

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**

С.П.Борисов, П.В.Павленко

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ПОСОБИЕ

**ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ
И ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ**

*для студентов III курса
специальности 160901
заочного обучения*

Москва - 2005

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Кафедра технической механики
С.П.Борисов, П.В.Павленко

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ПОСОБИЕ

по изучению дисциплины и выполнению контрольных работ

для студентов **III** курса
специальности 160901
заочного обучения

Москва 2005

ББК 605

Б82

Рецензент доктор технических наук, профессор Н.А.Бородин

Борисов С.П., Павленко П.В.

Б82 Сопротивление материалов: Пособие по изучению дисциплины и выполнению контрольных работ. – М.:МГТУ ГА, 2005. – 68 с.

Данное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ОПД.Р.01 «Сопротивление материалов» по Учебному плану для студентов *III* курса специальности 160901 заочного обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 31.05.05 г. и методического совета по направлению 24.05.05 г.

Введение

Сопротивление материалов входит в состав учебных и научных дисциплин, объединенных общим названием «Механика деформируемого тела». В соответствии с Государственным образовательным стандартом специальности, учебным планом и объемом часов, выделяемых на изучение «Сопротивления материалов», содержание этого учебного курса включает основные результаты, относящиеся к общим закономерностям сопротивления материалов изменению формы и размеров тел под действием сил, в том числе оценку условий работоспособности и надежности деталей по критериям прочности и жесткости.

В начале изучения этой учебной дисциплины предусмотрена установочная лекция, на которой излагаются цели и задачи изучения дисциплины, ее значение в подготовке инженеров широкого профиля и специалистов гражданской авиации, методические особенности изучения учебного материала, даются рекомендации по организации самостоятельной работы и использованию учебно-методической литературы.

В ходе самостоятельного изучения учебного материала студенты должны, руководствуясь методическими рекомендациями, проработать теоретический материал по рекомендованной учебной литературе и выполнить три контрольные работы. Выполненные контрольные работы выслать в университет для проверки.

Во время сессии рабочим учебным планом предусмотрены одна лекция, практические занятия в объеме 6 часов и лабораторные работы в объеме 12 часов. В течение сессии студенты должны сдать экзамен.

Студенты, проявляющие интерес к более глубокому изучению учебного материала, могут изучать дисциплину по индивидуальному плану. В этом случае программу подготовки следует согласовать с преподавателем, ведущим курс.

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

В сопротивлении материалов рассматриваются вопросы механики деформируемого тела, которые имеют самостоятельное значение в подготовке инженеров-механиков широкого профиля, так как формируют научное мышление в вопросах обеспечения прочности и надежности по прочности деталей машин и элементов конструкций, и, кроме того, необходимы для освоения ряда последующих общетехнических и специальных дисциплин, в том числе курсов «Конструкция и прочность летательных аппаратов», «Конструкция и прочность авиадвигателей», «Детали машин» и т.д.

Практика инженерной деятельности показывает, что инженер-механик по эксплуатации летательных аппаратов и авиационных двигателей должен иметь обширные и глубокие знания в области прочности конструкций, в том числе знать основные законы сопротивления материалов и элементов конструкций

деформациям и разрушению, иметь достаточную подготовку в области соответствующих экспериментальных методов. Обеспечение высокой надежности авиационной техники и безопасности полетов невозможно без учета прочностных аспектов.

Задачи и цели изучения дисциплины

В сопротивлении материалов рассматриваются общие закономерности изменения формы и размеров тел под действием сил. При этом ставятся следующие основные задачи:

изучить методы расчетов на прочность, жесткость и устойчивость типовых элементов конструкций;

изучить экспериментальные методы определения характеристик сопротивления материалов деформациям и разрушению;

сформировать научное мышление в вопросах прочности.

В результате изучения дисциплины «Сопротивление материалов» студент должен уметь:

проводить проектный и проверочный расчеты на прочность, жесткость и устойчивость типовых элементов конструкций при действии статических и динамических нагрузок;

планировать и проводить экспериментальные исследования по оценке сопротивления материалов деформациям и разрушению и давать обоснованные рекомендации по выбору материалов для типовых элементов конструкций;

анализировать явления и процессы, относящиеся к области прочности конструкции летательных аппаратов и авиационных двигателей.

Перечень дисциплин, усвоение которых необходимо для изучения данной дисциплины

Для усвоения учебного материала, излагаемого в курсе, необходимо знание следующих дисциплин и разделов:

в курсе «Физика» разделов — физические основы механики Ньютона, оптика;

в курсе «Высшая математика» разделов - основы линейной алгебры и аналитической геометрии, математический анализ. В частности, требуются твердые знания таких тем, как векторная алгебра, элементы линейной алгебры, дифференцирование и его приложения, определенный интеграл и его приложения, дифференциальные уравнения первого и высших порядков;

в курсе «Теоретическая механика» разделов - статика, кинематика точки и твердого тела, динамика и, в частности, тем:

простейшие виды движения твердого тела, прямолинейные колебания точки, принципы механики.

2. Содержание дисциплины

2.1. Наименование тем, их содержание (основные вопросы)

Ниже приводятся учебные темы и параграфы из рекомендуемой литературы, в которых излагается соответствующий материал, а также вопросы для самопроверки.

Тема 1. Введение. Основные понятия, определения и допущения. Методы расчета на прочность по напряжениям и предельным нагрузкам. [1, §1-№7]; [2, гл. 1].

Соппротивление материалов как учебная дисциплина, ее связь с другими учебными дисциплинами, задачи курса и их связь с оценкой надежности механических систем. Развитие науки о прочности и ее связь с практическими потребностями общества. Значение дисциплины в свете решения задач, стоящих перед промышленностью и гражданской авиацией.

Основные понятия и гипотезы сопротивления материалов. Идеализация свойств материала и геометрии тел. Силы и их классификация. Внутренние силовые факторы. Метод сечения.

Методика построения эпюр внутренних силовых факторов. Дифференциальные зависимости между интенсивностью распределенной нагрузки, поперечной силой и изгибающим моментом. Понятие о напряженном и деформированном состояниях. Выражения внутренних силовых факторов через напряжения. Методы расчета по напряжениям и предельным нагрузкам.

Вопросы для самопроверки

1. Какие деформации называются упругими; остаточными (пластическими)?
2. Что называется напряжением в точке в данном сечении?
3. Какое напряжение называют нормальным?
4. Какое напряжение называют касательным?
5. В чем сущность метода сечений?
6. Запишите дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки.
7. Как классифицируются виды нагружения?

Тема 2. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении - сжатии.
[1, §8- §19], [2, гл. 2], [3, гл. 1, задачи 1,3, 16, 19,30,59,88, 102].

Определение напряжений в поперечных сечениях и продольных деформаций. Закон Гука. Напряженное и деформированное состояния. Потенциальная энергия деформации.

Понятие о концентрации напряжений. Ограничения на использование формул для определения напряжений и деформаций. Испытание на растяжение. Диаграммы растяжения и их аппроксимация. Механические характеристики

материалов и их сравнительный анализ для металлических, неметаллических и композитных материалов. Условия прочности и жесткости.

Вопросы для самопроверки

1. Как строится условная диаграмма растяжения?
2. Что называется пределом пропорциональности, пределом упругости, пределом текучести, временным сопротивлением (пределом прочности)?
3. Запишите закон Гука при растяжении.
4. Что называется модулем продольной упругости?
5. Что называется коэффициентом поперечной деформации (коэффициентом Пуассона)?
6. В чем заключается разница между условной и истинной диаграммами растяжения?
7. Какие материалы называются хрупкими, какие пластичными?
8. Что такое концентрация напряжений и в каких местах она возникает?
9. От каких факторов зависит коэффициент запаса прочности?
10. Как записываются условия прочности и жесткости при растяжении - сжатии?

Тема 3. Основы теории напряженного и деформированного состояний.

[1§51-58]; [2, гл. 3], [3, гл 2, задачи 1,7, 11,28,36].

Исследование напряженного состояния в точке в общем случае. Тензор напряжений. Главные напряжения и их определение. Шаровой тензор и девиатор напряжений. Классификация напряженных состояний. Примеры реализации различных типов напряженных состояний.

Определение напряжений на произвольных площадках. Вывод расчетных формул для определения напряжений на произвольных площадках по известным главным напряжениям.

Плоское напряженное состояние. Определение напряжений. Графоаналитическая интерпретация расчетных формул (круги Мора).

Исследование деформированного состояния в точке. Обобщенный закон Гука. Шаровой тензор и девиатор деформаций.

Вопросы для самопроверки

1. Какие имеются виды напряженного состояния материала?
2. Что такое главные напряжения?
3. В чем заключается закон парности касательных напряжений?
4. Запишите формулы для определения напряжений на наклонных площадках при плоском напряженном состоянии.
5. Запишите формулы для определения главных напряжений по известным напряжениям на наклонных площадках в случае плоского напряженного состояния.
6. Как находят деформации при плоском и объемном напряженных состояниях?

7. Что такое главные площадки и как найти их положение при плоском напряженном состоянии?

8. Как определить главные напряжения с помощью круга Мора?

9. Как построить круг Мора по известным главным напряжениям? Какие главные напряжения следует использовать для построения наибольшего круга Мора?

10. Как определить напряжения на произвольной площадке по известным главным напряжениям с помощью круга Мора?

11. Запишите соотношения, выражающие обобщенный закон Гука для изотропного тела.

Тема 4. Теория предельных состояний.

[1, §59-63]; [2, гл. 8], [3, гл. 2, задачи 28, 35, 36].

Общий подход к оценке предельного состояния. Равноопасные предельные состояния. Гипотезы предельных состояний. Феноменологический подход (теория Мора). Условия прочности.

Вопросы для самопроверки

1. Что понимается под предельным состоянием материала?

2. Как находят расчетные (эквивалентные) напряжения по гипотезе максимальных касательных напряжений, гипотезе энергии формоизменения и гипотезе (теории) Мора?

3. Что понимается под эквивалентным напряжением?

Тема 5. Расчеты на прочность при чистом сдвиге.

[1, §20]; [2, гл. 4]; [3, гл. 3, задачи 2, 7, 21, 24, 27, 32].

Определение напряжений в поперечном сечении. Испытание на чистый сдвиг. Механические характеристики. Напряженное состояние при чистом сдвиге. Потенциальная энергия деформаций. Расчеты на прочность элементов конструкций и соединений, работающих на сдвиг.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют абсолютным и относительным сдвигом?

2. Как записывается закон Гука при сдвиге?

3. Какой модуль упругости больше: E или G ?

4. Как находится условная площадь смятия заклепки?

5. Запишите условия прочности заклепки по срезу и по смятию.

6. Как рассчитывают стыковые, торцевые и фланговые сварные швы,

Тема 6. Кручение.

[1, §21- §24]; [2, гл. 6], [3, гл. 4, задачи 1, 9, 14, 18, 35, 60, 63].

Кручение стержней круглого поперечного сечения. Определение напряжений в поперечном сечении и угла закручивания сечений.

Напряженное состояние. Кручение стержней при наличии пластических деформаций. Предельный крутящийся момент. Расчеты на прочность.

Кручение стержней с некруглым поперечным сечением и тонкостенных стержней. Особенности деформации и распределения напряжений. Понятие о мембранной (пленочной) аналогии. Определение максимальных напряжений и углов закручивания в стержнях с прямоугольным поперечным сечением. Определение напряжений и углов закручивания в тонкостенных стержнях. Потенциальная энергия деформаций.

Вопросы для самопроверки

1. Какой вид нагружения называется кручением?
2. Запишите формулу для определения напряжений в произвольной точке поперечного сечения круглой формы.
3. Чему равен полярный момент инерции для круглого сечения?
4. Чему равен момент сопротивления для круглого и кольцевого сечения? Запишите условия прочности и жесткости при кручении.
5. Где возникают максимальные касательные напряжения при кручении стержней прямоугольного поперечного сечения и как их вычислить?
6. Что такое мембранная (пленочная) аналогия и как она используется?
7. Как определить напряжение в тонкостенных стержнях, поперечное сечение которых можно развернуть в прямоугольник и в случае, когда этого сделать нельзя?

Тема 7. Геометрические характеристики плоских сечений.

[1, гл. 3]; [2, гл. 51; 3, гл. 5, задачи 1, 4, 5, 11, 20, 2].

Определение геометрических характеристик. Центральные и главные оси. Главные центральные моменты инерции. Определение геометрических характеристик относительно параллельных осей и при повороте осей.

Вопросы для самопроверки

1. Запишите в общем виде формулы, определяющие статический момент, осевые и центробежные моменты инерции сечения.
2. По каким формулам находят координаты центра тяжести сечений?
3. Какие оси называются центральными и какие — главными?
4. Какой основной признак отличает главные моменты инерции от моментов инерции относительно произвольных осей?
5. Запишите формулы для определения моментов инерции относительно параллельных осей.
6. Запишите формулы для моментов инерции относительно главных центральных осей для круглого и прямоугольного поперечных сечений.

Тема 8. Изгиб.

[1, §28 - §34]; [2, гл. 7]; [3, гл. 6, задачи 1, 2, 5, 16, 20, 31, 42, 44, 57, 87; гл. 7, задачи 1,3,5,6, 11, 19, 40, 59; гл. 8, задачи 1, 23, 24; гл. 9, задачи 4, 6,9].

Чистый изгиб. Определение нормальных напряжений в поперечном сечении и кривизны стержня. Напряженное состояние. Упруго-пластический изгиб. Предельный изгибающий момент. Потенциальная энергия деформаций. Расчеты на прочность.

Поперечный изгиб. Определение нормальных и касательных напряжений в поперечных сечениях стержня. Напряженное состояние, проверка прочности.

Поперечный изгиб тонкостенных стержней. Определение нормальных и касательных напряжений. Центр изгиба.

Определение потенциальной энергии деформаций и прогибов при поперечном изгибе. Дифференциальное уравнение упругой линии балки. Примеры определения прогибов.

Вопросы для самопроверки

1.Как находят изгибающий момент и поперечные силы в каком-либо сечении балки?

2.Сформулируйте правила знаков для поперечной силы и изгибающего момента.

3. Что такое чистый изгиб и что такое поперечный изгиб?

4. Запишите формулу для определения нормальных напряжений при изгибе.

5. Что такое нейтральный слой и где он находится?

6. Запишите формулу для определения касательных напряжений при поперечном изгибе. Какой внутренний силовой фактор вызывает появление касательных напряжений?

7.Что такое центр изгиба?

8.Какой дополнительный внутренний силовой фактор возникает, если плоскость действия нагрузки не пройдет через центр изгиба?

9.Запишите приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.

Тема 9. Сложные виды нагружения.

11, §35, §36; гл. 9]; [3,гл. 10, задачи 1,2,6,7,22,35,69,93].

Общий случай нагружения стержней круглого и прямоугольного поперечных сечений.

Общий подход к оценке прочности. Расчеты на прочность стержня круглого поперечного сечения. Расчеты на прочность стержня прямоугольного сечения. Определение опасных точек. Условия прочности.

Частные случаи нагружения. Косой изгиб. Определение напряжений и прогибов. Уравнение нейтральной линии. Условия прочности. Внецентренное растяжение. Определение напряжений. Уравнение нейтральной линии. Условия прочности.

Вопросы для самопроверки

1. При каком нагружении возникает сложное сопротивление?
2. Когда возникает косой изгиб?
3. В каких точках поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при косом изгибе?
4. Запишите уравнение нейтральной линии при косом изгибе.
5. Как находят напряжения в произвольной точке поперечного сечения при внецентренном растяжении или сжатии?
6. Какие напряжения возникают в поперечном сечении стержня при изгибе с кручением?
7. Как записывают условия прочности в произвольной точке поперечного сечения по гипотезе наибольших касательных напряжений в общем случае нагружения?

Тема 10. Методы определения перемещений в стержневой системе в общем случае нагружения.

[1, §38 - §41, §43]; [2, гл. 11].

Энергетический метод определения перемещений. Потенциальная энергия стержня в общем случае нагружения. Теорема Костилиано. Интеграл Мора.

Вопросы для самопроверки

1. Как определить перемещение произвольной точки стержневой системы в общем случае нагружения?
2. Поясните смысл всех величин, входящих в выражение для интеграла Мора.
3. Как вычислить интеграл Мора графоаналитическим способом?

Тема 11. Статически неопределимые стержневые системы.

[1, §44- §50]; [2, гл. 11, 12]; [3, гл. 9, задачи 37, 38, 39].

Общий подход к расчету статически неопределимых стержневых систем. Метод сил. Основные определения. Степень статической неопределимости. Канонические уравнения метода сил. Методика расчета статически неопределимых систем. Определение перемещений.

Вопросы для самопроверки

1. В чем сущность метода сил при решении статически неопределимых стержневых систем?
2. Что называется «основной» и «эквивалентной» системами?
3. Запишите систему канонических уравнений метода сил для дважды статически неопределимой системы. Поясните физический смысл каждого слагаемого и каждого уравнения.
4. Какие упрощения можно внести при решении симметричных и кососимметричных статически неопределимых систем?

Тема 12. Обеспечение прочности деталей при наличии трещин. Напряженное состояние вблизи вершины трещины. Коэффициенты интенсивности напряжений. Силовой критерий разрушения. [6, гл. 1, гл. 2].

Вопросы для самопроверки

1. Как распределяются нормальные напряжения вблизи вершины трещины?
2. Поясните смысл коэффициента интенсивности напряжений.
3. Почему при наличии трещин непригоден метод расчета на прочность по напряжениям?
4. Что такое критический коэффициент интенсивности напряжений?
5. Запишите выражение для коэффициента интенсивности напряжений при разрушении «нормальным отрывом».
6. Запишите условие прочности для тела с трещиной.

Тема 13. Расчеты на прочность при циклических нагрузках. [1, §75-§80]; [2, гл. 15]; (3, гл. 14, задачи 72, 78, 85).

Основные понятия теории усталости. Закономерности сопротивления материалов усталости. Явление усталости материалов и проблемы обеспечения надежности авиационной техники. Основные понятия. Испытание на усталость материалов, элементов конструкций и агрегатов. Характеристики сопротивления материалов усталости. Диаграмма предельных амплитуд.

Определение предела ограниченной выносливости деталей. Общий подход к оценке сопротивления усталости деталей расчетным методом. Влияние концентрации напряжений, абсолютных размеров, эксплуатационных и технологических факторов на сопротивление деталей усталости. Оценка совместного влияния масштабного фактора и концентрации напряжений на основе статистической теории подобия усталостного разрушения. Расчетная оценка предела ограниченной выносливости деталей.

Расчеты на прочность при регулярных режимах нагружения в детерминированной постановке. Общий подход к оценке прочности при действии циклических нагрузок. Определение регулярного нагружения. Вывод формул для определения коэффициентов запаса по нормальным и касательным напряжениям. Вывод формул для определения коэффициента запаса при одновременном действии переменных нормальных и касательных напряжений.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется кривой усталости?
2. Что называется пределом выносливости?
3. Что такое регулярное нагружение и как его можно задать?
4. Как учитывается влияние средних напряжений на предельную амплитуду?
5. Какие факторы влияют на сопротивление материалов действию

циклических напряжений?

6. Запишите формулу для коэффициента запаса по нормальным напряжениям.

7. Запишите формулу для коэффициента запаса при одновременном действии циклических нормальных и касательных напряжений.

Тема 14. Устойчивость равновесия деформируемых систем. [1, §81 - §84]; [2, гл. 13]; [3, гл. 12, задачи 2, 4, 11, 14, 32].

Понятие устойчивости равновесия деформируемых систем. Определение критической силы и формы равновесия стержня, сжимаемого продольной силой. (Задача Эйлера). Определение критических напряжений. Расчет на устойчивость.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?

2. Какая сила называется критической?

3. Запишите формулу для критической силы сжатого стержня. Какие имеются ограничения на использование этой формулы?

4. Как вычисляют критические напряжения?

5. Что такое гибкость стержня?

6. Как находят критические напряжения для стержней малой и средней гибкости?

7. Запишите условия устойчивости с использованием коэффициента уменьшения допускаемых напряжений.

8. Как подбирают сечения стержня при расчете на устойчивость?

Тема 15. Динамические задачи сопротивления материалов.

[1, §91 - §92]; [2, гл. 14, §1 - §4]; [3, гл. 14, задачи 1, 2, 7, 20, 42, 54, 62, 64].

Определение и типы динамических задач. Методика расчета на прочность и жесткость с учетом сил инерции. Расчеты на прочность при ударном действии нагрузок.

Расчеты на прочность при колебаниях. Основные результаты теории колебаний механических систем с одной степенью свободы. Расчеты на прочность по напряжениям. Обеспечение прочности путем отстройки от резонанса.

Вопросы для самопроверки

1. Какие случаи нагружения относят к динамическим задачам?

2. В чем заключаются особенности расчета на прочность движущихся деталей?

3. Как записывается условие прочности при ударе?

4. Как определить динамический коэффициент при ударе?

5. Как влияет жесткость стержневой системы на максимальные

напряжения при ударе?

6. В чем заключается опасность явления резонанса?

7. Как вычисляются напряжения при колебаниях?

8. Каким образом можно изменить частоту собственных колебаний стержневой системы?

2.2. Лекции и их содержание

Рабочим учебным планом после самостоятельного изучения студентами учебного материала предусматривается чтение 1 лекции.

Содержание лекции охватывает в основном материал «Введения».

Ниже приведено содержание лекции. Продолжительность лекции - два академических часа.

Лекция № 1

В. 1. Сопротивление материалов как научная и учебная дисциплина.

В. 2. Основные понятия (прочность, жесткость, устойчивость), идеализация свойств материала и геометрии тел.

В. 3. Силы, их классификация (сосредоточенные, поверхностные, объемные, внешние и внутренние, активные и реакции связей). Виды связей, реакции связей.

В. 4. Определение внутренних силовых факторов, метод сечений.

В. 5. Понятие о напряжениях и напряженном состоянии в точке (линейное, плоское и объемное напряженные состояния).

В. 6. Понятие об условиях прочности при линейном, плоском и объемном напряженных состояниях.

2.3. Практические занятия и их содержание

Рабочий учебный план предусматривает 6 часов практических занятий. Практические занятия имеют целью выработать умение решать практические задачи, закрепить и углубить теоретические знания. На практических занятиях решаются, как правило, типовые задачи, рассматривается их физический смысл, анализируется методика решения и полученные результаты. Ниже приводятся темы двухчасовых практических занятий. Темы занятий в зависимости от пожеланий студентов могут корректироваться.

Темы практических занятий

ПЗ.1. Расчеты на прочность и жесткость статически определимых систем при растяжении - сжатии.

ПЗ.2. Расчеты на прочность и жесткость при кручении стержней с круглыми и прямоугольными поперечными сечениями.

ПЗ.3. Расчеты на прочность и жесткость при поперечном изгибе.

2.4. Лабораторные работы

Рабочий учебный план предусматривает выполнение лабораторных работ в объеме 12 часов.

Лабораторные занятия по курсу «Сопротивление материалов» знакомят студентов с конкретными объектами, изучаемыми в курсе, их свойствами, с контрольной и научной аппаратурой, методикой экспериментального исследования и стандартами на испытания. Основные цели лабораторных работ:

1. Получить практические навыки в определении основных механических характеристик материалов, используемых в расчетах на прочность и жесткость при различных видах нагружения.

2. Освоить некоторые экспериментальные методы исследования деформированного состояния и регистрации нагруженности элементов конструкций.

3. Проверить справедливость принятых гипотез и расчетных методов прямым экспериментом или через подтверждение формул, полученных теоретически.

Ниже приводятся темы лабораторных работ.

Темы лабораторных работ

Л.1. Испытание на растяжение образца из малоуглеродистой стали (2 ч).

Л.2. Определение модуля упругости первого рода и коэффициента поперечной деформации материала (2 ч).

Л.3. Экспериментальные методы исследования напряженного состояния (4 ч).

Л.4. Исследование напряжений при кручении и плоском прямом изгибе. Определение модуля упругости второго рода (4 ч).

2.5. Учебно-методические материалы по дисциплине

Основная литература

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. -М., МВТУ, 2004 г.

2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. -М., 1989 (а также другие издания).

3. Сборник задач по сопротивлению материалов; Под ред. В.К. Качурина. - М., 1972.

Дополнительная литература

4. Расчеты на прочность в машиностроении / Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Макушин В.М. и др. -М., 1956. Т. 1; 1958. Т.2; 1959. Т.3.

5. Когаев В.П. и др. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность. Справочник. -М.: Машиностроение, 1985.

6. Стреляев В.С., Борисов СП. Прочность элементов авиаконструкций при хрупком разрушении. -М.: МИИ ГА, 1977.

3. Указания о порядке выполнения контрольных работ

Каждый студент - заочник выполняет три контрольные работы. Задачи, входящие в состав контрольных работ, указаны ниже.

При выполнении контрольных работ придерживайтесь следующих рекомендаций:

1. Студент обязан взять из таблицы, прилагаемой к условию задачи, данные в соответствии со своим личным номером (шифром) и первыми шестью буквами алфавита, которые следует расположить под шифром, например:

шифр	2	8	3	0	5	2
буквы	а	б	в	г	д	е

В случае номера, состоящего из семи цифр, вторая цифра шифра не учитывается. Из каждого вертикального столбца любой таблицы, обозначенного внизу определенной буквой, надо взять только одно число, состоящее в той горизонтальной строке, номер которой совпадает с номером буквы. Например, вертикальные столбцы (табл. 3) обозначены буквами; е, г, д. В этом случае, при указанном выше личном номере (шифре) 283052, студент должен взять из столбца е строку номер два (второй тип сечения), из столбца г - строку номер нуль (швеллер 3б) и из столбца д — строку номер пять (равнобокий уголок 90х90х6).

Работы, выполненные с нарушением этих указаний, не засчитываются.

2. Не следует приступать к выполнению контрольных заданий, не изучив соответствующего раздела курса и не решив самостоятельно рекомендованных задач. Если основные положения теории усвоены слабо и студент обратил мало внимания на подробно разобранные в курсе примеры, то при выполнении контрольных работ возникнут большие затруднения. Несамостоятельно выполненное задание не дает возможности преподавателю - рецензенту вовремя заметить недостатки в работе студента - заочника. В результате студент не приобретает необходимых знаний и оказывается неподготовленным к экзамену.

3. Не рекомендуется также присылать в институт сразу несколько выполненных заданий. Это не дает возможности рецензенту своевременно указать студенту на допущенные ошибки и задерживает рецензирование.

4. В заголовке контрольной работы должны быть четко написаны: номер контрольной работы, название дисциплины, фамилия, имя и отчество студента (полностью), название факультета и специальности, учебный шифр, дата отсылки работы, точный почтовый адрес. Необходимо также указать год издания методических указаний, по которым выполнялась контрольная работа.

5. Каждую контрольную работу следует выполнить в особой тетради или

на листах, сшитых в тетрадь нормального формата, чернилами (не красными), четким почерком, с полями в 5 см для замечаний рецензента.

6. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условия с числовыми данными, составить аккуратный эскиз в масштабе и указать на нем в числах все величины, необходимые для расчета.

7. Решение должно сопровождаться краткими, последовательными, без сокращения слов объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчет величины должны быть показаны в числах. Надо избегать многословных пояснений и пересказа учебника; студент должен знать, что язык техники – формула и чертеж. При пользовании формулами или данными, отсутствующими в учебнике, необходимо кратко и точно указывать источник (автор, название, издание, страницу, номер формулы).

8. Необходимо указывать единицы всех величин и подчеркивать окончательные результаты.

9. Не следует вычислять большое число значащих цифр, вычисления должны соответствовать необходимой точности. Нет необходимости длину деревянного бруса в стропилах вычислять с точностью до миллиметра, но было бы ошибкой округлять до целых миллиметров диаметр вала, на который будет насажен шариковый подшипник.

10. По получении из университета контрольной работы студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и выполнить все сделанные ему указания. В случае требования рецензента следует в кратчайший срок послать ему выполненные на отдельных листах исправления, которые должны быть вложены в соответствующие места рецензированной работы. Отдельно от работы исправления не рассматриваются.

4. Задачи для контрольных работ

4.1. Задачи для контрольной работы № 1

Задача 1.

Стальной стержень ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) находится под действием продольной силы P и собственного веса ($\gamma = 78$ кН/м³). Найти перемещение сечения 1-1 (рис. 1.). Данные взять из табл. 1.

Задача 2.

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно-неподвижную опору и прикреплен к двум стержням при помощи шарниров (рис. 2.). Требуется: 1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q ; 2) найти допускаемую нагрузку $Q_{\text{доп}}$, приравняв большее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению $[\sigma] = 160$ МПа; 3) найти предельную грузоподъемность системы и допускаемую нагрузку $Q_{\text{доп}}$, если предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа и запас прочности $n = 1,5$; 4) сравнить величину $Q_{\text{доп}}$, полученную при расчете по допускаемым напряжениям (см. п. 2) и допускаемым нагрузкам (см. п. 3). Данные взять из табл. 1.

Указания. Для определения двух неизвестных сил в стержнях надо составить одно уравнение статики и одно уравнение деформаций.

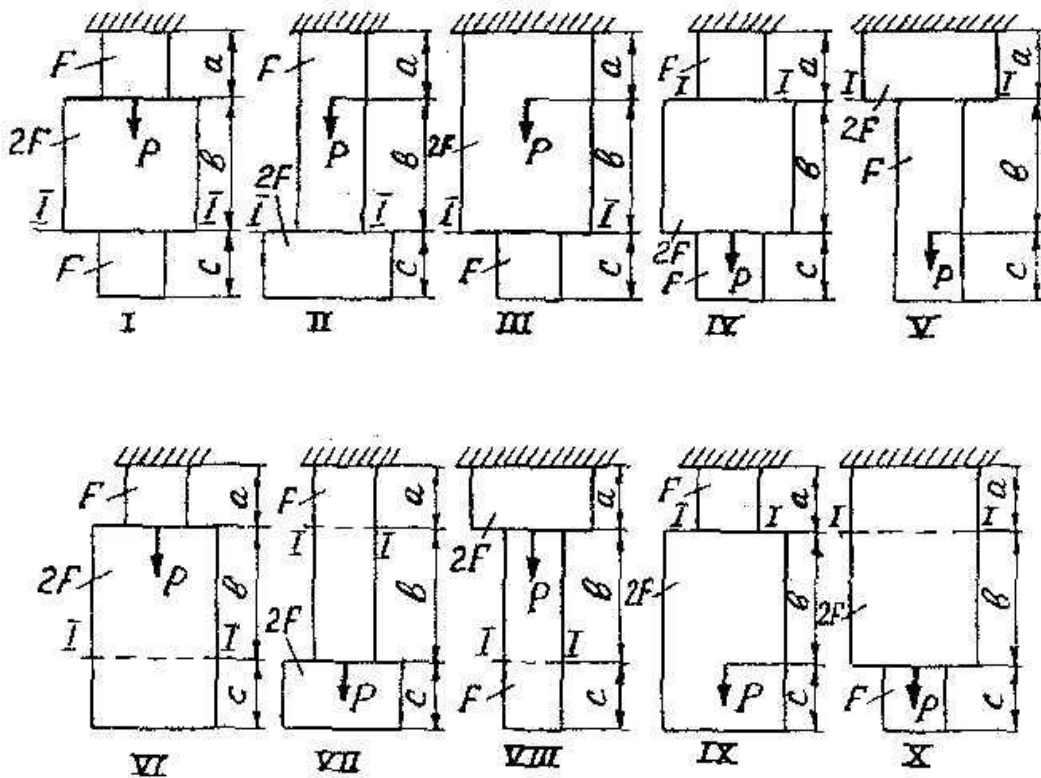


Рис. 1

Для ответа на третий вопрос задачи следует иметь в виду, что в одном из стержней напряжение больше, чем в другом. При увеличении нагрузки напряжение в первом стержне достигнет предела текучести раньше, чем во втором. Когда это произойдет, напряжение в первом стержне не будет некоторое время расти даже при увеличении нагрузки, система станет как бы статически определимой, нагруженной силой Q (пока еще неизвестной) и усилием в первом стержне:

$$N_1 = \sigma_T \cdot F_1 \quad (1)$$

При дальнейшем увеличении нагрузки напряжение и во втором стержне достигнет предела текучести: $N_2 = \sigma_T \cdot F_2 \quad (2)$

Написав уравнение статики и подставив в него значения усилий (1) и (2), найдем из этого уравнения предельную грузоподъемность Q_T^k .

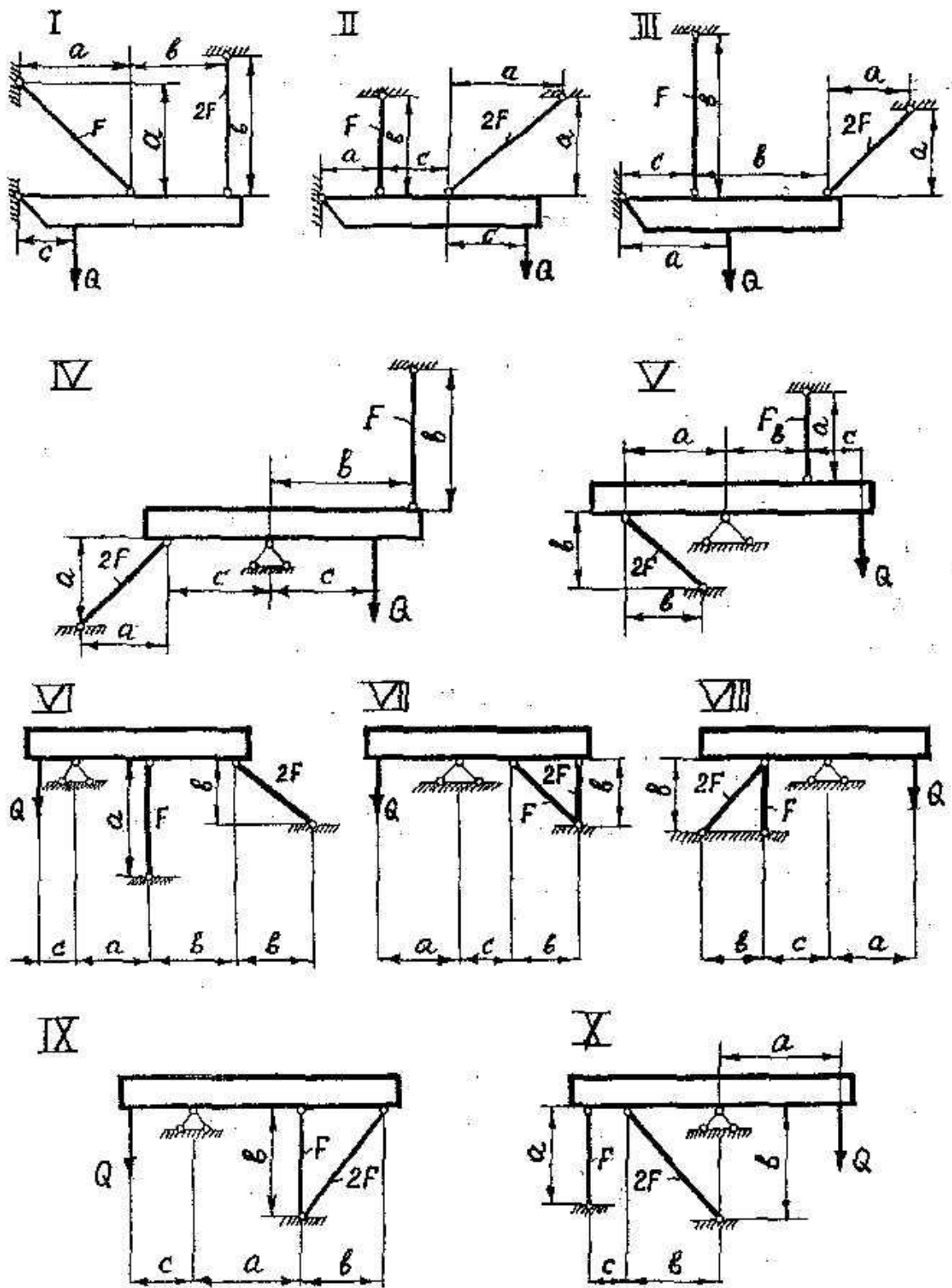


Рис. 2

Таблица 1

№ строки	Схема по рис. 1, 2, 3	F, см ²	a	b	c	P, Н	Напряжение, МПа		
			м				σ _x	σ _y	τ _x
1	I	11	2,1	2,1	1,1	1100	10	10	10
2	II	12	2,2	2,2	1,2	1200	20	20	20
3	III	13	2,3	2,3	1,3	1300	30	30	30
4	IV	14	2,4	2,4	1,4	1400	40	40	40
5	V	15	2,5	2,5	1,5	1500	50	50	50
6	VI	16	2,6	2,6	1,6	1600	60	60	60
7	VII	17	2,7	2,7	1,6	1700	70	70	70
8	VII	18	2,8	2,8	1,8	1800	80	80	80
9	IX	19	2,9	2,9	1,9	1900	90	90	90
0	X	10	3,0	3,0	2,0	2000	100	100	100
	e	b	г	д	e	г	г	д	e

Задача 3.

Стальной кубик (рис. 3) находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (одно из трех главных напряжений, равное нулю). Требуется найти: 1) главные напряжения и направление главных площадок; 2) максимальные касательные напряжения, равные наибольшей полуразности главных напряжений; 3) относительные деформации ε_x , ε_y , ε_z . 4) относительное изменение объема; 5) удельную потенциальную энергию деформаций. Данные взять из табл. 1.

Задача 4.

К стальному валу приложены три известных момента: M_1 , M_2 , M_3 (рис. 4.). Требуется: 1) установить, при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю; 2) для найденного значения X построить эпюру крутящих моментов; 3) при заданном значении $[\tau]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его значение до ближайшего равного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм; 4) построить эпюру углов закручивания; 5) найти наибольший относительный угол закручиваний (на 1м). Данные взять из табл. 2. Принять $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

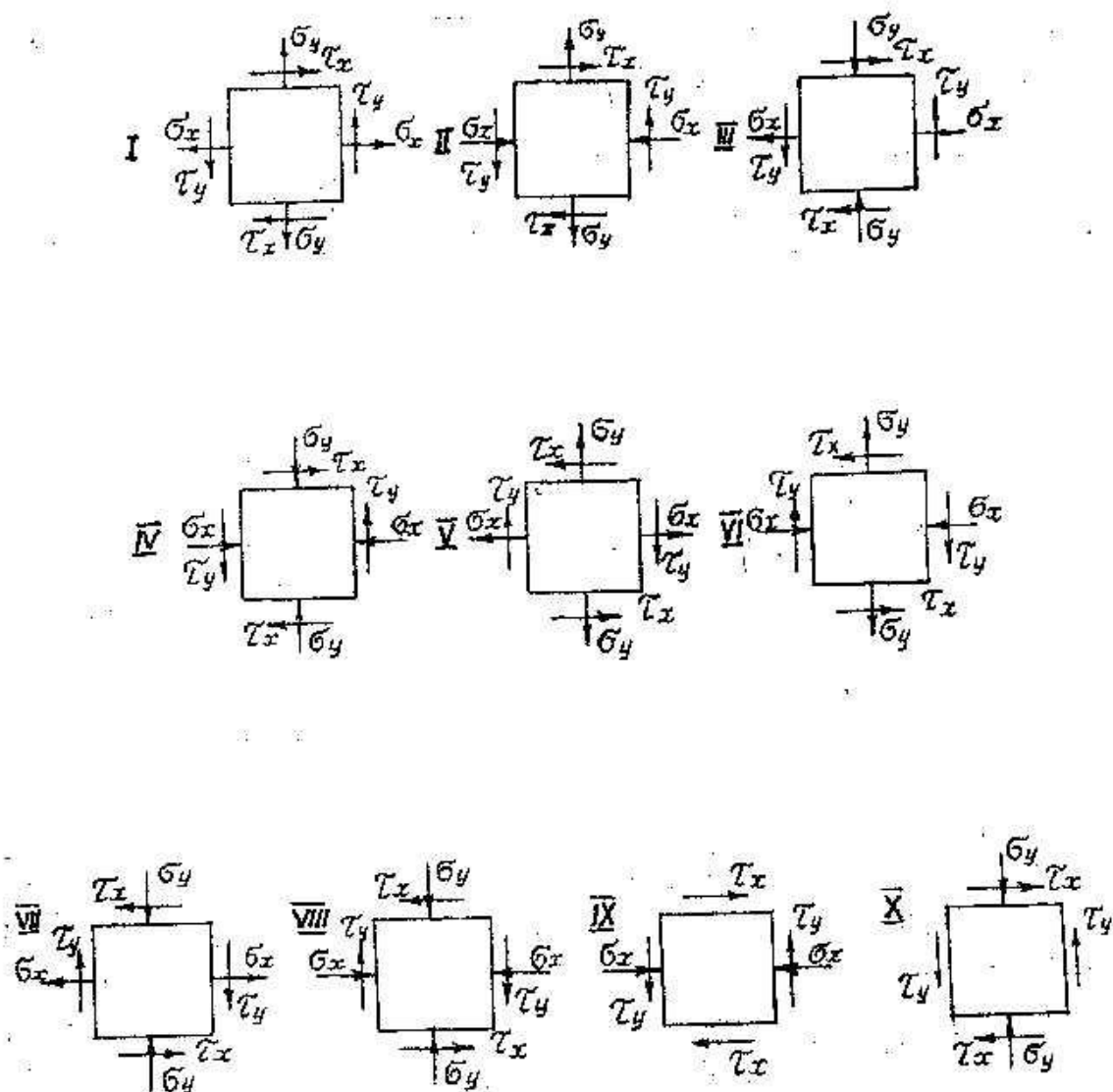


Рис. 3

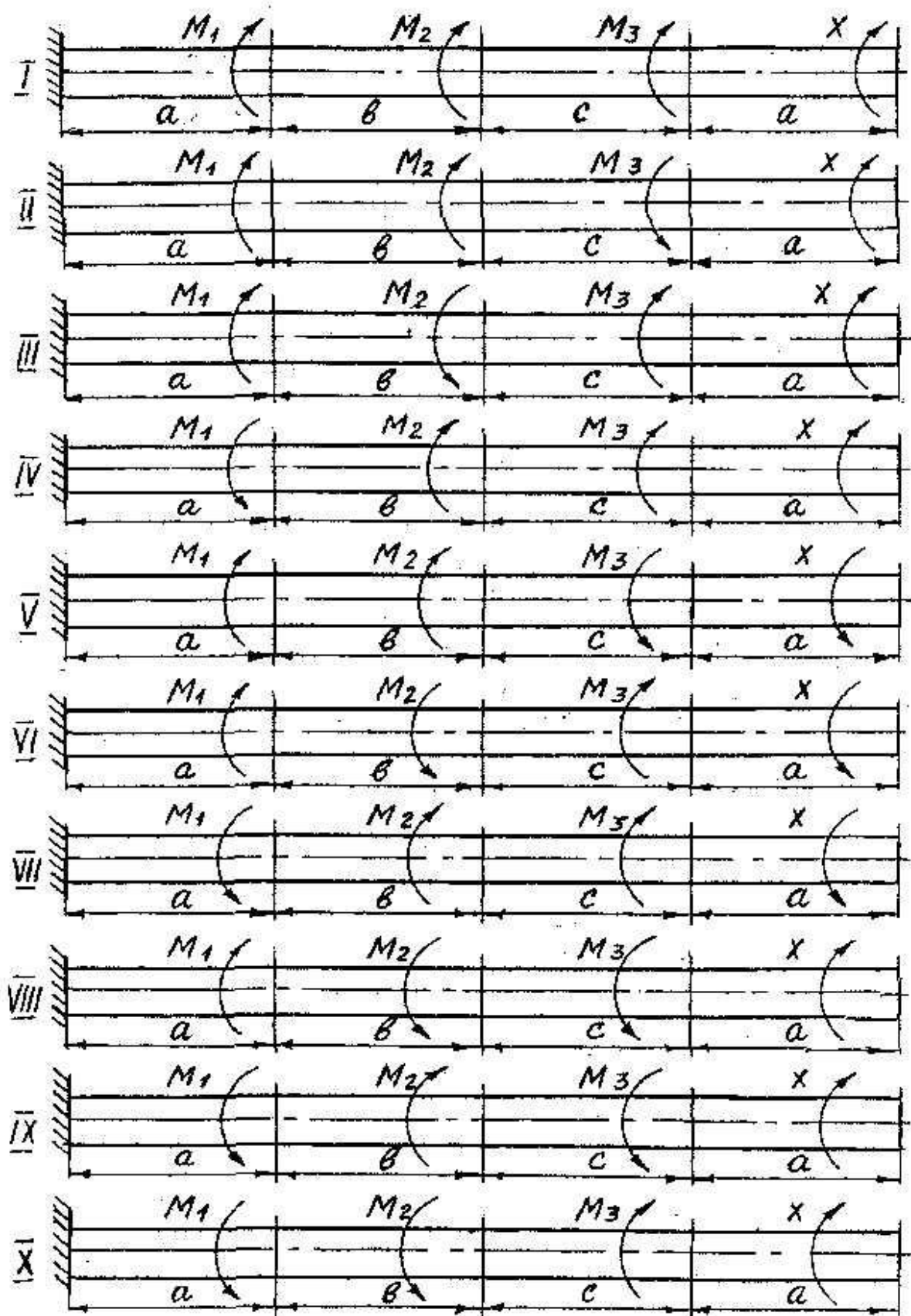


Рис. 4

Таблица 2

№ строки	Схема по рис. 4	a	b	c	Моменты, Н·м			[т] МПа
		расстояния, м			M ₁	M ₂	M ₃	
1	I	1,1	1,1	1,1	1100	1100	1100	35
2	II	1,2	1,2	1,2	1200	1200	1200	40
3	III	1,3	1,3	1,3	1300	1300	1300	45
4	IV	1,4	1,4	1,4	1400	1400	1400	50
5	V	1,5	1,5	1,5	1500	1500	1500	55
6	VI	1,6	1,6	1,6	1600	600	1600	60
7	VII	1,6	1,6	1,6	1700	700	1700	65
8	VIII	1,8	1,8	1,8	1800	800	1800	70
9	IX	1,9	1,9	1,9	1900	900	1900	75
0	X	2,0	2,0	2,0	2000	1000	2000	80
	e	z	δ	e	z	δ	e	e

4.2. Задачи для контрольной работы №2

Задача 1.

Для заданного в табл. 3 поперечного сечения, состоящего из швеллера и равнобокого уголка, или из двутавра и равнобокого уголка, или из швеллера и двутавра (рис. 5) требуется: 1) определить положение центра тяжести; 2) найти осевые (экваториальные) и центробежные моменты инерции, относительно случайных осей, проходящих через центр тяжести (Z_c и Y_c); 3) определить направление главных центральных осей (u и v); 4) найти моменты инерции относительно главных центральных осей; 5) вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все размеры в числах и все оси.

При расчете все необходимые данные следует брать из таблицы сортамента и ни в коем случае не заменять части профилей прямоугольниками.

Можно использовать таблицы сортамента прокатной стали, приведенные в любом учебнике или задачнике с указанием источника.

Таблица 3

№ строки	Тип сечения по рис. 5	Швеллер	Равнобокий угол	Двутавр
1	I	14	80x80x8	12
2	II	16	80x80x6	14
3	III	18	90x90x8	16
4	IV	20	90x90x7	18
5	V	22	90x90x6	20a
6	VI	25	100x100x8	20
7	VII	27	100x100x10	22a
8	VIII	30	100x100x12	22
9	IX	33	125x125x10	24a
0	X	36	125x125x12	24
	e	z	δ	e

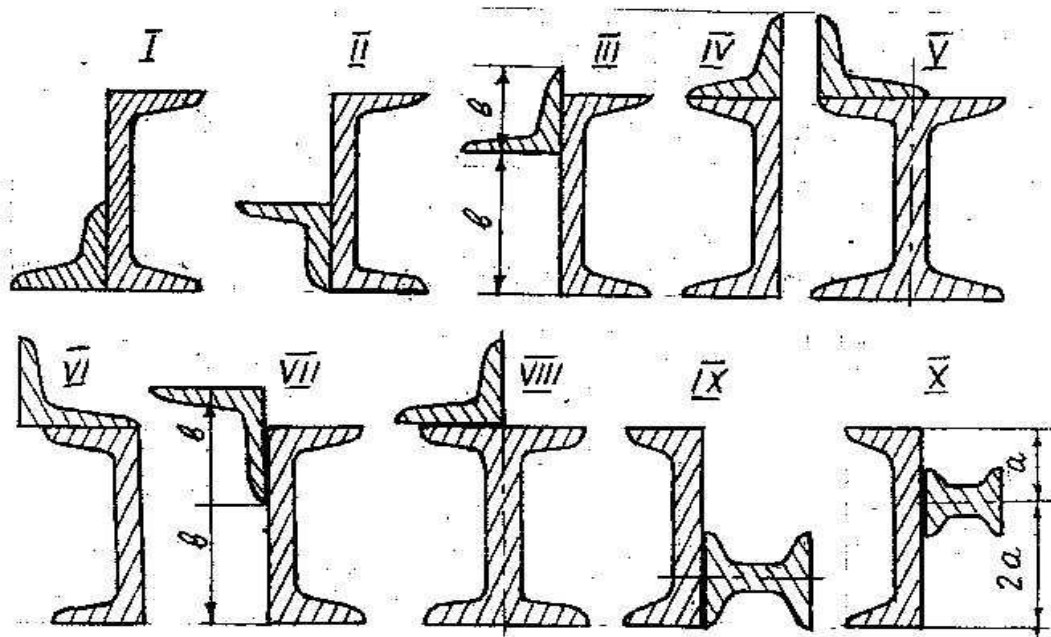


Рис. 5

Задача 2.

Для заданных двух схем балок (рис. 6) требуется написать выражения Q и M для каждого участка в общем виде, построить эпюры Q и M , найти $M_{\max}$ и подобрать: а) для схемы **a** деревянную балку круглого поперечного сечения при $[\sigma] = 8$ МПа; б) для схемы **b** стальную балку двутаврового поперечного сечения при $[\sigma] = 160$ МПа. Данные взять из табл. 4.

Таблица 4

№ строки	Схема по рис. 6	l_1	l_2	Расстояние в долях пролета			M , КН·м	Сосредоточенная сила P , кН	q , кН/м
				a_1 а	a_2 а	a_3 а			
1	I	1,1	6	1	9	1	10	10	10
2	II	1,2	7	2	8	2	20	20	12
3	III	1,3	3	3	7	3	3	3	3
4	IV	1,4	4	4	6	4	4	4	4
5	V	1,5	5	5	5	5	5	5	5
6	VI	1,6	6	6	6	1	6	6	6
7	VII	1,7	7	7	7	2	7	7	7
8	VIII	1,8	8	8	8	3	8	8	8
9	IX	1,9	9	9	9	4	9	9	9
0	X	2,0	10	10	10	5	10	10	10
	e	d	e	z	d	e	z	d	e

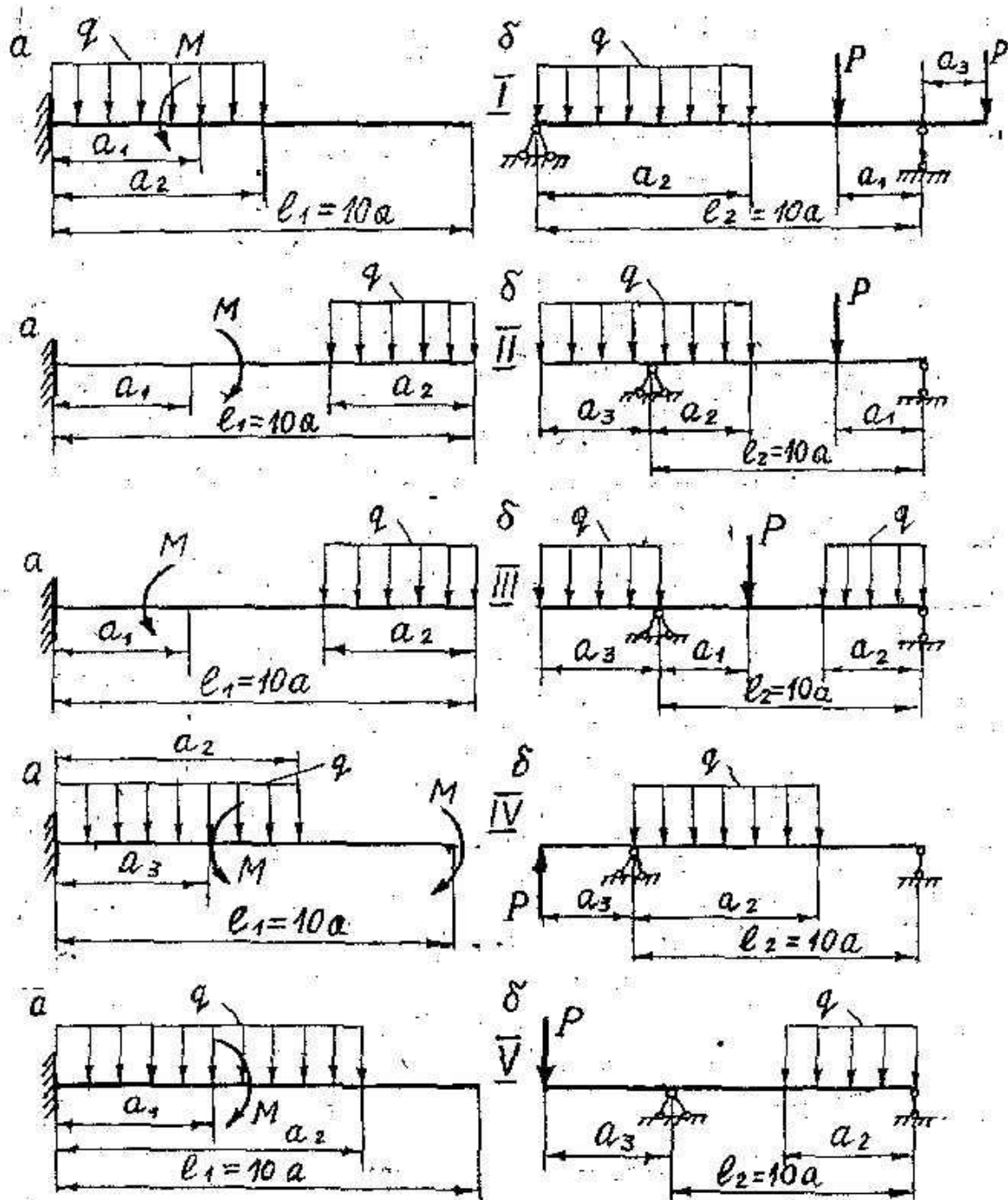


Рис. 6

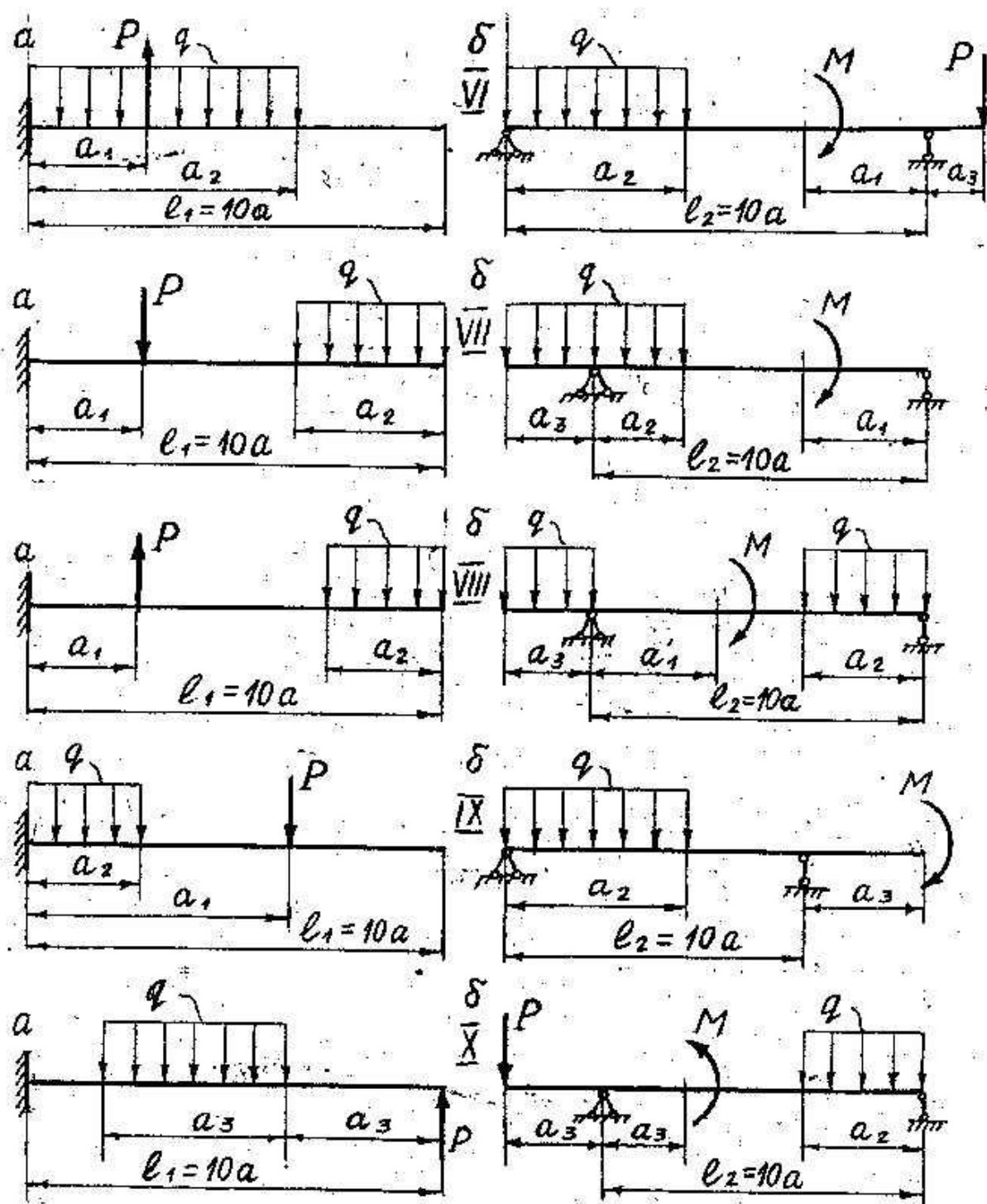


Рис. 6 (окончание)

4.3. Задачи дня контрольной работы № 3

Задача 1.

На рис. 7а изображена нагруженная в своей плоскости рама, вертикальные элементы которой имеют моменты инерции I , а горизонтальные элементы - $k \cdot I$; на рис. 7б изображена нагруженная перпендикулярно своей плоскости рама, сделанная из стержня круглого поперечного сечения ($G = 0,4 E$). Требуется для обеих рам: 1) установить степень статической неопределимости и выбрать основную систему; 2) написать канонические уравнения; 3) построить эпюры M от единичных сил и от заданной нагрузки; 4) найти перемещения; 5) найти величины лишних неизвестных; 6) построить окончательные эпюры внутренних силовых факторов: M , N и Q для схемы на рис. 7 а и $M_{из}$, $M_{к}$ и Q для схемы на рис. 7 б. Данные взять из табл. 5.

Таблица 5

№ строки	Схема рамы	l	h	q , кН/м	K	P , Н	a	b
		m					m	
1	I	11	2	15	1,1	1100	1,1	1,1
2	II	12	3	20	1,2	1200	1,2	1,2
3	III	3	4	30	1,3	1300	1,3	1,3
4	IV	4	5	4	1,4	1400	1,4	1,4
5	V	5	6	5	1,5	1500	1,5	1,5
6	VI	6	2	6	1,6	600	0,6	0,6
7	VII	7	3	7	1,7	700	0,7	0,7
8	VII	8	4	8	1,8	800	0,8	0,8
9	IX	9	5	9	1,9	900	0,9	0,9
0	X	10	6	10	2,0	1000	1,0	1,0
	e	z	d	e	v	z	d	e

Задача 2.

На двух балках двутаврового сечения установлен двигатель весом Q (рис. 8), делающий n оборотов в минуту. Центробежная сила инерции, возникающая вследствие неуравновешенности вращающихся частей двигателя равна H . Собственный вес балок не учитывать. Требуется найти: 1) частоту собственных колебаний ω_0 ; 2) частоту изменения возмущающей силы ω ; 3) коэффициент нарастания колебаний

$$\beta = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$$

(если коэффициент β , определяемый по этой формуле, окажется отрицательным, то в дальнейшем расчете следует учитывать его абсолютную величину); 4) динамический коэффициент

$$K_d = 1 + \frac{f_H}{f_Q} \cdot \beta = 1 + \frac{H}{Q} \cdot \beta;$$

5) наибольшее нормальное напряжение в балках. Данные взять из табл. 6.

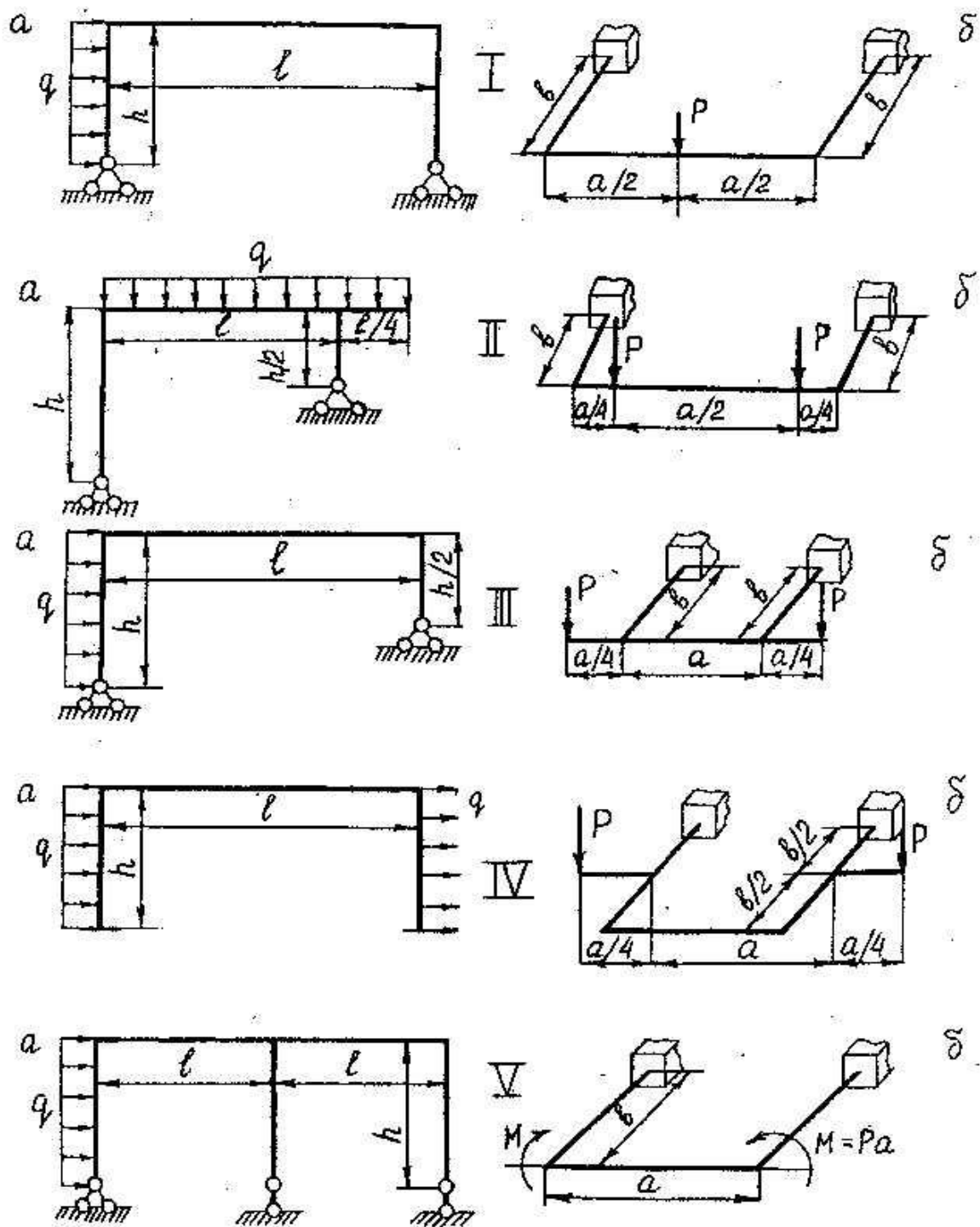


Рис. 7

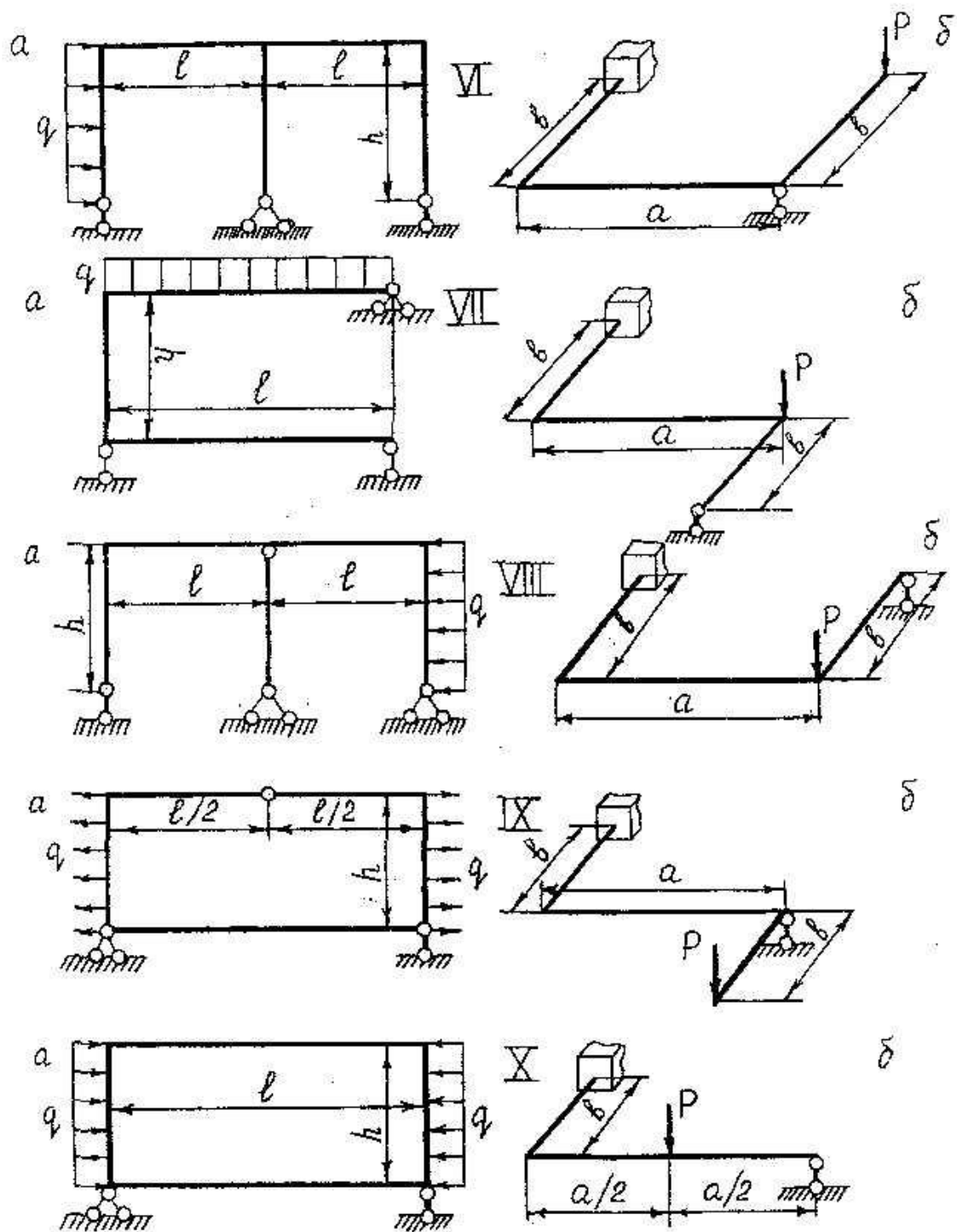


Рис. 7 (окончание)

Таблица 6

№ строки	Схема по рис. 8	№ двутавра	l, м	Q	H	n об/мин
				КН		
1	I	16	1,1	11	11	400
2	II	18	1,2	12	2	450
3	III	20а	1,3	13	3	500
4	IV	20	1,4	14	4	550
5	V	22а	1,5	15	5	600
6	VI	22	1,6	16	6	650
7	VII	24а	1,7	17	7	700
8	VII	24	1,8	18	8	750
9	IX	27а	1,9	19	9	800
0	X	27	2,0	20	10	850
	e	д	e	г	д	e

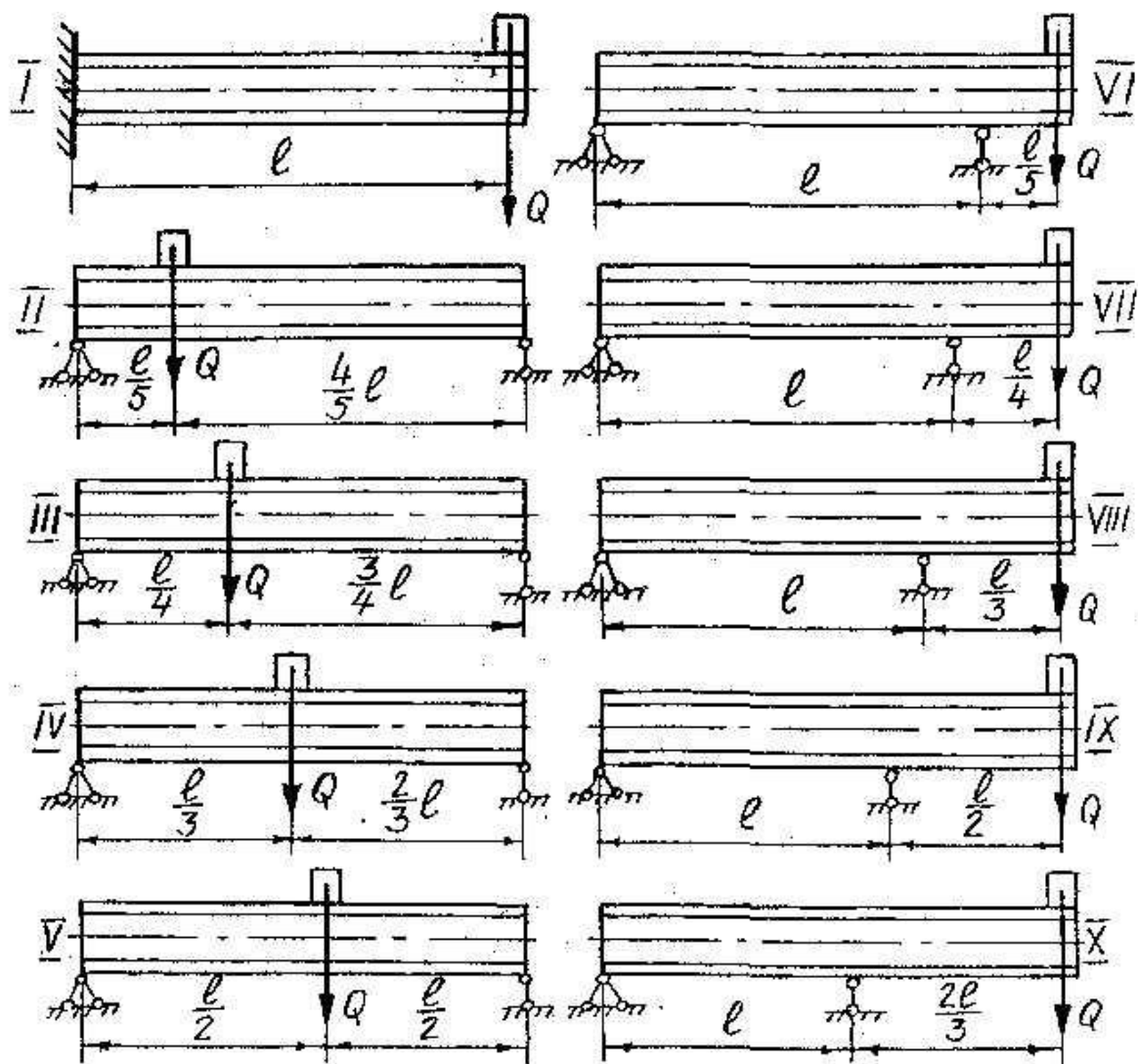


Рис. 8

Задача 3.

Валик и жестко соединенный с ним ломаный стержень того же поперечного сечения вращаются с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси АВ (рис. 9). Требуется: 1) построить эпюру нагибающих моментов от сил инерции, возникающих на вертикальном СД и горизонтальном ДЕ участках ломаного стержня; силы инерции самого валика можно не учитывать (при изображенном на рис. 9 положении ломаного стержня силы инерции складываются с силами собственного веса, но последними, ввиду их незначительности при построении эпюры M , можно пренебречь); 2) найти допустимое число оборотов валика в минуту при допустимом напряжении $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ и $\gamma = 78 \text{ кН/м}^3$. Данные взять из табл. 7.

Указания. Для упрощения вычислений рекомендуется производить сначала их в общем виде, обозначив интенсивность сил инерции на горизонтальном участке через q . Равнодействующие сил инерции на горизонтальном и вертикальном участках, опорные реакции, координаты эпюры надо выразить через q и l .

Таблица 7

№ строки	Схема по рис. 9	l , см	Диаметр валика d , мм
1	I	15	21
2	II	20	22
3	III	25	23
4	IV	30	24
5	V	35	25
6	VI	40	16
7	VII	45	17
8	VII	50	18
9	IX	55	19
0	X	60	20
	e	δ	z

Задача 4.

В опасном сечении вала с диаметром d действует крутящий момент M_k и изгибающий момент $M_{из}$. Вал сделан из углеродистой стали, предел прочности которой равен σ_b , а предел текучести σ_t , и имеет галтельный переход радиусом $\rho = 2,3 \text{ мм}$. Отношение большего диаметра вала к меньшему равно 1,2. Поверхность вала полирована.

Определить коэффициент запаса прочности в опасном сечении вала, приняв нормальные напряжения изгиба изменяющимися по симметричному циклу, а касательные напряжения кручения - по отнулевому циклу (от нуля до максимального значения).

Коэффициенты, учитывающие влияние концентрации напряжений и размеры, можно считать соответственно одинаковыми для нормальных и для касательных напряжений. Данные взять из табл. 8.

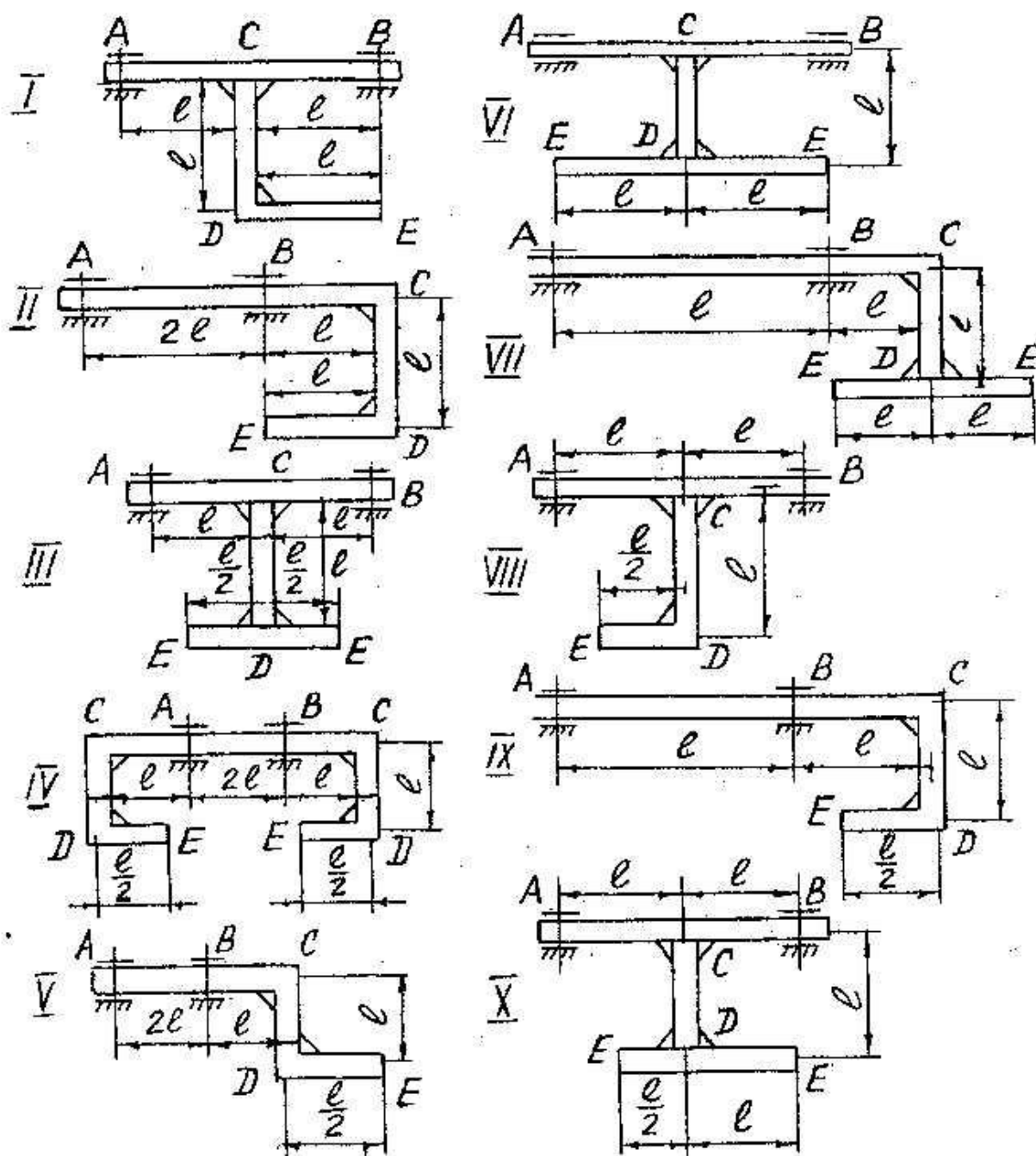


Рис. 9

Порядок выполнения решения:

1. Найти максимальные нормальные напряжения и максимальные касательные напряжения.

2. По эмпирическим формулам найти предел текучести при кручении и пределы выносливости при кручении и изгибе. Можно воспользоваться формулами:

$$\tau_T = 0,50 \cdot \sigma_T; \quad \sigma_{-1} = (0,55 - 0,0001 \cdot \sigma_B) \sigma_B; \quad \tau_{-1} = 0,6 \cdot \sigma_{-1} .$$

σ_B в формуле для σ_{-1} в МПа.

3. Найти эффективные коэффициенты концентрации напряжений K_σ и K_τ по формуле:

$$K_\sigma = K_\tau = \frac{\alpha_\sigma}{1 + \left(1 + \frac{2}{d}\right) \cdot 10^{-\left(0,33 + \frac{\sigma_T}{712}\right)}},$$

где d - в мм, σ_T - в МПа.

Теоретический коэффициент концентрации напряжений α_σ определить по рис. 10.

4. Найти коэффициенты $K_{d\sigma}$ и $K_{d\tau}$, учитывающие влияния размеров:

$$K_{d\sigma} = K_{d\tau} = 1 - 0,1541 g \frac{d}{7,5},$$

где d - в мм.

5. Найти общие коэффициенты снижения пределов выносливости K :

$$K = \frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}}; \quad K = \frac{K_\tau}{K_{d\tau}}$$

6. Найти коэффициенты запаса прочности по нормальным и касательным напряжениям. Коэффициент, учитывающий влияние средних касательных напряжений, определить по формуле:

$$\psi_\tau = \frac{0,01 + 10^{-4} \sigma_B}{K}, \quad \text{где } \sigma_B \text{ в МПа.}$$

7. Найти общие коэффициенты запаса прочности по усталости и текучести.

Замечание. Разрешается вычислять коэффициент запаса прочности го усталостному разрушению по методикам, отличным от приведенной выше. При этом необходимо сослаться на использованную литературу.

Таблица 8

№ строки	d, мм	M _к	M _и	σ _в	σ _т
		Н·м		МПа	
1	31	210	210	510	240
2	32	220	220	520	240
3	33	230	230	530	250
4	34	240	240	540	250
5	35	250	250	550	260
6	36	260	260	560	260
7	37	270	270	570	270
8	38	280	280	580	270
9	39	290	290	590	280
0	40	300	300	600	280
	e	δ	e	δ	δ

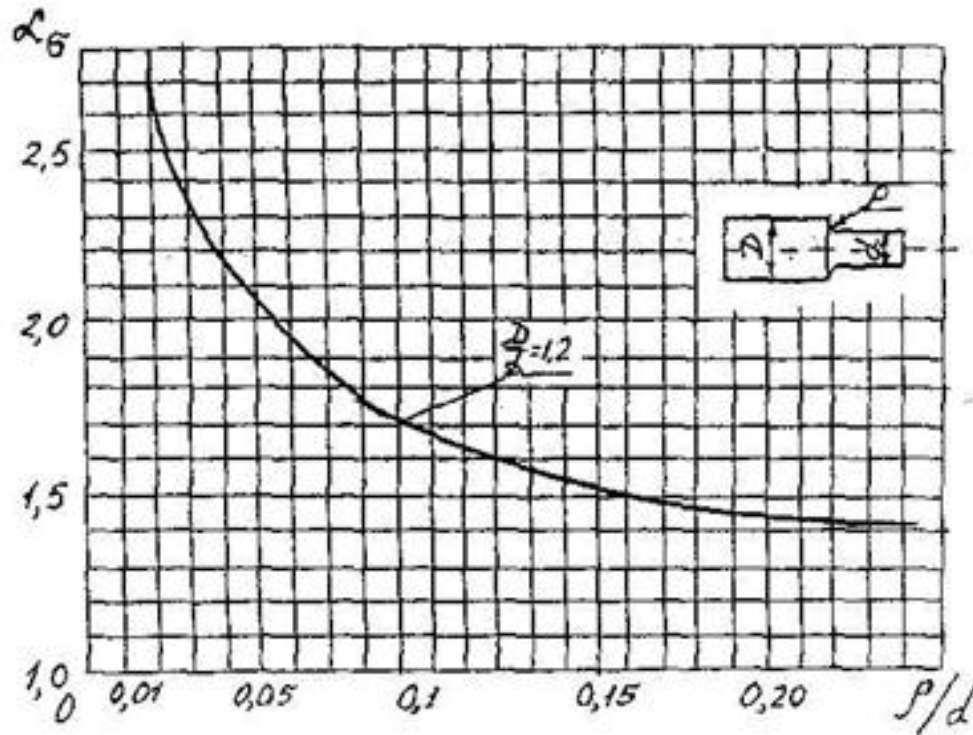


Рис. 10

5. Примеры решения задач

5.1. Примеры решения задач в контрольной работе № 1

Задача № 1 (пример расчета, схема рис. 11).

Исходные данные:

$P = 1500 \text{ Н}$, $F = 12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $a = 2,5 \text{ м}$, $b = 3 \text{ м}$, $c = 1,2 \text{ м}$, $d = 1,4 \text{ м}$,
 $\gamma = 78 \text{ кН/м}^3$, модуль упругости стали: $E = 2,5 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

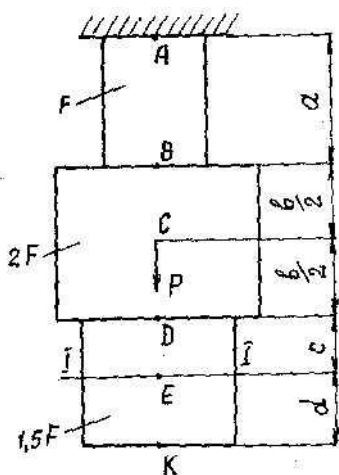


Рис. 11

Решение

На основании принципа независимости действия сил полное перемещение δ_I сечения I - I равно $\delta_I = \delta_{IP} + \delta_{IG}$,

где δ_{IP} - перемещение сечения I - I от действия силы P ,

δ_{IG} - от действия собственного веса.

Перемещения δ_{IP} и δ_{IG} равны удлинениям участка стержня, находящегося между сечениями А и E длиной $a + b + c$, т.е.

$$\delta_{IP} = \Delta l_{AB,P} + \Delta l_{BC,P} + \Delta l_{CD,P} + \Delta l_{DE,P}$$

$$\delta_{IG} = \Delta l_{AB,G} + \Delta l_{BC,G} + \Delta l_{CD,G} + \Delta l_{DE,G}$$

Нагрузка P вызывает удлинения только двух участков стержня АВ и ВС длиной a и $b/2$ соответственно. На остальных участках продольные силы от этой нагрузки равны нулю, т.е. $\Delta l_{CD,P} = \Delta l_{DE,P} = 0$.

Так как продольная сила N_z и жесткость EF в поперечных сечениях стержня постоянны в пределах каждого участка, то на основании закона Гука

удлинение (укорочение) участка стержня длиной l от действия продольной силы N_z определяют по формуле

$$\Delta l = \frac{N_z l}{EF}.$$

Поскольку в пределах участков АВ и ВС продольная сила N_z равна P , то

$$\begin{aligned} \delta_{IP} &= \Delta l_{AB,P} + \Delta l_{BC,P} = \frac{P \cdot a}{EF_{AB}} + \frac{P \cdot b/2}{EF_{BC}} = \frac{P \cdot a}{EF} + \frac{P \cdot b}{2E \cdot 2F} = \frac{P}{EF} \left(a + \frac{b}{4} \right) = \\ &= \frac{1500}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} (2,5 + 3 \cdot 0,25) = 2,03 \cdot 10^{-5} \text{ м.} \end{aligned}$$

Определим удлинение $\Delta l_{DE,G}$ участка DE длиной c от собственного веса стержня. Оно вызывается весом G_{EK} нижележащего участка длиной d и собственным весом G_{DE} участка DE .

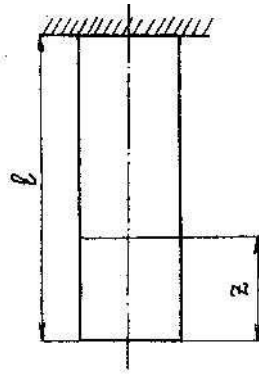


Рис. 12

В общем случае, при определении удлинения стержня от собственного веса (рис. 12) продольная сила N_z в поперечном сечении z стержня (на расстоянии z от его нижнего конца) равна весу нижележащей части бруса, т.е. $N_z = \gamma F_z$, где γ - объемный вес материала стержня.

Тогда удлинение Δl находим по формуле:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{EF} = \int_0^l \frac{\gamma F_z dz}{EF} = \frac{\gamma}{E} \int_0^l z dz = \frac{\gamma l^2}{2E}$$

Если умножить числитель и знаменатель последнего выражения на F , учитывая, что $\gamma Fl = G$, где G - вес всего участка бруса длиной l , получим

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2 F}{2EF} = \frac{Gl}{2EF}$$

Выражение для $\Delta l_{DE,G}$ будет иметь вид

$$\Delta l_{DE,G} = \frac{G_{EK} \cdot c}{EF_{DE}} + \frac{G_{DE} \cdot c}{2EF_{DE}} = \frac{c}{1,5EF} \left(G_{EK} + \frac{1}{2} G_{DE} \right),$$

где $F_{DE} = 1,5 F$,

$$G_{EK} = \gamma \cdot 1,5 F d = 78 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \cdot 1,4 = 196,56 \text{ Н}$$

$$G_{DE} = \gamma \cdot 1,5 F c = 78 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \cdot 1,2 = 168,48 \text{ Н}.$$

$$\text{Тогда } \Delta l_{DE,G} = \frac{1,2}{1,5 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} (196,56 + 0,5 \cdot 168,48) = 0,09 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Определим удлинение $\Delta l_{CD,G}$ участка CD длиной $b/2$ от собственного веса стержня. Оно вызывается весом G_{DK} нижележащего участка DK длиной $c + d$ и собственным весом G_{CD} участка CD :

$$\Delta l_{CD,G} = \frac{G_{DK} \cdot b/2}{EF_{CD}} + \frac{G_{CD} \cdot b/2}{2EF_{CD}} = \frac{b}{4EF} \left(G_{DK} + \frac{1}{2} G_{CD} \right),$$

где $F_{CD} = 2F$,

$$G_{DK} = \gamma \cdot 1,5 F \cdot (c + d) = 78 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \cdot 2,6 = 365,04 \text{ Н},$$

$$G_{CD} = \gamma \cdot 2F \cdot b/2 = 78 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5 = 280,8 \text{ Н}.$$

$$\text{Тогда } \Delta l_{CD,G} = \frac{1,2}{4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} (365,04 + 0,5 \cdot 280,8) = 0,16 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Аналогично определяем удлинения $\Delta l_{BC,G}$ и $\Delta l_{AB,G}$ участков BC и AB соответственно

$$\Delta l_{BC,G} = \frac{(G_{DK} + G_{CD}) \cdot b/2}{EF_{BC}} + \frac{G_{BC} \cdot b/2}{2EF_{BC}} = \frac{b}{4EF} \left(G_{DK} + G_{CD} + \frac{1}{2} G_{BC} \right) =$$

$$= \frac{3}{4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} (365,04 + 280,8 + 0,5 \cdot 280,8) = 0,25 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\text{где } G_{BC} = \gamma \cdot 2F \cdot b/2 = 78 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5 = 280,8 \text{ Н}.$$

$$\Delta l_{AB,G} = \frac{(G_{DK} + G_{BD}) \cdot a}{EF_{AB}} + \frac{G_{AB} \cdot a}{2EF_{AB}} = \frac{a}{EF} \left(G_{DK} + G_{BD} + \frac{1}{2} G_{AB} \right) =$$

$$= \frac{2,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} (365,04 + 561,6 + 0,5 \cdot 234,0) = 1,09 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\text{где } G_{BD} = \gamma \cdot 2F \cdot b = 78 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \cdot 3 = 561,6 \text{ Н},$$

$$G_{AB} = \gamma \cdot F \cdot a = 78 \cdot 10^3 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \cdot 2,5 = 234,0 \text{ Н}.$$

Таким образом, удлинение стержня от действия собственного веса будет равно:
 $\delta_{IG} = (2,18 + 0,25 + 0,16 + 0,09) \cdot 10^{-5} = 1,59 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$

Удлинение стержня будет $\delta_I = (2,03 + 1,59) \cdot 10^{-5} = 3,62 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,0362 \text{ мм}.$

Сечение I – I переместится вниз на 0,0362 мм.

Задача №2 (пример расчета, схема рис. 13а).

Исходные данные:

$F = 14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $a = 2,4 \text{ м}$, $b = 2,8 \text{ м}$, $c = 1,7 \text{ м}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$, $n = 1,5$.

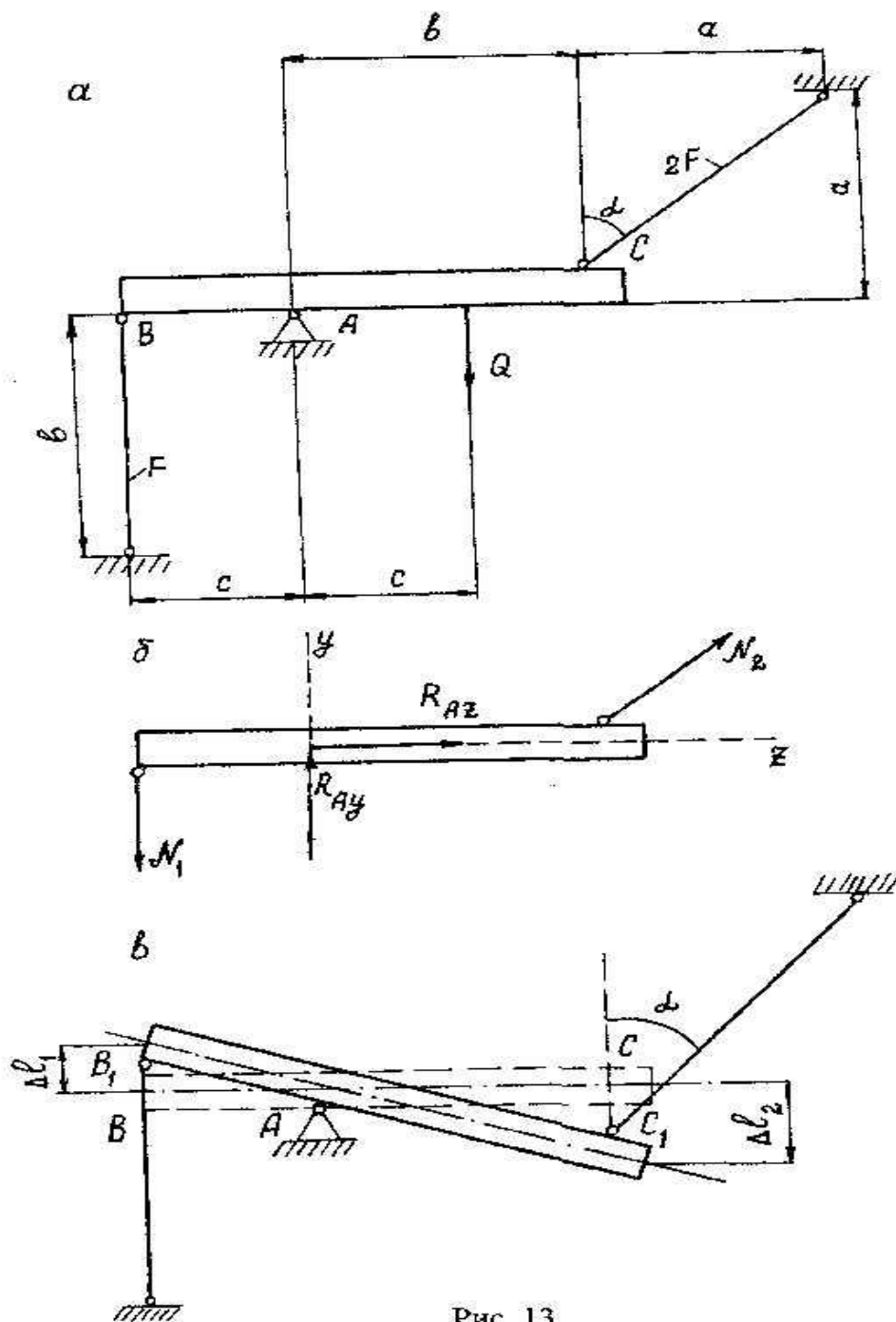


Рис. 13

Решение

1. Определение усилий и напряжений в стержнях.

Для определения величин усилий в стержнях в зависимости от силы Q применим метод сечений. Сделав сечения по всем стержням и приложив в местах сечений усилия N_1, N_2 , возникающие в стержнях, рассмотрим равновесие оставшейся части, нагруженной усилиями N_1 и N_2 , реакциями опоры A (R_{AZ}, R_{AY}) и силой Q (рис. 13 б). Составим уравнения равновесия бруса

$$\sum Z = 0; \quad R_{AZ} = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = 0; \quad R_{AY} - N_1 + N_2 \cos \alpha - Q = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0; \quad -N_1 \cdot 1,7 - N_2 \cos \alpha \cdot 2,8 + Q \cdot 1,7 = 0 \quad (3)$$

Поскольку в три уравнения равновесия входят четыре неизвестные силы, то задача является один раз статически неопределимой.

Для составления дополнительного уравнения совместности деформаций рассмотрим деформацию системы. В результате удлинения стержней брус (который предполагается абсолютно жестким) повернется вокруг шарнира A , оставаясь прямым. Перемещение шарнира B равно удлинению Δl_1 первого (левого) стержня, а перемещение шарнира C - удлинению Δl_2 второго (правого) стержня, деленному на $\cos \alpha$ (см. рис. 13 в).

Из подобия треугольников $ABB_1 \sim ACC_1$ находим

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2 / \cos \alpha} = \frac{1,7}{2,8},$$

откуда
$$\Delta l_2 = \frac{2,8 \cos \alpha}{1,7} \Delta l_1.$$

На основании закона Гука
$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} \quad \text{и} \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2},$$

где $l_1 = b = 2,8 \text{ м}, \quad l_2 = a\sqrt{2} = 3,96 \text{ м};$

$$F_1 = F = 14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \quad F_2 = 2F = 28 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Тогда
$$\frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{2,8 \cos \alpha}{1,7} \cdot \frac{N_1 l_1}{EF_1},$$

откуда
$$N_2 = \frac{2,8 \cos \alpha}{1,7} \cdot \frac{l_1 F_2}{l_2 F_1} N_1.$$

Учитывая, что $\cos \alpha = 45^\circ$, получим
$$N_2 = \frac{2,8 \cdot 2,8 \cdot 28 \cdot 10^{-4} \cdot 0,707}{1,7 \cdot 3,96 \cdot 14 \cdot 10^{-4}} \cdot N_1, \quad N_2 = 1,65 \cdot N_1$$

Подставим найденное значение N_2 в последнее уравнение равновесия(3):

$$-N_1 \cdot 1,7 - 1,65 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2,8 \cdot N_1 + Q \cdot 1,7 = 0.$$

Тогда
$$N_1 = \frac{1,7}{4,97} Q = 0,342 Q,$$

$$N_2 = 1,65 \cdot 0,342 Q = 0,564 \cdot Q.$$

Напряжения в стержнях

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{0,342Q}{14 \cdot 10^{-4}} = 244Q,$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{0,564Q}{28 \cdot 10^{-4}} = 201Q.$$

2. Определение допускаемой нагрузки $Q_{дон}$.

Напряжение в первом стержне σ_1 больше, чем во втором σ_2 . Поэтому допускаемую нагрузку $Q_{дон}$ находим из условия

$$\sigma_2 = [\sigma] = 160 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\text{т.е. } 244 Q_{дон} = 160 \cdot 10^6$$

$$\text{и } Q_{дон} = \frac{160 \cdot 10^6}{244} = 0,656 \cdot 10^6 \text{ Н} = 656 \text{ кН}.$$

3. Определение предельной грузоподъемности системы.

При определении величины предельной грузоподъемности системы необходимо найти предельные усилия, которые возникнут в стержнях, когда напряжения в них достигают предела текучести.

Предельные усилия будут равны:

$$N_1^{np} = \sigma_T F_1 = 240 \cdot 10^6 \cdot 14 \cdot 10^{-4} = 336 \cdot 10^3 \text{ Н} = 336 \text{ кН}$$

$$N_2^{np} = \sigma_T F_2 = 240 \cdot 10^6 \cdot 28 \cdot 10^{-4} = 672 \cdot 10^3 \text{ Н} = 672 \text{ кН}.$$

Подставив значения N_1^{np} и N_2^{np} в уравнение равновесия (3) найдем предельную грузоподъемность Q_T^K

$$-336 \cdot 1,7 - 672 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2,8 + Q_T^K \cdot 1,7 = 0$$

$$Q_T^K = \frac{1901,7}{1,7} = 1118,6 \text{ кН}$$

Предельно допускаемая нагрузка равна:

$$Q_{дон} = \frac{Q_T^K}{[n]} = \frac{1118,6}{1,5} = 746 \text{ кН}.$$

4. Сравнение значений величины $Q_{дон}$, полученных разными методами.

При сравнении полученных величин видим, что значение $Q_{дон}$, полученное по методу допускаемых нагрузок, больше найденного методом допускаемых напряжений на $\frac{746-656}{656} \cdot 100\% = 13,7\%$, что подтверждает положение о том, что метод допускаемых напряжений, в отличие от метода допускаемых нагрузок, не позволяет определить полную несущую способность системы, так как для статически неопределимых систем переход одного элемента в пластическую стадию работы, как правило, не означает наступления предельного состояния.

Задача № 3 (пример расчета, схема рис. 14 а).

Исходные данные:

$$|\sigma_x| = 80 \text{ МПа}, |\sigma_y| = 0, |\tau_x| = 30 \text{ МПа}.$$

Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$.

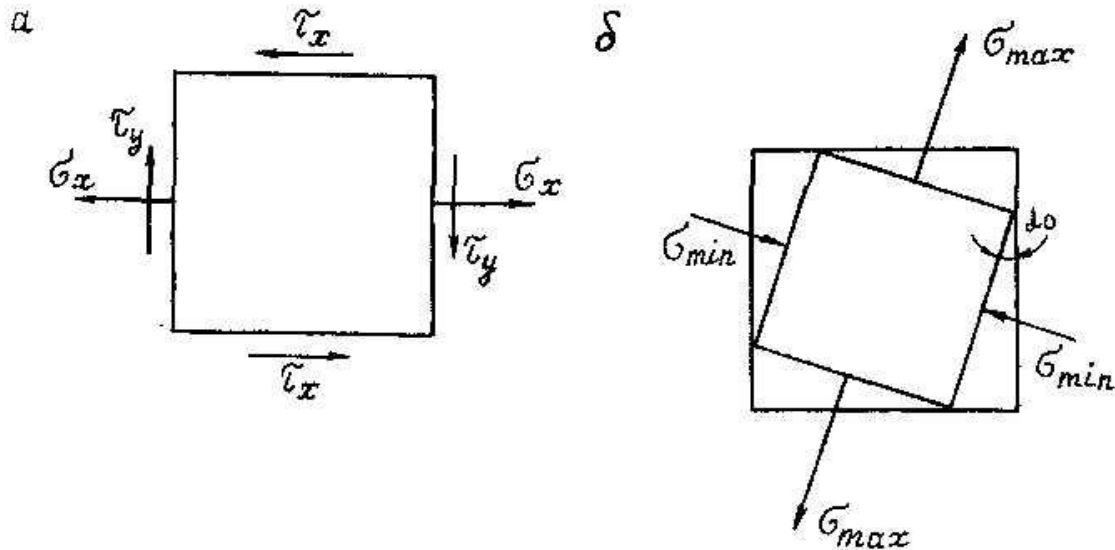


Рис. 14

Решение

1. Определение главных напряжений и главных площадок.

Для напряжений принято следующее правило знаков. Растягивающее нормальное напряжение положительно, а сжимающее — отрицательно. Касательное напряжение положительно, если его направление получается поворотом внешней нормали к площадке на угол 90° по ходу часовой стрелки.

Поэтому, в данном случае, учитывая схему, изображенную на рис.14а, значения напряжений таковы: $\sigma_x = 80 \text{ МПа}$, $\sigma_y = 0$, $\tau_x = -30 \text{ МПа}$.

Главные напряжения определяем по формуле

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2},$$

$$\text{т.е. } \sigma_{max,min} = \frac{80}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{80^2 + 4(-30)^2} = 40 \pm 50 \text{ МПа}.$$

Следовательно, $\sigma_{max} = 90 \text{ МПа}$,
 $\sigma_{min} = -10 \text{ МПа}.$

Для определения направления главных площадок воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot (-30)}{80 - 0} = -0,75 ,$$

откуда $2\alpha_0 \approx -36,87^\circ$ и $\alpha_0 = -18,4^\circ$.

Для определения площадки, по которой действуют напряжения $\sigma_{\max}$, поворачиваем вертикальную площадку (так как по ней действуют нормальные напряжения большие, чем по горизонтальной площадке) на угол α_0 равный $18,4^\circ$ по часовой стрелке, т.е. в том направлении, в котором вектор касательного напряжения (на поворачиваемой площадке) стремится вращать элементарный параллелепипед относительно его центра. Найденная таким образом площадка показана на рис. 14б. По перпендикулярной к ней главной площадке действуют напряжения $\sigma_{\min}$.

2. Нахождение максимальных касательных напряжений. Экстремальные касательные напряжения находим по формуле:

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} .$$

$$\text{Тогда } \tau_{\max} = \frac{90 - (-10)}{2} = 50 \text{ МПа}; \tau_{\min} = -\frac{90 - (-10)}{2} = -50 \text{ МПа}.$$

3. Определение относительных деформаций.

Относительные деформации ε_x , ε_y , ε_z , определяем при помощи формул обобщенного закона Гука, которые для случая плоского напряженного состояния имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x); \varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) .$$

Следовательно,

$$\varepsilon_x = \frac{80}{2 \cdot 10^5} = 4 \cdot 10^{-4}; \varepsilon_y = -\frac{0,3 \cdot 80}{2 \cdot 10^5} = -1,2 \cdot 10^{-4}; \varepsilon_z = -\frac{0,3 \cdot 80}{2 \cdot 10^5} = -1,2 \cdot 10^{-4}$$

4. Нахождение относительно изменения объема. Относительное изменение объема равно:

$$\Theta = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) .$$

$$\text{Поэтому } \Theta = \frac{1-2 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^5} \cdot 80 = 1,6 \cdot 10^{-4}.$$

5. Определение удельной потенциальной энергии деформации. Удельную потенциальную энергию деформации определяем по формуле:

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y) + \frac{\tau_x^2}{2G} ,$$

где $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ - модуль сдвига.

$$\text{Тогда } G = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0,3)} = 0,769 \cdot 10^5 \text{ Мпа} ,$$

после чего находим величину u :

$$u = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} (80^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot 80 \cdot 0) + \frac{(-30)^2}{2 \cdot 0,769 \cdot 10^5} = 0,0219 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}.$$

Задача № 4 (пример расчета, схема рис. 15а).

Исходные данные:

$M_1 = 1200 \text{ Нм}$, $M_2 = 600 \text{ Нм}$, $M_3 = 1500 \text{ Нм}$, $a = 1,2 \text{ м}$, $b = 1,3 \text{ м}$,

$c = 1,5 \text{ м}$, $l = 1,4 \text{ м}$, $[\tau] = 80 \text{ МПа}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

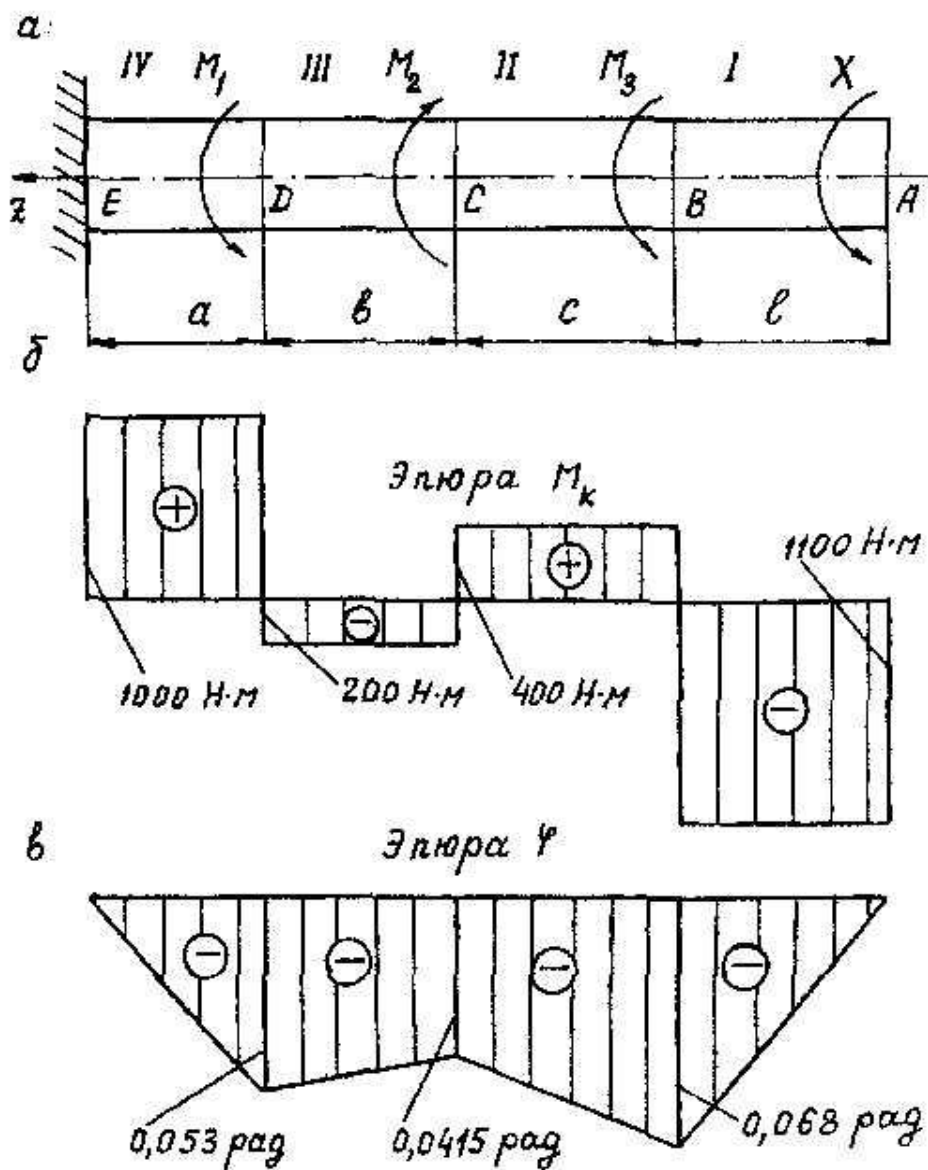


Рис. 15

Решение

1. Определение значения крутящего момента.

Для определения значения момента X используем метод сечений. Согласно расчетной схемы (рис. 15а):

1) для участка I ($0 \leq z \leq 1,4 \text{ м}$) уравнение равновесия имеет вид:

$M_{K_1} - X = 0$, тогда крутящий момент M_{K_1} :

$$M_{K_1} = X;$$

2) для участка II ($1,4 \text{ м} \leq z \leq 2,9 \text{ м}$):

$$M_{K_2} - M_3 - X = 0, \text{ то } M_{K_2} = M_3 + X;$$

3) для участка III ($2,9 \text{ м} \leq z \leq 4,2 \text{ м}$):

$$M_{K_3} + M_2 - M_3 - X = 0, \text{ то } M_{K_3} = -M_2 + M_3 + X;$$

4) для участка IV ($4,2 \text{ м} \leq z \leq 5,4 \text{ м}$):

$$M_{K_4} - M_1 + M_2 - M_3 - X = 0, \text{ то } M_{K_4} = M_1 - M_2 + M_3 + X.$$

Угол поворота сечения A относительно условно неподвижного сечения B равен углу закручивания участка AB :

$$\varphi_{BA} = \frac{X \cdot l}{GJ_p}$$

где $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ - полярный момент инерции сечения.

Угол поворота сечения B относительно сечения C равен углу закручивания участка BC :

$$\varphi_{CB} = \frac{M_{K_2} \cdot c}{GJ_p} = \frac{(M_3 + X) \cdot c}{GJ_p}.$$

Угол поворота сечения C относительно сечения D равен углу закручивания участка CD :

$$\varphi_{DC} = \frac{M_{K_3} \cdot b}{GJ_p} = \frac{(-M_2 + M_3 + X) \cdot b}{GJ_p}.$$

Угол поворота сечения D относительно сечения E равен углу закручивания участка DE :

$$\varphi_{ED} = \frac{M_{K_4} \cdot a}{GJ_p} = \frac{(M_1 - M_2 + M_3 + X) \cdot a}{GJ_p}.$$

Угол поворота сечения A относительно условия неподвижного сечения E равен углу закручивания участка AE :

$$\varphi_{EA} = \varphi_{BA} + \varphi_{CB} + \varphi_{DC} + \varphi_{ED}.$$

Поскольку по условию задачи $\varphi_{EA} = 0$, то

$$\frac{1}{GJ_p} \cdot ((M_1 - M_2 + M_3 + X)a + (-M_2 + M_3 + X)b + (M_3 + X)c + X \cdot l) = 0.$$

Умножим обе части на GJ_p и после преобразований получим:

$$X = \frac{-aM_1 + (a+b)M_2 - (a+b+c)M_3}{a+b+c+l} = \frac{-1,2 \cdot 1200 + 2,5 \cdot 600 - 4 \cdot 1500}{5,4} = -1100 \text{ Нм}$$

2. Построение эпюры крутящих моментов.

Зная величину момента X находим значения крутящих моментов на всех участках:

$$M_{K_1} = -1100 \text{ Нм};$$

$$M_{K_2} = 1500 - 1100 = 400 \text{ Нм};$$

$$M_{K_3} = -600 + 1500 - 1100 = 200 \text{ Нм};$$

$$M_{K_4} = 1200 - 600 + 1500 - 1100 = 1000 \text{ Нм}.$$

Эпюра крутящих моментов приведена на рис. 15б.

3. Определение диаметра вала.

Поскольку диаметры вала на участках одинаковы, то определить наиболее напряженное сечение (или участок вала) можно по эпюре крутящих моментов. Наибольший по модулю крутящий момент имеет место на участке I ($0 \leq z \leq 1,4 \text{ м}$), поэтому этот участок является наиболее напряженным.

Диаметр вала находим из условия прочности

$$\tau_{\max} = \frac{M_{K\max}}{W_\rho} \leq [\tau],$$

где $M_{K\max} = 1100 \text{ Нм}$, $W_\rho = \frac{\pi d^4}{16}$ - полярный момент сопротивления.

$$\text{Тогда } \frac{1100 \cdot 16}{\pi d^3} \leq 80 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{1100 \cdot 16}{\pi \cdot 80 \cdot 10^6}} = 4,12 \cdot 10^{-2} \text{ мм}.$$

Округляя значение диаметра, получим $d = 40 \text{ мм}$.

4. Построение эпюры углов закручивания.

Найдем числовые значения углов поворота:

φ_{BA} , φ_{CB} , φ_{DC} , φ_{ED} (см. формулы в пункте 1).

Полярный момент инерции сечения равен:

$$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 4,12^4 \cdot 10^{-8}}{32} = 28,29 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Тогда

$$\varphi_{BA} = \frac{-1100 \cdot 1,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 28,29 \cdot 10^{-8}} = -0,068 \text{ рад},$$

$$\varphi_{CB} = \frac{400 \cdot 1,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 28,29 \cdot 10^{-8}} = 0,0265 \text{ рад},$$

$$\varphi_{DC} = \frac{-200 \cdot 1,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 28,29 \cdot 10^{-8}} = -0,0115 \text{ рад},$$

$$\varphi_{ED} = \frac{1000 \cdot 1,2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 28,29 \cdot 10^{-8}} = 0,053 \text{ рад}.$$

Угол поворота сечения C найдем как алгебраическую сумму углов закручивания участков AB и BC :

$$\varphi_{CA} = \varphi_{CB} + \varphi_{BA} = 0,0265 - 0,068 = -0,0415 \text{ рад}.$$

Аналогично,

$$\varphi_{DA} = \varphi_{DC} + \varphi_{CA} = -0,0115 - 0,0145 = -0,0153 \text{ рад},$$

$$\varphi_{EA} = \varphi_{ED} + \varphi_{DA} = 0,053 - 0,053 = 0.$$

Эпюру углов закручивания приведем на рис. 15в.

5. Определение наибольшего относительного угла закручивания. Наибольший относительный угол закручивания (на 1 м) находим на наиболее нагруженном участке вала:

$$\varphi_0 = \frac{M_{K \max}}{G J_p} = \frac{1100 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (40 \cdot 10^{-3})^4} = 0,0547 \text{ рад/м} = 3,13 \text{ град/м}.$$

5.2. Примеры решения задач в контрольной работе № 2

Задача №1 (пример расчета, схема рис. 16).

Задано сечение, составленное из швеллера №20 и равнобокого уголка $(90 \times 90 \times 8) \cdot 10^{-9} \text{ м}^3$ (рис. 16).

Выписываем все необходимые геометрические характеристики для профилей, входящих в составное сечение.

(Феодосьев В.И. Соппротивление материалов: Учеб. для вузов. - М.: Изд-во МТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. - 592 с.).

Швеллер №20 (ГОСТ 8240-72):

$$h = 0,2 \text{ м}, \quad e_{шв} = 0,076 \text{ м}, \quad F = 23,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \quad J_x^{шв} = 1520 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \\ J_y^{шв} = 113 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \quad x_{шв} = 2,07 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 0,0207 \text{ м}.$$

Уголок $(90 \times 90 \times 8) \cdot 10^{-9} \text{ м}^3$ (ГОСТ 8509-72):

$$e_{yz} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 0,09 \text{ м}, \quad F_{yz} = 13,93 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

$$J_{X_1}^{y\Gamma} = J_{Y_1}^{y\Gamma} = 106,11 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

$$J_{X_0}^{y\Gamma} = J_{max}^{y\Gamma} = 168,42 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

$$J_{Y_0}^{y\Gamma} = J_{min}^{y\Gamma} = 43,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

$$x_{yz} = 2,51 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 0,0251 \text{ м}.$$

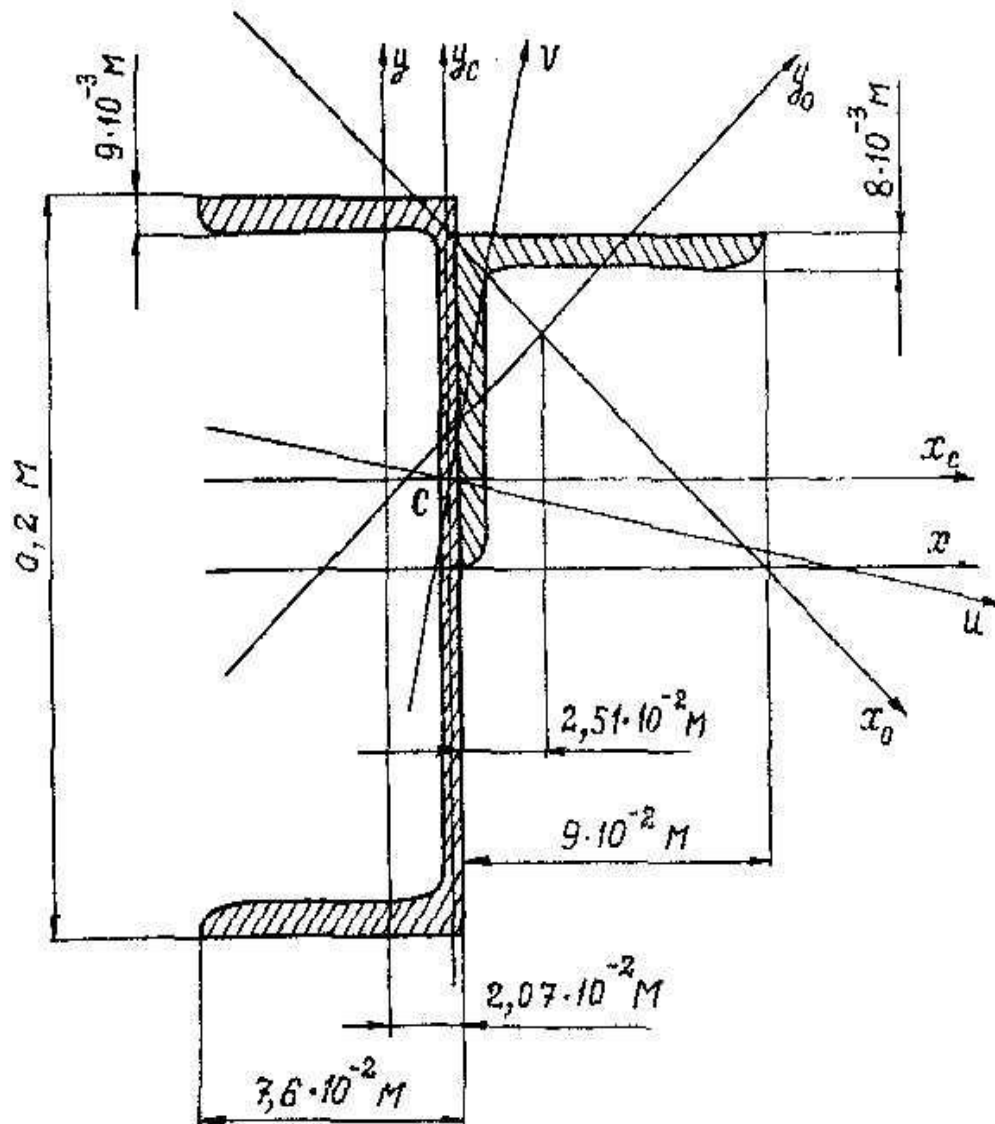


Рис. 16

Решение

I. Определение положения центра тяжести.

Находим общую площадь составного сечения:

$$F = F_{шв} + F_{y2} = (23,4 + 13,93) \cdot 10^{-4} = 37,33 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

В качестве вспомогательных осей для определения положения центра тяжести примем горизонтальную и вертикальную оси x и y , проходящие через центр тяжести швеллера. Статические моменты площади всего сечения относительно этих осей будут равны:

$$S_x = S_x^{шв} + S_x^{y2}; \quad S_y = S_y^{шв} + S_y^{y2}.$$

$S_x^{шв} = S_y^{шв} = 0$, т.к. оси x и y для швеллера центральные.

$$S_x^{y2} = S_{x_1}^{y2} + v \cdot F_{y2}; \quad S_y^{y2} = S_{y_1}^{y2} + a \cdot F_{y2},$$

где a и v - координаты центра тяжести уголка в системе координат xy .

$$a = x_{шв} + x_{yz} = (2,07 + 2,51) \cdot 10^{-2} = 4,58 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

$$b = b_{yz} - x_{yz} = (9 - 2,51) \cdot 10^{-2} = 6,49 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Поскольку x_1, y_1 - центральные оси для уголка, то $S_{x_1}^{y\Gamma} = S_{y_1}^{y\Gamma} = 0$.

Тогда

$$S_X = bF_{yz} = 6,49 \cdot 10^{-2} \cdot 13,93 \cdot 10^{-4} = 90,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$S_Y = aF_{yz} = 4,58 \cdot 10^{-2} \cdot 13,93 \cdot 10^{-4} = 63,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Координаты центра тяжести C вычисляем по формулам:

$$y_C = \frac{S_X}{F} = \frac{90,4 \cdot 10^{-6}}{37,33 \cdot 10^{-4}} = 2,42 \cdot 10^{-2} \text{ м,}$$

$$x_C = \frac{S_Y}{F} = \frac{63,8 \cdot 10^{-6}}{37,33 \cdot 10^{-4}} = 1,71 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

2. Определение осевых и центробежных моментов инерции сечения относительно осей, проходящих через его центр тяжести.

Введем систему координатных осей x_C, y_C , проходящих через центр тяжести составного сечения и параллельных осям x и y соответственно. Для определения указанных моментов инерции составного сечения воспользуемся формулами, выражающими зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей:

$$J_{x_C} = J_X^{шв} + b_1^2 F_{шв} + J_{x_1}^{y\Gamma} + b_2^2 F_{yz},$$

$$J_{y_C} = J_Y^{шв} + a_1^2 F_{шв} + J_{y_1}^{y\Gamma} + a_2^2 F_{yz},$$

$$J_{x_C y_C} = J_{XY}^{шв} + a_1 b_1 F_{шв} + J_{x_1 y_1}^{y\Gamma} + a_2 b_2 F_{yz},$$

где a_1, b_1 и a_2, b_2 - координаты центров тяжести соответственно швеллера и уголка в системе координат x_C, y_C .

$$a_1 = -x_C = -1,71 \cdot 10^{-2} \text{ м, } b_1 = -y_C = -2,42 \cdot 10^{-2} \text{ м,}$$

$$a_2 = a - x_C = (4,58 - 1,71) \cdot 10^{-2} = 2,87 \cdot 10^{-2} \text{ м,}$$

$$b_2 = b - y_C = (6,49 - 2,42) \cdot 10^{-2} = 4,07 \cdot 10^{-2} \text{ м,}$$

$$J_{XY}^{шв} = 0, \text{ т.к. } x \text{ — ось симметрии швеллера.}$$

$$J_{x_1 y_1}^{y\Gamma} = \frac{J_{min}^{y\Gamma} - J_{max}^{y\Gamma}}{2} \sin 2\alpha,$$

где α - угол, на который следует повернуть главную ось y_0 , относительно которой $J_{y_0} = J_{min}^{y\Gamma} (J_{x_0} = J_{max}^{y\Gamma})$, чтобы она совпала с осью x_1 . Он положителен, когда поворот оси наименьшего момента инерции y_0 к горизонтальной оси x_1 происходит против хода часовой стрелки, при этом $|\alpha| \leq 90^\circ$.

В данном случае $\alpha = -45^\circ$.

Тогда $\sin 2\alpha = \sin(-90^\circ) = -1$

$$\text{и } J_{x_1 y_1}^{y\Gamma} = \frac{(43,8 - 168,42) \cdot 10^{-8}}{2} (-1) = 62,31 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Подставив числовые значения величин в формулы для определения моментов инерции сечения, получим:

$$J_{x_c} = 1520 \cdot 10^{-8} + (-2,42)^2 \cdot 10^{-4} \cdot 23,4 \cdot 10^{-4} + 4,07^2 \cdot 10^{-4} \cdot 13,93 \cdot 10^{-4} + 106,11 \cdot 10^{-8} = 1993,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

$$J_{y_c} = 113 \cdot 10^{-8} + (-1,71)^2 \cdot 10^{-4} \cdot 23,4 \cdot 10^{-4} + 2,87^2 \cdot 10^{-4} \cdot 13,93 \cdot 10^{-4} + 106,11 \cdot 10^{-8} = 402,3 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

$$J_{x_c y_c} = 62,31 \cdot 10^{-8} + (-1,71) \cdot (-2,42) \cdot 10^{-4} \cdot 23,4 \cdot 10^{-4} + 2,87 \cdot 4,07 \cdot 10^{-4} \cdot 13,93 \cdot 10^{-4} = 321,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

3. Определение положения главных центральных осей.

Угол наклона главных осей инерции, проходящих через центр тяжести составного сечения, к центральным осям инерции x_c и y_c определим по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}} = \frac{2 \cdot 321,9 \cdot 10^{-8}}{(402,3 - 1993,9) \cdot 10^{-8}} = -0,4045,$$

$$2\alpha \approx -22^\circ, \quad \alpha \approx -11^\circ.$$

Ось максимум всегда составляет меньший угол с той из осей, относительно которой осевой момент инерции имеет большее значение. В данном случае $J_{x_c} > J_{y_c}$, поэтому для отыскания положения главной оси максимального момента инерции u следует ось x_c повернуть на угол α по ходу часовой стрелки (т.к. угол α получился отрицательным). Вторая ось минимального момента инерции v будет перпендикулярна оси u .

4. Определение моментов инерции относительно главных центральных осей.

Величины главных центральных моментов инерции составного сечения вычисляем по формуле:

$$J_{\max, \min} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{y_c} - J_{x_c})^2 + 4J_{x_c y_c}^2},$$

$$\begin{aligned} J_{\max} &= \left(\frac{1993,9 + 402,3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(1993,9 - 402,3)^2 + 4 \cdot 321,9^2} \right) \cdot 10^{-8} = (1198,1 + 858,4) \cdot 10^{-8} = 2056,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \end{aligned}$$

$$J_{\min} = (1198,10 + 858,4) \cdot 10^{-8} = 339,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Задача № 2

Схема I. Консольная балка (рис. 17а)

Исходные данные: $M = 18 \text{ кНм}$, $P = 15 \text{ кН/м}$, $q = 20 \text{ кН/м}$,

$[\sigma] = 8 \text{ МПа}$.

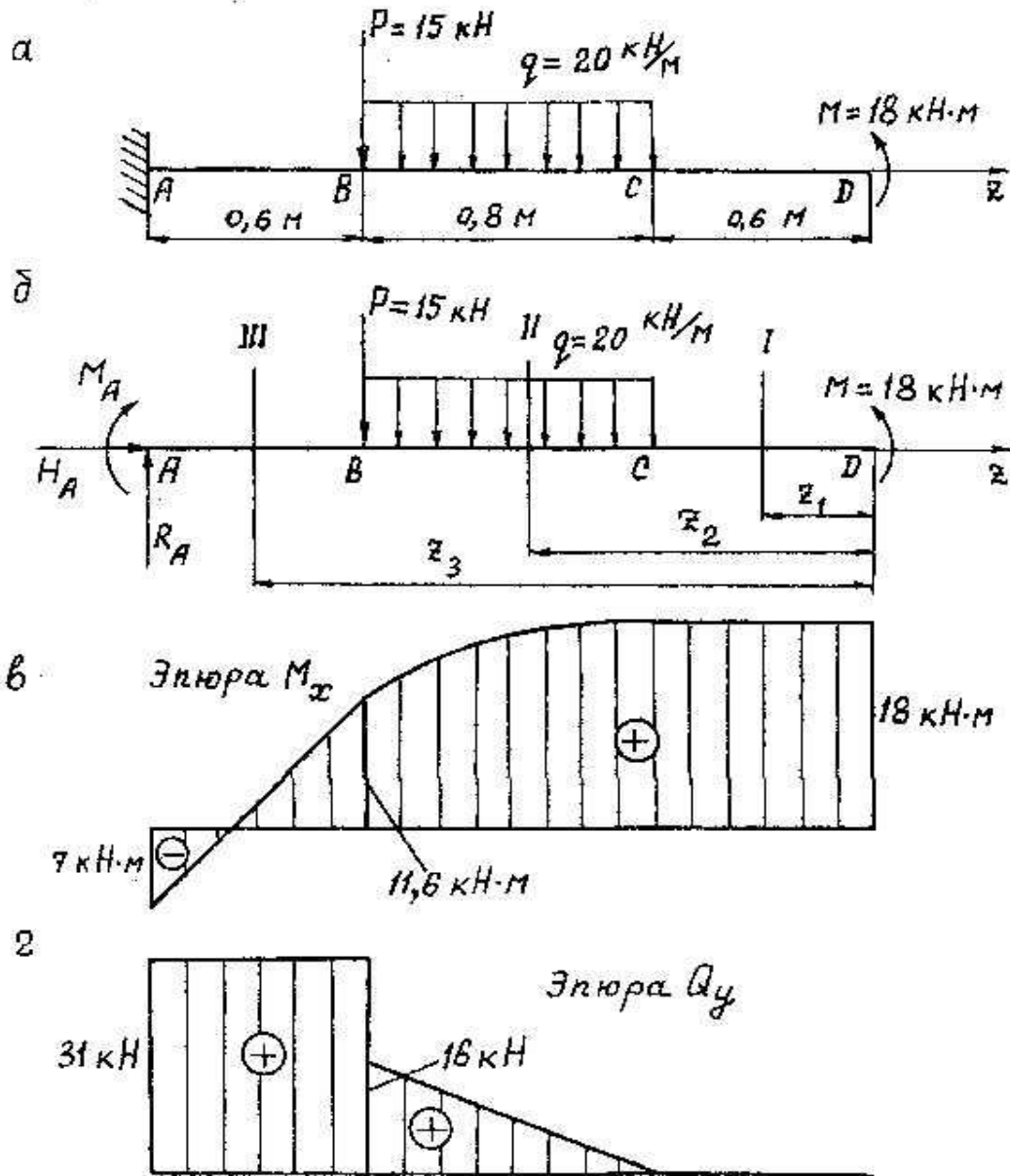


Рис. 17

Решение

Места расположения тех сечений, где происходит скачкообразное изменение физико-механических характеристик материалов конструкций, геометрических характеристик поперечных сечений, а также внешних нагрузок, являются границами между двумя смежными участками. В данном случае для однородной балки круглого поперечного сечения границами участков будут точки приложения нагрузок.

Рассматриваемая балка (рис. 17 б) имеет три участка: участок I - ДС, участок II - СВ, участок III - ВА.

Участок I ($0 \leq z_1 \leq 0,6 \text{ м}$).

Проведем сечение I - I на расстоянии z_1 от свободного конца балки. Составим выражения для изгибающего момента M_{X_1} и поперечной силы Q_{Y_1} :

$$M_{X_1} = M = 18 \text{ кНм}; Q_{Y_1} = 0.$$

Полученные выражения показывают, что на участке I M_{X_1} и Q_{Y_1} постоянны.

Участок II ($0,6 \leq z_2 \leq 1,4 \text{ м}$).

Выражения для M_{X_2} и Q_{Y_2} имеют вид:

$$M_{X_2} = -q \frac{(z_2 - 0,6)^2}{2} + M = -10(z_2 - 0,6)^2 + 18,$$

$$Q_{Y_2} = q(z_2 - 0,6) = 20(z_2 - 0,6).$$

Таким образом, величина Q_{Y_2} изменяется по линейному закону, а величина M_{X_2} - по закону квадратной параболы.

Подставив значения координаты z_2 , которые соответствуют характерным сечениям участка, в аналитические выражения для функций $M_{X_2}(z_2)$ и $Q_{Y_2}(z_2)$, определяем координаты эпюр для сечений C и B.

При $z_2 = 0,6 \text{ м}$ $M_{X_2} = -10(0,6 - 0,6) + 18 = 18 \text{ кНм}$,

$$Q_{Y_2} = 20(0,6 - 0,6) = 0;$$

при $z_2 = 1,4 \text{ м}$ $M_{X_2} = -10(1,4 - 0,6)^2 + 18 = 11,6 \text{ кНм}$,

$$Q_{Y_2} = 20(1,4 - 0,6) = 16 \text{ кН}.$$

Экстремальное значение изгибающего момента на участке II определим следующим образом:

$$\frac{dM_{X_2}}{dz_2} = -20(z_2 - 0,6) = 0, \text{ т.е. } z_2 = 0,6 \text{ м и } M_{X_2 \max} = 18 \text{ кНм.}^2$$

Участок III ($1,4 \leq z_3 \leq 2 \text{ м}$).

Составим аналитические выражения для M_{X_3} и Q_{Y_3} :

$$M_{X_3} = -q \cdot 0,8 \cdot (z_3 - 1) - P \cdot (z_3 - 1,4) + 18 = -20 \cdot 0,8 \cdot (z_3 - 1) - 15 \cdot (z_3 - 1,4) + 18 = -31z_3 + 55,$$

$$Q_{Y_3} = q \cdot 0,8 + P = 20 \cdot 0,8 + 15 = 31 \text{ кН}.$$

На участке III $Q_{Y_3} = \text{const}$, а M_{X_3} изменяется по линейному закону.

При $z_3 = 1,4 \text{ м}$ $M_{X_3} = -31 \cdot 1,4 + 55 = 11,6 \text{ кНм}$,

при $z_3 = 2 \text{ м}$ $M_{X_3} = -31 \cdot 2 + 55 = -7 \text{ кНм}$.

При построении эпюр (рис. 17 в, г) M_X и Q_Y для всей балки отложим перпендикулярно к оси абсцисс (линии, параллельной оси балки) в удобном

масштабе вычисленные значения M_X и Q_Y в характерных сечениях. Соединяем концы полученных ординат линиями, которые соответствуют законам изменения M_X и Q_Y на каждом участке, построим эпюры M_X и Q_Y для всей балки. Положительные эпюры Q_Y откладываем вверх, а отрицательные - вниз по оси абсцисс. Ординаты эпюры M_X откладываются со стороны сжатого волокна.

В данном примере наибольший по абсолютной величине изгибающий момент имеет место в сечениях, расположенных на участке I ($M_{max} = 18 \text{ кНм}$).

Круглое сечение деревянной балки подбираем из условия прочности при изгибе (допускаемое напряжение $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$):

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_X} \leq [\sigma].$$

Тогда требуемый момент сопротивления сечения балки при изгибе будет равен: $W_X^{mp} = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{18 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^6} = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$.

Момент сопротивления круглого сечения равен:

$$W_X = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Приравняв его W_X^{mp} , получим значения диаметра сечения

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2,25 \cdot 10^{-3}}{\pi}} = 0,284 \text{ м}.$$

Округлив, принимаем брус с поперечным сечением $d = 0,29 \text{ м}$ ($W_X = 2,394 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$).

Схема II. Двухопорная балка (рис. 18а)

Исходные данные:

$M = 18 \text{ кНм}$, $P = 15 \text{ кН/м}$, $q = 20 \text{ кН/м}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Решение

Определим опорные реакции. Отбросим опоры и заменим их влияние на балку опорными реакциями R_A , H_A и R_B (рис.18б). Реакции R_A и H_A представляют собой вертикальную и горизонтальную составляющие полной реакции шарнирно неподвижной опоры A , сила R_B является полной реакцией опоры B . Направления опорных реакций выбираются произвольно, если в результате расчета значение какой-либо реакции получается отрицательным, то в действительности ее направление противоположно принятому.

Числовые значения опорных реакций определяют из условий

$$\Sigma F_{KZ} = 0, \quad \Sigma M_A = 0, \quad \Sigma M_B = 0.$$

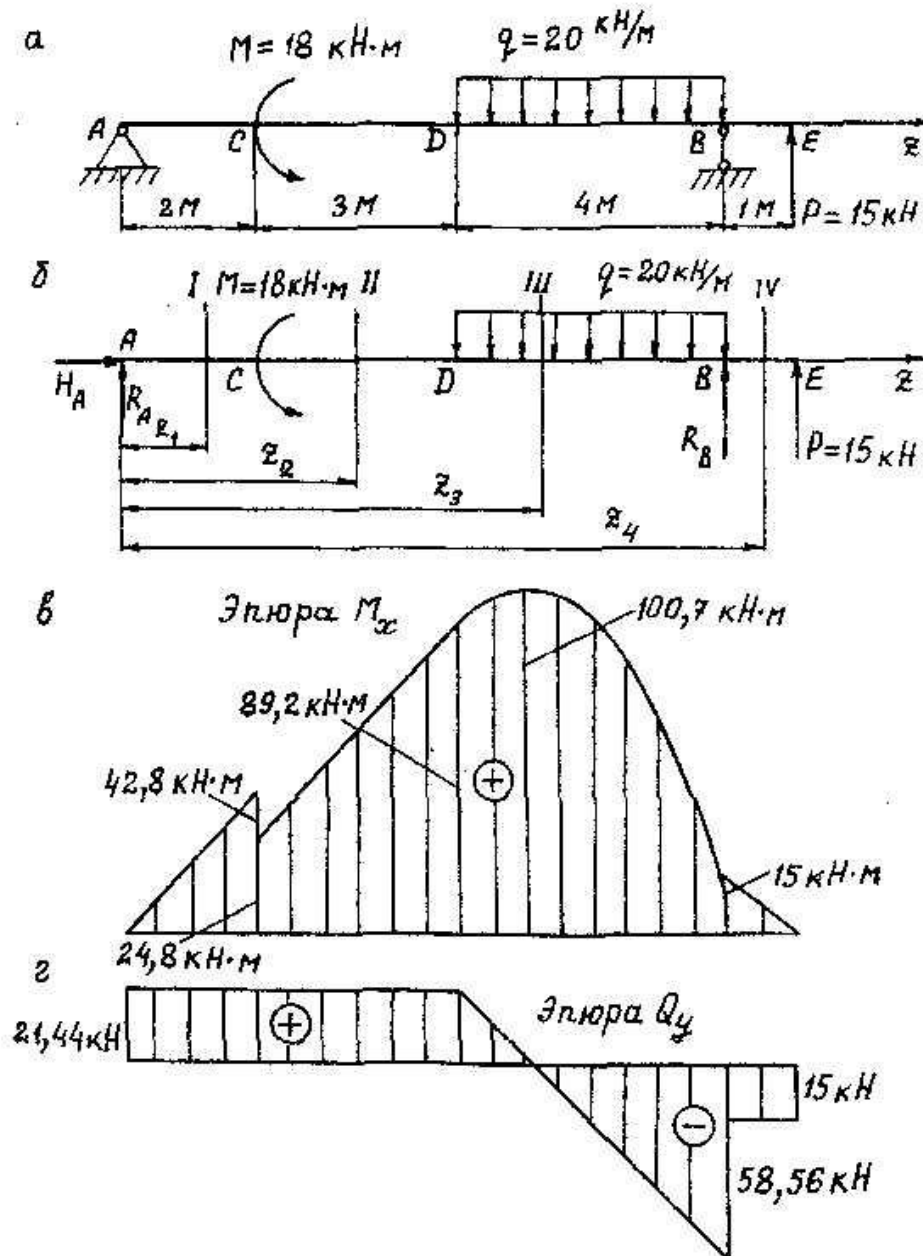


Рис. 18

Из первого условия – равенства нулю проекций всех сил на ось z , получим $H_A = 0$.

Для определения опорной реакции R_B составим сумму моментов всех сил относительно точки A :

$$\Sigma M_A = R_B \cdot 9 + M + P \cdot 10 - q \cdot 4 \cdot 7 = 0$$

Следовательно,

$$R_B = \frac{1}{9} (-M - P \cdot 10 + q \cdot 4 \cdot 7) = \frac{1}{9} (-18 - 15 \cdot 10 + 20 \cdot 4 \cdot 7) = 43,56 \text{ кН}.$$

Аналогично составим сумму моментов всех сил относительно точки B :

$$\Sigma M_B = 0 \quad - R_A \cdot 9 + M + P \cdot 1 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

$$\text{Откуда} \quad R_A = \frac{1}{9} (M + P \cdot 1 + q \cdot 4 \cdot 2) = \frac{1}{9} (18 + 15 \cdot 1 + 20 \cdot 4 \cdot 7) = 21,44 \text{ кН}.$$

Для проверки найденных значений опорных реакций составим сумму проекций всех сил на ось Y :

$$\Sigma F_{KY} = R_A + R_B + P - q \cdot 4 = 21,44 + 43,56 + 15 - 20 \cdot 4 = 0.$$

Опорные реакции определены правильно.

Поскольку границами участков являются точки приложения внешних нагрузок и опорных реакций, то заданная балка имеет четыре участка: I участок - AC , II участок - CD , III участок - DB , IV участок - BE .

Участок I ($0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м}$).

Составим аналитические выражения изменения величины изгибающего момента M_{x_1} и поперечной силы Q_{y_1} .

$$M_{x_1} = R_A z_1 = 21,44 z_1; \quad Q_{y_1} = R_A = 21,44 \text{ кН}.$$

Из полученных выражений видно, $Q_{y_1} = \text{const}$, а изгибающий момент M_{x_1} изменяется по линейному закону.

Тогда при $z_1 = 0$ $M_{x_1} = 0$;

при $z_1 = 2 \text{ м}$ $M_{x_1} = 21,44 \cdot 2 = 42,8 \text{ кНм}$.

Участок II ($2 \text{ м} \leq z_2 \leq 5 \text{ м}$).

$$M_{x_2} = R_A z_2 - M = 21,44 \cdot z_2 - 18,$$

$$Q_{y_2} = R_A = 21,44 \text{ кН}.$$

Здесь $Q_{y_2} = \text{const}$, а M_{x_2} изменяется по линейному закону.

При $z_2 = 2 \text{ м}$ $M_{x_2} = 21,44 \cdot 2 - 18 = 24,8 \text{ кНм}$;

При $z_2 = 5 \text{ м}$ $M_{x_2} = 21,44 \cdot 5 - 18 = 89,2 \text{ кНм}$.

Участок III ($5 \text{ м} \leq z_3 \leq 9 \text{ м}$).

Аналитические выражения для M_{x_3} и Q_{y_3} имеют вид:

$$M_{x_3} = R_A z_3 - M - q \frac{(z_3 - 5)^2}{2} = 21,44 z_3 - 18 - 10(z_3 - 5)^2 = -10 z_3^2 + 121,44 z_3 - 268,$$

$$Q_{y_3} = R_A - q(z_3 - 5) = 21,44 - 20(z_3 - 5) = -20 z_3 + 121,44.$$

Функция $M_{x_3}(z_3)$ изменяется по закону параболы, $Q_{y_3}(z_3)$ по линейному закону.

Найдем значения величин M_{x_3} и Q_{y_3} в граничных сечениях D и B участка III:

При $z_3 = 5 \text{ м}$ $M_{x_3} = -10 \cdot 5^2 + 121,44 \cdot 5 - 268 = 89,2 \text{ кНм},$

$$Q_{y_3} = -20 \cdot 5 + 121,44 = 21,44 \text{ кН};$$

при $z_3 = 9 \text{ м}$ $M_{x_3} = -10 \cdot 9^2 + 121,44 \cdot 9 - 268 = 15 \text{ кНм},$

$$Q_{y_3} = -20 \cdot 9 + 121,44 = -58,56 \text{ кН}.$$

Поперечная сила Q_{y_3} на этом участке принимает в некотором сечении нулевое значение и меняет знак при прохождении через него. Поэтому в сечении, где $Q_{y_3} = \frac{dM_3}{dz_3} = 0$, изгибающий момент достигает экстремального значения. Приравняв выражение для Q_{y_3} к нулю, получим: $z_3 = \frac{121,44}{20} = 6,07 \text{ м}$. Подставив найденное значение $z_3 = 6,07 \text{ м}$ в выражение для M_{x_3} , найдем величину экстремального значения изгибающего момента на этом участке.

$$M_{x_3 \max} = -10 \cdot 6,07^2 + 121,44 \cdot 6,07 - 268 = 100,7 \text{ кНм}.$$

Участок IV ($9 \text{ м} \leq z_4 \leq 10 \text{ м}$).

Для получения аналитических выражений изменения M_{x_4} и Q_{y_4} на этом участке целесообразно рассмотреть равновесие правой отсеченной части, так как вследствие меньшего количества внешних сил, приложенных к правой части балки, аналитические выражения будут проще.

Тогда

$$M_{x_4} = P(10 - z_4) = 15(10 - z_4),$$

$$Q_{y_4} = -P = -15 \text{ кН}.$$

Как видно из данных выражений, $Q_{y_4} = \text{const}$, а M_{x_4} изменяется по линейному закону.

При $z_4 = 9 \text{ м}$ $M_{x_4} = 15(10 - 9) = 15 \text{ кНм};$

При $z_4 = 10 \text{ м}$ $M_{x_4} = 15(10 - 10) = 0.$

Эпюры M_x и Q_y для всей балки (рис. 18 в, г) строим, откладывая в удобном масштабе значения M_x и Q_y , возникающие в характерных промежуточных сечениях каждого участка, и соединяем концы полученных ординат линиями, которые соответствуют законам M_x и Q_y на этих участках.

Наиболее опасным сечением в данном случае является сечение, в котором возникает наибольший по абсолютной величине момент $M_{\max} = 100,7 \text{ кНм}$. Двутавровое сечение стальной балки подбираем из условия прочности при изгибе (допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$):

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_X} \leq [\sigma].$$

Требуемый момент сопротивления W_X равен:

$$W_X^{mp} = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{100,7 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 629,38 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

По сортаменту (ГОСТ 8239-72) принимаем двутавр №36 с $W_X = 743 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$.

5.3. Примеры решения задач в контрольной работе № 3

Задача № 1 (пример расчета статически неопределимой плоской рамы, изображенной на рис. 19 а).

Исходные данные:

$l = 8 \text{ м}$, $h = 6 \text{ м}$, $q = 5 \text{ кН/м}$, моменты инерции вертикальных элементов равны I , а горизонтальных - κI ($\kappa = 1,4$).

Решение

1. Определение степени статической неопределимости системы.

Поскольку замкнутые контуры отсутствуют, то система внутренне статически определима. Определим степень внешней статической неопределимости. Реакций связей - пять. Уравнений равновесия для плоской системы можно составить три. Степень статической неопределимости равна: $S = 5 - 3 = 2$. Таким образом, система 2 раза внешне статически неопределима.

Эквивалентную систему выбираем, отбрасывая связи в опоре A (рис. 19б).

2. Составление системы канонических уравнений.

Система канонических уравнений имеет вид:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = -\Delta_{1P}; \quad X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} = -\Delta_{2P},$$

где коэффициенты δ_{ij} системы канонических уравнений представляют собой перемещения точки, где приложен силовой фактор X_j равный единице, по направлению единичного фактора X_i , Δ_{iP} - представляют собой аналогичные перемещения, вызванные заданной нагрузкой.

3. Построение эпюр изгибающих моментов от единичных сил и от заданной нагрузки.

Коэффициенты канонических уравнений определяем графо-аналитическим методом, для чего строим грузовую (от заданных сил, рис.19 д) и единичные эпюры (рис. 19 в, г) изгибающих моментов.

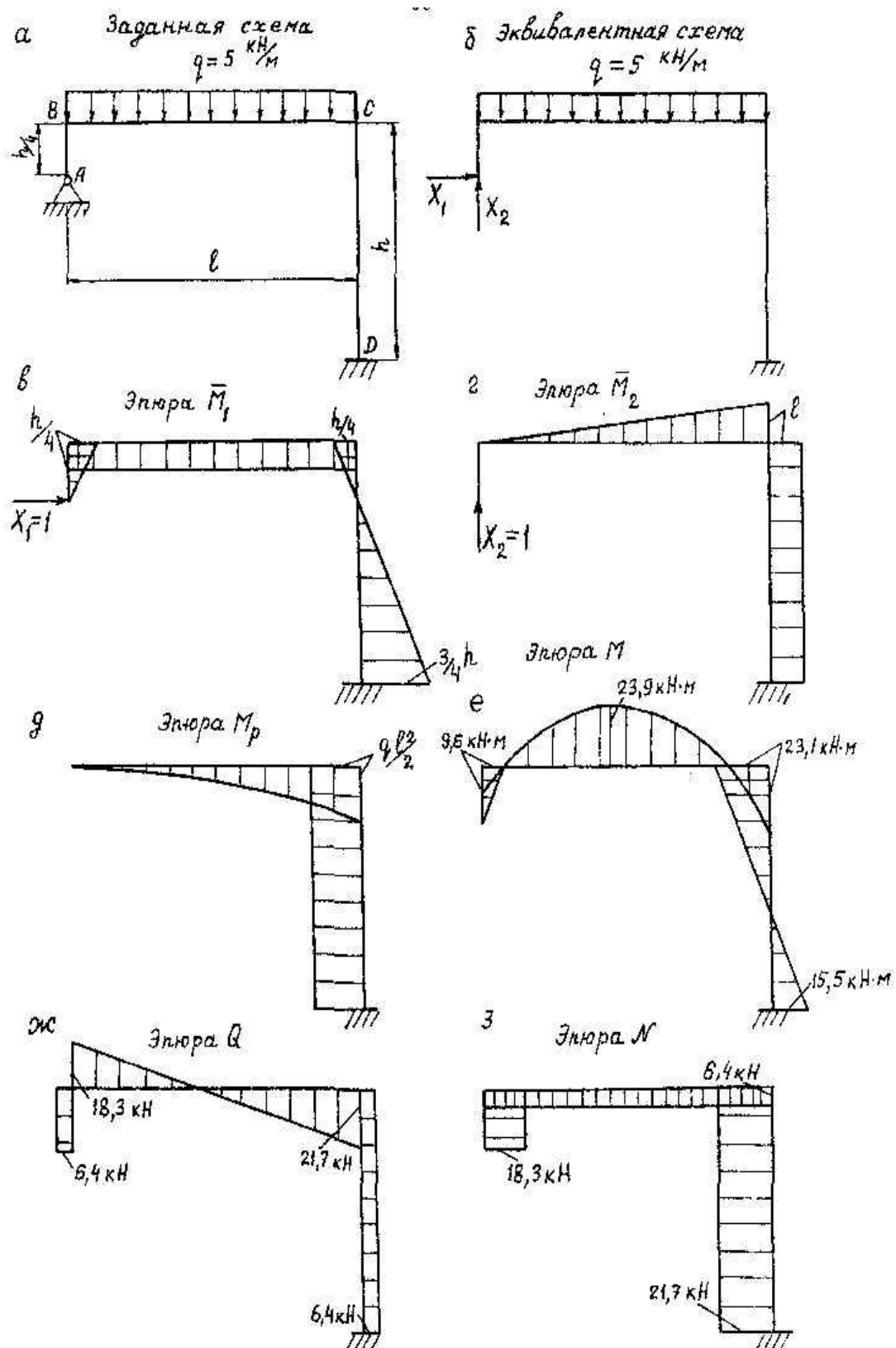


Рис. 19

4. Определение перемещений.

Для определения коэффициентов δ_{11} эпюру $\bar{M}_1$ умножаем на $\bar{M}_1$:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{h}{4} \right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{4} \right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} h \right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} h \right) + \frac{1}{kEI} l \cdot \frac{h}{4} \cdot \frac{h}{4} = \\ &= \frac{29h^3}{192EI} + \frac{lh^2}{16kEI} = \frac{h^2}{192EI} \left(29h + \frac{12}{k} l \right).\end{aligned}$$

Для определения δ_{12} и δ_{21} эпюру $\bar{M}_1$ умножаем на $\bar{M}_2$:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{kEI} \cdot \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{h}{4} + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{h}{4} \right)^2 \cdot l \right) = \frac{lh}{8EI} \left(2h - \frac{l}{k} \right).$$

Для определения δ_{22} эпюру $\bar{M}_2$ умножаем на $\bar{M}_2$:

$$\delta_{22} = \frac{1}{kEI} \cdot \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{EI} \cdot lh \cdot l = \frac{l^3}{3kEI} + \frac{l^2 h}{EI} = \frac{l^2}{3EI} \left(3h + \frac{l}{k} \right).$$

Вычислим коэффициенты δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} и δ_{22} :

$$\delta_{11} = \frac{6^2}{192EI} \left(29 \cdot 6 + \frac{12}{1,4} \cdot 8 \right) = \frac{45,48}{EI},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{8 \cdot 6}{8EI} \left(2 \cdot 6 - \frac{8}{1,4} \right) = \frac{37,71}{EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{8^2}{3EI} \left(3 \cdot 6 + \frac{8}{1,4} \right) = \frac{505,9}{EI}.$$

Умножаем поочередно единичные эпюры $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ на грузовую эпюру M_P , в результате этого найдем свободные члены системы канонических уравнений:

$$\begin{aligned}\Delta_{1P} &= \frac{1}{kEI} \cdot \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{h}{4} + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{4} \right)^2 \cdot \frac{ql^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} h \right)^2 \cdot \frac{ql^2}{2} \right) = \frac{ql^3 h}{24kEI} - \frac{ql^2 h^2}{8EI} = \\ &= \frac{ql^2 h}{24EI} \left(\frac{l}{k} - 3h \right),\end{aligned}$$

$$\Delta_{2P} = -\frac{1}{kEI} \cdot \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} l - \frac{1}{EI} \frac{ql^2}{2} \cdot h \cdot l = -\frac{ql^3}{8EI} \left(\frac{l}{k} + 4h \right).$$

Вычислим коэффициенты Δ_{1P} и Δ_{2P} :

$$\Delta_{1P} = \frac{5 \cdot 8^2 \cdot 6}{24EI} \left(\frac{8}{1,4} - 3 \cdot 6 \right) = -\frac{982,86}{EI},$$

$$\Delta_{2P} = \frac{5 \cdot 8^3}{8EI} \left(\frac{8}{1,4} - 4 \cdot 6 \right) = -\frac{9508,57}{EI}.$$

5. Нахождение величин X_1 и X_2 .

Подставим найденные величины перемещений в канонические уравнения и сократим их на общий множитель $\frac{1}{EI}$:

$$45,48X_1 + 37,71X_2 = 982,86,$$

$$37,71X_1 + 505,9X_2 = 9508,57.$$

Решив эту систему уравнений, найдем

$$X_1 = 6,42 \text{ кН}, \quad X_2 = 18,32 \text{ кН}.$$

6. Построение окончательных эпюр внутренних силовых факторов: M , N и Q .

Для построения окончательных эпюр внутренних силовых факторов используем эквивалентную систему (рис. 19 б) с учетом найденных силовых факторов X_1 и X_2 .

Эпюры строим обычными методами, которые используются для плоских систем. Эпюры M , N , Q изображены на рис. 19 е, ж, з.

Задача №1 (пример расчета статически неопределимой плоскопространственной рамы, изображенной на рис. 20 а).

Исходные данные:

$$P = 1500 \text{ Н}, \quad a = 0,8 \text{ м}, \quad b = 0,8 \text{ м}.$$

Решение

Рассекая раму по оси симметрии, учитывая, что для плоскопространственных систем силовые факторы, лежащие в плоскости рамы, равны нулю. (см. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 592 с.)

Кроме того, рама симметрична, поэтому в поперечном сечении в плоскости симметрии обращаются в нуль кососимметричные факторы - крутящий момент и вертикальная поперечная сила. Отличным от нуля остается только изгибающий момент X_1 в вертикальной плоскости. Получаем, что система является один раз статически неопределимой.

Разрезаем раму по плоскости симметрии и прикладываем момент X_1 . Изобразим эквивалентную систему (рис. 20 б). Строим эпюры моментов от единичного момента и заданных сил (рис. 20 в, г).

Составим каноническое уравнение

$$\delta_{11}X_1 = -\Delta_{1P}.$$

Определяем коэффициенты этого уравнения.

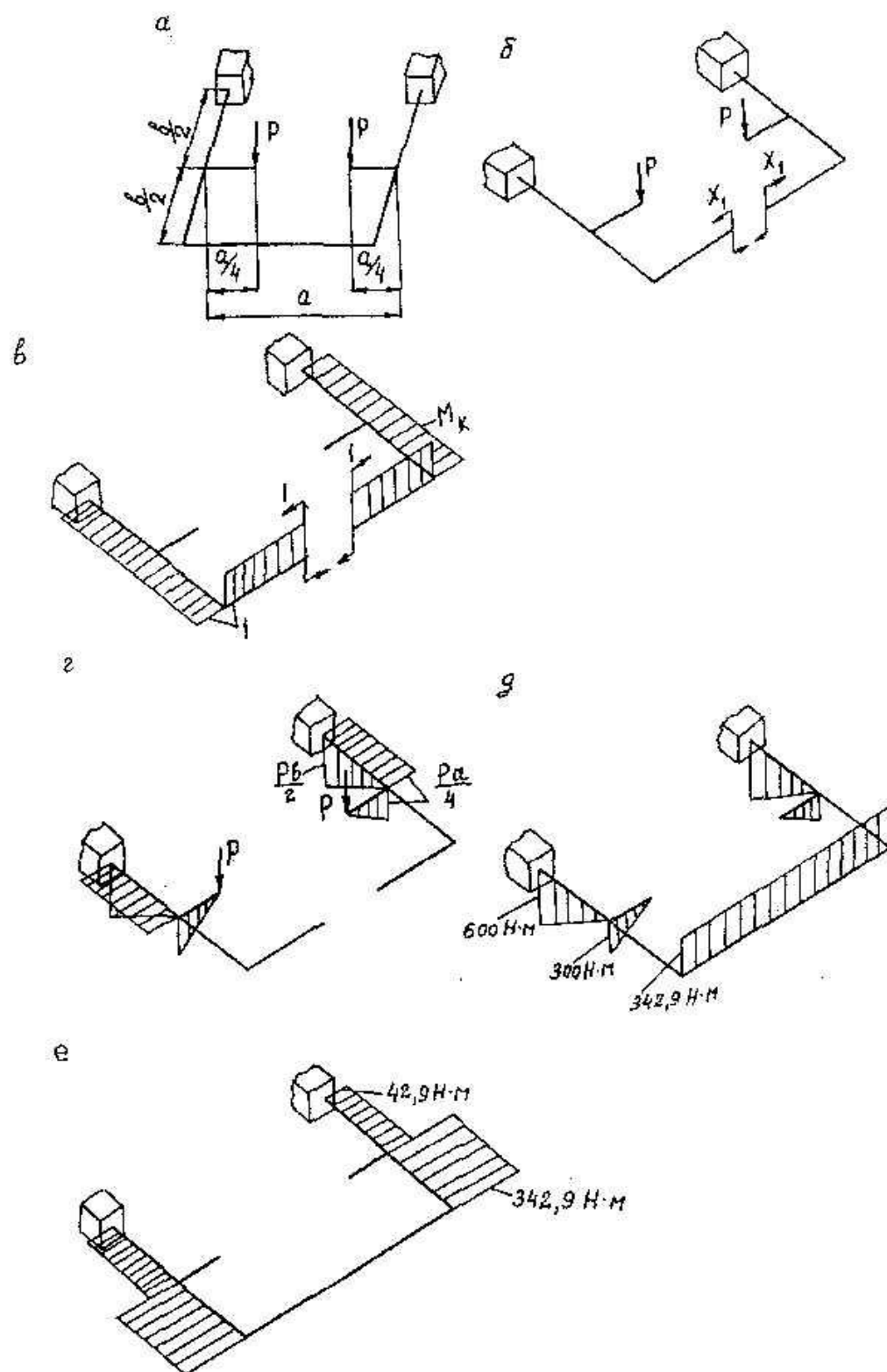


Рис. 20

Для нахождения коэффициента δ_{11} эпюру от единичного момента умножим на эпюру от единичного момента, а при определении Δ_{1p} эпюру от единичного момента умножаем на эпюру от заданных сил. Получим

$$\delta_{11} = \frac{a}{EI} + \frac{2b}{GI_p}, \quad \Delta_{1p} = -\frac{Pab}{4GI_p},$$

где $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ - полярный момент инерции для стержня круглого поперечного сечения диаметром d ,

$I = \frac{\pi d^4}{64}$ - момент инерции сечения при изгибе.

Поскольку $I_p = 2I$, $G = 0,4E$, то упростим выражения для δ_{11} и Δ_{1p} :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} (a + 2,5b), \quad \Delta_{1p} = -\frac{Pab}{3,2EI}$$

Тогда
$$X_1 = \frac{Pab}{a+2,5b} = \frac{1500 \cdot 0,8 \cdot 0,8}{0,8+2,5 \cdot 0,8} = 342,9 \text{ Нм.}$$

Эпюры изгибающих моментов $M_{из}$ и крутящих моментов $M_{кр}$ с учетом величины X_1 показаны на рис. 20 д, е.

Задача № 2 (пример расчета, схема рис. 21 а).

Исходные данные:

$Q = 15 \text{ кН}$, $H = 7 \text{ кН}$, $n = 750 \text{ об/мин}$, $l = 1,6 \text{ м}$. Поперечное сечение балок состоит из двух двутавров №20 ($J_x = 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$, $W_x = 184 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$). Модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

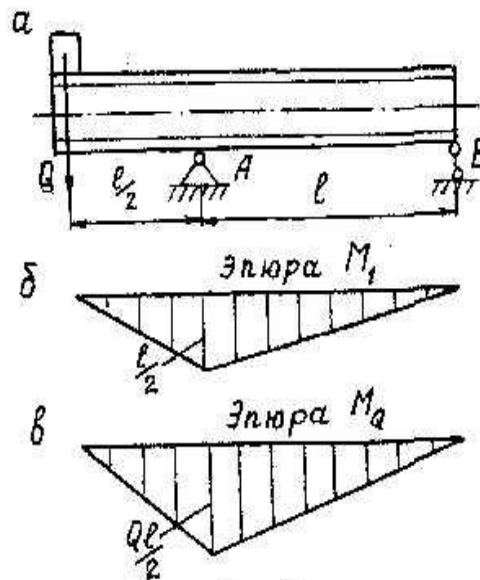


Рис. 21

Решение

1. Определение частоты собственных колебаний ω_0 .

Для определения частоты собственных колебаний нужно знать перемещение точки, где расположена масса, т.е. прогиб δ_{cm} балки в месте расположения двигателя.

Строим эпюры изгибающих моментов M_1 от действия единичной силы $Q_1 = 1$, приложенной в точке приложения силы Q и M_Q от силы Q (рис. 21 б, в).

Прогиб δ_{cm} найдем графо-аналитическим методом

$$\delta_{cm} = \frac{1}{EI_X} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{Ql}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{Ql}{2} \right) = \frac{Ql^3}{8EI_X} = \frac{1,6^3 \cdot 15 \cdot 10^3}{8 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,209 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Частоту свободных колебаний определяем по формуле

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,209 \cdot 10^{-2}}} = 68,6 \text{ 1/с.}$$

2. Определение частоты возмущающей силы ω .

Возмущающая сила представляет собой периодическую силу $H(t) = H \cos \omega t$, вызывающую поперечные колебания балки в вертикальной плоскости. Частота ω силы $H(t)$ равна:

$$\omega = \frac{n \cdot 2\pi}{60} = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 750}{30} = 78,5 \text{ 1/с.}$$

3. Коэффициент нарастания колебаний определяем по формуле:

$$\beta = \frac{1}{1 - (\omega / \omega_0)^2} = \frac{1}{1 - (78,5 / 68,6)^2} = -3,23.$$

Поскольку коэффициент β оказался отрицательным, то в дальнейшем расчете будем учитывать его абсолютную величину.

4. Динамический коэффициент находим:

$$K_D = 1 + \frac{f_H}{f_Q} \cdot \beta = 1 + \frac{H}{Q} \cdot \beta = 1 + \frac{7}{15} \cdot 3,23 = 2,507.$$

5. Определение наибольшего нормального напряжения.

Наибольший по модулю изгибающий момент имеет место в сечении A :

$$M_A = Q \cdot \frac{l}{2} = 15 \cdot 10^3 \cdot 0,8 = 12 \cdot 10^3 \text{ Нм.}$$

Зная величину изгибающего момента, возникающего в опасном сечении балки, определяем статические напряжения в сечении A :

$$\sigma_{cm} = \pm \frac{M_A}{2W_X} = \pm \frac{12 \cdot 10^3}{2 \cdot 184 \cdot 10^{-6}} = \pm 32,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = \pm 32,6 \text{ МПа}.$$

Наибольшие нормальные напряжения в балках:

$$\sigma_D = K_D \cdot \sigma_{cm} = \pm 2,507 \cdot 32,6 = 81,7 \text{ МПа}.$$

Задача №3 (пример расчета, схема рис. 22 а).

Исходные данные:

$$l = 0,4 \text{ м}, d = 25 \cdot 10^{-3} \text{ м}, [\sigma] = 100 \text{ МПа}, \gamma = 78 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3.$$

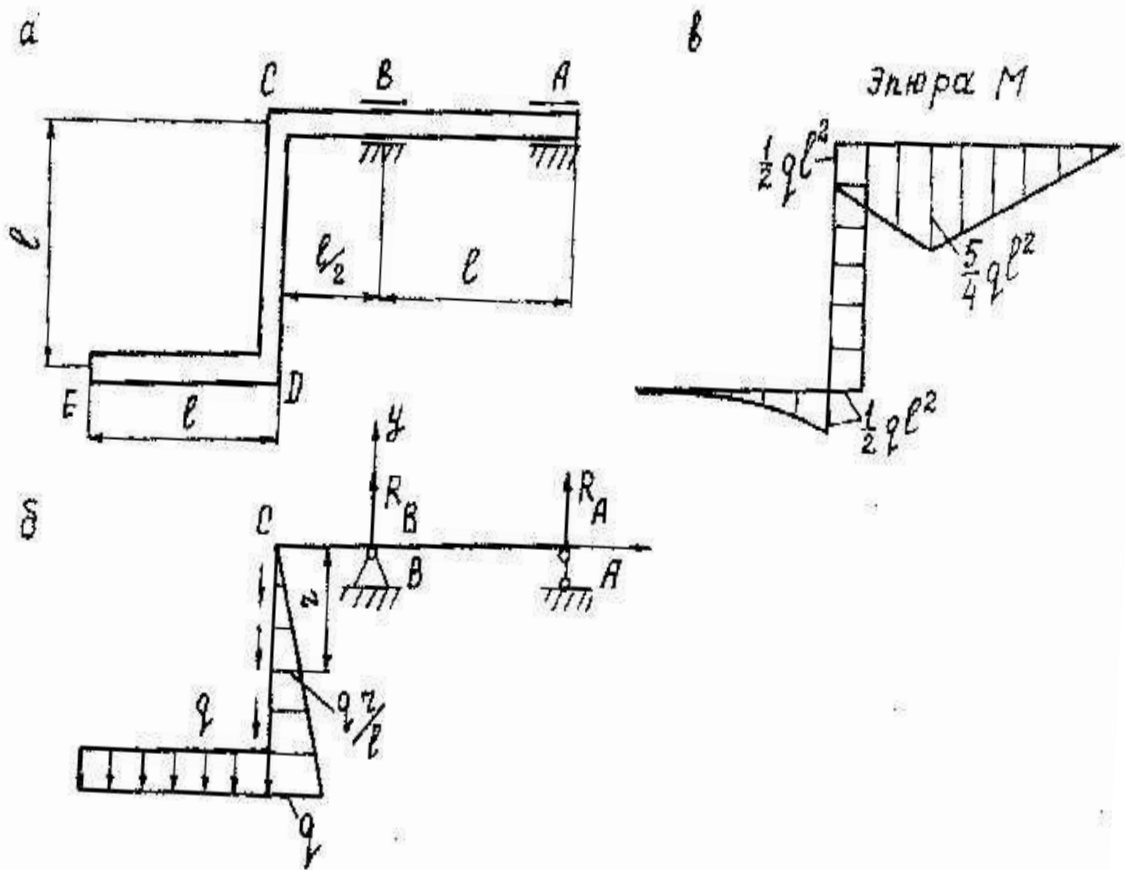


Рис. 22

Решение

1. Построение эпюры изгибающих моментов от сил инерции, возникающих на участках ломаного стержня.

При равномерном вращении стержня вокруг оси инерционные силы направлены по радиусам от оси вращения. Интенсивность их, отнесенная к единице длины стержня, равна:

$$q_i = \frac{\gamma F \omega^2}{g} r,$$

где F - площадь поперечного сечения стержня,
 r - расстояния частиц стержня от оси вращения.

Определим интенсивность q_i сил инерции, действующих на участке DE ломаного стержня:

$$q_i^{DE} = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 l.$$

Введем обозначение $q = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 l$. Тогда $q_i^{DE} = q$.

Интенсивность сил инерции, действующих на участке CD ломаного стержня, изменяется по длине этого участка по линейному закону, в точке C она равна нулю:

$$q_i^C = \frac{\gamma F \omega^2}{g} r_C = 0, \text{ так как } r_C = 0, \text{ а в точке } D:$$

$$q_i^D = \frac{\gamma F \omega^2}{g} r_D = \frac{\gamma F \omega^2}{g} l = q.$$

Силы инерции, действующие на участке CD ломаного стержня, направлены вдоль его оси.

Расчетная схема, учитывающая инерционные силы, действующие на рассматриваемую систему, показана на рис. 22 б.

Определим реакции связей. Для этого составим уравнения равновесия относительно точек A и B :

$$\Sigma M_B = R_A \cdot l + q \cdot l \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2} \right) + \frac{1}{2} q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

откуда $R_A = -\frac{5}{4} ql$;

$$\Sigma M_A = -R_B \cdot l + q \cdot l \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2} + l \right) + \frac{1}{2} q \cdot l \cdot \frac{3}{2} l = 0,$$

откуда $R_B = \frac{11}{4} ql$.

Проверка правильности вычислений:

$$\Sigma Y = R_A + R_B - q \cdot l - \frac{1}{2} q \cdot l = \left(\frac{11}{4} - \frac{5}{4} - 1 - \frac{1}{2} \right) q \cdot l = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов (см. рис. 22в).

2. Определение допускаемого числа оборотов валика в минуту.

Наибольший изгибающий момент возникает в сечении B валика AB :

$$M_{\max} = \frac{5}{4} ql^2.$$

Наибольшие нормальные напряжения равны:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{5}{4} \frac{ql^2}{W} = \frac{5}{4} \frac{\gamma F \omega^2 l^3}{gW},$$

где $W = \frac{\pi d^3}{32}$ - момент сопротивления поперечного сечения,

а $F = \frac{\pi d^2}{4}$ - площадь сечения.

$$\text{Тогда } \sigma_{\max} = \frac{10\gamma\omega^2 l^3}{gd}.$$

Приравниваем максимальное нормальное напряжение $\sigma_{\max}$ допускаемому напряжению $[\sigma]$:

$$\sigma_{\max} = \frac{10\gamma\omega^2 l^3}{gd} \leq [\sigma],$$

$$\text{откуда } \omega_{\text{доп}} = \sqrt{\frac{[\sigma]gd}{10\gamma l^3}}.$$

Обозначим n – число оборотов, совершаемых валиком за 1 минуту.

$$\text{Тогда } \omega_{\text{доп}} = \frac{2\pi n_{\text{доп}}}{60} = \frac{\pi n_{\text{доп}}}{30}.$$

Таким образом,

$$n_{\text{доп}} = \frac{30\omega_{\text{доп}}}{\pi} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{[\sigma]gd}{10\gamma l^3}},$$

$$n_{\text{доп}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{100 \cdot 10^6 \cdot 9,81 \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 78 \cdot 10^3 \cdot 0,4^3}} = 211,7 \text{ об/мин.}$$

Задача №4 (пример расчета).

Исходные данные:

$M_u = 270 \text{ Нм}$, $M_K = 270 \text{ Нм}$, $\sigma_B = 520 \text{ МПа}$, $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$,

$d = 40 \text{ мм} = 40 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $\rho = 2,3 \text{ мм}$, $D/d = 1,2$.

Определить коэффициент запаса прочности в опасном сечении вала.

Нормальные напряжения изгиба изменяются по симметричному циклу, а касательные напряжения – по отнулевому циклу (от нуля до максимального значения).

Решение

1. Определяем максимальные напряжения при изгибе:

$$\sigma_{max} = \frac{M_H}{W_X},$$

где W_X - осевой момент сопротивления поперечного сечения вала,

$$W_X = \frac{\pi d^3}{32},$$

то
$$\sigma_{max} = \frac{32 M_H}{\pi d^3} = \frac{32 \cdot 270}{\pi \cdot 4^3 \cdot 10^{-6}} = 43 \cdot 10^6 \text{ Па} = 43 \text{ МПа}.$$

Поскольку цикл симметричный, то

$$\sigma_a = \sigma_{max} = 43 \text{ МПа}, \quad \sigma_m = 0,$$

σ_a – амплитуда цикла, σ_m – среднее напряжение.

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{W_\rho},$$

где W_ρ – полярный момент сопротивления

$$W_\rho = 2 W_X = \frac{\pi d^3}{16},$$

$$\tau_{max} = \frac{270 \cdot 16}{\pi d^3} = \frac{270 \cdot 16}{\pi \cdot 4^3 \cdot 10^{-6}} = 21,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 21,5 \text{ МПа}.$$

Цикл отнулевой, то

$$\tau_m = \tau_a = \frac{\tau_{max}}{2} = 10,75 \text{ МПа},$$

где τ_a - амплитуда цикла, τ_m - среднее напряжение.

2. По эмпирическим формулам находим предел текучести при кручении и пределы выносливости при кручении и изгибе:

$$\tau_T = 0,58 \sigma_T = 0,58 \cdot 240 = 139,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{-1} = (0,55 - 0,0001 \cdot \sigma_B) \cdot \sigma_B = (0,55 - 0,0001 \cdot 520) \cdot 520 = 259 \text{ МПа};$$

$$\tau_{-1} = 0,6 \cdot \sigma_{-1} = 0,6 \cdot 259 = 155,4 \text{ МПа}.$$

3. Эффективные коэффициенты концентрации напряжений K_σ и K_τ определяем по формуле:

$$K_{\sigma} = K_{\tau} = \frac{\alpha_{\sigma}}{1 + \left(1 + \frac{2}{d}\right) \cdot 10^{-\left(0,33 + \frac{\sigma_T}{712}\right)}},$$

где d – в мм, σ_T – в МПа.

Теоретический коэффициент концентрации напряжений α_{σ} определяем, используя график, представленный на рис. 10.

При $\rho/d = 2,3/40 = 0,0575$ $\alpha_{\sigma} \approx 1,95$.

Тогда

$$K_{\sigma} = K_{\tau} = \frac{1,95}{1 + \left(1 + \frac{2}{40}\right) \cdot 10^{-\left(0,33 + \frac{240}{712}\right)}} = 1,5905.$$

4. Находим коэффициенты $K_{d\sigma}$ и $K_{d\tau}$, учитывающие влияние размеров, по формуле

$$K_{d\sigma} = K_{d\tau} = 1 - 0,154 \lg \frac{d}{7,5} = 1 - 0,154 \lg \frac{40}{7,5} = 0,888,$$

где d – в мм.

5. Определяем общие коэффициенты снижения пределов выносливости K :

$$K = \frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}}; \quad K = \frac{K_{\tau}}{K_{d\tau}}.$$

$$K = \frac{1,5905}{0,888} = 1,791.$$

6. Коэффициенты запаса прочности по нормальным и касательным напряжениям найдем по формулам:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K \sigma_{\alpha} + \psi_{\sigma} \sigma_m}; \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K \tau_{\alpha} + \psi_{\tau} \tau_m},$$

где ψ_{σ} и ψ_{τ} – коэффициенты, учитывающие влияние средних напряжений цикла.

Учитывая, что $\sigma_m = 0$, то

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K \sigma_{\alpha}} = \frac{259}{1,791 \cdot 43} = 3,36.$$

Коэффициент, учитывающий влияние средних касательных напряжений, равен:

$$\psi_{\tau} = \frac{0,01 + 10^{-4} \cdot \sigma_B}{K} = \frac{0,01 + 10^{-4} \cdot 520}{1,791} = 0,0346.$$

$$\text{Тогда, } n_{\tau} = \frac{155,4}{1,791 \cdot 10,75 + 0,0346 \cdot 10,75} = 7,92.$$

7. Находим общий коэффициент запаса прочности:

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{3,36 \cdot 7,92}{\sqrt{3,36^2 + 7,92^2}} = 3,09.$$

Содержание

Введение..	3
1.Цели и задачи дисциплины и ее место в учебном процессе.....	3
2.Содержание дисциплины.....	5
2.1.Наименование тем, их содержание (основные вопросы).....	5
2.2.Лекции и их содержание	13
2.3.Практические занятия и их содержание	13
2.4.Лабораторные работы	14
2.5.Учебно-методические материалы по дисциплине	14
3.Указания о порядке выполнения контрольных работ	15
4.Задачи для контрольных работ.....	16
4.1. Задачи для контрольной работы № 1	16
4.2.Задачи для контрольной работы № 2	22
4.3.Задачи для контрольной работы № 3	26
5. Примеры решения задач.....	34
5.1.Примеры решения задач в контрольной работе № 1	34
5.2.Примеры решения задач в контрольной работе № 2.....	45
5.3.Примеры решения задач в контрольной работе № 3	55