяч ячеек. В этих уравнениях, естественно, необходимо учитывать взаимодействие отдельных ячеек друг с другом (см. Закон Био и Савара (1.28)). Поэтому приходится допускать для каждой отдельной ячейки дополнительные особенности движения, например, приписывать ей определенную величину вектора ротора скорости – дискретный вихрь. Такого в природе, естественно, не существует, так как нарушает вторую теорему Гельмгольца (см. 1.4). Однако в рамках некоторого приближения рассматриваемой дискретной постановки задачи к реальной непрерывной задаче сплошной среды такая процедура вполне оправдана. Более того, в конце XX, начале XXI века математикам удалось доказать корректность такой формулировки задачи не только для схем построения дискретных вихрей, но и для некоторых схем других дискретных математических особенностей (типа диполей, вихревых рамок и т.п.).

⇒ На определенном этапе развития авиации требования к точности результатов стали превышать возможности рассмотренных теоретических методов. Прежде всего, это связано с появлением летательных аппаратов сложных геометрических форм, не поддающихся математической идеализации, ростом скоростей движения и реальными свойствами воздуха (вязкость, сжимаемость). Поэтому возникла необходимость в экспериментальных методах, которые сегодня позволяют получить результаты с высокой точностью.

Один из основных принципов экспериментальной аэродинамики подсказан природой: например, воздушный змей можно запускать не только при ветре, но и в штиль, если обеспечить его движение относительно воздуха. Суть *принципа обращаемости движения* состоит в предположении, что взаимодействие движущегося тела с покоящейся средой в точности такое же, как при обтекании средой покоящегося тела с той же относительной скоростью. Такое предположение вполне оправдано и законами механики. Этот принцип позволил создать целое научное направление: экспериментальные исследования в аэродинамических трубах и гидродинамических каналах.

Однако не следует переоценивать значение эмпирических выводов, достоверных только в условиях конкретного эксперимента. Для их более широкого использования требуются специальные научные методы: теория подобия, теория обратных задач, теория моделирования и т.п. В современной аэродинамике собственно экспериментальные результаты используются для корректировки

результатов теоретических расчетов, для идентификации (уточнения характеристик) математических моделей.

## 4. ЗАДАЧИ ГИДРОМЕХАНИКИ

### 4.1. Гидростатика

Гидростатика занимается изучением равновесия жидкостей и газов, т.е. состоянием покоя  $\mathbf{V} = 0$ . В этом случае уравнение неразрывности (1.21) приобретает вид  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . Таким образом, в общем случае в покоящейся среде плотность может зависеть от координат избранной точки  $\rho = \rho(x, y, z)$  и не зависит от времени.

Уравнения Навье-Стокса (3.2) при  $\mathbf{V} = 0$  сводятся к соотношению

$$0 = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p, \quad (4.1)$$

из которого следует (так как всегда  $\mathbf{rot} \mathbf{grad} A \equiv 0$ , и  $\mathbf{a}[\mathbf{b} \times \mathbf{a}] \equiv 0$ ):

$$\mathbf{F} \mathbf{rot} \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p \left[ \frac{1}{\rho} \mathbf{rot} \mathbf{grad} p + \mathbf{grad} \frac{1}{\rho} \times \mathbf{grad} p \right] = \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p \left[ \mathbf{grad} \frac{1}{\rho} \times \mathbf{grad} p \right] = 0,$$

а это в свою очередь свидетельствует о **не произвольности** поля внешних сил в случае равновесия сплошной среды.

Если внешние силы **отсутствуют**, т.е.  $\mathbf{F} = 0$ , то  $\mathbf{grad} p = 0$  и давление во всех точках покоящейся жидкости (или газа) одинаково – *закон Паскаля*.

Иногда закон Паскаля формулируют по-другому. Из (4.1) можно записать:  $\mathbf{grad} p = \rho \mathbf{F}$ . Если умножить это выражение скалярно на  $d\mathbf{r} = \{dx, dy, dz\}$ , то:

$$dp = \rho(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (4.2)$$

представляет собой *основное уравнение гидростатики*.

Если поле внешних сил **потенциально** ( $\mathbf{F} = \mathbf{grad} U$ ), то из (4.2) следует:

$$dp = \rho dU, \quad (4.3)$$

а это значит, что плотность и давление при равновесии зависят только от  $U$ .

Если в дополнение к этому среда **несжимаемая**, т.е.  $\rho = \text{const}$ , то уравнение (4.3) можно проинтегрировать, внося  $\rho$  под знак дифференциала, тогда для различных точек среды (1) и (2) разность давлений определится как:

$$p_2 - p_1 = \rho(U_2 - U_1).$$

Пусть в точке (1) произошло изменение давления на величину  $\delta p_1$ , на какую величину изменится давление  $\delta p_2$  в точке (2)? Значение правой части предыдущего уравнения не изменится, а в левой части указанные изменения появятся:

$$p_2 + \delta p_2 - p_1 - \delta p_1 = \rho(U_2 - U_1).$$

Вычитание из одного уравнения второго даст вывод:

$$\delta p_2 = \delta p_1,$$

который составляет суть более широкой трактовки *закона Паскаля*: изменение давления в какой-либо одной точке несжимаемой жидкости в потенциальном поле внешних сил передается без изменения в любую другую.

На этом свойстве несжимаемой жидкости в поле силы тяжести построены практически все гидравлические устройства и механизмы, простейшим из которых является гидравлический пресс, изучаемый в средней школе.

Выберем систему координат так, чтобы сила тяжести была направлена (вниз) против оси  $z$  (вверх), тогда  $F_x = F_y = 0$ ,  $F_z = -g$ , а потенциал  $U = -gz + \text{const}$ . Это означает по предыдущему выводу, что давление и плотность в покоящейся сплошной среде будут зависеть только от координаты  $z$  (высоты, глубины):  $p = p(z)$ ,  $\rho = \rho(z)$ . Если вид сплошной среды (уравнение баротропии) содержит кроме давления и плотности еще какую-нибудь одну характеристику, например  $T$  (из уравнения Клапейрона-Менделеева для совершенного газа), то и эта характеристика будет функцией только  $z$ .

Из (4.3) следует еще один вывод, справедливый для всех видов покоящейся жидкости (или газа) с любыми физическими свойствами:

$$p - p_0 = - \int_{z_0}^z \rho g dz, \quad (4.4)$$

т.е. в тяжелой сплошной среде разность давлений в точках, находящихся на разной глубине (высоте), равна весу столба этой среды с основанием 1 и высотой, равной разности высот рассматриваемых точек. Это значит, что давление тяжелой жидкости (или газа) на дно сосуда **любой** формы зависит только от высоты столба этой жидкости (или газа). На этом свойстве построена модель земной атмосферы, называемая Международной стандартной атмосферой (МСА).

Определим силу, действующую на покоящееся тело, погруженное в покоящуюся сплошную среду, в поле силы тяжести. Заметим, что в этом случае

$\rho = \rho(z)$ ,  $p = p(z)$ ,  $\mathbf{F} = F_z \mathbf{k} = -g \mathbf{k}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} = \mathbf{grad} p = \rho \mathbf{F} = -\rho g \mathbf{k}$ . Из общего уравнения

(3.21) с помощью теоремы Остроградского-Гаусса (1.15) (вектор  $\mathbf{n}$  везде направлен наружу) получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= - \int_S \mathbf{p} dS = - \int_S p \mathbf{n} dS = - \int_S [p \cos(\mathbf{n}, x) \mathbf{i} + p \cos(\mathbf{n}, y) \mathbf{j} + p \cos(\mathbf{n}, z) \mathbf{k}] dS = \\ &= - \int_W \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \right] dW = - \int_W \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} dW = \int_W \rho g \mathbf{k} dW = \mathbf{k} \int_W \rho g dW = \mathbf{G} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Это есть ни что иное, как *закон Архимеда*.

## 4.2. Кавитация

Из интеграла Бернулли следует, что в потоке возможны области, в которых давление отрицательно, т.е. жидкость испытывает растягивающие усилия. Некоторые специально обработанные жидкости удается кратковременно подвергать таким усилиям, например, химически чистая вода выдерживает отрицательное давление до 200 атм. Реальные жидкости, встречающиеся в природе, не способны воспринимать такие усилия. Более того не способны сохранять сплошность даже при некотором давлении  $p_d > 0$ , при котором жидкость разрывается. Это явление, называемое *кавитацией*, может наблюдаться в трубопроводе в районе минимального его сечения, а также на поверхности тел, обтекаемых потоком или движущихся в жидкости. Кавитация может возникать на нерасчетных режимах работы гребных винтов, турбин гидравлических машин и подводных крыльев.

Поскольку в реальных жидкостях всегда есть растворенные газы, то именно они вместе с парами жидкости и пытаются заполнить образовавшуюся полость, называемую *каверной*. На начальной стадии кавитации микроскопические пузырьки, заполненные паром, образуются как при закипании жидкости. Поэтому наименьшее значение давления  $p_d$  соответствует давлению насыщенных паров жидкости при данной температуре. По мере дальнейшего уменьшения давления пузырьки могут объединяться в большие полости.

Само по себе образование каверн в технике не страшно, страшно их неизбежное исчезновение. Понятно, что случайно образовавшаяся каверна долго существовать не может. Чаще всего ее образование приводит к нарушению стационарности потока, поэтому следующие частицы набегающего потока приносят область более высокого давления, которое "схлопывает пузырь". Ввиду практически нулевого давления внутри каверны она не может сопротивляться даже весьма малому давлению снаружи. Поэтому свободные поверхности жидкости, ограничивающие каверну, с большим ускорением устремляются друг к другу. Именно столкновение частиц жидкости с большой встречной скоростью и является самым неблагоприятным последствием кавитации. При этом столкновении частиц и потере их скорости в жидкости образуется кратковременное повышение динамического давления, которое может достигать весьма больших величин и приводить к повреждению конструкций (рис. 24 из Википедии).



Рис. 24.

Интеграл Бернулли для **установившегося** движения **несжимаемой** жидкости в поле силы тяжести в виде (3.16) можно записать, считая за избранную точку отсчета (А) бесконечность и введя обозначение  $p_{гст} = p_{\infty} + \rho g(z_{\infty} - z)$  – гидростатическое давление:

$$p = p_A + \rho g(z_A - z) + \frac{\rho V_A^2}{2} - \frac{\rho V^2}{2} = p_{гст} + \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} - \frac{\rho V^2}{2}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{2(p_{гст} - p)}{\rho V_{\infty}^2} = \frac{V^2}{V_{\infty}^2} - 1,$$

что свидетельствует о непосредственной зависимости условий возникновения кавитации от отношения скорости потока в определенной точке к скорости набегающего потока. Для случая обтекания твердого тела это отношение определяется только его формой и ориентацией. Поскольку эта величина безразмерная, она очень удобна для расчетов условий обтекания, обеспечивающих кавитацию, и ее назвали *числом кавитации*:

$$\kappa = \frac{2(p_{гст} - p_d)}{\rho V_{\infty}^2}.$$

#### 4.3. Установившееся движение вязкой жидкости между плоскостями

Рассмотрим несколько видов установившихся течений **вязкой** жидкости, для которых существуют аналитические решения.

1) Первой из таких задач является задача о движении вязкой жидкости между двумя параллельными плоскостями, одна из которых движется относительно другой в своей плоскости. Рассматривается установившееся прямолинейное движение без внешних воздействий и без градиента давления (рис. 25). Эти предположения позволяют записать:  $V_x = V_x(y)$ ,

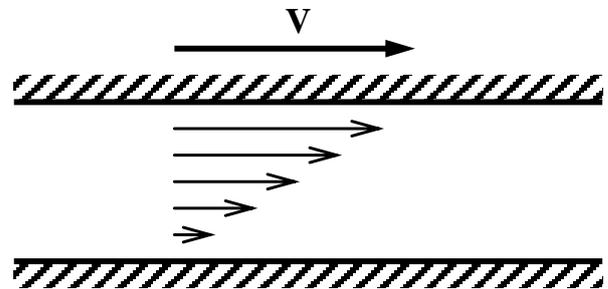


Рис. 25.

$V_y = V_z = 0$ ,  $F_x = F_y = F_z = 0$ ,  $\mathbf{grad} p = 0$ ,  $\frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial V_z}{\partial t} = 0$ , и уравнения движения для этого случая (3.4) дадут:

$$0 = \nu \Delta V_x = \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \frac{d^2 V_x}{dy^2}.$$

Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка легко находится с учетом граничных условий  $V_x(y=0) = 0$ ,  $V_x(y=h) = V$ :

$$V_x = V \frac{y}{h}, \quad (4.6)$$

и называется *течением Куэтта*. Характерным для этого вида течения является независимость от коэффициента вязкости и распространимость на сжимаемую жидкость. Это есть реализация примера 1 вихревого движения среды, рассмотренного в 1.6.

2) Видоизменим постановку предыдущей задачи таким образом, чтобы плоскости покоились друг относительно друга, а инициатором движения **несжимаемой** жидкости выступал градиент давления вдоль оси  $x$ :  $\mathbf{grad} p \neq 0$ ,  $\rho = \text{const}$ ,  $V_y = V_z = 0$ ,  $V_x = V_x(y)$ ,  $F_x = F_y = F_z = 0$ , а также  $\frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial V_z}{\partial t} = 0$ .

Тогда уравнения движения (3.4) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\}$$

Из последних двух уравнений следует, что  $p = p(x)$  и не зависит от других координат, а первое из дифференциальных уравнений сводится к виду:

$$\mu \frac{d^2 V_x}{dy^2} = \frac{dp}{dx}.$$

Так как левая часть этого уравнения может зависеть только от  $y$ , а правая — только от  $x$ , то обе его части могут быть только постоянными. Это значит, что такое дифференциальное уравнение можно разрешить относительно  $V_x$  при заданном  $\frac{dp}{dx}$  (или наоборот):  $V_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$ . Произвольные постоянные определяются из граничных условий

$V_x(y=0) = V_x(y=h) = 0$ :  $0 = C_2$  и  $0 = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h^2 + C_1 h$ , или  $C_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h$ .

Отсюда окончательно распределение скорости поперек слоя имеет параболический вид (рис. 26):

$$V_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(h-y), \quad (4.7)$$

называемый *профилем Пуазейля*. Такое течение называется *течением Пуазейля*.

3) Усложним постановку задачи рассмотрением движения несжимаемой вязкой жидкости под действием постоянного продольного перепада

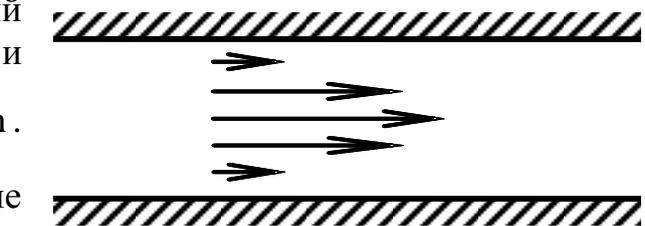


Рис. 26.

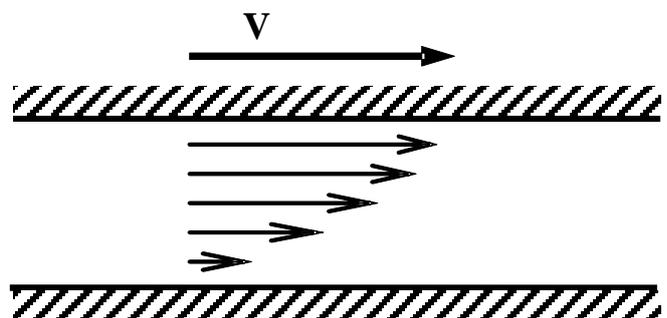


Рис. 27.

давления между плоскостями, движущимися друг относительно друга с постоянной скоростью. В этом случае, исходя из рассуждений в предыдущих случаях, можно записать:  $\frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial V_z}{\partial t} = 0$ ,  $\rho = \text{const}$ ,  $V_y = V_z = 0$ ,  $V_x = V_x(y)$ ,

$F_x = F_y = F_z = 0$ ,  $\frac{dp}{dx} = \text{const}$ . Очевидно, что формулировка задачи отличается от предыдущего случая только граничными условиями, поэтому общее решение будет таким же. Произвольные постоянные: из  $V_x(y=0) = 0$  следует  $C_2 = 0$ , из  $V_x(y=h) = V$  следует  $C_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h + \frac{V}{h}$ . Тогда распределение скорости поперек слоя:

$$V_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(h-y) + V \frac{y}{h} \quad (4.8)$$

имеет тоже параболический вид (рис. 27).

4) А теперь представим себе, что последний рассмотренный случай должен иллюстрировать работу смазки между основанием и ползуном. Тогда для выполнения своей задачи – поддержания ползуна над основанием на ненулевом расстоянии – в слое смазки давление должно сильно вырасти по сравнению с атмосферным (на "входе" и на "выходе"), т.е.  $\frac{dp}{dx}$  не должно быть постоянным.

Понятно, что и скорость на любой из линий тока тогда не будет постоянной, а этого можно достичь, только изменяя расстояние между плоскостями, так как расход смазки должен оставаться постоянным:

$$q = \int_0^h V_x dy = -\frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} h^3 + \frac{Vh}{2} = \text{const.}$$

Легко видеть, что, задав профиль щели, т.е.  $h = h(x)$ , можно определить необходимый для выдерживания заданной нагрузки градиент давления. Пусть плоскость ползуна (сверху) располагается с малым углом  $\delta \approx \text{tg} \delta = \frac{dh}{dx}$

к нижней плоскости основания, а длина контакта  $l$  (рис. 28). Тогда текущее расстояние между плоскостями запи-

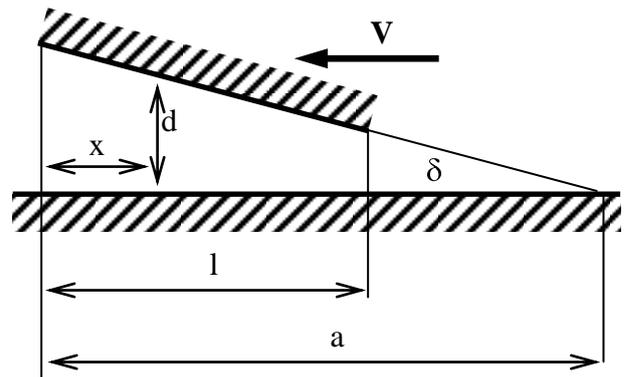


Рис. 28.

сывается  $h = (a - x)\delta$ , и его можно подставить в предыдущее дифференциальное уравнение по  $p$ . Его общее решение можно записать следующим образом:

$$p = \frac{6\mu x}{\delta^2 a(a-x)} \left[ V - \frac{q(2a-x)}{\delta a(a-x)} \right] + C,$$

где произвольная постоянная  $C$  определяется из условия  $p(x=0) = p_1$ , где  $p_1$  – атмосферное давление в подаваемой смазке, а расход  $q$  – из условия  $p(x=l) = p_1$ . После несложных преобразований распределение давления вдоль зазора, заполненного смазкой, можно представить в виде:

$$p = p_1 + \frac{6\mu Vx(1-x)}{\delta^2(a-x)^2(2a-1)}. \quad (4.9)$$

Если проинтегрировать вдоль ползуна (по  $x$  от 0 до  $l$ ) выражение (4.9), то получим величину полной нагрузки, которую развивает этот слой смазки:

$$F = \frac{6\mu V}{\delta^2} \left[ \ln \frac{a}{a-1} - \frac{2l}{2a-1} \right].$$

Если обозначить выражение в квадратных скобках за  $K$ , то его значения изменяются в зависимости от отношения  $l/a$  так, как это показано на рис. 29. Таким образом, можно сделать вывод: выдерживаемая слоем смазки нагрузка тем больше, чем меньше угол наклона ползуна к основанию  $\delta$  и чем больше отношение  $l/a$ , т.е. чем меньше минимальный зазор.

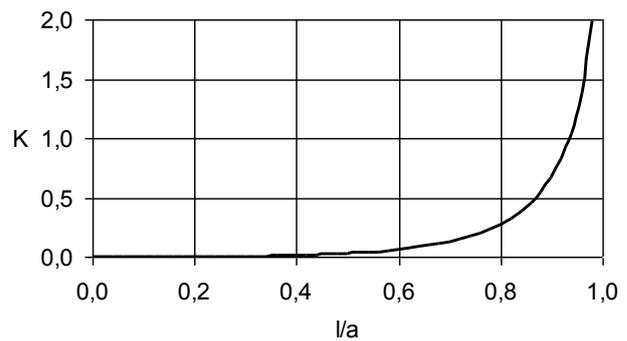


Рис. 29.

Следует отметить, что полученные здесь формулы непригодны для расчетов реальной смазки между парой деталей, так как получены в плоской постановке задачи. Однако для качественного анализа процесса в смазочном слое этого вполне достаточно. Численные значения рассматриваемых параметров для смазочных клиньев и подшипников различного типа можно найти в справочной литературе – эти вопросы достаточно глубоко теоретически разработаны для решения любых задач.

#### 4.4. Движение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических трубах

Рассмотрим один пример постановки трехмерной задачи гидродинамики в нестационарном случае: медленное течение вязкой несжимаемой жидкости в трубе **произвольного**, но постоянного поперечного сечения без влияния внешних сил (например, в горизонтальном трубопроводе). Выбрав систему координат так, чтобы ось  $x$  была направлена по оси трубы, а оси  $y$  и  $z$  в плоскости поперечного сечения, уравнения движения можно записать следующим образом:

- 1) из физических соображений  $V_x \neq 0, V_y = V_z = 0$ ;
- 2) из уравнения неразрывности  $\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0, \rho = \text{const}$ ;

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

3) из уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right).$$

Отсюда последовательно приходим к выводу, что  $V_x = V_x(y, z, t)$  и не зависит от  $x$ ,  $p = p(x, t)$  и не зависит от  $y$  и  $z$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x} = p'$  зависит только от  $t$  (в случае неустановившегося движения) или постоянно (при установившемся движении). Величину  $-p'$  называют *перепадом давления* вдоль оси трубы. Итак, в общем случае

$$p = p'x + C. \quad (4.10)$$

В установившемся случае в **круглой трубе** решение можно простым образом довести до конца и найти распределение скорости течения поперек потока.

Так как в этом случае  $\frac{\partial V_x}{\partial t} = 0$  и  $p' = \text{const}$ , то, используя цилиндрическую систему координат, можно записать:

$$p' = \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_x}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} \right).$$

Учтя в силу фактической одномерности такого движения из-за его симметрии  $\frac{\partial^2 V_x}{\partial \varphi^2} = 0$ , умножим последнее уравнение на  $r$  и поделим на  $\mu$ :

$$\frac{r}{\mu} p' = \left( r \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{\partial V_x}{\partial r} \right) = \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV_x}{dr} \right)$$

Это уравнение можно последовательно проинтегрировать дважды:

$$r \frac{dV_x}{dr} = \frac{1}{2\mu} p' r^2 + C_1 \quad \text{и} \quad V_x = \frac{1}{4\mu} p' r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

Произвольные постоянные определяются:  $C_1 = 0$  из условия  $V_x(r=0) \neq \infty$  и  $C_2 = -\frac{1}{4\mu} p' a^2$  из граничного условия прилипания вязкой жидкости на стенке трубы радиуса  $a$ :  $V_x(r=a) = 0$ . Таким образом, распределение продольной скорости внутри прямой трубы кругового сечения имеет параболический вид:

$$V_x = -\frac{1}{4\mu} p' (a^2 - r^2). \quad (4.11)$$

Его графическое представление совпадает с рис. 26, хотя это и другой вид течения.

Максимальное значение скорости потока достигается на оси трубы и составляет

$$V_{x \max} = -\frac{1}{4\mu} p' a^2, \quad (4.12)$$

расход жидкости через поперечное сечение круглой трубы определится величиной

$$q = \int_0^a 2\pi r V_x dr = -\frac{\pi a^4}{8\mu} p', \quad (4.13)$$

а средняя скорость

$$\overline{V_x} = \frac{q}{\pi a^2} = -\frac{a^2}{8\mu} p' = \frac{1}{2} V_{x \max}. \quad (4.14)$$

Сформулируем некоторые выводы для трубопровода конечной длины  $L$ , на которой разность давлений между входом и выходом составляет  $\Delta p$ . Из (4.13) и (4.14) следует:

$$\frac{\Delta p}{L} = -p' = \frac{8\mu L q}{\pi a^4} = \frac{8\mu L \overline{V_x}}{a^2},$$

что носит название *закона Гагена-Пуазейля*. Эти соотношения были получены **экспериментально** независимо друг от друга Г. Гагеном в 1839 г. и Ж.Л.М. Пуазейлем в 1840-1841 гг. Теперь же есть теория, которая блестяще согласуется с экспериментом.

#### 4.5. Глиссирование

При установившемся движении плоской пластинки по свободной поверхности идеальной, несжимаемой, невесомой жидкости под углом к ней могут образоваться следующие виды течений (рис. 30 – 31).

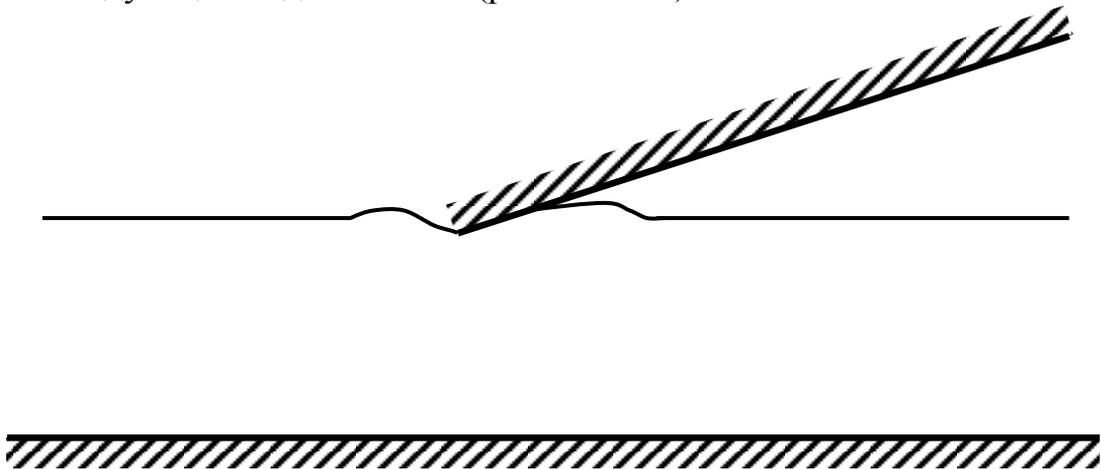


Рис. 30.

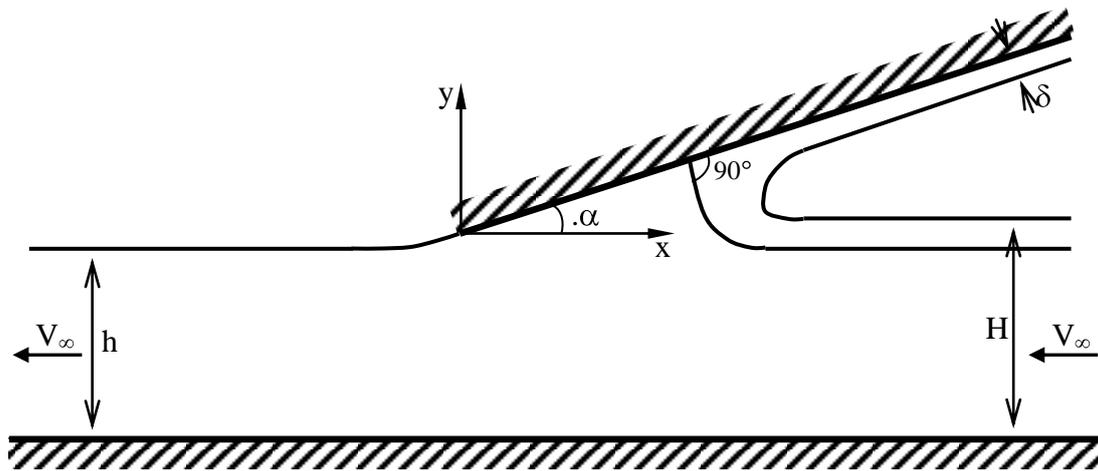


Рис. 31.

Форма свободной поверхности жидкости, изображенная на рис. 30, характерна для достаточно медленного "гладящего" движения пластинки относительно жидкости, когда силы взаимодействия между ними ничтожны. Этим случаем мы заниматься не будем.

Нас будет интересовать случай достаточно быстрого движения с интенсивным взаимодействием пластинки с жидкостью. Для большей убедительности дальнейших рассуждений воспользуемся *принципом обратимости движения* и будем считать, что слой жидкости высотой  $H$  набегаёт справа на нижний край покоящейся пластинки со скоростью  $V_\infty$  (рис. 31). Такое движение твёрдого тела по поверхности жидкости называется *глицсированием*. На свободной поверхности примем атмосферное давление постоянным и равным  $p_a$ . Тогда из интеграла Бернулли следует постоянство абсолютной величины скорости на всей свободной поверхности жидкости.

Обратимся к анализу линий тока в случае такого течения. При интенсивном "внедрении" пластинки в жидкость образуется тонкая струя брызг, направленная навстречу движению. Для ее появления необходимо, чтобы линия тока **свободной поверхности** справа заворачивала вверх, прижималась к пластинке и далее вдоль ее поверхности (жидкость невесома, или, по крайней мере, сила тяжести в этом процессе несущественна) уходила навстречу потоку. Это означает, что **под свободной поверхностью** справа располагается другая линия тока, которая должна разветвиться надвое, столкнувшись с поверхностью пластинки. В этом месте – особая точка, в которой скорость течения равна нулю. Линия тока располагается вблизи этой точки симметрично относительно пластинки. Дальше одна ее часть пойдет по поверхности пластинки влево-вниз и образует впоследствии свободную поверхность жидкости, уходящую влево. Другая часть линии тока пойдет по поверхности пластинки вправо-вверх.

Из интеграла Бернулли следует, что в особой точке давление в жидкости будет больше, чем атмосферное. Это повышение давления обеспечивает появление определенной подъемной силы, действующей на пластинку.

Выделим объем жидкости, ограниченный справа и слева достаточно удаленными границами, на которых можно считать скорость и давление на сво-

бодной поверхности постоянными. Поскольку жидкость идеальная, то мы с достаточной долей убежденности можем полагать и распределение скорости во всех трех слоях жидкости равномерным. Тогда закон сохранения массы несжимаемой жидкости примет вид:

$$h = H - \delta.$$

Так как жидкость идеальна, то вдоль оси  $x$  силы со стороны дна на жидкость отсутствуют, и закон сохранения импульсов вдоль оси  $x$  даст

$$\rho H V_{\infty}^2 - \rho h V_{\infty}^2 + \rho \delta V_{\infty}^2 \cos \alpha = -P \sin \alpha,$$

где  $P$  – сила, действующая исключительно поперек пластинки, отнесенная к ее длине. Ее значение можно легко определить из предыдущих выражений:

$$P = \rho \delta V_{\infty}^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \quad (4.15)$$

Полное теоретическое решение этой задачи, полученное Чаплыгиным С.А., приводит к выводу, что при малых  $\alpha$  толщина встречной струи  $\delta \sim \alpha^2$ , и, так как  $\operatorname{ctg} \alpha/2 \sim 2/\alpha$ , то  $P \sim \alpha$ .

Общая сила взаимодействия в системе координат, связанной с направлением скорости, разложится на составляющие:

$$\text{лобовое сопротивление } -R_x = -P \sin \alpha = -\rho \delta V_{\infty}^2 (1 + \cos \alpha), \quad (4.16)$$

$$\text{и подъемная сила } R_y = P \cos \alpha = \rho \delta V_{\infty}^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cos \alpha. \quad (4.17)$$

Из формул (4.15 – 4.17) следует, что подъемной силой глиссирующего по водной поверхности плавающего судна (глиссера) или воздушного судна (гидросамолета) можно управлять с помощью формы дна и угла атаки.

Значительно сложнее обстоит дело при возникновении глиссирования пневматиков колес шасси самолета по слою воды на поверхности взлетно-посадочной полосы (ВПП). На определенной скорости, называемой *скоростью глиссирования*, скопившаяся на ВПП вода не успевает выдавливаться из-под пневматиков, колесо "всплывает" и начинает глиссировать. При этом общая сила трения шасси по ВПП существенно падает. Это опасно на пробеге с торможением не только выкатыванием на концевую полосу безопасности, но и потерей поперечной управляемости самолета из-за неизбежной неоднородности условий глиссирования. Поэтому ВПП строятся с поперечным профилем для стекания воды, на пневматиках колес шасси делаются специальным образом ориентированные водоотводные канавки (протектор), аэродромные службы должны вести постоянный контроль состояния ВПП, не допускать скапливания воды и образования луж.

## 5. ЗАДАЧИ АЭРОМЕХАНИКИ

### 5.1. О ламинарных и турбулентных течениях

Несмотря на то, что в обиходном нашем представлении жидкость и газ весьма сильно разнятся, мы выяснили, что описание их движения едино в рамках механики сплошной среды. Поэтому рассмотренные в 4 задачи гидромеханики вполне можно рассматривать, как задачи аэромеханики для газов, преимущественно несжимаемых. Точно так же обстоит дело и с задачами настоящей главы – они могут рассматриваться, как задачи гидромеханики сжимаемой жидкости.

Другое свойство реальных жидкостей и газов – вязкость – тоже не критично для различия гидромеханики и аэромеханики. Однако с этим свойством весьма жестко связан вид течения среды. Из наблюдений известно, что далеко не всегда движение среды имеет вид упорядоченных линий тока, сливающихся в трубки тока такого же упорядоченного движения. Очень часто эта упорядоченность нарушается и все перемешивается. Спокойные упорядоченные *слоистые* движения среды, без нерегулярного перемешивания поперек направления основного движения называются *ламинарными*. Беспорядочные, *нерегулярные*, неустановившиеся движения, при которых частицы среды кроме скорости основного (среднего) направленного движения, имеют еще и беспорядочно накладываемые на нее существенные возмущения (пульсации), называются *турбулентными*.

Уже из самого определения этих видов движения среды становится ясно, что причина такой двойственности кроется в некотором уровне энергии, с которой частицы взаимодействуют друг с другом. Из основных параметров движения вязкой среды в трубах или вокруг твердого тела, таких как  $\rho$ ,  $V$ ,  $l$ ,  $\mu$  можно составить только одну безразмерную комбинацию – число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho V l}{\mu} = \frac{V l}{\nu} \quad (3.23).$$
 Это число характеризует уровень взаимодействия частиц:

чем больше плотность, скорость, характерный размер и чем меньше вязкость, тем больше хаоса вносят эти взаимодействия в общее, среднее движение. При большом значении числа Рейнольдса этот хаос становится определяющим, частицы, наподобие отдельных атомов, движутся беспорядочно, "не обращая внимания на соседей", практически не "успокаивают" трением соседние частицы, а только соударяются с ними. (Это можно сравнить с образным представлением разреженной массы людей, каждый из которых движется в своем направлении и лишь изредка сталкивается с соседом – это образ турбулентного движения. Но если толпа людей очень плотная, отдельному человеку трудно куда-либо из нее пробиться, и толпа движется почти только сплошняком, как единое целое – это образ ламинарного движения.) Бесконечное значение числа Рейнольдса соответствует идеальной жидкости (см. 2.3). Для каждого вида движения среды существует свое определенное значение *критического* числа Рейнольдса, ниже которого движение ламинарное, а выше – турбулентное. Крити-

ческое значение характеризует границу потери устойчивости ламинарного движения.

Однако нельзя утрировать эти два вида движения сплошной среды до вязкого и невязкого. Дело обстоит значительно сложнее ввиду существования таких граничных условий, как условия прилипания (3.20). Они обязательно выполняются в сколько-нибудь вязкой среде, в том числе и при больших числах Рейнольдса. Эту проблему решил Л. Прандтль, предложивший идею пограничного слоя, как приближенный метод решения задач.

## 5.2. Пограничный слой

Как мы убедились в 3 и 4, решение уравнений движения сплошной **идеальной** среды (уравнения Эйлера (3.6), (3.7)) значительно проще, чем вязкой (уравнения Навье-Стокса (3.1), 3.2)). Для турбулентного движения сложность усугубляется тем, что приходится решать, как бы, две задачи вместо одной. Одна из них – уравнения Навье-Стокса для осредненных значений параметров среды, другая – для пульсаций (турбулентностей, возмущений). Кроме того, необходимо каким-то образом описать и сами эти пульсации, природу их существования и взаимодействия. С помощью современных вычислительных комплексов некоторые отдельные задачи в такой постановке уже можно решить, но это требует весьма серьезных усилий.

С другой стороны, из жизни известно, что основная масса среды, удаленная от твердых границ, движется практически как идеальная среда. Это и понятно – ведь граничные условия прилипания (3.20) – это условия только на границе. И можно предположить, что влияние стенки, тормозящей частицы, попавшие на нее, передается через соседние частицы внутрь основного потока не далеко.

Таким образом, основные допущения Л. Прандтля сводятся к тому, чтобы рассматривать основную массу среды как идеальную, а вязкость учитывать только внутри тонкого слоя вблизи стенки, называемого *пограничным*. Вопрос о сопряжении этих двух разных сред и об условной величине толщины пограничного слоя решается в практическом приближении. Таким образом, Л. Прандтль предлагает с помощью допущений заменить уравнения Навье-Стокса приближенными соотношениями, действующими лишь внутри пограничного слоя.

Рассмотрим теорию ламинарного пограничного слоя (турбулентный пограничный слой приходится изучать в случае весьма шероховатых поверхностей твердых тел, обтекаемых с большой скоростью, или на расстояниях весьма далеких от начала пограничного слоя) на примере несжимаемой среды.

Плоскопараллельное движение несжимаемой вязкой сплошной среды, обтекающей без внешних массовых сил неподвижную плоскую гладкую пластину бесконечно малой толщины, расположенную своей плоскостью вдоль направления набегающего потока (рис. 32), описывается следующими уравнениями,

получаемыми из уравнений Навье-Стокса (3.4) и уравнения неразрывности (1.23):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \quad (5.2)$$

В этих уравнениях пока не сделаны никакие упрощающие предположения пограничного слоя. Теперь оценим математический порядок слагаемых в этих уравнениях, предполагая (первое предположение Л. Прандтля), что толщина пограничного слоя  $\delta$  мала по сравнению с характерным размером задачи, в данном случае с длиной пластины  $l$ .

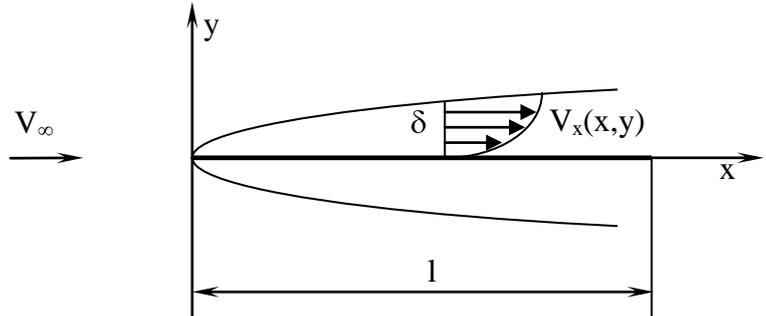


Рис. 32.

Следует заметить, что толщина пограничного слоя весьма условная величина – в представлении Л. Прандтля она характеризуется лишь тем, что на удалении  $\delta$  от пластины  $V_x \approx V_\infty$ . Если принять за основу какой-либо критерий этой близости, то ясно, что  $\delta$  зависит от удаления от начала пограничного слоя:  $\delta = \delta(x)$ . Но, тем не менее, будем полагать, что во всем пограничном слое  $\delta$  мало по сравнению с  $l$ , а, следовательно, и изменение координаты  $y$  мало (имеет порядок  $\delta$ ) по сравнению с изменением  $x$ .

Для оценки порядков величин в уравнениях введем безразмерные величины, обозначенные далее чертой сверху, с помощью характерных значений:

$x = l\bar{x}$ ,  $V_x = V_\infty \bar{V}_x$ , тогда отсюда следует замена переменной  $t = \frac{1}{V_\infty} \bar{t}$ . Кроме

того, так как размерность величины  $\frac{\rho}{\rho}$  равна размерности квадрата скорости, то

следует замена  $\frac{\rho}{\rho} = V_\infty^2 \bar{\rho}$ . Из первого предположения Л. Прандтля о малости  $\delta$

введем специальную новую безразмерную координату поперек пограничного слоя:  $y = \delta \bar{y}$ .

Первое слагаемое в уравнении (5.2) преобразуется в  $\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{V_\infty}{l} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}}$ , т.е. оно имеет порядок  $V_\infty/l$ . Но тогда и второе слагаемое в (5.2) должно иметь тот же

порядок величины, т.е.  $\frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{V_\infty}{1} \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{y}}$ . Величина  $V_y$  заменится из следующих

рассуждений:  $V_y = \int_0^y \frac{\partial V_y}{\partial y} dy = \int_0^{\bar{y}} \frac{V_\infty}{1} \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{y}} \delta d\bar{y} = \frac{V_\infty \delta}{1} \int_0^{\bar{y}} \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{y}} d\bar{y} = \frac{V_\infty \delta}{1} \bar{V}_y$ . Таким обра-

зом, есть все, чтобы провести замену переменных в уравнении неразрывности:

$$\frac{V_\infty}{1} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{V_\infty}{1} \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{y}} = 0$$

и в первом из уравнений движения:

$$\frac{V_\infty^2}{1} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{t}} + \frac{V_\infty^2}{1} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{V_\infty \delta}{1} \frac{V_\infty}{V_y} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}} = -\frac{V_\infty^2}{1} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \nu \left( \frac{V_\infty}{1^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{V_\infty}{\delta^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{y}^2} \right),$$

в котором первым слагаемым в скобке можно пренебречь по сравнению со вторым. В этом уравнении слагаемые, обозначающие **инерционный член** (слева) и **градиент давления** вдоль потока (без которого не может существовать и сам

поток) имеют один порядок величины  $\frac{V_\infty^2}{1}$ . Последнее слагаемое описывает **силы вязкости** и согласно второму предположению Л. Прандтля тоже должно

иметь тот же порядок величины. Поэтому  $\frac{V_\infty^2}{1} \approx \frac{\nu V_\infty}{\delta^2}$ , откуда следует:

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\nu l}{V_\infty}} = \frac{l}{\sqrt{Re}}. \quad (5.3)$$

Для примера оценим толщину пограничного слоя у самолета Ил-96-300, идущего на посадку  $l = 51,15$  м,  $V_\infty = 265$  км/ч = 73,6 м/с,  $\nu = 1,46 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с:  $\delta \approx 3$  мм. На самом деле из-за того, что самолет не представляет собой плоскую пластину, реальная толщина пограничного слоя на нем может быть на 1 – 2 порядка больше в связи с явлениями, описанными в конце данного параграфа.

Замена переменных во втором уравнении движения приводит к выражению:

$$\frac{V_\infty^2 \delta}{1^2} \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{t}} + \frac{V_\infty^2 \delta}{1^2} \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{x}} + \frac{V_\infty^2 \delta}{1^2} \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial \bar{y}} = -\frac{V_\infty^2}{\delta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \nu \left( \frac{V_\infty \delta}{1^3} \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{V_\infty}{l \delta} \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{y}^2} \right),$$

в скобке которого согласно второму предположению Л. Прандтля второй член

имеет тот же порядок  $\nu \frac{V_\infty}{l \delta} \sim \frac{V_\infty^2 \delta}{1^2}$ , что и инерционные члены левой части, а

первое слагаемое имеет порядок  $\nu \frac{V_\infty \delta}{1^3} \sim \frac{V_\infty^2 \delta^3}{1^4}$ , что позволяет им пренебречь.

Таким образом, все слагаемые левой части и скобка правой части уравнения имеют порядок величины меньше, чем поперечный градиент давления. Из этого следует, что поперечным градиентом давления в пограничном слое можно пренебречь. В итоге получаем уравнения пограничного слоя в виде:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (5.5)$$

к которым следует добавить уравнение неразрывности (5.2).

Заметим, что (5.3) и (5.5) являются фундаментальными выводами теории пограничного слоя. Они позволяют в некоторых случаях решить эти нелинейные дифференциальные уравнения. Например, в случае установившегося движения частная производная от скорости по времени пропадает, а частную производную давления по продольной координате в силу (5.5) можно считать простой полной производной.

Дополнительное предположение о постоянстве давления  $p$  приводит к так называемой задаче Блазиуса, в которой можно найти распределение скорости в поперечном сечении пограничного слоя (см. рис. 32, у обтекаемой неподвижной поверхности скорость равна нулю, а на внешней границе пограничного слоя практически равна скорости, определенной, как скорость обтекания твердого тела идеальной средой). В этих же предположениях можно найти величину сопротивления вязкого трения  $\tau$  на поверхности обтекаемого тела, которая определится соответствующей компонентой тензора вязких напряжений (см. 2.3). В рассматриваемом плоском случае

$$\tau = \tau_{12} = 2\mu e_{12} = \mu \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \approx \mu \frac{\partial V_x}{\partial y}, \quad (5.6)$$

где последнее приближенное равенство написано на основании вышеприведенных оценок порядка величин, позволяющих пренебречь первым слагаемым в скобке по сравнению со вторым.

При обтекании вязкой средой **профилированной** поверхности (крыло, фюзеляж самолета) давление не может полагаться постоянным. Обычно на выпуклой поверхности давление падает, начиная от передней критической точки, т.е.  $\partial p / \partial x < 0$ . После достижения минимума ( $\partial p / \partial x = 0$ ) давление начинает расти  $\partial p / \partial x > 0$ . Поэтому непосредственно на обтекаемой поверхности ввиду условий прилипания  $V_x = V_y = 0$  при установившемся движении из (5.4) следует:

$$\left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) \Big|_{y=0} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (5.7)$$

Величина, стоящая в левой части (5.7), как известно, характеризует кривизну зависимости  $V_x(y)$ . Таким образом, при снижении давления от передней критической точки в начале обтекания выпуклой поверхности наблюдается выпуклый профиль распределения про-

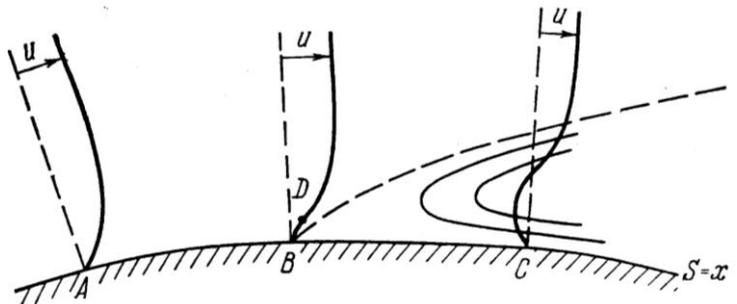


Рис. 33.

дольной скорости поперек пограничного слоя, как это изображено на рис. 32 или в точке А рис. 33.

В точке В рис. 33 достигнут минимум давления, поэтому профиль скорости имеет нулевую кривизну. Затем, в области последующего повышения давления кривизна профиля становится положительной, а сам профиль вогнутым. Но поскольку в точке на поверхности по-прежнему скорость равна нулю, постольку необходимо образуется профиль с отрицательными значениями скорости, как в точке С рис. 33. Это так называемое возвратное течение, направленное навстречу основному потоку. Ввиду того, что обычный пограничный слой принято рассматривать с выпуклым профилем скорости, начинающимся с нулевого значения, полученный эффект принято трактовать как *отрыв пограничного слоя*, который становится как бы отделенным от поверхности возвратным течением. Точку перехода В принято называть точкой отрыва пограничного слоя.

В практике создания и эксплуатации летательных аппаратов отрыв пограничного слоя является весьма нежелательным. Дело в том, что режим обтекания, а, следовательно, и положение точки отрыва неустойчиво, что приводит к существенным неустойчивым изменениям аэродинамических характеристик. Поведение летательного аппарата становится непредсказуемым.

Следует заметить, что явление отрыва пограничного слоя не имеет отношения к "отрыву потока", к кавитации (см. 4.2). Как видно из рис. 33 и вышеприведенных рассуждений, при этом эффекте сплошность среды не нарушается, пустот (каверн) не образуется.

Настоящий раздел посвящен знакомству с ламинарным пограничным слоем. Но как мы выяснили в 5.1 при достижении больших значений числа Рейнольдса течение имеет склонность переходить к турбулентному режиму. Пограничный слой тоже может турбулизоваться, и происходит это на некотором расстоянии от его начала. Действительно, если в качестве числа Рейнольдса рассматривать

величину  $Re_x = \frac{V_\infty x}{\nu}$ , то становится ясным, что на определенном удалении от

передней критической точки (точки зарождения пограничного слоя) оно может стать сколь угодно большим. Так и происходит в реальности: пограничный слой обычно начинается с ламинарного течения, а по достижении некоторой протяженности переходит в турбулентный. В силу природы турбулентности (см. 5.1) такой слой стремится расширяться, его толщина быстро растет. Это приводит к заметному изменению характеристик всего обтекания в целом. Поэтому и турбулентный пограничный слой необходимо уметь рассчитывать. Теоретическая аэродинамика располагает сегодня достаточно приемлемыми методами расчета как ламинарного, так и турбулентного пограничных слоев.

При движении реальных летательных аппаратов наблюдаются как переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный, так и отрыв пограничного слоя. Это приводит к увеличению фактической толщины пограничного слоя на порядки, а также к значительному искажению внешнего идеального обтекания. В связи с этим на долю вязкого трения приходится от 50 % до 80 % полного со-

противления движению летательных аппаратов. Отсюда следует важность мер борьбы с вязким трением, применяемых в практической аэродинамике.

### 5.3. Понятие о вихревой теории

Вернемся к рассмотрению идеальной среды и вопросу о возможности появления и существования в ней вихрей. Для этого необходимо изучить величину интенсивности вихревой трубки (1.20), образованной любым замкнутым контуром  $L$ , по которому считается циркуляция:

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma. \quad (5.8)$$

Математическими рассуждениями, аналогичными использованным в 1.4 при выводе формулы (1.17) для производной по времени от интеграла по объему, можно получить выражение:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} - \mathbf{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{f} \right] d\mathbf{S}. \quad (5.9)$$

Это общая формула векторного анализа для поля вектора  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ , обладающего свойством  $\text{div} \mathbf{f} = 0$ . Таким свойством, в частности, обладает поле вектора ротора скорости, так как  $\text{div} \mathbf{rot} \mathbf{V} \equiv 0$ , поэтому интересующая нас интенсивность вихревой трубки подчиняется соотношению:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left[ \frac{\partial \mathbf{rot} \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{rot} \mathbf{V} \right] d\mathbf{S}. \quad (5.10)$$

Рассмотрим уравнение движения идеальной среды в форме Громеки-Лэмба (3.8)

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad} \mathbf{V}^2 - \mathbf{V} \times \mathbf{rot} \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p$$

при следующих предположениях: во-первых, внешние массовые силы потенциальны, т.е.  $\mathbf{F} = \mathbf{grad} U$ ; во-вторых, среда баротропна, т.е.  $\rho = \Phi(p)$  (см. 2.3) и можно ввести потенциал давления  $P \stackrel{\sim}{=} \int \frac{dp}{\rho}$ , т.е.  $\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p = \mathbf{grad} P$ . Тогда уравнение движения приобретает вид:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad} \mathbf{V}^2 - \mathbf{V} \times \mathbf{rot} \mathbf{V} = \mathbf{grad} U - \mathbf{grad} P.$$

Для подстановки этого выражения для  $\mathbf{V}$  в (5.10) применим к нему операцию ротора и, учтя тождество  $\mathbf{rot} \mathbf{grad} A \equiv 0$ , получим:

$$\frac{\partial \mathbf{rot} \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{rot} \mathbf{V}. \quad (5.11)$$

Это уравнение позволяет сделать на основании (5.10) и (5.8) вывод:

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma = \text{const}, \quad (5.12)$$

о постоянстве циркуляции, который носит название *теоремы Томсона*.

Поскольку безвихревое (потенциальное) движение среды обеспечивается отсутствием вихрей (см. 1.6), постольку теорема Томсона доказывает сохранность этого свойства движения: если в какой-то момент времени движение потенциально, то при выполнении всех условий теоремы Томсона оно таковым и останется. Этот факт значительно расширяет возможности применения потенциала скорости для решения задач движения идеальной среды.

Итак, вихри в сплошной среде могут появляться и исчезать только при нарушении каких-либо предположений, использованных при доказательстве теоремы Томсона:

- 1) среда идеальная;
- 2) среда баротропная;
- 3) внешние массовые силы потенциальные;
- 4) поле вектора скорости непрерывно (использовано в 2.2 при выводе уравнения движения в дифференциальной форме).

Обратим внимание на последнее предположение, из которого следует, что в случае разрыва значений скорости движения частиц сплошной идеальной баротропной среды возможно возникновение вихрей.

Рассмотрим плоскопараллельное движение профиля в сплошной среде.

Если в некоторый начальный момент времени среда покоилась, то и циркуляция была равна нулю по любому замкнутому контуру, например, достаточно удаленному от профиля  $L = L_1 + L_2$ . В силу доказательства теоремы Томсона замкнутый контур  $L$  рассматривается состоящим из частиц среды. Поэтому, ко-

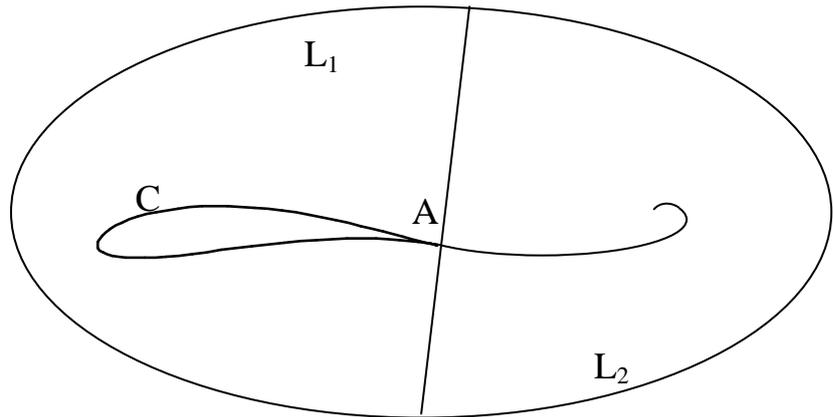


Рис. 34.

гда возникает движение профиля  $C$  и скорости схода потока сплошной идеальной баротропной среды с верхней и нижней поверхностями в задней критической точке  $A$  (на острой кромке) оказываются различными, нарушается предположение о непрерывности вектора скорости. В этой ситуации на задней острой кромке профиля  $C$  действительно образуется вихрь (в трактовке крыла, бесконечного поперек плоскости рис. 34, образуется вихревая пелена). Этот вихрь можно классифицировать как плоский сдвиг (см. 1.6) с бесконечным градиентом скорости, который срывается с кромки и распространяется в среду за профилем.

Процесс срыва вихрей не произволен: он развивается таким образом, чтобы при установившемся обтекании рано или поздно выполнить постулат Н.Е. Жуковского о конечности комплексной скорости на задней кромке профиля. Как

это было выяснено в 3.7, это означает, что в среде устанавливается соответствующее значение циркуляции.

Если продолжать рассматривать очень удаленный от профиля контур  $L$ , до которого вихрь еще не дошел, то по теореме Томсона циркуляция по нему продолжает оставаться равной нулю. При этом контуры  $L_1$  и  $L_2$  становятся незамкнутыми (на этих контурах в задней критической точке профиля частица среды сверху не связана с частицей среды снизу), чем нарушают условия применения теоремы Томсона. Тем не менее, ясно, что циркуляции по этим незамкнутым контурам становятся ненулевыми и противоположными по знаку. Такое рассуждение позволяет строить расчетные схемы вихревого движения сплошной среды около обтекаемого тела по сорвавшемуся с кромки вихрю.

В реальных средах всегда присутствует вязкость, которая через образующийся пограничный слой, срывающийся с задней острой кромки  $A$  профиля  $C$ , не позволяет достичь разрыва скорости при смыкании верхнего и нижнего (идеальных) потоков. Вместо разрыва скорости образуется вихрь типа плоского сдвига. В самой точке  $A$  он имеет в середине нулевую скорость, которую определяет условие прилипания, и от которой в обе стороны поперек течения распространяется градиент скорости конечной но различной величины сверху и снизу. Далее, естественно, в середине сорвавшегося слоя скорость становится ненулевой, а на внешних краях "бывших пограничных слоев" сохраняется скорость "идеального" обтекания. Сверху и снизу она имеет разные значения, что и приводит к развитию так называемого вихревого следа.

При расчетах реальных летательных аппаратов следует учитывать не только вязкость, но и конечные размеры крыла. Наличие боковых кромок приводит к пространственному характеру обтекания, существенно отличному от плоскопараллельного. При положительной подъемной силе разность давлений приводит к перетеканию газа с нижней стороны, из зоны повышенного давления, на верхнюю через боковые кромки крыла (на рис. 35 крыло прямоугольное в плане). Развивается течение вдоль размаха крыла от центра к боковым кромкам. При встрече верхнего и нижнего потоков на задней кромке помимо рассмотренного выше вихря с поперечным градиентом скорости образуется вихревая пелена из "закрученных" вихрей, срывающаяся с крыла и уносящаяся потоком. Вихревая теория

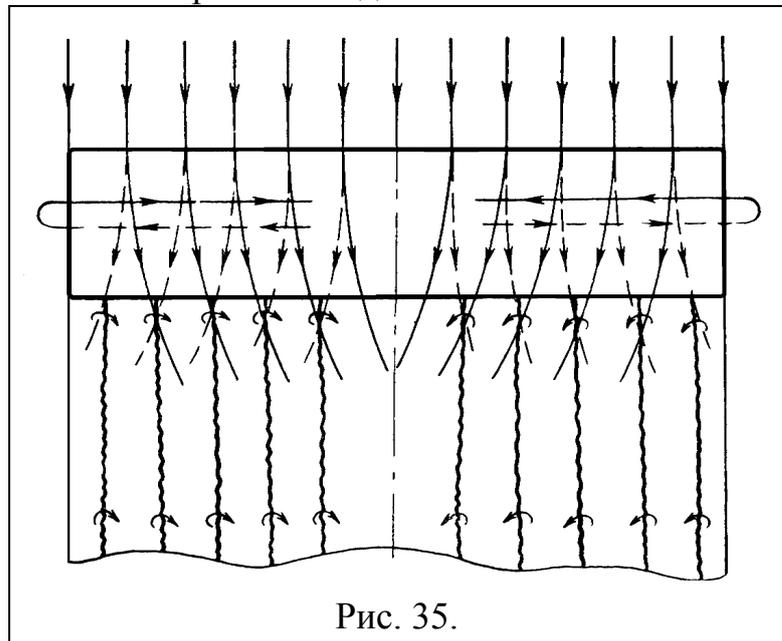


Рис. 35.

течение вдоль размаха крыла от центра к боковым кромкам. При встрече верхнего и нижнего потоков на задней кромке помимо рассмотренного выше вихря с поперечным градиентом скорости образуется вихревая пелена из "закрученных" вихрей, срывающаяся с крыла и уносящаяся потоком. Вихревая теория

позволяет построить модель такой вихревой пелены, определить ее характеристики и по третьему закону Ньютона определить воздействие потока на крыло.

В заключение данного параграфа приведем цитату из [1], дающую весьма ясное представление о месте модели обтекания тела идеальной средой и модели пограничного слоя.

"Приводимое иногда объяснение появления вихревой пелены за хорошо обтекаемым крылом за счет вязкости жидкости, вообще говоря, неверно. В задаче о крыле влияние вязкости проявляется в превращении вихревой поверхности разрыва касательных скоростей в тонкий пограничный слой непрерывного изменения скорости. Этот слой тянется за крылом назад и на далеких расстояниях от крыла сильно деформируется и размывается в общей массе жидкости. Однако эти эффекты не оказывают существенного влияния на возмущенное движение жидкости вблизи крыла. Этим объясняется, что расчет движения жидкости вблизи крыла в рамках теории идеальной жидкости дает правильную картину распределения давлений. С помощью найденного таким образом распределения давлений можно правильно вычислить подъемную силу крыла и правильно найти долю индуктивного сопротивления, обусловленного распределением давления.

Подчеркнем, что в этой схеме в рамках теории идеальной жидкости в установившемся движении в бесконечности сзади крыла в плоскостях, параллельных плоскости  $yz$ , остается возмущенное движение жидкости (нет выравнивания давлений и скоростей), за счет нарастания энергии этого возмущенного движения получается индуктивное сопротивление в идеальной жидкости. Полное сопротивление можно получить как сумму индуктивного сопротивления и сопротивления трения, определенного с помощью теории пограничного слоя."

#### 5.4. Динамика сжимаемого газа

Рассматривая баротропные газы, мы имеем в виду их **сжимаемость** – способность изменять свой объем (или плотность) под действием давления. Это значит, что характеристикой сжимаемости может служить величина  $\frac{dp}{d\rho}$ . Не-

трудно видеть, что размерность этой величины совпадает с размерностью квадрата скорости. Такую скорость называют *скоростью звука* и обозначают  $a$ . Найдем эту величину для **адиабатического** ( $p = \rho^\gamma$ ) процесса:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\gamma \rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}. \quad (5.13)$$

Для адиабатического процесса в **совершенном газе** скорость звука зависит только от температуры:

$$a = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} = \sqrt{\gamma BT} \approx 20\sqrt{T} \quad (5.14)$$

где приближение относится к воздуху.

Величину  $a$  можно считать характеристикой сжимаемости газа. Однако в этом качестве в аэродинамике принято использовать безразмерную величину: отношение скорости течения к скорости звука, число Маха (3.22):

$$M = \frac{V}{a}. \quad (5.15)$$

Рассмотрим **установившееся** движение **идеальной сжимаемой жидкости (газа)** в отсутствии внешних сил в трубке тока переменного сечения. Уравнение неразрывности (1.22)  $\text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$  с помощью теоремы Остроградского-Гаусса (1.15)  $\int_W \text{div} \mathbf{V} dW = \int_S \mathbf{V} d\mathbf{S}$  дает постоянство массового расхода газа  $\rho V S = \text{const}$  вдоль трубки тока.

Из уравнений Эйлера (3.7), спроектированных на осевую линию тока ( $x$ ), можно получить:

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -a^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{V_x^2}{M^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

откуда:  $-M^2 \rho \frac{\partial V_x}{\partial x} = V_x \frac{\partial \rho}{\partial x}$  или

$$\frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} = \rho \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = (-M^2) \rho \frac{\partial V_x}{\partial x}. \quad (5.16)$$

Из этого соотношения и из постоянства расхода следует:

– при дозвуковых скоростях ( $M < 1$ ) с ростом скорости  $V$  величина  $\rho V_x$  увеличивается, а сечение трубки тока уменьшается, достигая минимального значения при  $M = 1$ ,

– при сверхзвуковых скоростях ( $M > 1$ ) с ростом скорости  $V$  величина  $\rho V_x$  уменьшается, а сечение трубки тока увеличивается, минимальное сечение трубки тока достигается при  $M = 1$ .

Эти особенности течения сжимаемого газа составляют идею *сопла Лавалья* – сужающегося канала с разгоняющимся до скорости звука дозвуковым потоком, к которому примыкает расширяющийся канал с разгоняющимся сверхзвуковым потоком. Сопло Лавалья является основой для построения сверхзвуковых аэродинамических труб.

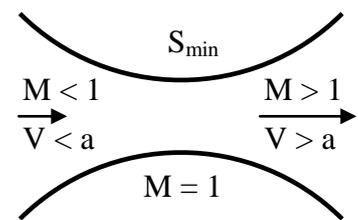


Рис. 36.

В этих же предположениях интеграл Бернулли (3.10) приобретает вид  $\frac{V^2}{2} + P(\rho, L) = \text{const}$ , где  $P(\rho, L) = \int \frac{dp}{\rho(\rho, L)}$  – функция давления. Если учесть, что в сплошной среде всегда  $\rho > 0$ , то функция давления монотонно возрастает с увеличением давления. Так как первое слагаемое в интеграле Бернулли всегда неотрицательно, то это означает существование минимальных и максимальных значений скорости и давления. Максимальное давление достигается при мини-

мальном значении квадрата скорости, т.е. при  $V = 0$  – в критической точке линии тока.  $p_{\max} = p_0$  – называется *полным давлением*. Максимальное значение скорости достигается при минимальном давлении, которое естественно предположить  $p_{\min} = 0$ . Тогда в критической точке можно определить значение константы интеграла Бернулли:

$\text{const} \int \frac{dp}{\rho} = P_0$ , откуда

$$V_{\max} = \sqrt{2 \int_0^{p_0} \frac{dp}{\rho}} \quad (5.17)$$

В частных случаях:

– для несжимаемого газа из (3.12):  $V_{\max} = \sqrt{2 \frac{p_0}{\rho}}$ ;

– для политропического процесса:  $V_{\max} = \sqrt{2 \frac{n}{n-1} \frac{p_0}{\rho}}$ ;

– для адиабатического движения совершенного газа из (3.13):  $V_{\max} = \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho}}$ .

До сих пор, рассматривая сплошную среду и неразрывность течения, мы полагали, что непрерывны все параметры движения. Однако наличие границ тел и свободных поверхностей наталкивает на мысль о возможности существования разрывных движений, в которых разрыв терпят те или иные параметры, но **разрыва сплошности среды нет**. Проверим гипотезу о возможности разрывов параметров среды на некоторой поверхности.

Ограничимся изучением с этой точки зрения **классической** (ньютоновской) **идеальной** среды, в которой несущественны внутренние касательные напряжения, внутренние моменты, тепловые и энтропийные процессы. **Установившееся** движение такой идеальной среды **без внешних сил** в **цилиндрической** трубке тока характеризуется, как известно, постоянством расхода через ее поперечное сечение  $F$ :  $\rho_1 V_1 F = \rho_2 V_2 F$ , откуда

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2. \quad (5.18)$$

Будем интерпретировать значки 1 и 2 соответствием значений параметров перед поверхностью разрыва и после нее. Из (5.18) видно, что если скорость течения при переходе через поверхность разрыва скачком уменьшается, то плотность скачком увеличивается – это, так называемый, *скачок уплотнения*.

Применение в данных рассуждениях закона сохранения импульса не поможет замкнуть систему уравнений, так как в уравнение движения (импульсов) входит еще одна переменная – давление. Это соотношение в данных рассуждениях будет выглядеть следующим образом:

$$\rho_1 V_1^2 + p_1 = \rho_2 V_2^2 + p_2. \quad (5.19)$$

Из него следует, что в скачке уплотнения вместе с увеличением плотности будет увеличиваться и давление. Действительно: подставив в правую часть (5.19)

выражение  $\rho_2 V_2$  из (5.18), получим:  $\rho_1 V_1 (V_1 - V_2) = p_2 - p_1$ , где обе части уравнения положительны. Даже привлечение уравнения сохранения энергии не замыкает систему уравнений, так как требует введения еще одного параметра – температуры. Для идеального газа **без притока тепла** закон сохранения энергии выглядит следующим образом:

$$\frac{V_1^2}{2} + h_1 = \frac{V_2^2}{2} + h_2, \quad (5.20)$$

где  $h = e + \frac{p}{\rho}$  – теплосодержание (энтальпия) единицы массы газа, а  $e$  – внутренняя энергия единицы массы газа, зависящая от температуры.

Из рассмотрения системы уравнений (5.18) – (5.20) очевидно, что:

– для сжимаемого газа может существовать несколько решений, в том числе и описывающих разрывы параметров среды, т.е. такое возможно;

– из симметрии уравнений следует их обратимость, т.е. возможность существования, как скачков уплотнения, так и скачков разрежения.

Заметим, что в **несжимаемой** среде, где  $\rho_1 = \rho_2$ , существование поверхностей разрыва параметров невозможно. А в **сжимаемой** среде условия на поверхности разрыва (5.20) и (5.21) однозначно определяют параметры за скачком, если только заданы все три параметра перед скачком ( $\rho_1, V_{1n}, p_1$ ) и какой-нибудь один из параметров после.

Обозначим обе части (5.18) через  $j = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$ . Тогда с помощью получаемого из (5.19) выражения

$$p_2 - p_1 = \rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2 = j^2 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (5.21)$$

из (5.20) можно получить *адиабату Гюгонио*:

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} (V_1^2 - V_2^2) = \frac{1}{2} j^2 \left( \frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right) = \frac{1}{2} j^2 \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) (p_2 - p_1).$$

Для совершенного газа (например, воздуха с  $\gamma = 1,4$ )

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho},$$

и адиабата Гюгонио приобретает вид, изображенный на рис. 37, где пунктирная вертикальная асимптота расположена при абсциссе  $1/6$ . Адиабата Гюгонио представляет собой множество **разрозненных** точек (а не непрерывную кривую), определяющих возможные соотношения на

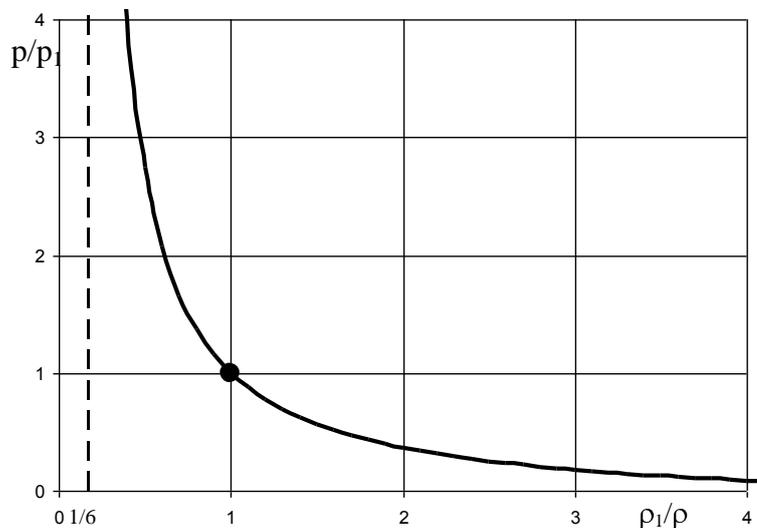


Рис. 37.

поверхности разрыва. Так, жирная точка соответствует параметрам перед разрывом, а любая другая точка на кривой – параметрам после возможного разрыва. Точкам левее выделенной на адиабате соответствуют скачки уплотнения, точкам справа – скачки разрежения. Тогда предельно малое значение  $j^2$  для скачка уплотнения (когда его практически нет) можно получить из (5.21) с помощью предельного перехода:

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_1} j^2 = \lim_{\rho \rightarrow \rho_1} \frac{p - p_1}{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}} = - \left( \frac{dp}{d\frac{1}{\rho}} \right)_{p=p_1} = \rho_1^2 \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_{p=p_1} = \rho_1^2 V_1^{*2} = \rho_1^2 a_1^2,$$

где  $a_1$  – скорость звука в среде перед скачком (см. (5.13)). Полученное соотношение говорит о том, что минимальная скорость потока, в котором могут быть скачки уплотнения, соответствует скорости звука. Это значит, что реальные скачки уплотнения могут двигаться относительно среды только со сверхзвуковой скоростью. Таким образом, скачки уплотнения в газах могут появляться при движении в них тел со сверхзвуковой скоростью.

Рассмотренные соотношения параметров на поверхности разрыва, вообще говоря, относятся к ее расположению перпендикулярно скорости потока. Такие скачки уплотнения называются прямыми. Однако существуют условия, в которых скачок уплотнения может быть расположен под углом к набегающему потоку. Так, например, при обтекании сжимаемым газом тупого угла с внутренней стороны (нижняя часть рис. 38) со сверхзвуковой скоростью он испытывает резкое повышение давления, т.е. в нем появляется скачок уплотнения. Так как такое воздействие в обычных газовых средах необратимо, энтропия при этом процессе возрастает. Это означает, что в обычных газовых средах возможны скачкообразные уменьшение скорости и увеличение плотности и давления, т.е. скачки уплотнения, и невозможны скачки разрежения. Разрежение газа с внешней стороны обтекаемого тупого угла происходит непрерывно в достаточно протяженной волне разрежения (верхняя часть рис. 38, где пучок прямых изображает линии постоянного давления). Следует заметить, что в сверхзвуковом потоке среда обтекает угол без отрыва и без местных бесконечных скоростей. В противоположность этому в дозвуковом потоке, как это рассматривалось в разделе 3, возможно и то, и другое.



Рис. 38

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. В 2 томах. - М.: Наука. 1973.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. В 2 частях. - М.-Ленинград: ОГИЗ. 1948.
3. Ламб Г. Гидродинамика. - М.-Ленинград: Гостехиздат. 1947.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). - М.: Наука. 1973.
5. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред: Учебное пособие для педвузов. - М.: Высшая школа. 1972.
6. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. Пер. с английского Е.И. Свешниковой, под ред. М.Э. Эглит. - М.: Мир. 1974.
7. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. - М.: Физматлит. 2006.
8. Бабкин А.В., Селиванов В.В. Основы механики сплошных сред: Учебник для вузов. 2-е изд., испр. В 3 томах. - М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2004.