

Лабораторная работа ЛР 1

Аппроксимация непрерывных сигналов рядом Котельникова и корреляционный анализ дискретных сигналов

1. **Цель работы** - изучение принципов восстановления непрерывного сигнала по его отсчетным значениям в дискретные моменты времени с использованием теоремы Котельникова и принципов корреляционного анализа дискретных сигналов.

2. Основные теоретические положения

Ряд Котельникова записывается следующим образом:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{\sin \omega_c (t - k\pi/\omega_c)}{\omega_c (t - k\pi/\omega_c)}, \quad (1)$$

где $s(t)$ - произвольный сигнал, спектральная плотность которого отлична от нуля лишь в полосе частот $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$; ω_c - верхняя частота в спектре сигнала $s(t)$; s_k - мгновенное значение сигнала $s(t)$ в k -ой отсчетной точке $t_k = k\pi/\omega_c$.

На основании выражения (1) принято формулировать теорему Котельникова так: произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше ω_c , может быть полностью восстановлен, если известны отсчетные значения этого сигнала, взятые через равные промежутки времени $\pi/\omega_c = 1/\Delta 2f_c$. При этом ряд Котельникова представляет собой алгоритм восстановления.

Основные теоретические положения, касающиеся принципов восстановления непрерывного сигнала по его отсчетным значениям в дискретные моменты времени с использованием теоремы Котельникова имеются в [1], с. 122 - 126.

На основании теоремы Котельникова непрерывный сигнал $s(t)$ необходимо превратить в дискретный сигнал $s_d(t)$, математическая модель которого задается выражением:

$$s_d(t) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \delta(t - k\Delta), \quad (2)$$

где $\Delta = \pi/\omega_c = 1/2f_c$ - интервал (период) дискретизации, то есть сигнал $s_d(t)$ представляет собой модулированную импульсную последовательность, образованную бесконечно короткими импульсами (дельта - импульсами $\delta(t)$). При этом спектральная плотность дискретного сигнала $s_d(t)$ задается выражением:

$$S_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - 2\pi n / \Delta), \quad (3)$$

где $S(\omega)$ - спектральная плотность сигнала $s(t)$, связанная с ним преобразованием Фурье

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (4)$$

которая может быть получена из выражения (3), если в нем положить $n = 0$.

Таким образом, спектр дискретного сигнала $s_d(t)$ представляет собой сумму спектра исходного сигнала $s(t)$ и бесконечного числа его «копий», которые располагаются на оси частот через одинаковые интервалы $2\pi/\Delta$ (см. рис.1).

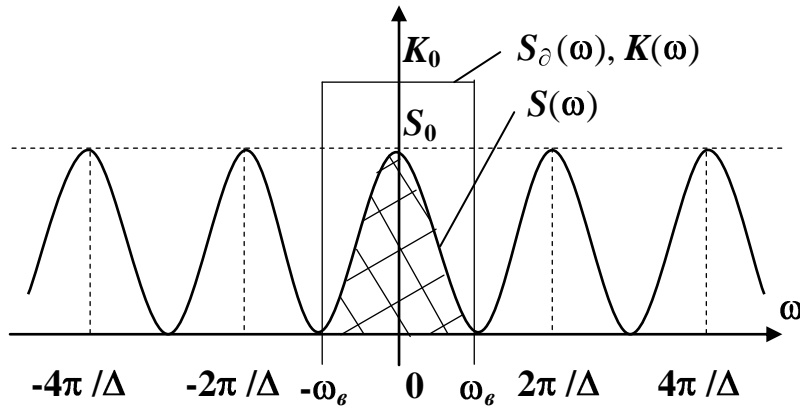


Рис. 1

Из выражения (3) и рис.1 видно, что сигнал $s(t)$ может быть полностью восстановлен из дискретного сигнала $s_d(t)$ с помощью идеального фильтра нижних частот (ФНЧ), имеющего частотный коэффициент передачи или по другой терминологии комплексную частотную характеристику (КЧХ) $K(j\omega)$ вида

$$K(j\omega) = K(\omega) = \begin{cases} K_0, & -\omega_g \leq \omega \leq \omega_g \\ 0, & -\omega_g > \omega > \omega_g \end{cases}, \quad (5)$$

совпадающую с его амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) $K(\omega) = |K(j\omega)|$, если на вход фильтра подан сигнал $s_d(t)$, причем спектр $S(\omega)$ исходного сигнала $s(t)$ ограничен верхней частотой ω_g , совпадающей с односторонней шириной полосы пропускания идеального ФНЧ.

Восстановление сигнала по его отсчетным значениям в дискретные моменты времени всегда происходит с ошибкой, поскольку реальный сигнал конечной длительности имеет неограниченный спектр. При этом выбор некоей частоты ω_g в качестве верхней частоты спектра сигнала всегда связан с отбрасыванием части этого спектра, что и приводит к ошибке при восстановлении сигнала.

Количественно ошибку при восстановлении сигнала $s_{ou}(t) = s(t) - s_{oc}(t, \omega_g)$, где $s_{oc}(t, \omega_g)$ - восстановленный сигнал с ограниченным (верхней частотой ω_g) спектром, принято характеризовать так называемой нормой сигнала ошибки $\|s_{ou}\|$, определяемой как корень квадратный из его энергии. Она может быть определена из выражения:

$$\|s_{ou}\| = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\omega_g}^{\infty} W(\omega) d\omega}, \quad (6)$$

где $W(\omega) = |S(\omega)|^2$ - энергетический спектр сигнала $s(t)$, а $|S(\omega)|$ - его амплитудный спектр.

Из (6) видно, что с увеличением ω_g отбрасываемая при восстановлении сигнала часть спектра, уменьшается. Соответственно при этом уменьшается и норма ошибки $\|s_{ou}\|$. Поскольку верхняя частота ω_g , учитываемая при восста-

новлении сигнала по его отсчетным значениям, связана с периодом дискретизации Δ обратно пропорциональной зависимостью $\omega_c = \pi/\Delta$, для уменьшения возникающей при этом ошибки необходимо уменьшение Δ .

Заметим, что изображенный на рис.1 способ восстановления сигнала по его отсчетным значениям с использованием идеального ФНЧ аналогичен алгоритму (1), поскольку реакция идеального (нереализуемого) ФНЧ на бесконечно короткий импульс (дельта - импульс) описывается функцией типа $\sin x/x$, совпадающей с используемыми в ряде Котельникова базисными функциями.

Принципы корреляционного анализа дискретных сигналов рассматриваются на примере многопозиционных бинарных сигналов с амплитудным или фазовым кодированием.

Для описания таких сигналов используется единая математическая модель в виде последовательности чисел $\{u_j\} = \{u_1, u_2, u_{M-1}, \dots, u_M\}$, в которой каждый символ u_j принимает одно из двух возможных значений ± 1 , а M обозначает число позиций сигнала. В случае амплитудного кодирования символу $+1$ соответствует положительное значение высоты видеоимпульса, а символу -1 -его отрицательное значение. В случае же фазового кодирования этим символам соответствуют значения фазы радиоимпульса, равные соответственно 0 и π .

Например, четырехпозиционный дискретный сигнал записывается в виде $\{1, -1, -1, 1\}$. Наряду с такой формой записи дискретного сигнала используется развернутая форма, при которой последовательность чисел дополняется нулями на «пустых» позициях. При этом указанный выше сигнал будет иметь вид:....0001-1-11000....

Автокорреляционная функция (АКФ) дискретного сигнала также является дискретной. Дискретная АКФ характеризует чувствительность сигнала к временному сдвигу и записывается в виде:

$$\hat{B}_u \langle n \rangle = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j u_{j-n}, \quad (7)$$

где u_j - значение дискретного сигнала на j - ой позиции, которое может принимать значения $\pm 1, 0$; u_{j-n} - значение копии дискретного сигнала, сдвинутой относительно дискретного сигнала на n позиций. Эта функция целочисленного аргумента n обладает следующими свойствами: достигает максимума, равного M при $n = 0$, и является четной, то есть $\hat{B}_u \langle n \rangle = \hat{B}_u \langle -n \rangle$.

Расчет дискретной АКФ по формуле (7) производится с использованием развернутой формы записи дискретного сигнала и операции сдвига сигнала на некоторое число позиций относительно исходного положения следующим образом:

u_j	0 0 0 1-1-1 1 0 0 0 0	$B_u(0) = 1 1 + (-1) (-1) + (-1) (-1) + 1 \cdot 1 = 4$
u_{j-1}	0 0 0 0 1-1-1 1 0 0 0	$B_u(1) = (-1) \cdot 1 + (-1) (-1) + 1 (-1) = -1$
u_{j-2}	0 0 0 0 0 1-1-1 1 0 0	$B_u(2) = (-1) 1 + 1 (-1) = -2$
u_{j-3}	0 0 0 0 0 0 1-1-1 1 0	$B_u(3) = 1 1 = 1$

(8)

По результатам проведенного расчета дискретная АКФ $\hat{B}_u \langle n \rangle$ строится в виде графика функции целочисленного аргумента n в области его положитель-

ных значений, а в области отрицательных значений n она с учетом четности $\hat{B}_u(\omega)$ изображается симметричной относительно $n = 0$.

Считается, что дискретный сигнал обладает хорошими корреляционными свойствами, если значения его АКФ при $n \neq 0$ малы по сравнению с $\hat{B}_u(\omega)$. Среди дискретных сигналов рассматриваемого вида наилучшими корреляционными свойствами обладают сигналы Баркера, значения АКФ которых при $n \neq 0$ по модулю не превышают единицы, то есть равны 1, -1 или 0. Существуют сигналы Баркера при числе позиций $M = 2, 3, 4, 5, 7, 11$ и 13.

Взаимная корреляционная функция (ВКФ) двух дискретных сигналов $\{u_j\}$ и $\{v_j\}$ характеризует чувствительность сигнала к временному сдвигу и изменению формы и записывается в виде аналогичном (7)

$$\hat{B}_{uv}(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j v_{j-n}, \quad (9)$$

где u_j - значение первого дискретного сигнала на j -ой позиции, а v_{j-n} - значение второго дискретного сигнала, сдвинутого относительно первого сигнала на n позиций. Дискретная ВКФ обладает следующими свойствами: является нечетной функцией, то есть $\hat{B}_{uv}(\omega) \neq \hat{B}_{uv}(\omega - n)$ и достигает максимума необязательно при $n = 0$. При этом $\hat{B}_{uv}(\omega) = \hat{B}_{vu}(\omega - n)$.

График дискретной ВКФ строится аналогично графику дискретной АКФ с той лишь разницей, что с учетом нечетности $\hat{B}_{uv}(\omega)$ ее расчет и построение графика следует производить как для положительных, так и для отрицательных значений n . Соответственно при расчете сдвиг второго дискретного сигнала следует производить как в сторону запаздывания, так и в сторону опережения.

3. Порядок выполнения работы

3.1. Аппроксимация прямоугольного видеоимпульса рядом Котельникова

Расчет напряжения $u_{an}(t)$, аппроксимирующего прямоугольный видеоимпульс

$$u(t) = \begin{cases} u_m, & 0 \leq t \leq t_u, \\ 0, & 0 > t > t_u \end{cases} \quad (10)$$

рядом Котельникова (1), который при конечном числе отсчетных значений записывается в виде

$$u_{an}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \frac{\sin \omega_c (t - k\Delta)}{\omega_c (t - k\Delta)}, \quad (11)$$

где N - число отсчетных значений на длительности импульса t_u , u_k - отсчетное значение видеоимпульса в k -ой отсчетной точке $t_k = k\Delta$, тождественно равное амплитуде импульса U_m , производится с помощью ЭВМ.

Расчет следует произвести для двух значений N : $N_1 = 7$ и $N_2 = 13$, которым соответствуют значения интервала дискретизации: $\Delta_1 = t_u/6$ и $\Delta_2 = t_u/12$, которым, в свою очередь, соответствуют значения верхней частоты спектра: $\omega_{c1} = \pi/\Delta_1 = 6\pi/t_u$ и $\omega_{c2} = \pi/\Delta_2 = 12\pi/t_u$. При этом вычисления следует произвести в

интервале времени t от $-t_u$ до $2t_u$ при следующих значениях параметров видеоимпульса: амплитуда $U_m = 1\text{В}$, длительность $t_u = 3 \cdot 10^{-4}$ с.

Используя данные произведенных расчетов, построить аппроксимирующее напряжение $u_{an}(t)$ для двух указанных выше значений интервала дискретизации. В тех же осях координат изобразить исходный прямоугольный видеоимпульс в соответствии с расчетными формулами (11) и (10).

Имя программы и язык программирования: RTCS10M (MATHCAD).

3.2. Аппроксимация прямоугольного радиоимпульса рядом Котельникова
Расчет напряжения $u_{an}(t)$, аппроксимирующего прямоугольный радиоимпульс

$$u(t) = \begin{cases} u_m \sin \omega_0 t, & 0 \leq t \leq t_u, \\ 0, & 0 > t > t_u \end{cases} \quad (12)$$

рядом Котельникова (1), который при конечном числе отсчетных значений задается выражением (11), производится с помощью ЭВМ.

Расчет следует произвести при общем числе отсчетных значений $N = 12$, взятых через интервал дискретизации $\Delta = T_0/4$, где $T_0 = 2\pi/\omega_0$ и ω_0 соответственно период и частота высокочастотного заполнения радиоимпульса, по шести отличным от нуля значениям сигнала, взятым в моменты времени $t_k = \kappa\Delta = \kappa T_0/4$, где $\kappa = 1, 3, 5, 7, 9, 11$. При этом вычисления следует произвести в интервале времени t от $-t_u$ до $2t_u$ при следующих значениях параметров радиоимпульса: амплитуда $U_m = 1\text{В}$, длительность $t_u = 3 \cdot 10^{-4}$ с, период высокочастотного заполнения $T_0 = t_u/3 = 1 \cdot 10^{-4}$ с.

Используя данные произведенных расчетов, построить аппроксимирующее напряжение $u_{an}(t)$. В тех же осях координат изобразить исходный прямоугольный радиоимпульс в соответствии с расчетными формулами (11) и (12).

Имя программы и язык программирования: RTCS11M (MATHCAD).

3.3. Расчет АКФ многопозиционного бинарного сигнала

Расчет АКФ многопозиционного бинарного сигнала (дискретной АКФ) производится вручную. С использованием формулы (7) и примера расчета (8) следует рассчитать дискретные АКФ четырехпозиционного сигнала $\{u_{1j}\} = \{1, -1, -1, 1\}$ и двух сигналов Баркера - четырехпозиционного и пятипозиционного: $\{u_{2j}\} = \{1, -1, 1, 1\}$ и $\{u_{3j}\} = \{1, 1, 1, -1, 1\}$. Результаты расчетов свести в табл. 1.

Таблица 1

	Вид сигнала															
	{1, -1, -1, 1}					{1, -1, 1, 1}					{1, 1, 1, -1, 1}					
$ n $	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5
\hat{B}_u																

По данным табл. 1 построить графики дискретных АКФ.

3.4. Расчет ВКФ двух многопозиционных бинарных сигналов

Расчет ВКФ двух многопозиционных сигналов (дискретной ВКФ) производится вручную. С использованием формулы (9) следует рассчитать дискретную ВКФ четырехпозиционных сигналов $\{u_j\} = \{1, -1, -1, 1\}$ и $\{v_j\} = \{1, -1, 1, 1\}$. Результаты расчета свести в табл. 2.

Таблица 2

$ n $	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
\hat{B}_{uv}									

По данным табл. 2 построить график дискретной ВКФ двух четырехпозиционных сигналов.

4. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- аналитические выражения для ряда Котельникова, дискретного сигнала, прямоугольных видео- и радиоимпульсов и их аппроксимации рядом Котельникова, дискретных автокорреляционной и взаимной корреляционной функций, описываемых выражениями (1), (2), (7) и (9) - (12);
- распечатки результатов расчетов на ЭВМ аппроксимаций рядом Котельникова прямоугольных видео- и радиоимпульсов с записью программ расчетов на языке программирования MATCAD, исходных данных, расчетных формул и полученных в результате расчетов графиков и численных результатов;
- результаты расчетов автокорреляционной и взаимной корреляционной функций многопозиционных бинарных сигналов с использованием формул (7) и (9), представленные в табл. 1 и 2, и иллюстрирующие эти результаты графики;
- выводы, содержащие анализ влияния интервала дискретизации на качество аппроксимации видео- и радиосигналов рядом Котельникова, заключение о правильности выбора интервала дискретизации, обоснование преимущества сигналов Баркера по сравнению с другими многопозиционными бинарными сигналами и анализ зависимости степени этого преимущества от числа позиций сигнала, анализ различия характеристик автокорреляционной и взаимной корреляционной функций многопозиционных бинарных сигналов.

5. Контрольные вопросы

1. Напишите формулу ряда Котельникова и дайте словесную формулировку теоремы Котельникова.
2. Начертите графики нескольких функций, принадлежащих базису Котельникова. Перечислите их характерные свойства.
3. Каков физический смысл коэффициентов ряда Котельникова?
4. В чем Вы видите практическое значение теоремы Котельникова для радиотехнических систем?

5. Чем определяется ошибка представления сигнала рядом Котельникова?

6. Как количественно оценить погрешность описания реального сигнала конечным числом членов ряда Котельникова в частотной плоскости?

7. Дайте определение дискретного сигнала. Приведите примеры таких сигналов.

8. В чем состоит основной принцип построения многопозиционных бинарных сигналов? Приведите примеры многопозиционных бинарных сигналов с амплитудным и фазовым кодированием.

9. Приведите выражение для дискретной автокорреляционной функции и поясните принцип ее вычисления.

10. Сигналы Баркера и их основные свойства. В чем состоит преимущество сигналов Баркера по сравнению с другими многопозиционными бинарными сигналами с точки зрения их корреляционных свойств?

11. Приведите выражение для дискретной взаимной корреляционной функции и поясните принцип ее вычисления. В чем состоит ее отличие от дискретной автокорреляционной функции?

6. Программы и примеры расчетов на ЭВМ

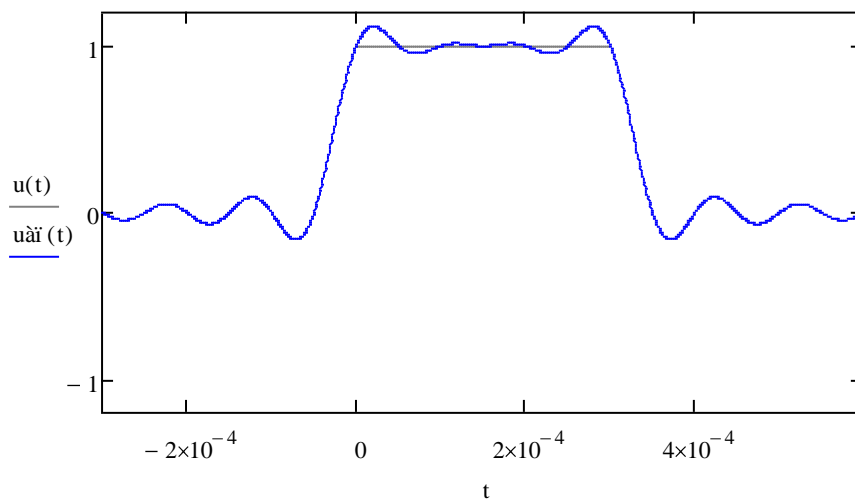
6.1. Аппроксимация рядом Котельникова видеоимпульса

RTCS10M

$$U_m := 1 \quad t_e := 300 \cdot 10^{-6} \quad \Delta 1 := \frac{t_e}{6} \quad \omega_1 := \frac{6 \cdot \pi}{t_e}$$

$$u(t) := \begin{cases} (U_m) & \text{if } 0 \leq t \leq t_e \\ 0 & \text{if } 0 > t > t_e \end{cases} \quad U(k) := u(\Delta 1 \cdot k) \quad n := 7$$

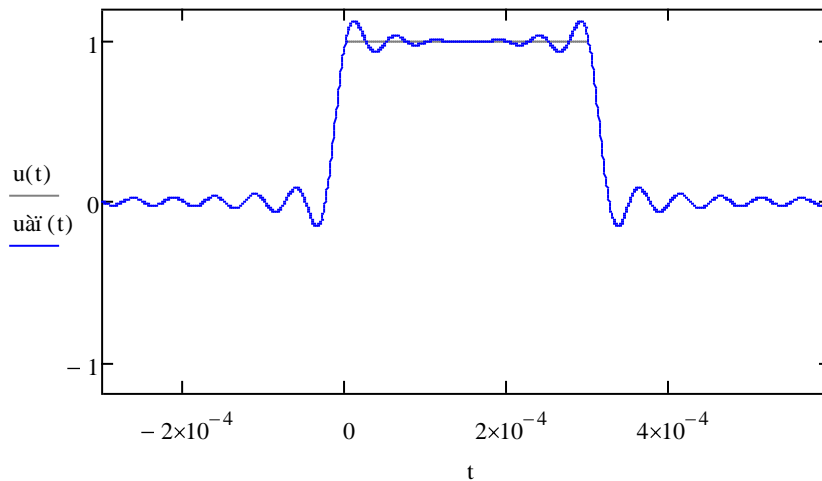
$$u_{\text{аі}}(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \left[U(k) \cdot \frac{\sin[\omega_1 \cdot (t - k \cdot \Delta 1)]}{\omega_1 \cdot (t - k \cdot \Delta 1)} \right]$$



$$\Delta 2 := \frac{t_e}{12} \quad \omega_2 := \frac{12 \cdot \pi}{t_e}$$

$$u_{\text{аі}}(t) := \begin{cases} (U_m) & \text{if } 0 \leq t \leq t_e \\ 0 & \text{if } 0 > t > t_e \end{cases} \quad U_{\text{аі}}(k) := u(\Delta 2 \cdot k)$$

$$u_{\text{аі}}(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \left[U_{\text{аі}}(k) \cdot \frac{\sin[\omega_2 \cdot (t - k \cdot \Delta 2)]}{\omega_2 \cdot (t - k \cdot \Delta 2)} \right] \quad n := 13$$



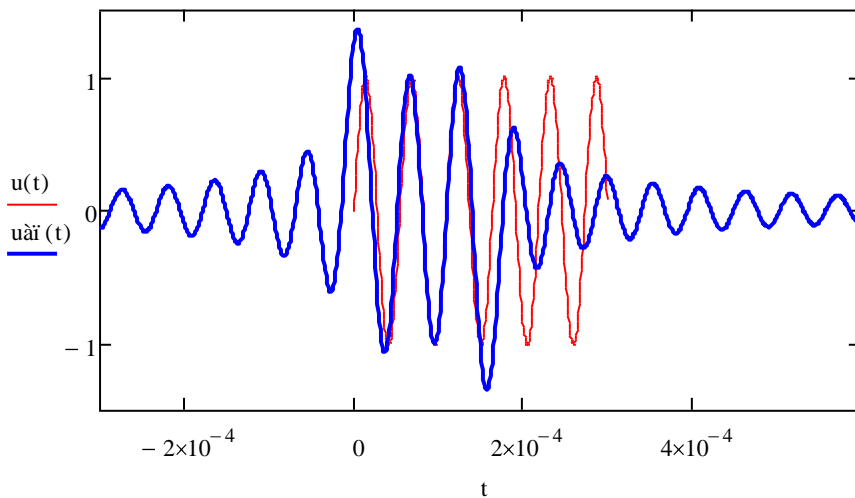
6.2. Аппроксимация рядом Котельникова радиоимпульса

RTCS11M

$$U_m := 1 \quad t_{\text{è}} := 300 \cdot 10^{-6} \quad k := 1, 2, \dots, 11 \quad \omega := \frac{11 \cdot \pi}{t_{\text{è}}} \quad T_0 := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad tk(k) := k \cdot \frac{T_0}{4}$$

$$u(t) := \begin{cases} (U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)) & \text{if } 0 \leq t \leq t_{\text{è}} \\ 0 & \text{if } 0 > t > t_{\text{è}} \end{cases} \quad U(k) := U_m \sin(\omega \cdot tk(k)) \quad \Delta := \frac{T_0}{4}$$

$$u_{\text{àì}}(t) := \sum_k \left[U(k) \cdot \frac{\sin[\omega \cdot (t - k \cdot \Delta)]}{\omega \cdot (t - k \cdot \Delta)} \right]$$



7. Литература

1. Баскаков СИ. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Высшая школа, 2005, с. 119 - 126, 83 - 90.

Анализ спектров модулированных сигналов

1. Цель работы - изучение спектров типовых модулированных сигналов.

2. Основные теоретические положения

В лабораторной работе рассматриваются модулированные сигналы трех видов:

- однотоновый амплитудно-модулированный (АМ) сигнал

$$S_{AM}(t) = A_0 [1 + M \cos(2\pi F_M t + \varphi_M)] \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0), \quad (1)$$

где A_0 - амплитуда несущего колебания, M - коэффициент модуляции, f_0 и φ_0 - частота и начальная фаза несущего колебания, F_M и φ_M - частота и начальная фаза модулирующего колебания;

- амплитудно-манипулированный (АМ_И) (телеграфный) сигнал

$$S_{AMH}(t) = A_0 S_M(t) \cos(2\pi f_0 t), \quad (2)$$

где

$$S_M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma(t - iT_n) \quad (3)$$

модулирующий сигнал в виде последовательности прямоугольных импульсов с длительностью t_n и периодом повторения T_n ; $\sigma(t)$ - единичная функция (функция Хевисайда), остальные обозначения те же, что и в (1);

• однотоновый частотно-модулированный (ЧМ) сигнал

$$S_{ЧМ}(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + m \sin(2\pi F_M t)], \quad (4)$$

где m - индекс модуляции, остальные обозначения те же, что и в (1).

Основные теоретические положения, касающиеся указанных видов модуляции, имеются в [1], с. 92 - 118. Там же приведены осциллограммы соответствующих сигналов.

Вид осциллограмм АМ-, АМ_И- и ЧМ-сигналов, описываемых выражениями (1) - (4), показан на рис. 1 - 3.

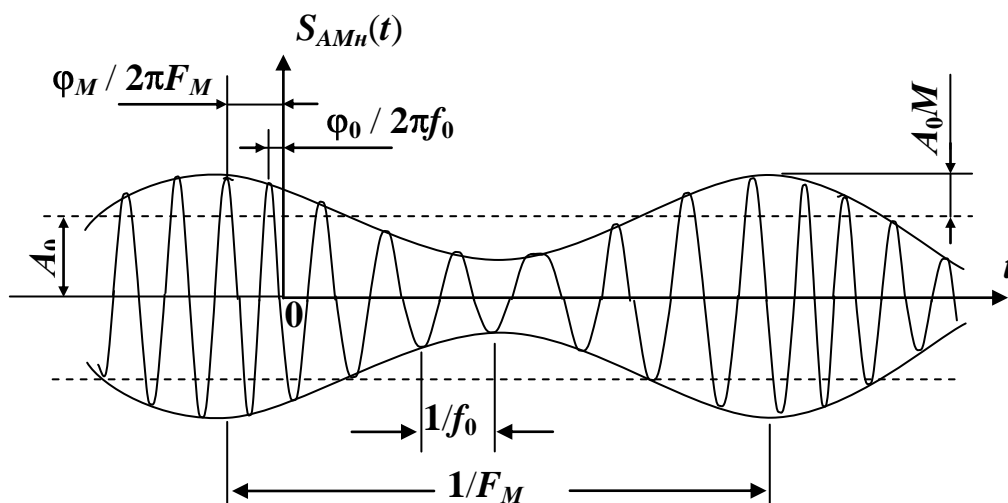


Рис. 1

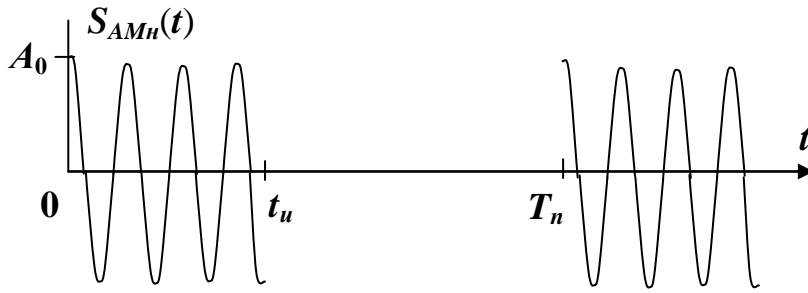


Рис. 2

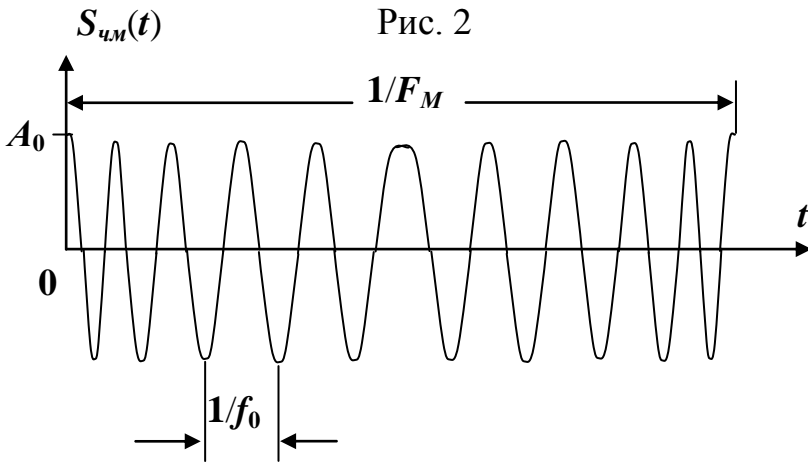


Рис. 3

Спектральный состав АМ-сигнала определяется выражением:

$$S_{AM}(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) + A_0 M / 2 \times \cos[2\pi(f_0 + F_M)t + \varphi_0 + \varphi_M] + A_0 M / 2 \times \cos[2\pi(f_0 - F_M)t + \varphi_0 - \varphi_M], \quad (5)$$

получаемым из (1) путем элементарных преобразований. При этом графическое построение амплитудно-частотного (АЧС) и фазо-частотного (ФЧС) спектров АМ-сигнала сводится к построению в некотором масштабе распределения по частоте амплитуд и начальных фаз спектральных компонент сигнала (5), приведенных в табл. 1 (см. рис. 4 и 5).

Таблица 1

Частота, f	Амплитуда, A	Фаза, ψ
f_0	A_0	φ_0
$f_0 + F_M$	$A_0 M/2$	$\varphi_0 + \varphi_M$
$f_0 - F_M$	$A_0 M/2$	$\varphi_0 - \varphi_M$

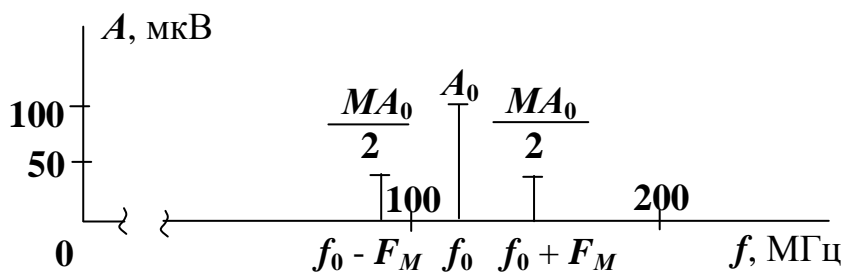


Рис. 4

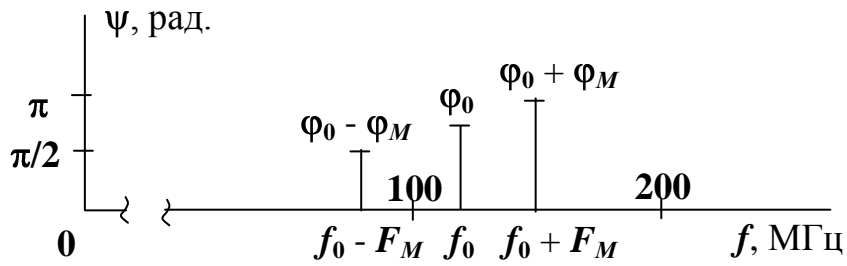


Рис. 5

Спектральный состав АМн-сигнала определяется выражением:

$$S_{AMn} \approx \frac{A_0}{q} \cos \pi f_0 t + \frac{A_0}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\sin \pi k}{\pi k}}{q} \cos \left[\pi \left(f_0 + k F_n \right) t \right] +$$

$$+ \frac{A_0}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\sin \pi k}{\pi k}}{q} \cos \left[\pi \left(f_0 - k F_n \right) t \right]$$
(6)

где $F_n = 1 / T_n$ - частота повторения импульсной последовательности (3), $q = T_n / t_u$ - скважность последовательности.

Вид АЧС и ФЧС АМн-сигнала приведен на рис. 6 и 7. Эффективная ширина спектра, в пределах которой содержится около 90% его энергии, совпадает с шириной основного лепестка спектра и равна $2/t_u$.

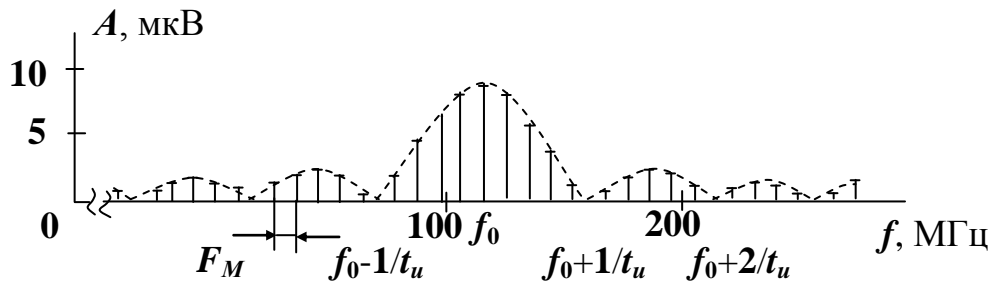


Рис. 6

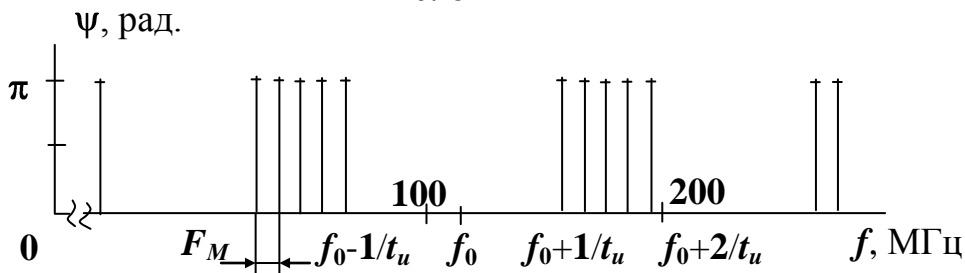


Рис. 7

Спектральный состав ЧМ-сигнала (4) определяется выражением:

$$S_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 J_0(\varphi) \cos(\pi f_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(\varphi) \cos[\pi(f_0 + kF_M)t] + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(\varphi) \cos[\pi(f_0 - kF_M)t], \quad (7)$$

где $J_k(m)$ - функция Бесселя k -го порядка (см. [2], с. 320 - 325).

Построение АЧС и ФЧС следует провести для интервала частот в пределах практической ширины спектра

$$\Pi_{\text{практ.}} \cong 2 F_M (m + 1), \quad (8)$$

отбросив спектральные составляющие с $k > m+1$. На графике АЧС следует показать $\Pi_{\text{практ.}}$.

Вид АЧС и ФЧС ЧМ-сигнала приведен на рис. 8 и 9.

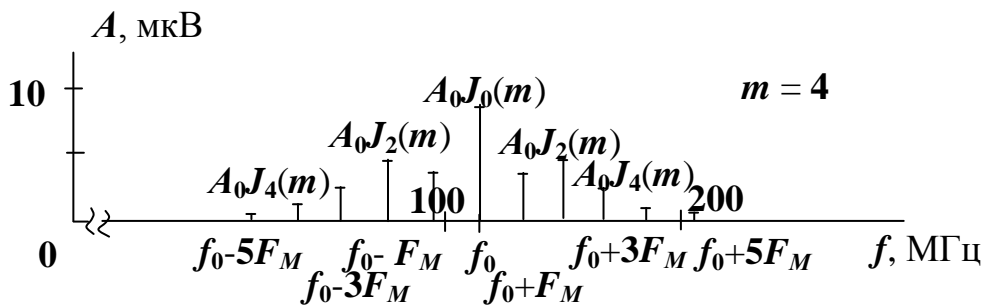


Рис. 8

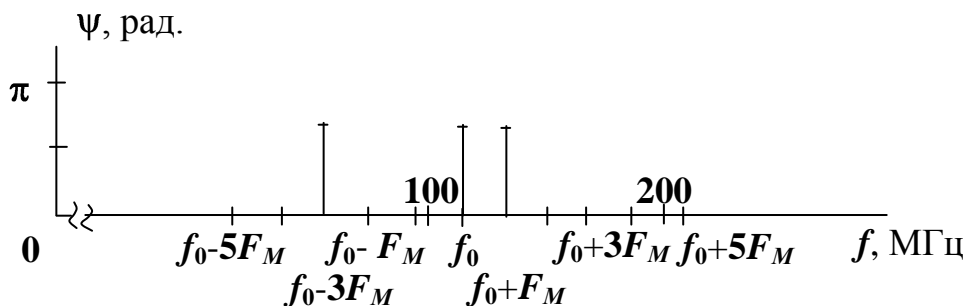


Рис. 9

3. Порядок выполнения работы

3.1. Расчет АЧС и ФЧС АМ-сигнала

Расчет АЧС и ФЧС АМ-сигнала производится вручную в соответствии с данными табл. 3.2 при следующих значениях параметров:

$A_0 = 100 \cdot \text{мкВ}$, $M = 0,5$, $f_0 = 100 \cdot \text{МГц}$, $F_M = 5 \cdot \text{кГц}$, $\varphi_0 = \pi/2$ рад. $\varphi_M = \pi/4$ рад. Результаты расчета представить в виде графиков, аналогичных графикам, представленным на рис. 4 и 5.

3.2. Расчет АЧС и ФЧС АМн-сигнала

Расчет производится с использованием ЭВМ. При этом расчет следует производить для основного и одной пары боковых лепестков спектров, что соответствует интервалу частот $(f_0 - 2/t_u, f_0 + 2/t_u)$.

Расчетные формулы:

Таблица 2

Частота	АЧС	ФЧС	Условия
f	A	ψ	
f_0	A_0/q	0	-
$f_0 \pm \kappa F_n$	$\frac{A_0}{q} \left \frac{\sin \frac{\pi \kappa}{q}}{\frac{\pi \kappa}{q}} \right $	0	$\sin \frac{\pi \kappa}{q} \geq 0$
		π	$\sin \frac{\pi \kappa}{q} < 0$

Вспомогательные формулы: $F_n = 1 / T_n$; $q = T_n / t_H$.

Размерность исходных и выходных данных:

Таблица 3

Параметр	A	ψ	f	f_0
Размерность	В	рад.	Гц	Гц
Параметр	A_0	T_n	t_H	κ
Размерность	В	с	с	-

Имя программы и язык программирования: RTCS1M (MATHCAD).

3.3. Расчет АЧС и ФЧС ЧМ-сигнала

Расчет производится с использованием ЭВМ.

Расчетные формулы:

Таблица 4

Частота	АЧС	ФЧС	Условия
f	A	ψ	
f_0	$A_0 J_0(m) $	0	$J_0(m) \geq 0$
		π	$J_0(m) < 0$
$f_0 + \kappa F_M$	$A_0 J_\kappa(m) $	0	$J_\kappa(m) \geq 0$
		π	$J_\kappa(m) < 0$
$F_0 - \kappa F_M$	$A_0 J_\kappa(m) $	0	$(-1)^\kappa J_\kappa(m) \geq 0$
		π	$(-1)^\kappa J_\kappa(m) < 0$

Размерность исходных и выходных данных:

Таблица 5

Параметр	A	ψ	f	f_0
Размерность	В	рад.	Гц	Гц
Параметр	A_0	F_M	T	κ
Размерность	В	Гц	-	-

Имя программы и язык программирования: RTCS2M (MATHCAD).

Результаты расчетов, проведенных в подразделах 3.2 и 3.3, представить в виде графиков, аналогичных графикам, представленным в виде примеров в разделе 6 настоящего описания лабораторной работы. Исходные данные для расчетов получить у преподавателя либо, если таковые им не будут выданы, использовать данные, указанные в примерах, приведенных в разделе 6.

4. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- осциллограммы АМ, АМ_n и ЧМ-сигналов, представленные на рис. 1 - 3;
- аналитические выражения, характеризующие спектральный состав АМ, АМ_n и ЧМ-сигналов, описываемые формулами (5) - (7);
- полученные в результате расчетов графики АЧС и ФЧС АМ-сигнала;
- распечатку результатов расчетов на ЭВМ АЧС и ФЧС АМ_n и ЧМ-сигналов с записью программ расчетов на языке программирования МATHCAD, исходных данных, расчетных формул и полученных в результате расчетов графиков и численных результатов;
- выводы по работе, содержащие анализ особенностей спектров исследованных сигналов (их ширину, распределение энергии между несущей и боковыми составляющими спектра сигнала, достоинства и недостатки рассматриваемых видов модуляции, вытекающие из указанных характеристик спектров).

5. Контрольные вопросы

1. В чем Вы видите достоинства и недостатки амплитудной модуляции?
2. В чем Вы видите достоинства и недостатки угловой (частотной и фазовой) модуляции?
3. Как связаны между собой частота модуляции, ее индекс и девиация частоты сигнала с угловой модуляцией?
4. Каковы спектры частотно-модулированного и фазомодулированного сигналов при малых значениях индекса модуляции?
5. Объясните различие между спектрами однотональных амплитудно-модулированного сигнала и частотно-модулированного сигнала с малым индексом модуляции.
6. Дайте определение эффективной ширины спектра сигнала.
7. Чему равна эффективная ширина спектра амплитудно-манипулированного сигнала?
8. Чему равна эффективная ширина спектра сигнала с угловой модуляцией при большом индексе модуляции?
9. Как следует выбрать индекс угловой модуляции, чтобы в спектре сигнала отсутствовало несущее колебание?
10. В чем Вы видите основной недостаток фазовой модуляции по сравнению с частотной модуляцией?

6. Программы и примеры расчетов на ЭВМ

6.1. Расчет АЧС и ФЧС АМН - сигнала

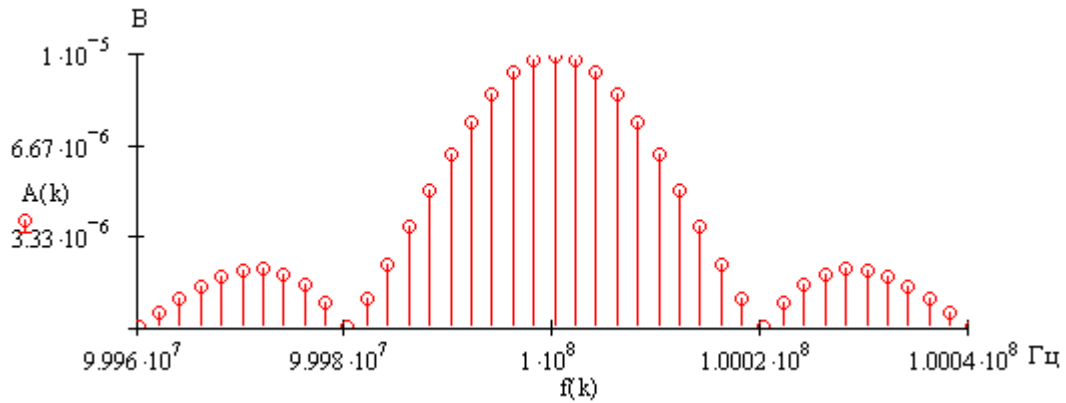
RTCS1M

$$A_0 := 100 \cdot 10^{-6} \text{ В} \quad f_0 := 100 \cdot 10^6 \text{ Гц} \quad T_n := 500 \cdot 10^{-6} \text{ с} \quad \tau_n := 50 \cdot 10^{-6} \text{ с}$$

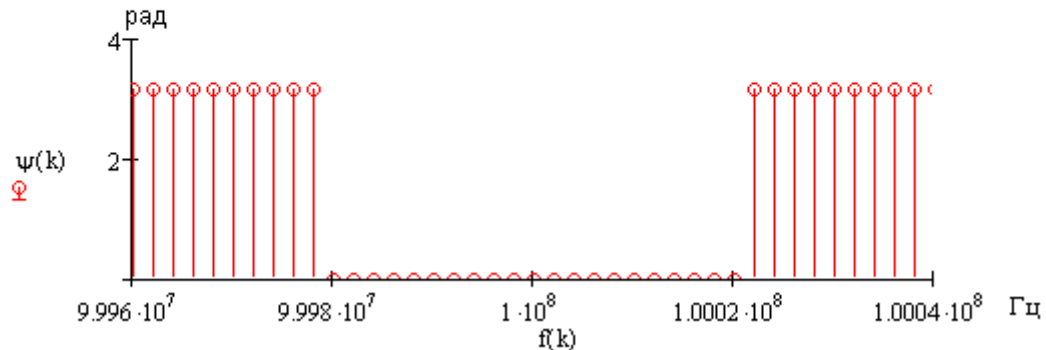
$$F_n := \frac{1}{T_n} \quad F_n = 2 \times 10^3 \text{ Гц} \quad q := \frac{T_n}{\tau_n} \quad q = 10$$

$$k := -20..20$$

$$A(k) := \frac{A_0}{q} \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot k}{q}\right)}{\frac{\pi \cdot k}{q}} \right| \quad f(k) := f_0 + k \cdot F_n$$



$$\psi(k) := \begin{cases} 0 & \text{if } \left(\sin\left(\frac{\pi \cdot |k|}{q}\right) \right) \geq 0 \\ \pi & \text{if } \sin\left(\frac{\pi \cdot |k|}{q}\right) < 0 \end{cases}$$



6.2. Расчет АЧС и ФЧС ЧМ - сигнала

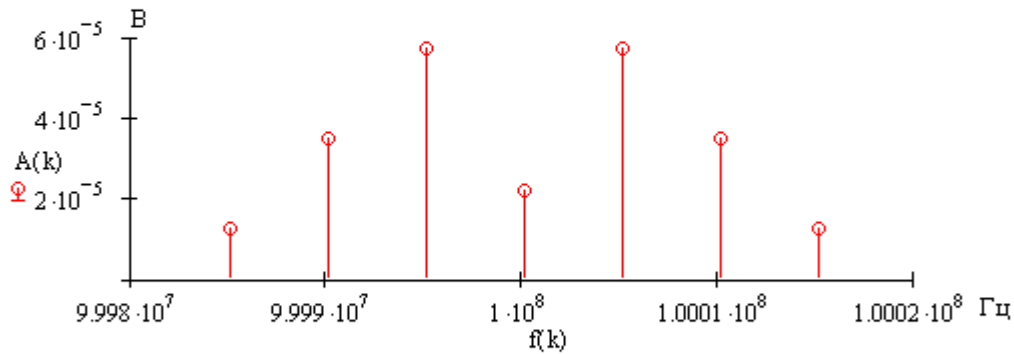
RTCS2M

$$A0 := 100 \cdot 10^{-6} \text{ В} \quad f0 := 100 \cdot 10^6 \text{ Гц} \quad Fm := 5 \cdot 10^3 \text{ Гц} \quad m := 2$$

$$k := -(m + 1) .. m + 1$$

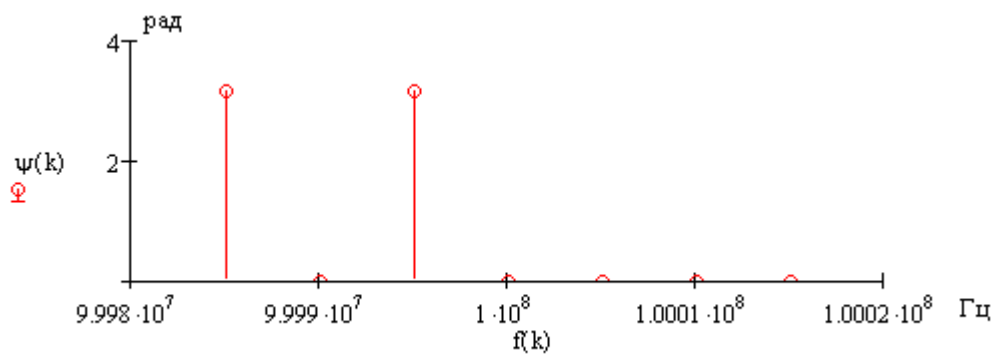
$$f(k) := f0 + k \cdot Fm$$

$$A(k) := A0 \operatorname{Re}(H1(|k|, m))$$



$$Y2(k) := \operatorname{Re}(H1(k, m))$$

$$\psi(k) := \begin{cases} 0 & \text{if } Y2(k) \geq 0 \\ \pi & \text{if } Y2(k) < 0 \end{cases}$$



7. Литература

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Высшая школа, 2005, с. 92 - 108.
2. Бронштейн И.М., Семендяев И.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. - М.: Наука, 1986.

Лабораторная работа ЛР 3

Анализ частотных характеристик частотно-избирательных цепей

1. Цель работы - исследование частотных характеристик одноконтурного резонансного усилителя и активного RC -фильтра нижних частот.

2. Основные теоретические положения

Исследуемый резонансный усилитель выполнен по схеме, представленной на рис. 1.

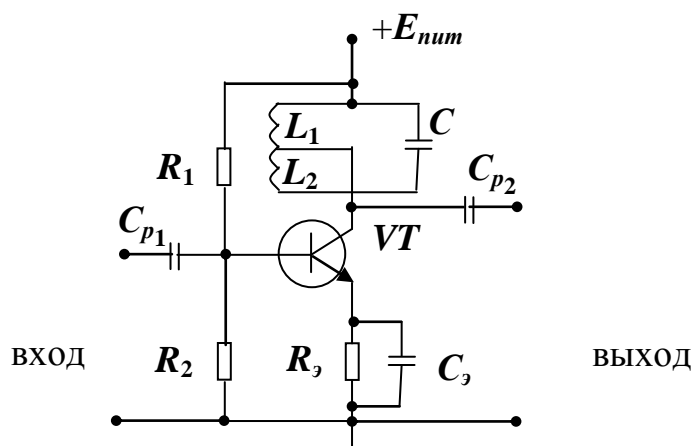


Рис. 1

Здесь $R_1, R_2, C_{p1}, C_{p2}, R_3, C_3$ - вспомогательные элементы схемы, R_1 и R_2 - создают начальное смещение U_0 рабочей точки, C_{p1} и C_{p2} - разделительные конденсаторы, R_3 и C_3 - элементы цепи смещения и термостабилизации рабочей точки. В схеме усилителя использовано неполное включение контура для уменьшения шунтирующего влияния выходного сопротивления транзистора на избирательные свойства контура.

Режим работы транзистора - линейный с рабочей точкой в середине вольт-амперной характеристики (ВАХ) $i_k(U_{бэ})$.

Амплитудно-частотная (АЧХ) и фазо-частотная (ФЧХ) характеристики рассматриваемого усилителя определяются выражениями:

$$|K(f)| = \frac{K_p}{\sqrt{1 + 4Q_s^2 \left(\frac{f - f_p}{f_p} \right)^2}}, \quad (1)$$

$$\psi(f) = \pi - \arctg \left[Q_s \left(\frac{f - f_p}{f_p} \right) \right], \quad (2)$$

где $f_p = f_0$, $K_p = S R_{p,э}$ - резонансный коэффициент усиления, $R_{p,э} = R_p / (1 + R_p / R_i)$ и $Q_s = Q / (1 + R_p / R_i)$ - эквивалентные резонансное сопротивление и добротность контура, $R_p = \kappa_e^2 \rho Q$ - резонансное сопротивление контура, κ_e - коэффициент включения контура, $\rho = \sqrt{L/C}$ - характеристическое сопротивление контура, R_i - выходное сопротивление транзистора.

Основные теоретические положения, касающиеся характеристик частотно-избирательных цепей и, в частности, резонансного усилителя, работающего в линейном режиме, имеются в [1], с. 224 - 230.

Исследуемый активный RC -фильтр нижних частот (ФНЧ) на основе операционного усилителя выполнен по схеме, представленной на рис. 2.

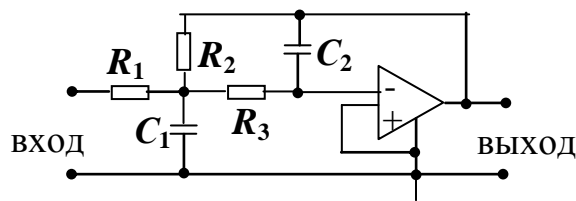


Рис. 2

Рассматривается чебышевская аппроксимация идеальной характеристики ФНЧ, обеспечивающая высокую степень ослабления сигнала вне полосы прозрачности фильтра при достаточно небольшой неравномерности характеристики в пределах полосы прозрачности.

АЧХ рассматриваемого ФНЧ определяется выражением:

$$|K(j2\pi f)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^4 + 2(A^2 - B^2)\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 + 2(A^2 + B^2)}}, \quad (3)$$

где $f_c = 1,2 f_{max}$ - частота среза фильтра, f_{max} - максимальная частота в спектре

входного сигнала, $A = \frac{\epsilon - 1}{2\sqrt{2\epsilon}}$, $B = \frac{\epsilon + 1}{2\sqrt{2\epsilon}}$, $\epsilon = \frac{10^{|\Delta_H|/20} + 1}{\sqrt{10^{|\Delta_H|/10} - 1}}$, Δ_H - неравномер-

ность характеристики в пределах полосы прозрачности фильтра. При этом ослабление сигнала вне полосы прозрачности на частоте $f = 2f_c$ равно

$$\Delta_{2f_c} = 20 \lg \frac{A^2 + B^2}{\sqrt{(A^2 + B^2)^2 + 8(A^2 - B^2)^2} + 16}. \quad (4)$$

Требуемые параметры Δ_H и Δ_{2f_c} , характеризующие неравномерность характеристики фильтра в пределах полосы прозрачности и ослабление сигнала вне полосы, обеспечиваются выбором номиналов элементов R_1 , R_2 , R_3 , C_1 и C_2 схемы фильтра, осуществляемым в процессе его синтеза. При этом при одинаковых номиналах резисторов $R_1 = R_2 = R_3 = R$ номиналы емкостей определяются соотношениями:

$$C_1 = 3/4 \pi R A f_c, \quad (5) \quad C_2 = C_1 / \sqrt{\pi f_c^2 R C_1^2 B^2 + 9/4}. \quad (6).$$

Основные теоретические положения, касающиеся ФНЧ с чебышевской характеристикой и их реализации в виде активного RC -фильтра имеются в [1], с. 341 - 343, 361 - 364.

Вид АЧХ и ФЧХ резонансного усилителя и АЧХ активного RC -фильтра нижних частот показан на рис. 3 - 5.

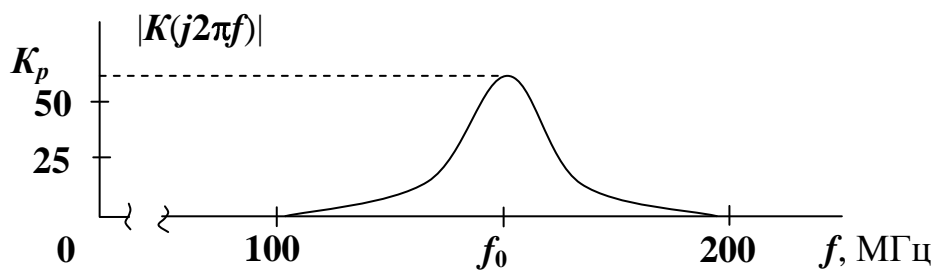


Рис. 3

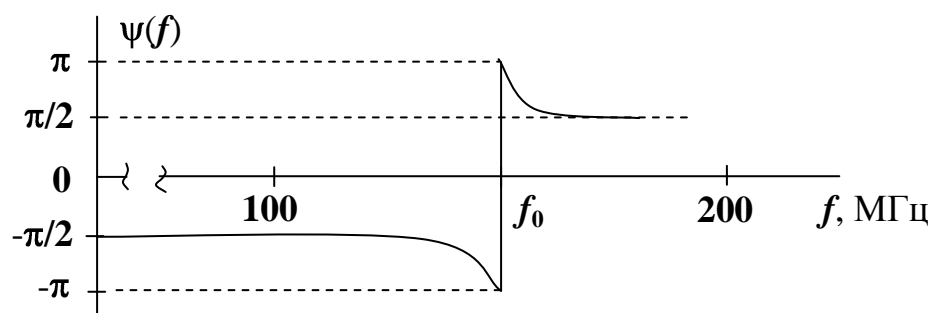


Рис. 4

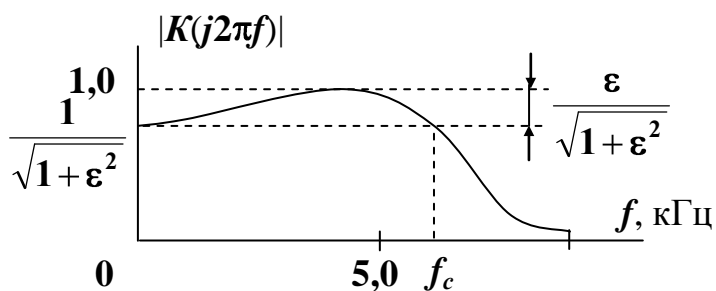


Рис. 5

График ФЧХ резонансного усилителя, представленный на рис.4, может быть построен и для пределов изменения фазы $0 - 2\pi$. В этом случае часть графика в пределах изменения частоты $0 - f_0$ следует поднять на 2π вверх.

Параметр ε на графике АЧХ ФНЧ, представленном на рис. 5, связан с неравномерностью характеристики фильтра Δ_H соотношением

$$\varepsilon = \sqrt{10^{(\Delta_H/10)} - 1}. \quad (7)$$

3. Порядок выполнения работы

3.1. Расчет АЧХ и ФЧХ резонансного усилителя

Расчет производится с использованием ЭВМ.

Расчетные формулы:

Таблица 1

АЧХ	ФЧХ
$ K(j 2\pi f) $	$\psi(f)$
$K_p / \sqrt{1 + \xi^2}$	$\pi - \text{arctg } \xi$

Вспомогательные формулы:

$$\xi = 2 Q_s (f - f_p) / f_p; \quad K_p = S R_{p,э}; \quad R_{p,э} = R_p / (1 + R_p / R_i); \quad Q_s = Q / (1 + R_p / R_i); \quad R_p = \kappa_\theta^2 \rho Q; \quad \rho = \sqrt{L/C}.$$

Размерность исходных и выходных данных:

Таблица 2

Параметр	$ K(j 2\pi f) $	$\varphi_\kappa(f)$	f	f_p	S
Размерность	-	рад.	Гц	Гц	А/В
Параметр	R_i	Q	κ_θ	L	C
Размерность	Ом	-	-	Гн	Ф

Имя программы и язык программирования: RTCS3M (MATHCAD).

3.2. Расчет характеристик (АЧХ и ослабления вне полосы прозрачности) и номиналов элементов ФНЧ.

Расчет производится с использованием ЭВМ.

Расчетные формулы:

Таблица 3

АЧХ	Ослабление	Емкости	
$ K(j 2\pi f) $	Δ_{2f_c}	C_1	C_2
$1/[(f/f_c)^4 + 2(A^2 - B^2) \times (f/f_c)^2 + (A^2 + B^2)^2]^{1/2}$	$20 \lg \{ (A^2 + B^2) / [(A^2 + B^2)^2 + 8(A^2 - B^2) + 16] \}$	$\frac{3}{4\pi R A f_c}$	$C_1 / [4\pi^2 f_c^2 (R C_1)^2 B^2 + 9/4]$

Вспомогательные формулы:

$$A = (\epsilon - 1) / 2 \sqrt{2\epsilon}, \quad B = (\epsilon + 1) / 2 \sqrt{2\epsilon}, \quad \epsilon = \left(10^{|\Delta_H|/20} + 1 \right) / \left(\sqrt{10^{|\Delta_H|/20} - 1} \right).$$

Размерность исходных и выходных данных:

Таблица 4

Параметр	$ K(j 2\pi f) $	Δ_{2f_c}	C_1	C_2
Размерность	-	дБ	Ф	Ф
Параметр	f	f_c	$ \Delta_H $	R
Размерность	Гц	Гц	дБ	Ом

Имя программы и язык программирования: RTCS9M (MATHCAD).

Результаты расчетов, проведенных в подразделах 3.1 и 3.2, представить в виде графиков, аналогичных графикам, представленным в виде примеров в разделе 6 настоящего описания лабораторной работы. При этом расчеты АЧХ и ФЧХ резонансного усилителя произвести для случаев использования его в качестве усилителя радиочастоты (УРЧ) и усилителя промежуточной частоты (УПЧ), входящего в состав преобразователя частоты (ПЧ) либо используемого в качестве усилителя частотного детектора (УЧД), в котором осуществляется преобразование частотной модуляции в амплитудную. Исходные данные для

расчетов получить у преподавателя либо, если таковые им не будут выданы, использовать данные, указанные в примерах, приведенных в разделе 6.

4. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- принципиальные схемы исследуемых частотно-избирательных цепей, представленные на рис.1 и 2;
- аналитические выражения для АЧХ и ФЧХ резонансного усилителя, АЧХ активного **RC** - фильтра нижних частот, ослабления вне полосы прозрачности ФНЧ и номиналов его элементов, описываемые формулами (3) - (6);
- распечатку результатов расчетов на ЭВМ АЧХ и ФЧХ резонансного усилителя, АЧХ активного **RC** - фильтра нижних частот, ослабления вне полосы прозрачности ФНЧ и номиналов его элементов с записью программ расчетов на языке программирования MATHCAD, исходных данных, расчетных формул и полученных в результате расчетов графиков и численных результатов;
- выводы по работе, содержащие анализ особенностей АЧХ резонансного усилителя и активного **RC** - фильтра нижних частот, влияния шунтирующего действия выходного сопротивления транзистора на избирательные свойства и коэффициент усиления резонансного усилителя и роли коэффициента включения контура, а также сравнительный анализ возможности реализации узкополосной фильтрации сигналов в УРЧ и УПЧ.

5. Контрольные вопросы

1. Как определяется частотный коэффициент передачи линейной цепи? Как с ним связаны АЧХ и ФЧХ?
2. Напишите формулы, определяющие АЧХ и ФЧХ одноконтурного резонансного усилителя.
3. Как определить полосу пропускания одноконтурного резонансного усилителя, если известна добротность контура?
4. Как принято определять ширину полосы пропускания узкополосных радиотехнических цепей? На сколько децибел ослабляется сигнал на частоте, соответствующей границе полосы пропускания?
5. В чем проявляется влияние внутреннего сопротивления электронного прибора на характеристики резонансного усилителя малых колебаний? Как можно ослабить возникающий при этом вредный эффект?
6. Изобразите принципиальную схему активного **RC**-фильтра нижних частот, построенного на базе операционного усилителя.
7. В чем преимущество фильтра нижних частот с чебышевской характеристикой по сравнению с фильтром в виде интегрирующей **RC** - цепи?

6. Программы и примеры расчетов на ЭВМ

6.1. Расчет АЧХ и ФЧХ резонансного усилителя

RTCS3M

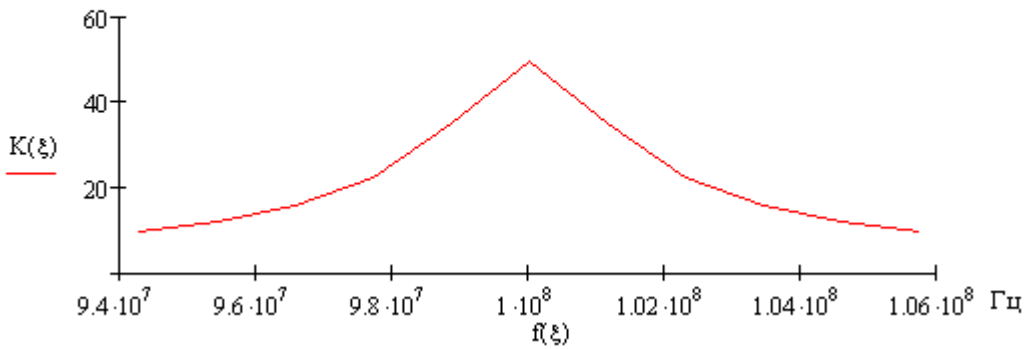
УРЧ

$$f_0 := 100 \cdot 10^6 \text{ Гц} \quad f_p := f_0 \quad L := 10^{-6} \text{ Гн} \quad C := \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot f_0^2 \cdot L} \quad C = 2.533 \times 10^{-12} \text{ Ф}$$

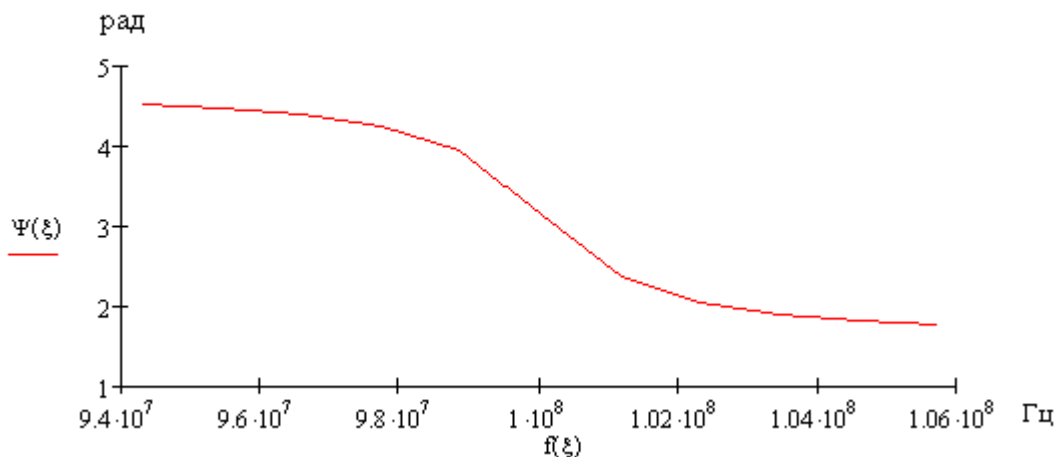
$$S := 20 \cdot 10^{-3} \frac{\text{А}}{\text{В}} \quad R_i := 20 \cdot 10^3 \text{ Ом} \quad K_b := 0.3 \quad Q := 50$$

$$R_p := K_b^2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot Q \quad R_p = 2.827 \times 10^3 \text{ Ом} \quad K_p := \frac{S \cdot R_p}{1 + \frac{R_p}{R_i}} \quad K_p = 49.544 \text{ Ом}$$

$$\xi := -5, -4..5 \quad K(\xi) := \frac{K_p}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad f(\xi) := f_0 + \frac{\xi \left(1 + \frac{R_p}{R_i}\right) \cdot f_p}{2 \cdot Q}$$



$$\Psi(\xi) := \pi - \text{atan}(\xi)$$



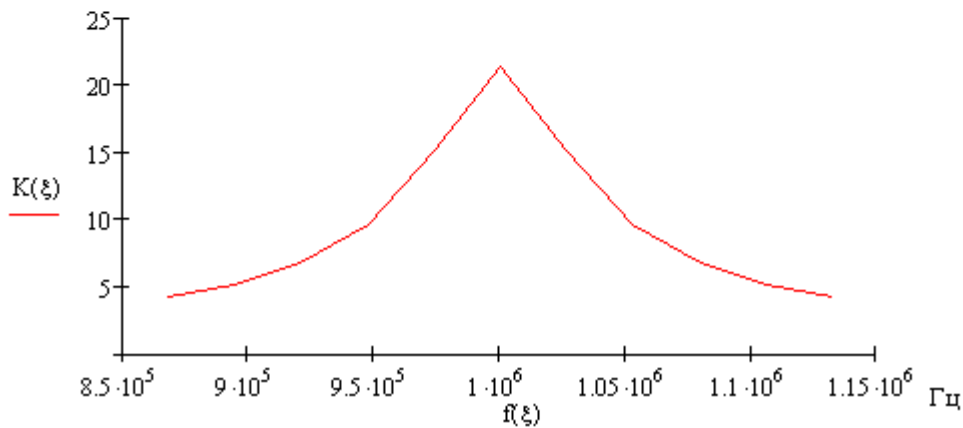
ПЧ, УЧД

$$f_{\text{np}} := 10^6 \text{ Гц} \quad f_p := f_{\text{np}} \quad L := 100 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} \quad C := \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot f_{\text{np}}^2 \cdot L} \quad C = 2.533 \times 10^{-10} \text{ Ф}$$

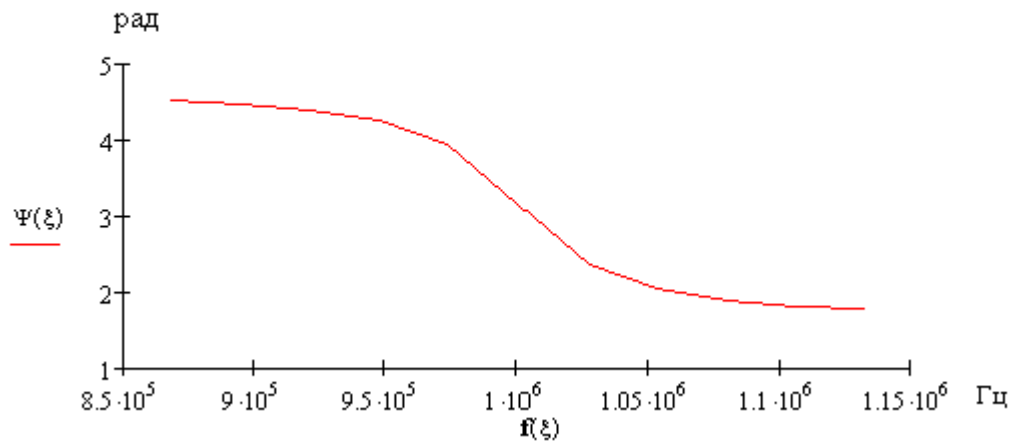
$$S := 20 \cdot 10^{-3} \frac{\text{А}}{\text{В}} \quad R_i := 20 \cdot 10^3 \text{ Ом} \quad K_b := 0.3 \quad Q := 20$$

$$R_p := K_b^2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot Q \quad R_p = 1.131 \times 10^3 \text{ Ом} \quad K_p := \frac{S \cdot R_p}{1 + \frac{R_p}{R_i}} \quad K_p = 21.409$$

$$\xi := -5, -4..5 \quad K(\xi) := \frac{K_p}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad f(\xi) := f_{\text{np}} + \frac{\xi \cdot \left(1 + \frac{R_p}{R_i}\right) \cdot f_p}{2 \cdot Q}$$



$$\Psi(\xi) := \pi - \text{atan}(\xi)$$



6.2. Расчет характеристик и номиналов элементов ФНЧ

RTCS9M

$$\Delta H := -2 \text{ дБ} \quad F_m := 5 \cdot 10^3 \text{ Гц}$$

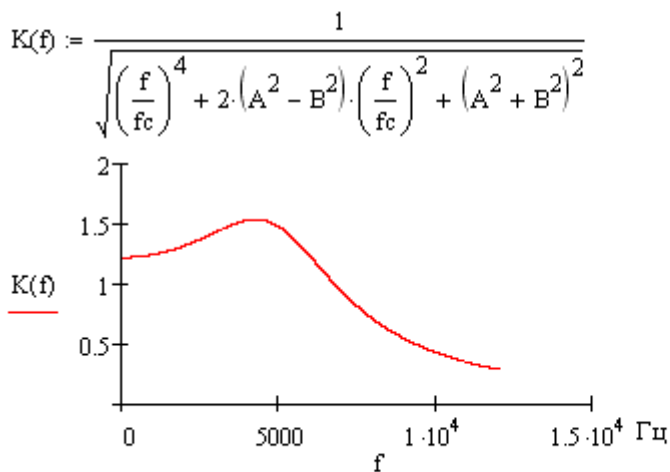
$$f_{\max} := F_m \quad R := 2 \cdot 10^3 \text{ Ом}$$

$$b := \frac{\left(\frac{|\Delta H|}{10 \cdot 20} + 1 \right)}{\sqrt{10 \cdot 10^{-1} - 1}} \quad b = 2.954$$

$$A := \frac{b - 1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot b} \quad A = 0.402 \quad B := \frac{b + 1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot b} \quad B = 0.813$$

$$f_c := 1.2 \cdot F_m \quad f_c = 6 \times 10^3 \text{ Гц}$$

$$f := 0..2 \cdot f_c$$



$$\Delta 2f_c := 20 \cdot \log \left[\frac{A^2 + B^2}{(A^2 + B^2)^2 + 8 \cdot (A^2 - B^2) + 16} \right] \quad \Delta 2f_c = -23.752 \text{ дБ}$$

$$C1 := \frac{3}{4 \cdot \pi \cdot R \cdot A \cdot f_c} \quad C1 = 4.95 \times 10^{-8} \text{ Ф}$$

$$C2 := \frac{C1}{4 \cdot \pi^2 \cdot f_c^2 \cdot (R \cdot C1)^2 \cdot B^2 + \frac{9}{4}} \quad C2 = 4.318 \times 10^{-9} \text{ Ф}$$

7. Литература

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Высшая школа, 2005, с. 224 - 230, 361 - 364.

Анализ искажений модулированных сигналов в частотно- избирательных цепях

1. Цель работы - анализ искажений типовых модулированных сигналов при прохождении через одноконтурный резонансный усилитель.

2. Основные теоретические положения

В лабораторной работе рассматривается прохождение через резонансный усилитель модулированных сигналов трех видов:

- однотонального амплитудно-модулированного (АМ) сигнала

$$S_{AM}(t) = A_0 [1 + M \cos(2\pi F_M t + \varphi_M)] \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0), \quad (1)$$

где A_0 - амплитуда несущего колебания, M - коэффициент модуляции, f_0 и φ_0 - частота и начальная фаза несущего колебания, F_M и φ_M - частота и начальная фаза модулирующего колебания;

- амплитудно-манипулированного (АМН) (телеграфного) сигнала

$$S_{AMH}(t) = A_0 S_M(t) \cos(2\pi f_0 t), \quad (2)$$

где

$$S_M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma(t - iT_n) \quad (3)$$

модулирующий сигнал в виде последовательности прямоугольных импульсов с длительностью t_u и периодом повторения T_n ; $\sigma(t)$ - единичная функция (функция Хевисайда), остальные обозначения те же, что и в (1);

- однотонного частотно-модулированного (ЧМ) сигнала

$$S_{CM}(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + m \sin(2\pi F_M t)], \quad (4)$$

где m - индекс модуляции, остальные обозначения те же, что и в (1).

Одноконтурный резонансный усилитель, искажения сигналов в котором исследуются, выполнен по схеме, представленной на рис.1.

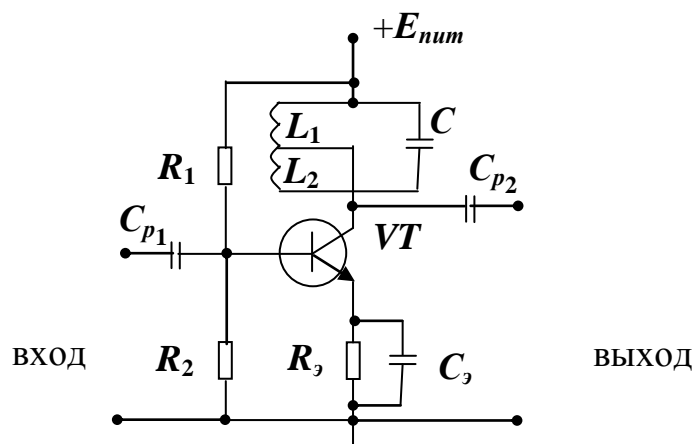


Рис. 1

Здесь $R_1, R_2, C_{p1}, C_{p2}, R_3, C_3$ - вспомогательные элементы схемы, R_1 и R_2 - создают начальное смещение U_0 рабочей точки, C_{p1} и C_{p2} - разделительные конденсаторы, R_3 и C_3 - элементы цепи смещения и термостабилизации рабочей точки. В схеме усилителя использовано неполное включение контура для уменьшения шунтирующего влияния выходного сопротивления транзистора на его избирательные свойства.

Основные теоретические положения, касающиеся искажения сигналов с указанными видами модуляции при их прохождении через одноконтурный резонансный усилитель, имеются в [1], с. 235 - 251.

Сигнал на выходе одноконтурного резонансного усилителя, в качестве которого в лабораторной работе рассматривается усилитель промежуточной частоты (УПЧ), при воздействии на его вход АМ - сигнала (1) записывается:

$$U_{\text{вых}} \approx K_{p,\text{упч}} A_0 \left[1 + \frac{M}{\sqrt{1 + \xi_{F_M}^2}} \cos(\pi F_M t + \varphi_M - \vartheta_{F_M}) \right] \cos(\pi f_0 t), \quad (5)$$

где $K_{p,\text{упч}}$ - резонансный коэффициент УПЧ, $\xi_{F_M} = 2 Q_3 F_M / f_{np}$ - обобщенная расстройка фильтра на верхней боковой частоте, $Q_3 = Q / (1 + R_p / R_i)$ - эквивалентная добротность контура, R_p - резонансное сопротивление контура, R_i - выходное сопротивление транзистора, $f_{np} = f_0$ - резонансная частота фильтра УПЧ, $\vartheta_{F_M} = \arctg \xi_{F_M}$ - фазовый сдвиг огибающей АМ-сигнала на выходе фильтра.

Из сравнения сигналов (1) и (5) видно, что искажение АМ-сигнала при прохождении через УПЧ заключается в уменьшении глубины модуляции и появлении запаздывания огибающей выходного сигнала относительно огибающей входного сигнала. При этом коэффициент модуляции выходного сигнала и время запаздывания его огибающей определяются выражениями:

$$M_{\text{вых}} = M / \sqrt{1 + \xi_{F_M}^2}, \quad (6) \quad t_3 = \vartheta_{F_M} / 2\pi F_M, \quad (7)$$

где $\xi_{F_M} = 2 Q_3 F_M / f_{np}$, $\vartheta_{F_M} = \arctg \xi_{F_M}$.

Вид построенных в одинаковом масштабе нормированных входного и выходного сигналов (1) и (5) при $F_M = 5$ кГц показан на рис. 2.

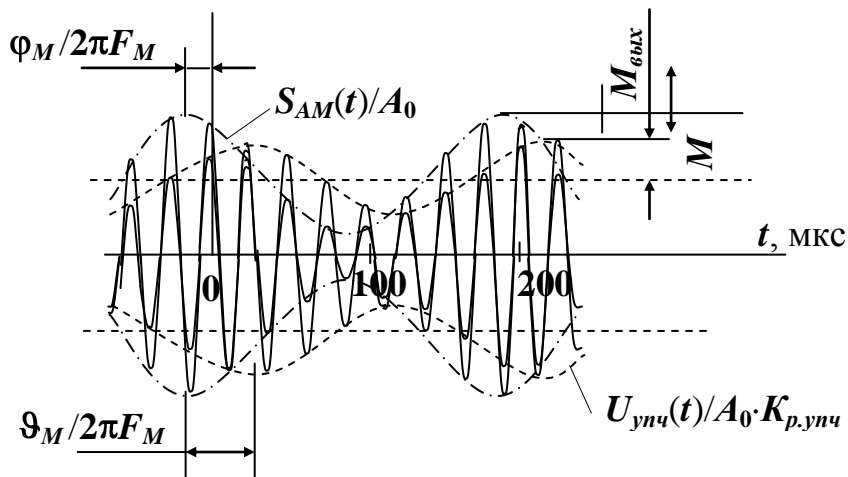


Рис. 2

При отсутствии расстройки полосового фильтра УПЧ относительно частоты сигнала, то есть при $f_0 = f_p = f_{np}$, искажение АМн-сигнала (2) в фильтре заключается в искажении его огибающей, которая в этом случае для одиночного импульса импульсной последовательности записывается:

$$U_{ynч} \left(\begin{array}{l} \\ \end{array} \right) = K_{p.ypч} K_{p.ynч} A_0 \begin{cases} r \left(\begin{array}{l} \\ \end{array} \right), & 0 \leq t \leq t_u; \\ r \left(\begin{array}{l} \\ \end{array} \right) \exp \left(-\frac{t-t_u}{\tau_k} \right), & \\ t_u < t \leq T_n, & \end{cases} \quad (8)$$

где $r(t) = 1 - \exp(-t/\tau_k)$ - кривая установления переднего фронта импульса;
 $\tau_k = 2 Q_3 / \omega_p = Q_3 / \pi f_p$ - постоянная времени контура.

При наличии расстройки $\delta f = f_{np} - f_p$ кроме переходного процесса установления огибающей, который в данном случае на переднем фронте носит колебательный характер, имеет место переходной процесс установления мгновенной частоты сигнала $f_{ynч}(t)$, также колебательный. При этом указанные переходные процессы описываются выражениями:

$$U_{ynч} \left(\begin{array}{l} \\ \end{array} \right) = \frac{K_{p.ypч} K_{p.ynч} A_0}{\sqrt{1 + Q^2 \pi^2 \delta f^2 \tau_k^2}} \begin{cases} r_1 \left(\begin{array}{l} \\ \end{array} \right), & 0 \leq t \leq t_u; \\ r_1 \left(\begin{array}{l} \\ \end{array} \right) \exp \left(-\frac{t-t_u}{\tau_k} \right), & \\ t_u < t \leq T_n, & \end{cases} \quad (9)$$

где $r_1 \left(\begin{array}{l} \\ \end{array} \right) = \sqrt{1 - 2 \exp(-t/\tau_k) \cos Q \pi \delta f t + \exp(-2t/\tau_k)}$ - кривая установления переднего фронта импульса;

$$f_{ynч} \left(\begin{array}{l} \\ \end{array} \right) = \begin{cases} f_p + \delta f \frac{1 - \exp(-t/\tau_k) \left[\cos Q \pi \delta f t + \frac{\sin Q \pi \delta f t}{2 \pi \delta f \tau_k} \right]}{1 - \exp(-t/\tau_k) \cos Q \pi \delta f t + \exp(-2t/\tau_k)}, & 0 \leq t \leq t_u; \\ f_p, & t_u < t \leq T_n. \end{cases} \quad (10)$$

Характер искажений огибающей АМн-сигнала при отсутствии и наличии расстройки резонансной частоты контура относительно частоты сигнала и характер переходного процесса по частоте при наличии расстройки при $T_n = 150$ мкс и $t_u = 67$ мкс показаны на рис. 3 - 5. При этом амплитуды входного и выходного сигналов нормированы, а переходной процесс по огибающей в отсутствие расстройки показан для двух значений эквивалентной добротности контура. Как видим, увеличение добротности приводит к затягиванию переходного процесса.

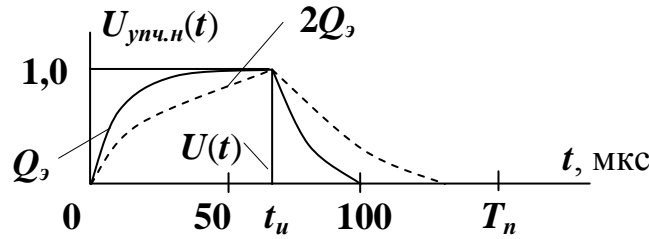


Рис. 3

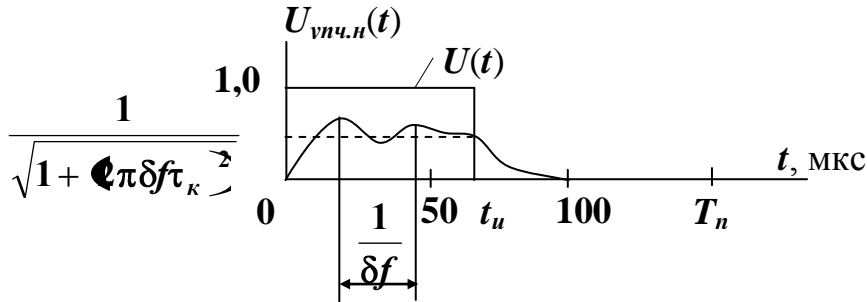


Рис. 4

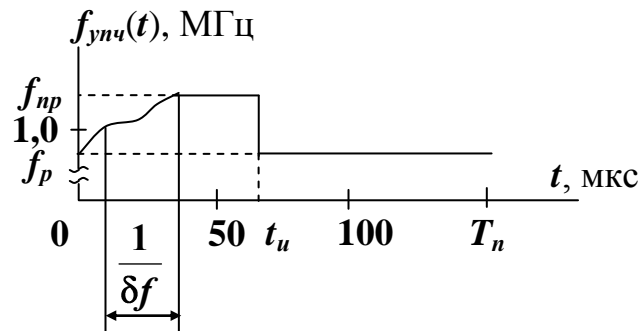


Рис. 5

Выражения для огибающей и частоты сигнала на выходе УПЧ при воздействии на его вход ЧМ-сигнала (4) записываются:

$$U_{\text{ynch}} \approx K_{p.\text{ynch}} A_0 \sqrt{1 + m^2 \left[\sin^2 \pi F_M t - 2\mu Q_3 \cos \pi F_M t \right] + \mu^2 Q_3^2}, \quad (11)$$

$$f_{\text{ynch}} \approx f_{np} + \frac{m F_M}{\sqrt{1 + \mu^2 Q_3^2}} \cos \pi F_M t + \Phi, \quad (12)$$

где $\mu = F_M / f_{np}$; $\Phi = \arctg(2\mu Q_3)$, остальные обозначения - прежние.

С учетом того, что огибающая ЧМ-сигнала (4) постоянна, а его мгновенная частота при $f_0 = f_{np}$ определяется выражением:

$$f_{\text{ynch}}(t) = f_{np} + m F_M \cos(2\pi F_M t), \quad (13)$$

из (11) - (13) следует, что искажение ЧМ-сигнала в полосовом фильтре усилителя ПЧ состоит в возникновении паразитной АМ и в искажении закона моду-

ляции частоты, проявляющемся, в частности, в уменьшении девиации частоты с $\Delta f_{ynч} = mF_M$ до

$$\Delta f_{nc} = mF_M / \sqrt{1 + \epsilon \mu Q_3^2}. \quad (14)$$

Характер изменения нормированной огибающей и мгновенной частоты ЧМ-сигнала на выходе усилителя ПЧ при $F_M = 5$ кГц показан на рис. 6 и 7.

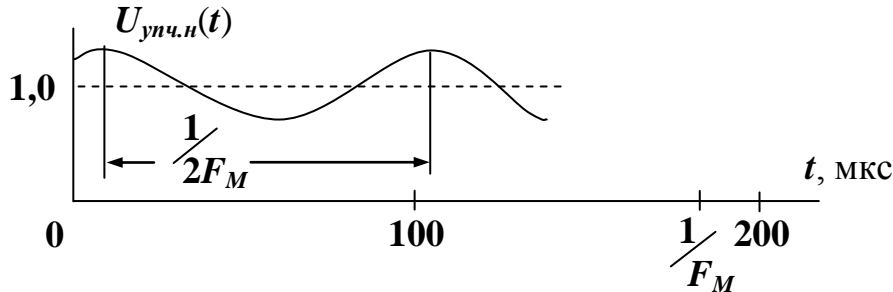


Рис. 6

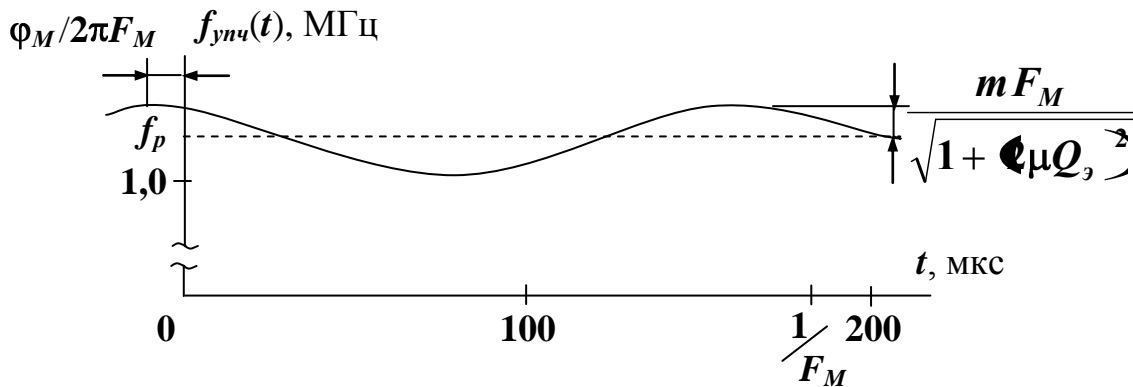


Рис. 7

Из сравнения рис. 6 и 7 видно, что частота паразитной АМ выходного сигнала равна удвоенной частоте модуляции ЧМ-сигнала.

3. Порядок выполнения работы

3.1. Расчет искажений АМ-сигнала в полосовом фильтре УПЧ.

Расчет производится вручную с использованием выражений (1) и (5) для сигналов на входе и выходе усилителя и выражения (6) и (7) для коэффициента модуляции и времени задержки выходного сигнала при следующих значениях параметров: $f_0 = f_{np} = 100$ МГц, $F_M = 5$ кГц, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_M = -\pi/4$, $M = 0,5$, $Q_3 = 20$.

Для оценки искажения АМ-сигнала в полосовом фильтре УПЧ следует построить в одинаковом масштабе нормированные сигналы (1) и (5): $(S_{AM}(t) / A_0)$ и $(U_{ynч}(t) / A_0 K_{p,ynч})$ в виде графиков, аналогичных представленным на рис. 2. Следует также с использованием выражений (6) и (7) дать количественную оценку искажений: изменения коэффициента модуляции выходного сигнала по сравнению с коэффициентом модуляции на входе и времени запаздывания огибающей выходного сигнала относительно с огибающей входного сигнала.

3.2. Расчет искажений АМн-сигнала в полосовом фильтре УПЧ.

Расчет производится с использованием ЭВМ.

Расчетные формулы:

Таблица 1

Огибающая $U_{\text{упч.н}}(t)$	Частота $f_{\text{упч}}(t)$	Условие
1	2	3
$r(t), 0 \leq t \leq t_u$	-	$\delta f = 0$
$r(t_u) \exp(-t - t_u) / \tau_k),$ $t_u < t \leq T_n$		
$r_1(t) \sqrt{1 + \mu^2 \pi^2 \delta f^2 \tau_k^2},$ $0 \leq t \leq t_u$	$f_p + \delta f \{1 - \exp(-t / \tau_k) [\cos(2\pi \delta f t) + \sin(2\pi \delta f t) / 2\pi \delta f \tau_k]\} / [1 - \exp(-t / \tau_k) \cos(2\pi \delta f t) + \exp(-2t / \tau_k)],$ $0 \leq t \leq t_u$	$\delta f \neq 0$
$r_1(t_u) \exp(-t / \tau_k) / \sqrt{1 + \mu^2 \pi^2 \delta f^2 \tau_k^2},$ $t_u \leq t \leq T_n$		
	$f_p, t_u \leq t \leq T_n$	

Вспомогательные формулы:

$$r(t) = 1 - \exp(-t / \tau_k); \tau_k = Q_3 / \pi f_p; Q_3 = Q / (1 + R_p / R_i); R_p = \kappa_B^2 \rho Q; \rho = \sqrt{L/C};$$

$$r_1(t) = \sqrt{1 - 2 \exp(-t / \tau_k) \cos(2\pi \delta f t) + \exp(-2t / \tau_k)}.$$

Размерность исходных и выходных данных:

Таблица 2

Параметр	$U_{\text{упч.н}}(t)$	$f_{\text{упч}}(t)$	t	t_u
Размерность	-	Гц	с	с
Параметр	T_n	f_p	δf	Q
Размерность	с	Гц	Гц	-
Параметр	κ_B	L	C	R_i
Размерность	-	Гн	Ф	Ом

Имя программы и язык программирования: RTCS4M (MATHCAD).

3.3. Расчет искажений ЧМ-сигнала в полосовом фильтре УПЧ

Расчет производится с использованием ЭВМ.

Расчетные формулы:

Таблица 3

Огибающая $U_{\text{упч.н}}(t)$	Частота $f_{\text{упч}}(t)$	Девияция частоты $\Delta f_{\text{упч}}$
$\mu \cos(2\pi F_M t) \sqrt{1 + \mu^2 Q_3^2}$	$f_{\text{упч}} + \Delta f_{\text{упч}} \times \cos(2\pi F_M t + \Phi)$	$\frac{m F_M}{\sqrt{1 + \mu^2 Q_3^2}}$

Вспомогательные формулы:

$$\mu = F_M / f_{np}; \Phi = \arctg(2\mu Q_3); Q_3 = Q / (1 + R_p / R_i); R_p = \kappa_B^2 \rho Q; \rho = \sqrt{L/C}.$$

Размерность исходных и выходных данных:

Таблица 4

Параметр	$U_{\text{ynч.и}}(t)$	$\Delta f_{\text{ynч}}$	t	F_M	M	$f_{\text{нр}}$
Размерность	-	Гц	с	Гц	-	Гц
Параметр	$f_{\text{ynч}}(t)$	Q	κ_g	L	C	R_i
Размерность	Гц	-	-	Гн	Ф	Ом

Имя программы и язык программирования: RTCS5M (MATHCAD).

Результаты расчетов, проведенных в подразделах 3.2 и 3.3, представить в виде графиков, аналогичных графикам, представленным в виде примеров в разделе 6 настоящего описания лабораторной работы. Исходные данные для расчетов получить у преподавателя либо, если таковые им не будут выданы, использовать данные, указанные в примерах, приведенных в разделе 6.

4. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- принципиальную схему одноконтурного резонансного усилителя, представленную на рис.1;
- аналитические выражения для модулированных сигналов, искажения которых в частотно-избирательных цепях исследуются, описываемые формулами (1) - (4);
- аналитические выражения, характеризующие искажения рассматриваемых сигналов в полосовом фильтре УПЧ, описываемые формулами (1) - (12), (14);
- полученные в результате расчетов графики АМ-сигналов на входе и выходе УПЧ, оформленные аналогично графикам, представленным на рис. 2, и данные расчетов коэффициента модуляции выходного сигнала и времени запаздывания его огибающей по формулам (6) и (7);
- распечатку результатов расчетов на ЭВМ искажений АМн- и ЧМ-сигналов в полосовом фильтре УПЧ с записью программ расчетов на языке программирования MATHCAD, исходных данных, расчетных формул и полученных в результате расчетов графиков и численных результатов;
- выводы по работе, содержащие анализ характера искажений рассматриваемых модулированных сигналов в полосовом фильтре УПЧ и влияющих на них факторов.

5. Контрольные вопросы

1. Как следует выбирать полосу пропускания резонансного усилителя для пропускания амплитудно-модулированного сигнала? В чем заключается противоречивость требований к форме амплитудно-частотной характеристики фильтра усилителя?

2. Чем определяется время установления колебаний в одноконтурном резонансном усилителе? Напишите выражение для постоянной времени колебательного контура.

3. В чем заключается искажение амплитудно-модулированного сигнала с модуляцией одним тоном при его прохождении через одноконтурный резонансный усилитель?

4. Дайте физическую трактовку процесса установления колебаний в одноконтурном резонансном усилителе при воздействии на его вход импульса включения гармонического сигнала.

5. Как на характер переходного процесса установления колебаний в одноконтурном резонансном усилителе при воздействии на его вход импульса включения гармонического сигнала влияет расстройка контура относительно частоты сигнала?

6. Объясните скачкообразное изменение мгновенной частоты на заднем фронте импульса амплитудно-манипулированного сигнала, прошедшего через одноконтурный резонансный усилитель при расстройке его контура относительно частоты сигнала.

7. Дайте физическую трактовку процесса установления колебаний в одноконтурном резонансном усилителе при воздействии на его вход фазоманипулированного сигнала.

8. Дайте физическую трактовку искажения частотно-модулированного сигнала с модуляцией одним тоном при его прохождении через одноконтурный резонансный усилитель.

9. Дайте физическую трактовку удвоения частоты паразитной амплитудной модуляции, возникающей при прохождении частотно-модулированного сигнала через одноконтурный резонансный усилитель, относительно частоты модуляции сигнала.

6. Программы и примеры расчетов на ЭВМ

6.1. Расчет искажений АМн-сигнала в полосовом фильтре УПЧ

RTCS4M

$$T_n := 500 \cdot 10^{-6} \text{ с} \quad t_n := 50 \cdot 10^{-6} \text{ с} \quad R_i := 20 \cdot 10^3 \text{ Ом} \quad Q_1 := 20$$

$$R_{p1} := 1.14 \cdot 10^3 \text{ Ом} \quad Q_2 := 40 \quad R_{p2} := 2.28 \cdot 10^3 \text{ Ом} \quad f_{np} := 10^6 \text{ Гц}$$

$$\tau_{k1} := \frac{Q_1}{\left(1 + \frac{R_{p1}}{R_i}\right) \cdot \pi \cdot f_{np}} \quad \tau_{k1} = 6.023 \times 10^{-6} \text{ с}$$

$$\tau_{k2} := \frac{Q_2}{\left(1 + \frac{R_{p2}}{R_i}\right) \cdot \pi \cdot f_{np}} \quad \tau_{k2} = 1.143 \times 10^{-5} \text{ с}$$

$$\Delta f := 0 \quad t := 0, 10^{-7} \dots t_n$$

$$U_{\text{пчн1}}(t) := 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{k1}}}$$

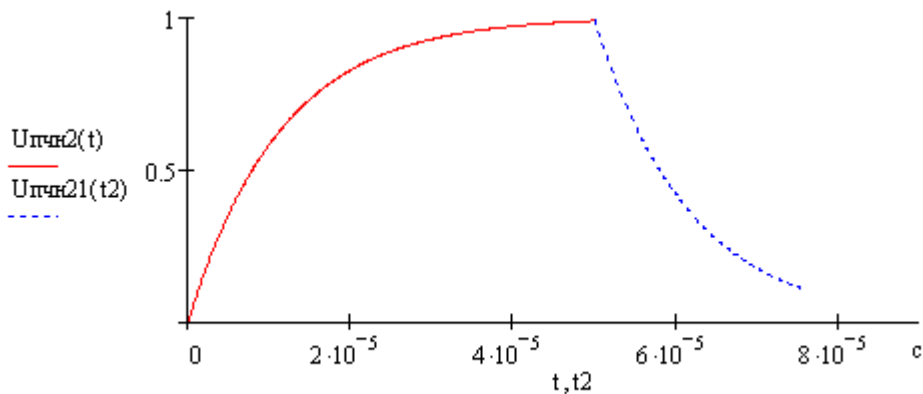
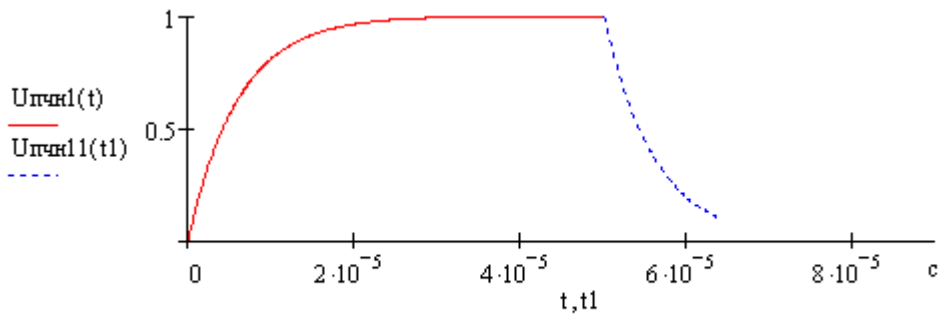
$$U_{\text{пчн2}}(t) := 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{k2}}}$$

$$t_1 := t_n, t_n + 10^{-7} \dots t_n + 2.3 \cdot \tau_{k1}$$

$$t_2 := t_n, t_n + 10^{-7} \dots t_n + 2.3 \cdot \tau_{k2}$$

$$U_{\text{пчн11}}(t_1) := \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_{k1}}}\right) \cdot e^{-\frac{(t_1 - t_n)}{\tau_{k1}}}$$

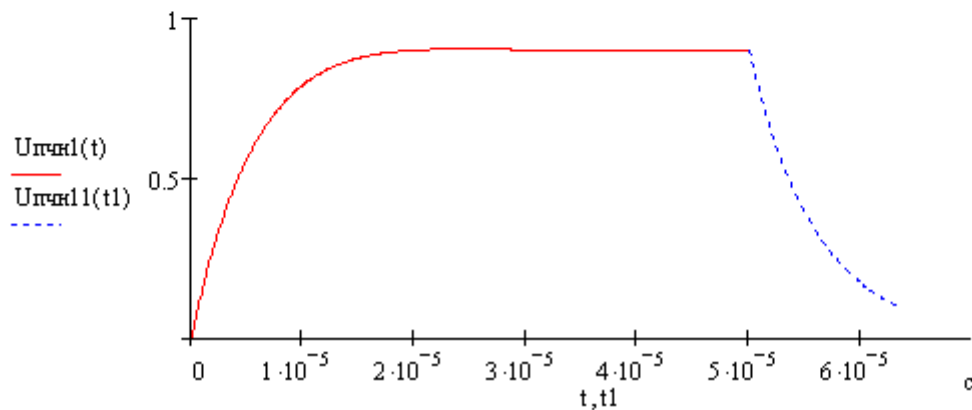
$$U_{\text{пчн21}}(t_2) := \left(1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_{k2}}}\right) \cdot e^{-\frac{(t_2 - t_n)}{\tau_{k2}}}$$



$$n1 := 0 \quad \Delta f := \frac{0.5 + 0.1 \cdot n1}{2 \cdot \pi \cdot \tau k1} \quad \Delta f = 1.321 \times 10^4 \quad \Gamma_{\text{Ц}}$$

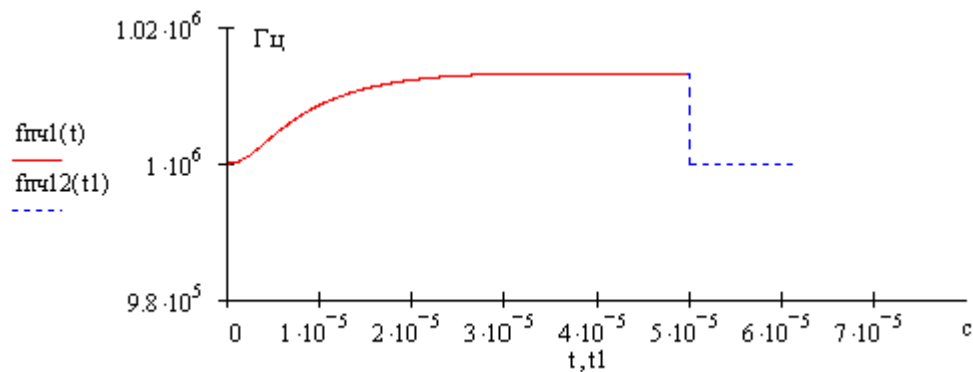
$$U_{\text{прчл1}}(t) := \frac{\sqrt{1 - 2 \cdot e^{\frac{-t}{\tau k1}} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \Delta f \cdot t) + e^{\frac{-2 \cdot t}{\tau k1}}}}{\sqrt{1 + (2 \cdot \pi \cdot \Delta f \cdot \tau k1)^2}}$$

$$U_{\text{прчл1}}(t1) := \frac{\sqrt{1 - 2 \cdot e^{\frac{-t1}{\tau k1}} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \Delta f \cdot t1) + e^{\frac{-2 \cdot t1}{\tau k1}} \cdot e^{-\frac{t1 - t1}{\tau k1}}}}{\sqrt{1 + (2 \cdot \pi \cdot \Delta f \cdot \tau k1)^2}}$$



$$f_{\text{прч1}}(t) := f_{\text{пр}} + \Delta f \cdot \frac{1 - e^{\frac{-t}{\tau k1}} \cdot \left(\cos(2 \cdot \pi \cdot \Delta f \cdot t) + \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot \Delta f \cdot t)}{2 \cdot \pi \cdot \Delta f \cdot \tau k1} \right)}{1 - e^{\frac{-t}{\tau k1}} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \Delta f \cdot t) + e^{\frac{-2t}{\tau k1}}}$$

$$t1 := t1, t1 + 10^{-7} \dots t1 + 2.3 \cdot \tau k1 \quad f_{\text{прч12}}(t1) := f_{\text{пр}}$$



6.2. Расчет искажений ЧМ-сигнала в полосовом фильтре УПЧ

RTCS5M

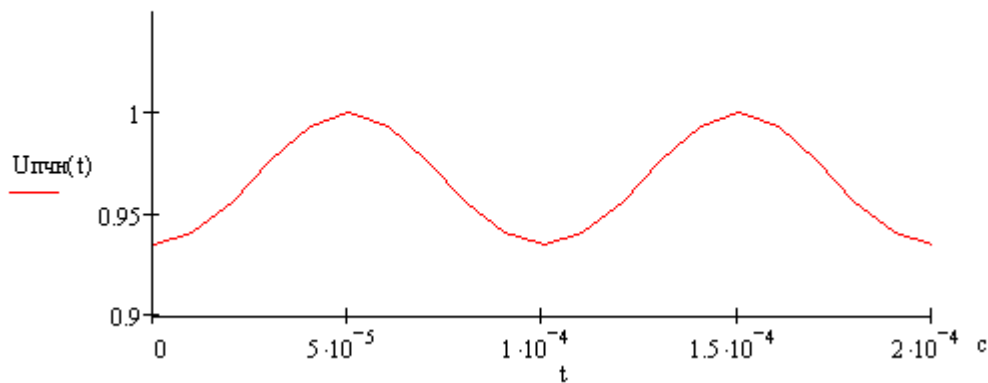
$$F_m := 5 \cdot 10^3 \text{ Гц} \quad Q := 20 \quad R_i := 20 \cdot 10^3 \text{ Ом} \quad R_p := 1.14 \cdot 10^3 \text{ Ом}$$

$$m := 2 \quad f_{гр} := 1 \cdot 10^6 \text{ Гц}$$

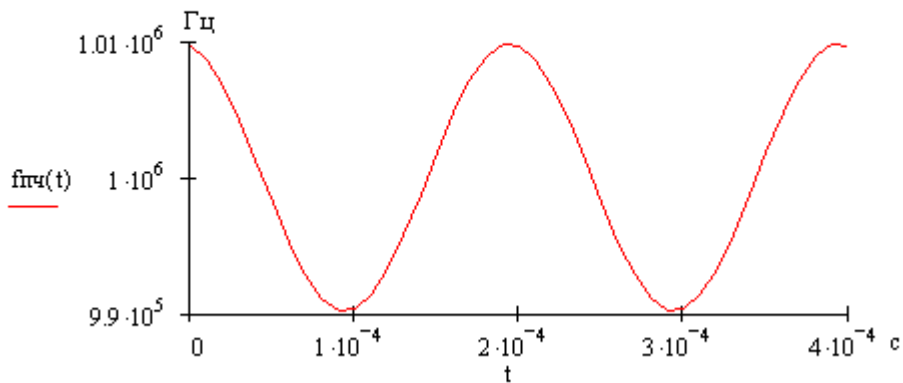
$$Q_э := \frac{Q}{1 + \frac{R_p}{R_i}} \quad Q_э = 18.921 \quad \mu := \frac{F_m}{f_{гр}} \quad \mu = 5 \times 10^{-3}$$

$$\Delta f_{гр} := \frac{m \cdot F_m}{\sqrt{1 + (2 \cdot \mu \cdot Q_э)^2}} \quad \Delta f_{гр} = 9.826 \times 10^3 \text{ Гц}$$

$$t := 0, 10^{-5} \dots \frac{1}{F_m} \quad U_{гр}(t) := \frac{1}{\sqrt{1 + (2 \cdot m \cdot \mu \cdot Q_э \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_m \cdot t))^2}}$$



$$t := 0, 10^{-5} \dots \frac{2}{F_m} \quad f_{гр}(t) := f_{гр} + \Delta f_{гр} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_m \cdot t + \arctan(2 \cdot \mu \cdot Q_э))$$



7. Литература

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Высшая школа, 2005, с. 235 - 252.

Анализ нерекурсивных цифровых фильтров

1. Цель работы - исследование влияния параметров нерекурсивных (трансверсальных) цифровых фильтров 1-го и 2-го порядков на их частотные и временные характеристики.

2. Основные теоретические положения

Нерекурсивным цифровым фильтром (ЦФ) называется ЦФ, при формировании выходных отсчетов которого y_i используются лишь отсчетные значения входного сигнала в данный x_i и в некоторое число m предшествующих x_{i-1} , x_{i-2} , ..., x_{i-m} моментов времени. При этом целое число m определяет порядок ЦФ.

Алгоритм работы нерекурсивного ЦФ описывается разностным уравнением

$$y_i = a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} \dots + a_m x_{i-m} . \quad (1)$$

Интервал Δ между отсчетами входного или выходного сигналов называется интервалом (периодом) дискретизации.

Для случая, когда значение коэффициента $a_0 = 1$, алгоритмы работы нерекурсивных ЦФ 1-го ($m = 1$) и 2-го ($m = 2$) порядков с учетом (1) записываются:

$$y_i = x_i + a_1 x_{i-1} , \quad (2) \quad y_i = x_i + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} . \quad (3)$$

Функциональные схемы ЦФ представлены на рис. 1 и 2.

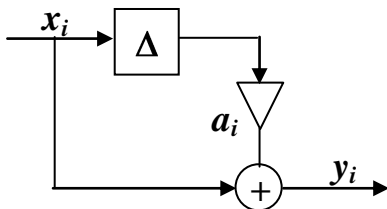


Рис. 1

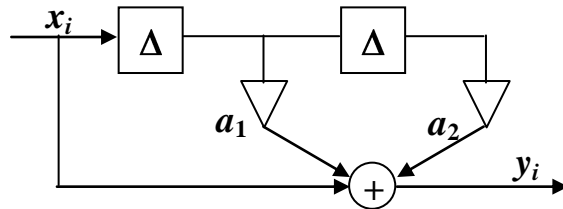


Рис. 2

Здесь обозначено: Δ - элемент задержки на период дискретизации, ∇ - масштабный усилитель.

Основные теоретические положения, касающиеся ЦФ имеются в [1], с. 396 - 421.

Частотный коэффициент передачи или по другой терминологии комплексная частотная характеристика (КЧХ) ЦФ может быть вычислена через его передаточную (системную) функцию $H(z)$, определяемую как отношение z - преобразования выходной последовательности отсчетов y_i к z - преобразованию входной последовательности x_i , путем замены

$$K \angle \omega \cong H \angle z \cong \frac{Y \angle z}{X \angle z} \quad z = e^{j\omega\Delta} . \quad (4)$$

Для ЦФ 1-го и 2-го порядков при $a_0 = 1$ передаточные функции и КЧХ с учетом (4) задаются соответственно выражениями:

$$H_1(z) = 1 + a_1 z^{-1} = \frac{z + a_1}{z}, \quad (5) \quad K_1(\omega) = 1 + a_1 e^{-j\omega\Delta}, \quad (6)$$

$$H_2(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = \frac{z^2 + a_1 z + a_2}{z^2}, \quad (7)$$

$$K_2(\omega) = 1 + a_1 e^{-j\omega\Delta} + a_2 e^{-j2\omega\Delta}. \quad (8)$$

Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) ЦФ 1-го и 2-го порядков с учетом (6) и (8) соответственно записываются:

$$A_1(\varphi) = |K_1(\varphi)| = \sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 \cos \varphi}, \quad \varphi = \omega\Delta; \quad (9)$$

$$A_2(\varphi) = |K_2(\varphi)| = \sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi}, \quad \varphi = \omega\Delta. \quad (10)$$

Примерный вид АЧХ ЦФ 1-го и 2-го порядков, построенной в функции $\varphi = \omega\Delta$ при фиксированных значениях коэффициентов a_0 и a_1, a_2 , показан на рис. 3 - 5.

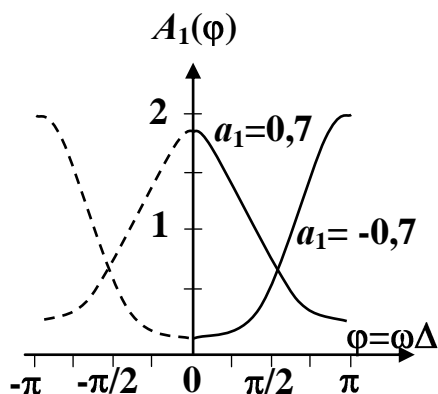


Рис. 3

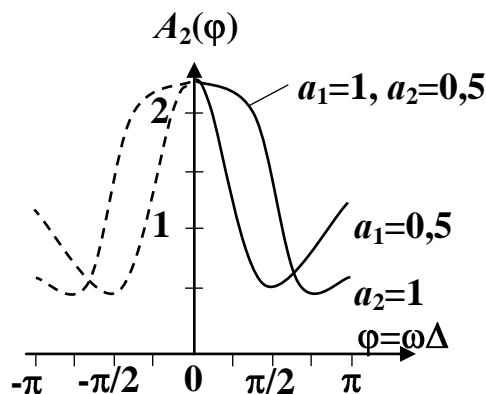


Рис. 4

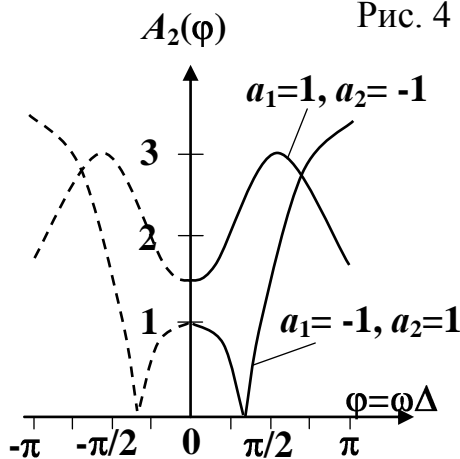


Рис. 5

Сплошными линиями показан ход кривых в области физических (положительных) частот, а пунктирными - в области отрицательных частот.

Вид АЧХ нерекурсивных ЦФ зависит от координат нулей z_0 системной функции $H(z)$ ЦФ, а именно: положение минимумов АЧХ на оси абсцисс $\varphi = \omega\Delta$ соответствует значениям аргументов нулей $\varphi_0 = \arg z_0$ системной функции.

Нулями системной функции $H(z)$ называются значения переменной z , обращающие ее в нуль. Из (5) и (7) следует, что для ЦФ 1-го и 2-го порядков нули определяются соответственно из решения уравнений: $z + a_1 = 0$ и $z^2 + a_1z + a_2 = 0$ и записываются:

$$z_0 = -a_1, \quad (11) \quad z_{0,1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}. \quad (12)$$

В табл. 1 приведены значения нулей системных функций ЦФ 1-го и 2-го порядков, а также соответствующие им значения модулей и аргументов, вычисленные по формулам (11) и (12) для тех же значений коэффициентов разностных уравнений (2) и (3), для которых построены АЧХ на рис. 3 - 5.

Таблица 1

ЦФ 1-го порядка					ЦФ 2-го порядка					
№ п/п	a_1	z_0	$ z_0 $	φ_0 , рад	№ п/п	a_1	a_2	$z_{0,1,2}$	$ z_{0,1,2} $	$\varphi_{0,1,2}$, рад.
1	0,7	-0,7	0,7	π	1	1	0,5	$-0,5 \pm j 0,5$	0,71	$\pm 3\pi/4$
					2	0,5	1	$0,25 \pm j 0,97$	1	$\pm 4\pi$
2	-0,7	0,7	0,7	0	3	-1	1	$0,5 \pm j 0,87$	1	$\pm \pi/3$
					4	1	-1	$-0,5 \pm j 1,12$	0,62 1,62	0, π

Из рис. 3 - 5 и табл.1 видно, что действительно положение минимумов АЧХ на оси абсцисс $\varphi = \omega\Delta$ соответствует значениям аргументов нулей системной функции ЦФ $\varphi_0 = \arg z_0$.

Форма АЧХ зависит также от модуля нулей системной функции $|z_0|$, определяемого значениями коэффициентов разностных уравнений (2) и (3), описывающих алгоритм работы ЦФ.

В зависимости от вида АЧХ ЦФ может выполнять роль фильтра нижних частот (ФНЧ), фильтра верхних частот (ФВЧ), полосового фильтра (ПФ) или режекторного фильтра (РФ).

Из рассмотренных выше вариантов ЦФ роль ФНЧ могут выполнять, например, ЦФ 1-го порядка с коэффициентом разностного уравнения $a_1=0,7$ (рис.3) и ЦФ 2-го порядка с коэффициентами $a_1 = 1$, $a_2 = 0,7$ и $a_2 = 1$ (рис.4). Роль ФВЧ может выполнять ЦФ 1-го порядка с коэффициентом $a_1 = -0,7$ (рис.3). Роль ПФ может выполнять ЦФ 2-го порядка с коэффициентами $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, а роль РФ - этот же ЦФ с коэффициентами $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ (рис.5).

В радиотехнических устройствах наиболее часто применяются ФНЧ и ПФ. Качество АЧХ ФНЧ с точки зрения ее фильтрующих свойств принято характеризовать величиной ослабления Δ_{dB} сигнала вне полосы «прозрачности» фильтра.

Оно определяется из выражения:

$$\Delta_{dB} = 20 \lg \frac{A_{\Phi_1}}{A_{\Phi}}, \quad (13)$$

где $A(0)$ - значение АЧХ на нулевой частоте ($\omega = 0$), а $A(\omega_1)$ - ее значение на некой частоте ω_1 вне полосы «прозрачности» фильтра, связанной с так называемой частотой «среза» ω_c фильтра соотношением

$$\omega_1 = n \omega_c, \quad (14)$$

где n - некое целое положительное число. Если принять $n = 2$, то говорят об ослаблении «на октаву».

Частота среза ω_c определяется по ослаблению сигнала в $\sqrt{2}$ раз, то есть

$$A(\omega_c) / A(0) = 1 / \sqrt{2} \cong 0,71. \quad (15)$$

Фильтрующие свойства ПФ принято характеризовать величиной добротности Q фильтра, которая может быть определена из выражения

$$Q = \omega_p / \Delta\omega_n, \quad (16)$$

где ω_p - резонансная частота фильтра, соответствующая максимуму АЧХ, $\Delta\omega_n$ - полоса пропускания фильтра, определяемая по ослаблению сигнала в $\sqrt{2}$ раз, то есть

$$A\left(\omega_p \pm \frac{\Delta\omega_n}{2}\right) / A(\omega_p) = 1 / \sqrt{2} \cong 0,71. \quad (17)$$

Заметим, что поскольку в лабораторной работе АЧХ строится в функции параметра $\varphi = \omega\Delta$, при расчете ослабления Δ_{dB} и добротности Q частоты ω_c , ω_1 , ω_p и полосу частот $\Delta\omega_n$ следует заменить на величины: $\varphi_c = \omega_c \Delta$, $\varphi_1 = \omega_1 \Delta$, $\varphi_p = \omega_p \Delta$, $\Delta\varphi_n = \Delta\omega_n \Delta$, то есть вместо формул (13) - (17) использовать при расчетах формулы:

$$\Delta_{dB} = 20 \lg \frac{A(\varphi_1)}{A(0)}, \quad (18) \quad \varphi_1 = n \varphi_c, \quad (19) \quad A(\varphi_c) / A(0) = 1 / \sqrt{2} \cong 0,71, \quad (20)$$

$$Q = \varphi_p / \Delta\varphi_n, \quad (21) \quad A\left(\varphi_p \pm \frac{\Delta\varphi_n}{2}\right) / A(\varphi_p) = 1 / \sqrt{2} \cong 0,71. \quad (22)$$

Для описания ЦФ во временной области используется его импульсная характеристика.

Импульсная характеристика ЦФ представляет собой дискретный сигнал $\{h_k\}$, который является реакцией ЦФ на «единичный импульс» (1, 0, 0, 0, ...). Она связана с системной функцией ЦФ $H(z)$ обратным z -преобразованием

$$h_k = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{k-1} H(z) dz. \quad (23)$$

Для нерекурсивного ЦФ импульсная характеристика содержит ограниченное число членов. При известной системной функции $H(z)$ она может быть вычислена с использованием выражения (23) и представляет собой последовательность из коэффициентов разностного уравнения (1):

$$\{h_k\} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_m). \quad (24)$$

Соответственно для ЦФ 1-го и 2-го порядка при $a_0 = 1$ импульсные характеристики записываются:

$$\{h_k\} = (1, a_1), \quad (25) \quad \{h_k\} = (1, a_1, a_2) \quad (26)$$

и имеют вид, представленный на рис.6 и 7. Заметим, что в зависимости от знаков коэффициентов разностного уравнения импульсные характеристики могут быть как однополярными, так и разнополярными.

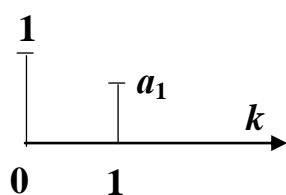


Рис. 6

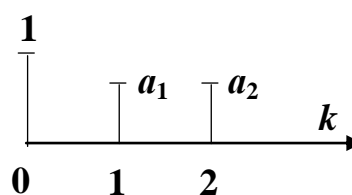


Рис. 7

3. Порядок выполнения работы

3.1. Расчет значений нулей z_0 системных функций нерекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков и соответствующих этим нулям значений модулей $|z_0|$ и аргументов $\varphi_0 = \arg z_0$

Расчет нулей системных функций производится вручную с использованием формул (11) и (12) для следующих значений коэффициента разностного уравнения ЦФ 1-го порядка (2): $a_1 = 0,8$; $a_1 = 1,0$; $a_1 = -0,8$; $a_1 = -1,0$ и для следующих сочетаний значений коэффициентов разностного уравнения ЦФ 2-го порядка (3): $a_1 = 0,8$, $a_2 = -0,8$; $a_1 = 1,0$, $a_2 = 0,4$; $a_1 = -1,0$, $a_2 = 0,8$; $a_1 = 0,5$, $a_2 = -1,0$.

По вычисленным значениям нулей системных функций также вручную вычислить соответствующие им значения модулей $|z_0| = \sqrt{(\operatorname{Re} z_0)^2 + (\operatorname{Im} z_0)^2}$ (и аргументов (в радианах) $\varphi_0 = \arg z_0 = \arctg (\operatorname{Im} z_0 / \operatorname{Re} z_0)$). Свести рассчитанные значения нулей, их модулей и аргументов в таблицу, аналогичную табл.1.

3.2. Расчет АЧХ и импульсных характеристик нерекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков

Расчет производится с использованием ЭВМ. При этом используются указанные в разделе 3.1 значения коэффициента разностного уравнения ЦФ 1-го порядка (2) и сочетания значений коэффициентов разностного уравнения ЦФ 2-го порядка (3).

Расчет АЧХ и импульсных характеристик для ЦФ 1-го и 2-го порядков производится по одним и тем же формулам: (10) и (26). При этом для случая ЦФ 1-го порядка значение коэффициента a_2 в указанных формулах следует положить равным нулю. АЧХ строится не в функции частоты ω , а в функции измеряемого в радианах параметра $\varphi = \omega\Delta$, где Δ - период дискретизации, причем параметр φ следует изменять в пределах от $-\pi$ до π с шагом 0,01. Рассчитанные на ЭВМ импульсные характеристики ЦФ 1-го и 2-го порядков изобразить графически в функции номера периода дискретизации k аналогично графикам, представленным на рис. 6 и 7.

Расчетные формулы:

$$\text{АЧХ: } A(\varphi) = \sqrt{(+a_1^2 + a_2^2) + 2 \cdot 1 \cdot (+a_2) \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi},$$

импульсная характеристика: $h_k = (1 \ a_1 \ a_2)$.

Имена программ и язык программирования: RTCS12M - RTCS19M (MATHCAD). При этом программы RTCS12M - RTCS15M используются для расчета характеристик ЦФ 1-го порядка со значениями коэффициента разностного уравнения: $a_1 = 0,8$; $a_1 = 1,0$; $a_1 = -0,8$; $a_1 = -1,0$, а программы RTCS16M - RTCS19M для расчета характеристик ЦФ 2-го порядка со значениями коэффициентов разностного уравнения: $a_1 = 0,8$, $a_2 = -0,8$; $a_1 = 1,0$, $a_2 = 0,4$; $a_1 = -1,0$, $a_2 = 0,8$; $a_1 = 0,5$, $a_2 = -1,0$.

3.3. Расчет ослабления сигнала вне полосы «прозрачности» ФНЧ и добротности ПФ

Расчет ослабления сигнала вне полосы «прозрачности» ФНЧ и добротности ПФ производится вручную. При этом предварительно на основании анализа АЧХ, полученных в результате расчетов на ЭВМ, необходимо определить, какие из вариантов реализованных ЦФ могут выполнять функции ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ, зафиксировав результаты анализа в отчете по лабораторной работе. Затем необходимо выбрать по одному варианту ЦФ, пригодных для выполнения функций ФНЧ и ПФ.

Для выбранных вариантов ЦФ, реализующих функции ФНЧ и ПФ, с использованием формул (18) - (22) произвести расчет ослабления «на октаву» сигнала вне полосы «прозрачности» ФНЧ, положив в (19) $n = 2$, и добротности ПФ. При этом расчет ослабления сигнала вне полосы «прозрачности» производится следующим образом. Сначала с использованием рассчитанной на ЭВМ АЧХ ФНЧ и формулы (20) определяется значение параметра φ_c , соответствующее частоте среза ω_c фильтра, затем с использованием формул (18) и (19), а также АЧХ ФНЧ определяется ослабление сигнала.

Аналогичным образом, при расчете добротности ПФ сначала с использованием рассчитанной на ЭВМ АЧХ ПФ и формулы (22) определяются значения параметров φ_p и $\Delta\varphi_n$, соответствующих резонансной частоте ПФ φ_p и его полосе пропускания $\Delta\omega_n$, а затем с использованием формулы (21) определяется добротность ПФ.

4. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- функциональные схемы нерекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков, представленные на рис. 1 и 2;
- аналитические выражения для разностных уравнений нерекурсивных ЦФ любого, 1-го и 2-го порядков; их амплитудно-частотных характеристик, нулей их системных функций; ослабления вне полосы «прозрачности» ЦФ при использовании его в качестве ФНЧ и уравнения для определения частоты среза такого фильтра; добротности ЦФ при использовании его в качестве ПФ и уравнения для определения полосы пропускания такого фильтра, импульсных характеристик ЦФ любого, 1-го и 2-го порядков, описываемые формулами (1) - (3), (9) - (12), (18) - (22) и (24) - (26);
- результаты расчетов нулей ЦФ 1-го и 2-го порядков и значений их

модулей и аргументов, оформленные в виде таблицы, аналогичной табл. 1, а также результаты расчетов ослабления вне полосы «прозрачности» ЦФ при его использовании в качестве ФНЧ и добротности ЦФ при его использовании в качестве ПФ, произведенных с использованием формул (11), (12), (18) - (22);

- распечатки результатов расчета на ЭВМ АЧХ и импульсных характеристик нерекурсивных ЦФ;
- выводы, содержащие анализ связи координат нулей системных функций нерекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков с видом их АЧХ и обоснование выбора вариантов реализации ЦФ, пригодных для использования в качестве ФНЧ и ПФ, а также анализ влияния коэффициентов разностных уравнений, рассматриваемых ЦФ, на их импульсные характеристики.

5. Контрольные вопросы

1. Как по разностному уравнению определяется порядок нерекурсивного ЦФ?
2. Как определяется системная функция ЦФ?
3. Как связаны между собой КЧХ и системная функция ЦФ?
4. Дайте определение импульсной характеристики ЦФ. В чем состоит характерная особенность импульсной характеристики нерекурсивного ЦФ?
5. Как связаны между собой импульсная характеристика и системная функция ЦФ?
6. Как связан вид АЧХ нерекурсивного ЦФ со значениями аргументов нулей его системной функции?
7. В чем состоит характерная особенность АЧХ ЦФ по сравнению с АЧХ аналогового фильтра?
8. В чем состоят достоинство и недостатки ЦФ по сравнению с аналоговыми фильтрами?
9. В чем состоит отличие АЧХ, ФНЧ, ФВЧ, ПР и РФ?
10. Какими параметрами принято характеризовать фильтрующие свойства ФНЧ и ПФ и как на них влияют при реализации в виде нерекурсивных ЦФ параметры последних?

6. Программы и примеры расчетов на ЭВМ

6.1. Расчет АЧХ и импульсных характеристик нерекурсивного ЦФ 1-го порядка

Вариант 1:

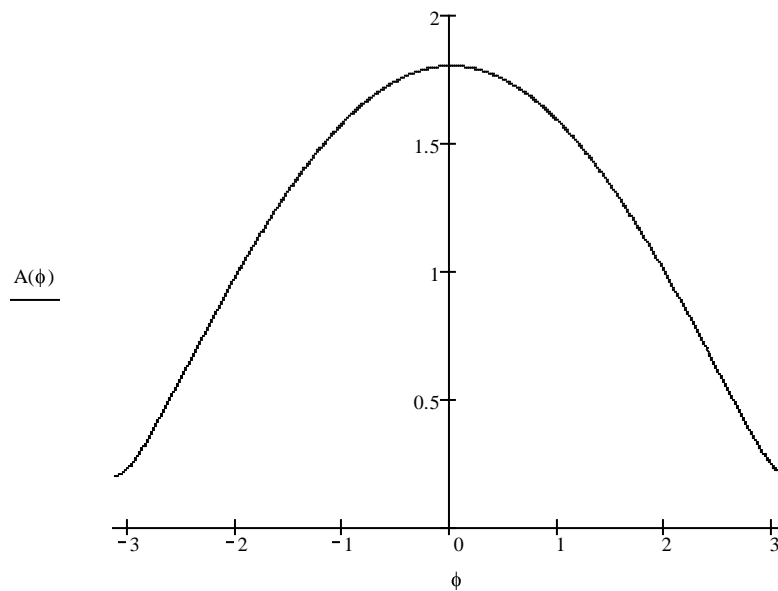
RTCS12M

$a1 := 0.8$

$a2 := 0$

$\phi := -\pi, -\pi + 0.01.. \pi$

$$A(\phi) := \sqrt{1 + a1^2 + a2^2 + 2 \cdot [a1 \cdot (1 + a2) \cdot \cos(\phi) + a2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)]}$$



$h := (1 \ a1 \ a2)$

$h = (1 \ 0.8 \ 0)$

Рис.8

Вариант 2:

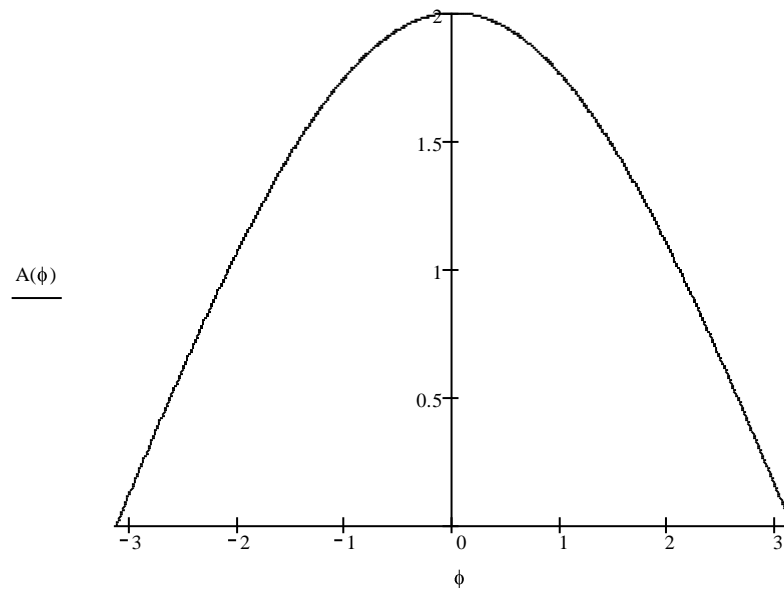
RTCS13M

$$a1 := 1.0$$

$$a2 := 0$$

$$\phi := -\pi, -\pi + 0.01.. \pi$$

$$A(\phi) := \sqrt{1 + a1^2 + a2^2 + 2 \cdot [a1 \cdot (1 + a2) \cdot \cos(\phi) + a2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)]}$$



$$h := (1 \ a1 \ a2)$$

$$h = (1 \ 1 \ 0)$$

Рис. 9

Вариант 3:

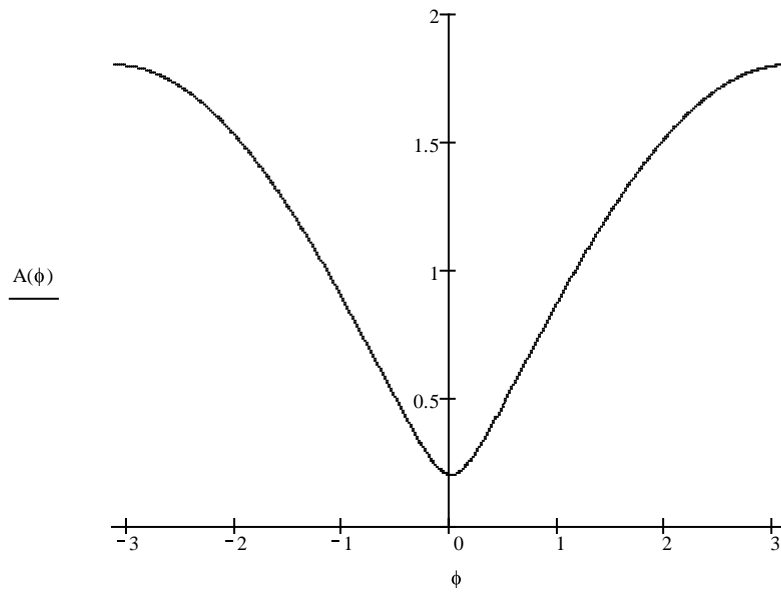
RTCS14M

$$a1 := -0.8$$

$$a2 := 0$$

$$\phi := -\pi, -\pi + 0.01.. \pi$$

$$A(\phi) := \sqrt{1 + a1^2 + a2^2 + 2 \cdot [a1 \cdot (1 + a2) \cdot \cos(\phi) + a2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)]}$$



$$h := (1 \ a1 \ a2)$$

$$h = (1 \ -0.8 \ 0)$$

Рис. 10

Вариант 4:

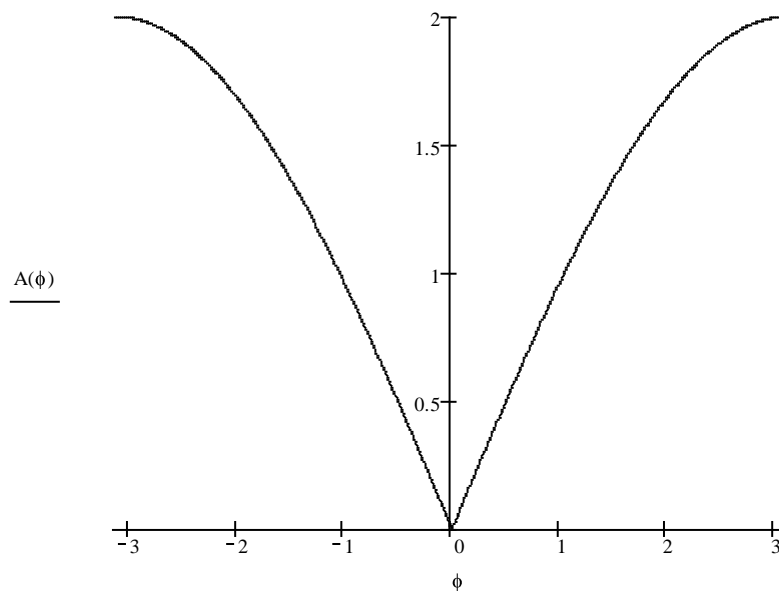
RTCS15M

$a1 := -1.0$

$a2 := 0$

$\phi := -\pi, -\pi + 0.01.. \pi$

$A(\phi) := \sqrt{1 + a1^2 + a2^2 + 2 \cdot [a1 \cdot (1 + a2) \cdot \cos(\phi) + a2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)]}$



$h := (1 \ a1 \ a2)$

$h = (1 \ -1 \ 0)$

Рис. 11

6.2. Расчет АЧХ и импульсных характеристик нерекурсивного ЦФ 2-го порядка

Вариант 1:

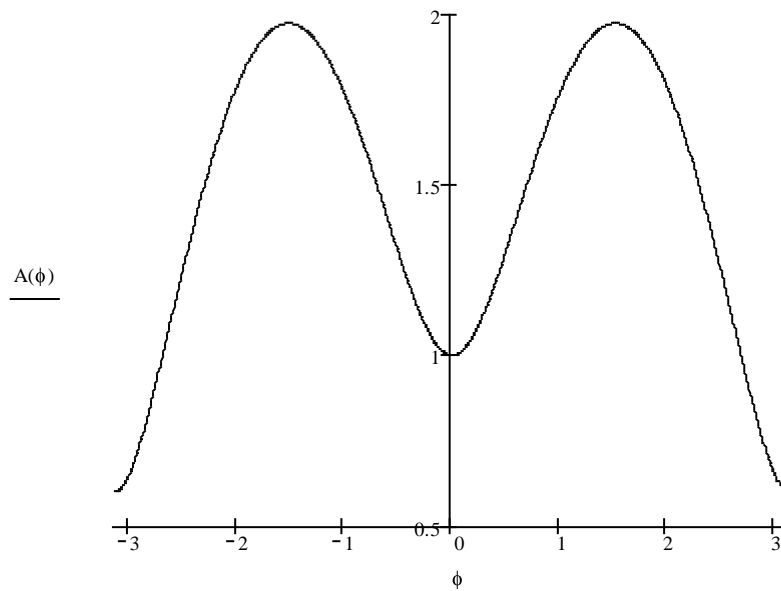
RTCS16M

$a_1 := 0.8$

$a_2 := -0.8$

$\phi := -\pi, -\pi + 0.01.. \pi$

$$A(\phi) := \sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2 + 2 \cdot [a_1 \cdot (1 + a_2) \cdot \cos(\phi) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)]}$$



$h := (1 \ a_1 \ a_2)$

$h = (1 \ 0.8 \ -0.8)$

Рис. 12

Вариант 2:

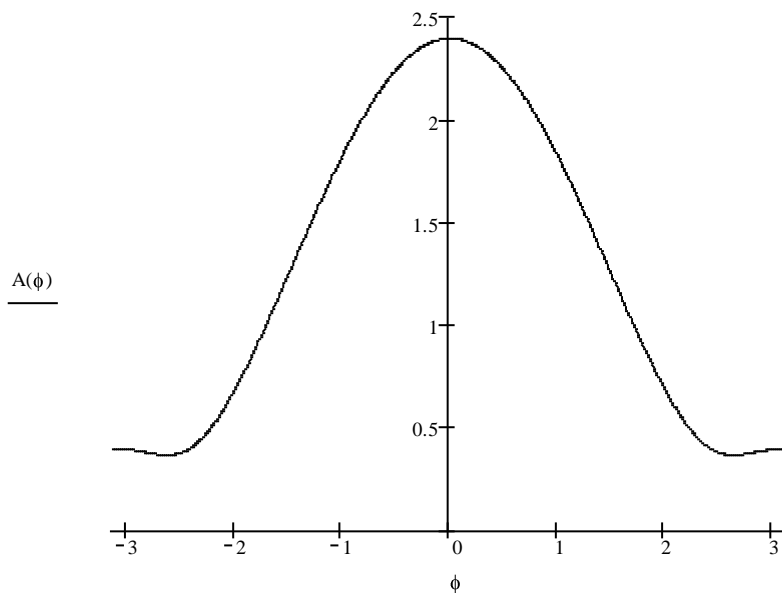
RTCS17M

$a1 := 1.0$

$a2 := 0.4$

$\phi := -\pi, -\pi + 0.01.. \pi$

$$A(\phi) := \sqrt{1 + a1^2 + a2^2 + 2 \cdot [a1 \cdot (1 + a2) \cdot \cos(\phi) + a2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)]}$$



$h := (1 \ a1 \ a2)$

$h = (1 \ 1 \ 0.4)$

Рис. 13

Вариант 3:

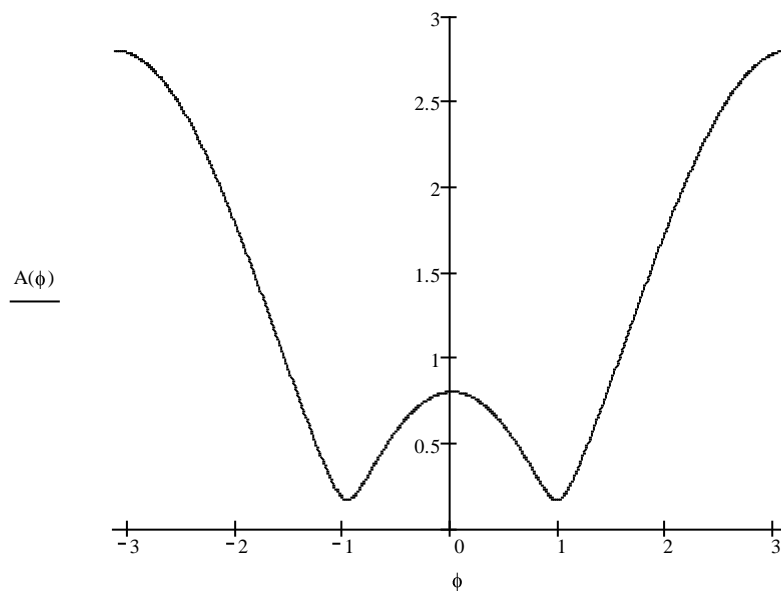
RTCS18M

$a1 := -1.0$

$a2 := 0.8$

$\phi := -\pi, -\pi + 0.01.. \pi$

$$A(\phi) := \sqrt{1 + a1^2 + a2^2 + 2 \cdot [a1 \cdot (1 + a2) \cdot \cos(\phi) + a2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)]}$$



$h := (1 \ a1 \ a2)$

$h = (1 \ -1 \ 0.8)$

Рис. 14

Вариант 4:

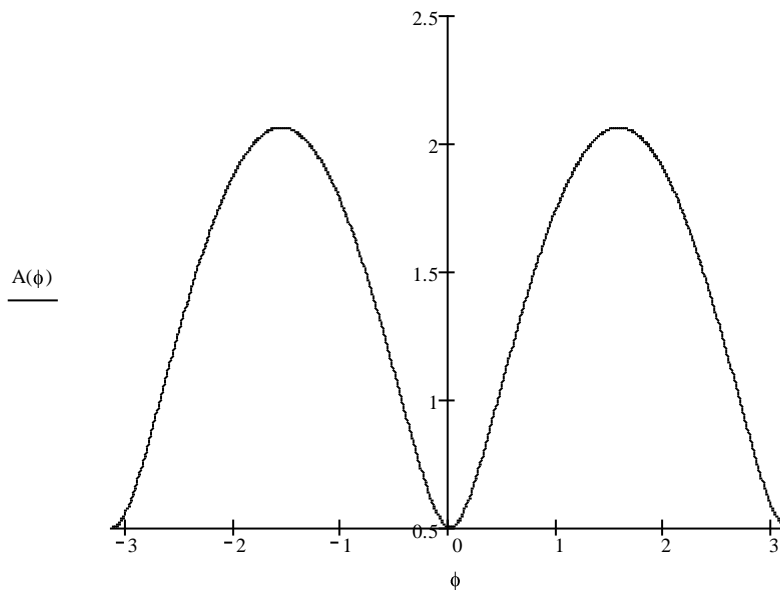
RTCS19M

$a1 := 0.5$

$a2 := -1.0$

$\phi := -\pi, -\pi + 0.01.. \pi$

$$A(\phi) := \sqrt{1 + a1^2 + a2^2 + 2 \cdot [a1 \cdot (1 + a2) \cdot \cos(\phi) + a2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)]}$$



$h := (1 \ a1 \ a2)$

$h = (1 \ 0.5 \ -1)$

Рис. 15

7. Литература

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Высшая школа, 2005, с. 396 - 408.

Анализ рекурсивных цифровых фильтров

1. **Цель работы** - исследование влияния параметров рекурсивных цифровых фильтров 1-го и 2-го порядков на их частотные и временные характеристики.

2. Основные теоретические положения

Рекурсивным цифровым фильтром (ЦФ) называется ЦФ, при формировании выходных отсчетов которого y_i используются как отсчетные значения входного сигнала в данный момент времени x_i и в некоторое число m предшествующих $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-m}$ моментов времени, так и отсчеты выходного сигнала $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-n}$ в некоторое число n предшествующих моментов времени. При этом целое число n определяет порядок ЦФ.

Алгоритм работы рекурсивного ЦФ описывается разностным уравнением

$$y_i = a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} \dots + a_m x_{i-m} + b_1 y_{i-1} + b_2 y_{i-2} + b_n y_{i-n}. \quad (1)$$

Интервал Δ между отсчетами входного или выходного сигналов называется интервалом (периодом) дискретизации.

Для случая, когда $m = 0$, а значение коэффициента $a_0 = 1$, алгоритмы работы рекурсивного ЦФ 1-го ($n = 1$) и 2-го ($n = 2$) порядков с учетом (1) записываются:

$$y_i = x_i + b_1 y_{i-1}, \quad (2)$$

$$y_i = x_i + b_1 y_{i-1} + b_2 y_{i-2}. \quad (3)$$

Функциональные схемы ЦФ представлены на рис. 1 и 2.

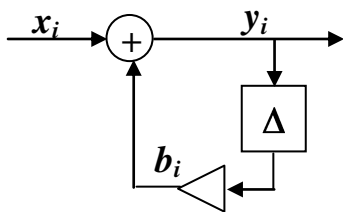


Рис. 1

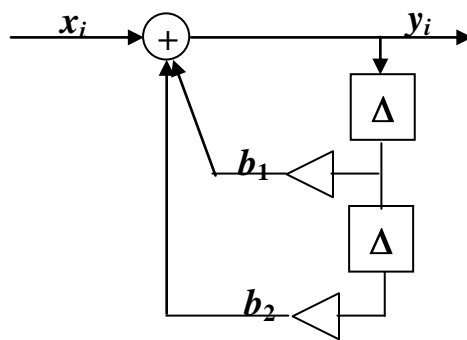


Рис. 2

Здесь обозначено: Δ - элемент задержки на период дискретизации, \triangleright - масштабный усилитель.

Основные теоретические положения, касающиеся ЦФ имеются в [1], с. 396 - 421.

Частотный коэффициент передачи, или по другой терминологии, - комплексная частотная характеристика (КЧХ) ЦФ может быть вычислена через его передаточную (системную) функцию $H(z)$, определяемую как отношение z -преобразования выходной последовательности отсчетов y_i к z -преобразованию входной последовательности x_i , путем замены

$$K \mathcal{G} \omega \stackrel{\sim}{=} H \mathcal{E} \stackrel{\sim}{=} \frac{Y \mathcal{E}}{X \mathcal{E}} \Big|_{z=e^{j\omega\Delta}} \quad (4)$$

Для ЦФ 1-го и 2-го порядков при $a_0 = 1$ передаточные функции и КЧХ с учетом (4) задаются соответственно выражениями:

$$H_1 \mathcal{E} \stackrel{\sim}{=} \frac{1}{1-b_1 z^{-1}} = \frac{z}{z-b_1}, \quad (5) \quad K_1 \mathcal{G} \omega \stackrel{\sim}{=} \frac{1}{1-b_1 e^{-j\omega\Delta}}, \quad (6)$$

$$H_2 \mathcal{E} \stackrel{\sim}{=} \frac{1}{1-b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - b_1 z - b_2}, \quad (7)$$

$$K_2 \mathcal{G} \omega \stackrel{\sim}{=} \frac{1}{1-b_1 e^{-j\omega\Delta} - b_2 e^{-j2\omega\Delta}}. \quad (8)$$

Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) ЦФ 1-го и 2-го порядков с учетом (6) и (8) соответственно записываются:

$$A_1 \mathcal{G} \stackrel{\sim}{=} |K_1 \mathcal{G}| = 1 / \sqrt{1 + b_1^2 - 2b_1 \cos \varphi}, \quad \varphi = \omega\Delta. \quad (9)$$

$$A_2 \mathcal{G} \stackrel{\sim}{=} |K_2 \mathcal{G}| = 1 / \sqrt{(1 + b_1^2 + b_2^2) - 2b_1 \cos \varphi + b_2 \cos 2\varphi}, \quad \varphi = \omega\Delta. \quad (10)$$

Примерный вид АЧХ ЦФ 1-го и 2-го порядков, построенной в функции $\varphi = \omega\Delta$ при фиксированных значениях коэффициентов b_1 и b_2 , показан на рис. 3 - 5. Сплошными линиями показан ход кривых в области физических (положительных) частот, а пунктирными - в области отрицательных частот.

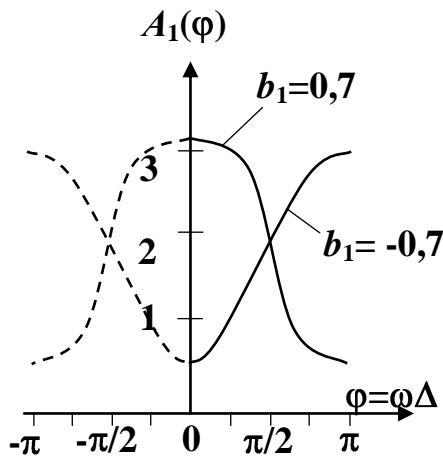


Рис. 3

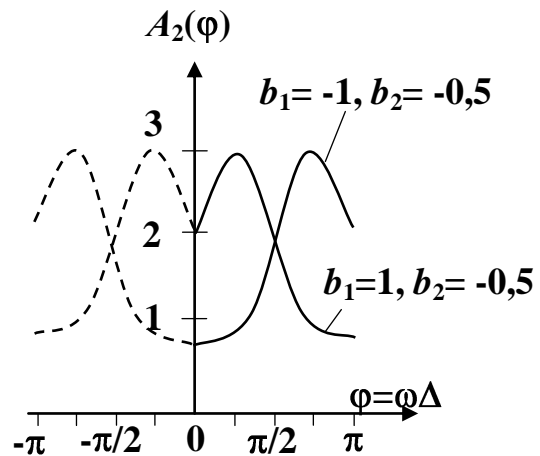


Рис. 4

Вид АЧХ рекурсивных ЦФ зависит от координат полюсов z_n системной функции $H(z)$ ЦФ, а именно: положение максимумов АЧХ на оси абсцисс $\varphi = \omega\Delta$ соответствует значениям аргументов нулей $\varphi_n = \arg z_n$ системной функции.

Полюсами системной функции $H(z)$ называются значения переменной z , обращающие ее в бесконечность. Из (5) и (7) следует, что для ЦФ 1-го и 2-го порядков полюса определяются соответственно из решения уравнений: $z - b_1 = 0$ и $z^2 - b_1 z - b_2 = 0$ и записываются:

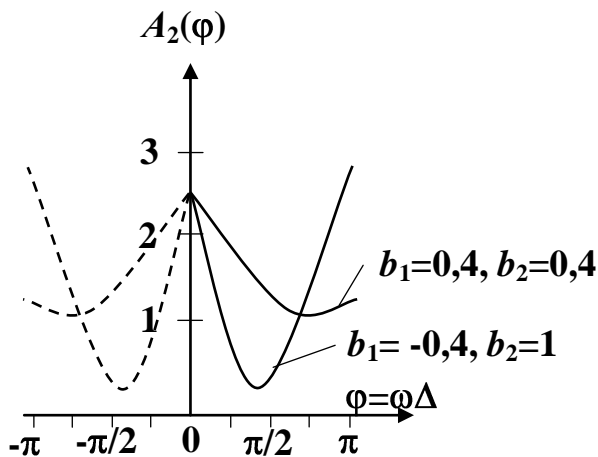


Рис. 5

$$z_n = -b_1, \quad (11)$$

$$z_{n1,2} = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + b_2}. \quad (12)$$

В табл. 1 приведены значения нулей системных функций ЦФ 1-го и 2-го порядков, а также соответствующие им значения модулей и аргументов, вычисленные по формулам (11) и (12) для тех же значений коэффициентов разностных уравнений (2) и (3), для которых построены АЧХ на рис. 3 - 5.

Таблица 1

ЦФ 1-го порядка					ЦФ 2-го порядка					
№ п/п	b_1	z_n	$ z_n $	φ_n , рад	№ п/п	b_1	b_2	$z_{n1,2}$	$ z_{n1,2} $	$\varphi_{n1,2}$, рад.
1	0,7	-0,7	0,7	0	1	1	0,5	$-0,5 \pm j 0,5$	0,71	$\pm\pi/4$
					2	0,5	1	$0,5 \pm j 0,5$	0,71	$\pm 3\pi/4$
2	-0,7	0,7	0,7	π	3	-1	1	$0,2 \pm 0,66$	0,86; 0,46	$0,\pi$
					4	1	-1	$-0,2 \pm 1,02$	0,82; 1,22	$0,\pi$

Из рис. 3 - 5 и табл.1 видно, что действительно положение максимумов АЧХ на оси абсцисс $\varphi = \omega\Delta$ соответствует значениям аргументов полюсов системной функции ЦФ $\varphi_n = \arg z_n$.

Форма АЧХ зависит также от модуля полюсов системной функции $|z_n|$, определяемого значениями коэффициентов разностных уравнений (2) и (3), описывающих алгоритм работы ЦФ.

Для рекурсивного ЦФ в отличие от нерекурсивного фильтра существует проблема устойчивости, заключающаяся в том, что возникающие в ЦФ в отсутствие входного воздействия свободные колебания должны представлять собой невозрастающую последовательность, то есть значения $|y_i|$ при $i \rightarrow \infty$ не должны превышать некоторого положительного числа M независимо от выбора начальных условий.

Критерий устойчивости рекурсивного ЦФ формулируется следующим образом. ЦФ является устойчивым, если все полюсы z_n его системной функции $H(z)$ по модулю не превосходят единицы, то есть:

$$|z_n| < 1. \quad (13)$$

Таким образом, на z - плоскости полюса должны быть расположены внутри круга с центром $z = 0$ и радиусом равным 1.

Очевидно, практически могут применяться только устойчивые ЦФ. Из рассмотренных вариантов ЦФ в соответствии с критерием (13) неустойчивым является ЦФ 2-го порядка со значениями коэффициентов разностного уравнения (3) $b_1 = -0,4$, $b_2 = 1$, поскольку для них $|z_{n1}| = 1,22$ (см. табл.1).

Из (11) - (13) следует, что области допустимых значений коэффициентов разностных уравнений для ЦФ 1-го и 2-го порядков ограничены соответственно отрезком прямой и треугольником, изображенными на рис.6 и 7.

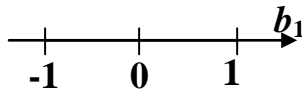


Рис. 6

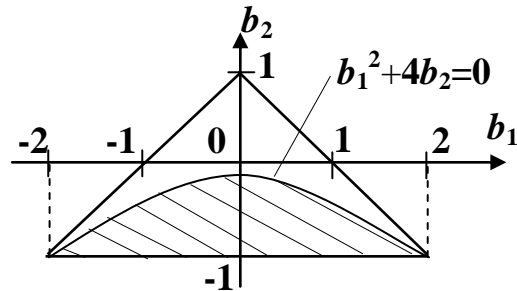


Рис. 7

При этом для ЦФ 2-го порядка заштрихованная область, ограниченная сверху уравнением $b_1^2 + 4b_2 = 0$, соответствует комплексно сопряженным полюсам системной функции, а не заштрихованная - вещественным.

В зависимости от вида АЧХ ЦФ может выполнять роль фильтра нижних частот (ФНЧ), фильтра верхних частот (ФВЧ), полосового фильтра (ПФ) или режекторного фильтра (РФ).

Из рассмотренных выше вариантов ЦФ роль ФНЧ могут выполнять, например, ЦФ 1-го порядка с коэффициентом разностного уравнения $b_1 = 0,7$ (рис.3) и ЦФ 2-го порядка с коэффициентами $b_1 = 0,4$; $b_2 = 0,4$ (рис.5). Роль ФВЧ может выполнять ЦФ 1-го порядка с коэффициентом $b_1 = -0,7$ (рис.3). Роль ПФ может выполнять ЦФ 2-го порядка с коэффициентами $b_1 = 1$, $b_2 = -0,5$ и $b_1 = -1$, $b_2 = -0,5$ (рис.4).

В радиотехнических устройствах наиболее часто применяются ФНЧ и ПФ. Качество АЧХ ФНЧ с точки зрения ее фильтрующих свойств принято характеризовать величиной ослабления $\Delta_{\text{дБ}}$ сигнала вне полосы «прозрачности» фильтра.

Оно определяется из выражения:

$$\Delta_{\text{дБ}} = 20 \lg \frac{A(\omega_1)}{A(0)}, \quad (14)$$

где $A(0)$ - значение АЧХ на нулевой частоте ($\omega = 0$), а $A(\omega_1)$ - ее значение на некой частоте ω_1 вне полосы «прозрачности» фильтра, связанной с так называемой частотой «среза» ω_c фильтра соотношением

$$\omega_1 = n \omega_c, \quad (15)$$

где n - некое целое положительное число. Если принять $n = 2$, то говорят об ослаблении «на октаву».

Частота среза ω_c определяется по ослаблению сигнала в $\sqrt{2}$ раз, то есть

$$A(\omega_c) \geq A(0) = 1/\sqrt{2} \cong 0,71. \quad (16)$$

Фильтрующие свойства ПФ принято характеризовать величиной добротности Q фильтра, которая может быть определена из выражения

$$Q = \omega_p / \Delta\omega_n, \quad (17)$$

где ω_p - резонансная частота фильтра, соответствующая максимуму АЧХ, $\Delta\omega_n$ - полоса пропускания фильтра, определяемая по ослаблению сигнала в $\sqrt{2}$ раз, то есть

$$A\left(\omega_p \pm \frac{\Delta\omega_n}{2}\right) / A(\omega_p) = 1/\sqrt{2} \cong 0,71. \quad (18)$$

Заметим, что поскольку в лабораторной работе АЧХ строится в функции параметра $\varphi = \omega\Delta$, при расчете ослабления Δ_{dB} и добротности Q частоты ω_c , ω_1 , ω_p и полосу частот $\Delta\omega_n$ следует заменить на величины: $\varphi_c = \omega_c \Delta$, $\varphi_1 = \omega_1 \Delta$, $\varphi_p = \omega_p \Delta$, $\Delta\varphi_n = \Delta\omega_n \Delta$, то есть вместо формул (14) - (18) использовать при расчетах формулы:

$$\Delta_{dB} = 20 \lg \frac{A(\varphi_1)}{A(\varphi)}, \quad (19) \quad \varphi_1 = n \varphi_c, \quad (20) \quad A(\varphi_c) / A(\varphi) = 1/\sqrt{2} \cong 0,71, \quad (21)$$

$$Q = \varphi_p / \Delta\varphi_n, \quad (22) \quad A\left(\varphi_p \pm \frac{\Delta\varphi_n}{2}\right) / A(\varphi_p) = 1/\sqrt{2} \cong 0,71. \quad (23)$$

Для описания ЦФ во временной области используется его импульсная характеристика.

Импульсная характеристика ЦФ представляет собой дискретный сигнал $\{h_k\}$, который является реакцией ЦФ на «единичный импульс» (1, 0, 0, 0,...). Она связана с системной функцией ЦФ $H(z)$ обратным z -преобразованием

$$h_k = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{k-1} H(z) dz. \quad (24)$$

Для рекурсивного ЦФ в отличие от нерекурсивного ЦФ импульсная характеристика содержит неограниченное число членов. При известной системной функции $H(z)$ она может быть вычислена с использованием выражения (24).

Для ЦФ 1-го и 2-го порядков, системные функции которых задаются выражениями (5) и (7) с учетом (24), получаем:

$$\{h_k\} = (1, b_1, b_1^2, b_1^3, b_1^4, \dots), \quad (25)$$

$$\{h_k\} = (1, b_1, b_1^2 + b_2, b_1^3 + 2b_1b_2, b_1^4 + 3b_1^2b_2 + b_2^2, \dots). \quad (26)$$

Выражения для общих членов указанных импульсных характеристик через полюсы соответствующих системных функций записываются:

$$h_k = z_n^k, \quad z_n = b_1; \quad (27)$$

$$h_k = \frac{z_{n_1}^{k+1} - z_{n_2}^{k+1}}{z_{n_1} - z_{n_2}}, \quad z_{n_{1,2}} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + b_2}. \quad (28)$$

Вид импульсных характеристик рекурсивного ЦФ для случаев, когда фильтр устойчив ($|z_n| < 1$) и неустойчив ($|z_n| > 1$) показан соответственно на рис. 8 и 9. В случае нахождения ЦФ на границе устойчивости ($|z_n| = 1$) импульсная характеристика представляет собой последовательность единичных импульсов.

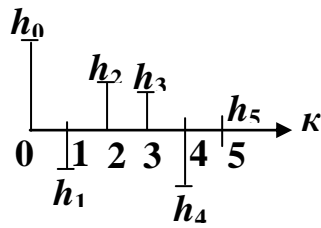


Рис. 8

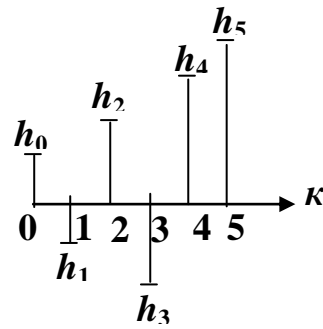


Рис. 9

Заметим, что в зависимости от знаков коэффициентов разностного уравнения, импульсные характеристики могут быть как однополярными, так и разнополярными.

3. Порядок выполнения работы

3.1. Расчет значений полюсов z_n системных функций рекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков и соответствующих этим полюсам значений модулей $|z_n|$ и аргументов $\varphi_n = \arg z_n$

Расчет полюсов системных функций производится вручную с использованием формул (11) и (12) для следующих значений коэффициента разностного уравнения ЦФ 1-го порядка (2): $b_1 = 0,6$; $b_1 = 0,8$; $b_1 = -0,6$; $b_1 = -0,8$ и для следующих сочетаний значений коэффициентов разностного уравнения ЦФ 2-го порядка (3): $b_1 = 0,5$, $b_2 = -0,9$; $b_1 = 1,2$, $b_2 = -0,4$; $b_1 = 0,4$, $b_2 = 0,5$; $b_1 = -0,5$, $b_2 = 1,0$.

По вычисленным значениям полюсов системных функций также вручную вычислить соответствующие им значения модулей $|z_n| = \sqrt{\text{Re } z_n^2 + \text{Im } z_n^2}$ (и аргументов (в радианах) $\varphi_n = \arg |z_n| = \arctg (\text{Im } |z_n| / \text{Re } |z_n|)$). Свести рассчитанные значения нулей, их модулей и аргументов в таблицу, аналогичную табл.1.

3.2. Расчет АЧХ и импульсных характеристик рекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков

Расчет производится с использованием ЭВМ. При этом используются указанные в разделе 3.1 значения коэффициента разностного уравнения ЦФ 1-го порядка (2) и сочетания значений коэффициентов разностного уравнения ЦФ 2-го порядка (3).

Расчет АЧХ и импульсных характеристик для ЦФ 1-го и 2-го порядков производится по одним и тем же формулам: (10) и (28). При этом для случая ЦФ 1-го порядка значение коэффициента b_2 в указанных формулах следует положить равным нулю. АЧХ строится не в функции частоты ω , а в функции измеряемого в радианах параметра $\varphi = \omega\Delta$, где Δ - период дискретизации, причем параметр φ следует изменять в пределах от $-\pi$ до π с шагом 0,01. Рассчитанные на ЭВМ импульсные характеристики ЦФ 1-го и 2-го порядков изобразить графически в функции номера периода дискретизации k аналогично графикам, представленным на рис. 8 и 9, причем параметр k следует изменять в пределах от 0 до 8.

Расчетные формулы:

$$A_{\text{ЧХ}} = 1 / \sqrt{(b_1^2 + b_2^2) - 2b_1b_2 \cos \varphi + b_2 \cos 2\varphi},$$

импульсная характеристика:

$$h_k = \frac{z_{n_1}^{k+1} - z_{n_2}^{k+1}}{z_{n_1} - z_{n_2}}.$$

Вспомогательные формулы:

$$z_{n_1} = \frac{b_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + b_2}, \quad z_{n_2} = \frac{b_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + b_2}.$$

Имена программ и язык программирования: RTCS20M - RTCS27M (MATHCAD). При этом программы RTCS20M - RTCS23M используются для расчета характеристик ЦФ 1-го порядка со значениями коэффициента разностного уравнения: $b_1 = 0,6$; $b_1 = 0,8$; $b_1 = -0,6$; $b_1 = -0,8$, а программы RTCS24M - RTCS27M для расчета характеристик ЦФ 2-го порядка со значениями коэффициентов разностного уравнения: $b_1 = 0,5$, $b_2 = -0,9$; $b_1 = 1,2$, $b_2 = -0,4$; $b_1 = 0,4$, $b_2 = 0,5$; $b_1 = -0,5$, $b_2 = 1,0$.

3.3. Расчет ослабления сигнала вне полосы «прозрачности» ФНЧ и добротности ПФ

Расчет ослабления сигнала вне полосы «прозрачности» ФНЧ и добротности ПФ производится вручную. При этом предварительно на основании анализа АЧХ, полученных в результате расчетов на ЭВМ, необходимо определить, какие из вариантов реализованных ЦФ могут выполнять функции ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ, зафиксировав результаты анализа в отчете по лабораторной работе. Затем необходимо выбрать по одному варианту ЦФ, пригодных для выполнения функций ФНЧ и ПФ. При этом с использованием критерия устойчивости (13) и данных табл. 1 убедиться, что выбранные ЦФ являются устойчивыми.

Для выбранных вариантов ЦФ, реализующих функции ФНЧ и ПФ, с использованием формул (19) - (23) произвести расчет ослабления «на октаву» сигнала вне полосы «прозрачности» ФНЧ, положив в (20) $n = 2$, и добротности ПФ. При этом расчет ослабления сигнала вне полосы «прозрачности» производится следующим образом. Сначала с использованием рассчитанной на ЭВМ АЧХ ФНЧ и формулы (21) определяется значение параметра φ_c , соответствующее частоте среза ω_c фильтра, затем с использованием формул (19) и (20), а также АЧХ ФНЧ определяется ослабление сигнала. Аналогичным образом, при расчете добротности ПФ сначала с использованием рассчитанной на ЭВМ АЧХ ПФ и формулы (23) определяются значения параметров φ_p и $\Delta\varphi_n$, соответствующих резонансной частоте ПФ φ_p и его полосе пропускания $\Delta\omega_n$, а затем с использованием формулы (22) определяется добротность ПФ.

4. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- функциональные схемы рекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков, представленные на рис. 1 и 2;

- аналитические выражения для разностных уравнений рекурсивных ЦФ любого, 1-го и 2-го порядков; их амплитудно-частотных характеристик, полюсов их системных функций; условия устойчивости ЦФ; ослабления вне полосы «прозрачности» ЦФ при использовании его в качестве ФНЧ и уравнения для определения частоты среза такого фильтра; добротности ЦФ при использовании его в качестве ПФ и уравнения для определения полосы пропускания такого фильтра, импульсных характеристик ЦФ любого, 1-го и 2-го порядков, описываемые формулами (1) - (3), (9) - (13), (19) - (23) и (25) - (27);

- результаты расчетов полюсов ЦФ 1-го и 2-го порядков и значений их модулей и аргументов, оформленные в виде таблицы, аналогичной табл. 1, а также результаты расчетов ослабления вне полосы «прозрачности» ЦФ при его использовании в качестве ФНЧ и добротности ЦФ при его использовании в качестве ПФ, произведенных с использованием формул (11) - (13) и (19) - (23);

- распечатки результатов расчета на ЭВМ АЧХ и импульсных характеристик рекурсивных ЦФ;

- выводы, содержащие анализ связи координат полюсов системных функций рекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков с видом их АЧХ и обоснование выбора вариантов реализации ЦФ, пригодных для использования в качестве ФНЧ и ПФ, в том числе и с точки зрения их устойчивости, а также анализ влияния коэффициентов разностных уравнений рассматриваемых ЦФ на их импульсные характеристики.

5. Контрольные вопросы

1. В чем состоит характерное отличие разностного уравнения рекурсивного ЦФ от разностного уравнения нерекурсивного ЦФ?

2. Как по разностному уравнению определить порядок рекурсивного ЦФ?

3. В чем состоит характерное отличие импульсной характеристики рекурсивного ЦФ от импульсной характеристики нерекурсивного ЦФ?

4. Как связан вид АЧХ рекурсивного ЦФ со значениями аргументов полюсов его системной функции?

5. Сформулируйте критерий устойчивости рекурсивного ЦФ?

6. В чем состоит отличие импульсных характеристик устойчивого и неустойчивого рекурсивных ЦФ?

7. Каковы достоинства и недостатки рекурсивного ЦФ по сравнению с нерекурсивным ЦФ?

8. Как связаны между собой КЧХ и системная функция ЦФ?

9. Как связаны между собой импульсная характеристика и системная функция ЦФ?

10. Какими параметрами принято характеризовать фильтрующие свойства ФНЧ и ПФ и как на них влияют при реализации в рекурсивных ЦФ параметры последних?

6. Программы и примеры расчетов на ЭВМ

6.1. Расчет АЧХ и импульсных характеристик рекурсивного ЦФ 1-го порядка

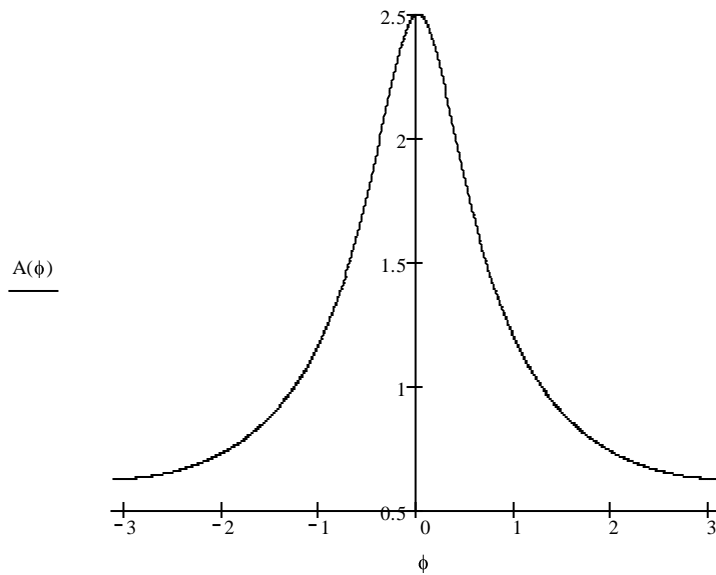
Вариант 1:

RTCS20M

$$b1 := 0.6 \quad b2 := 0$$

$$\phi := -\pi, -\pi + 0.01.. \pi$$

$$A(\phi) := \frac{1}{\sqrt{1 + b1^2 + b2^2 - 2 \cdot [b1 \cdot (1 - b2) \cdot \cos(\phi) + b2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)]}}$$



$$Zn1 := \frac{b1}{2} + \sqrt{\left(\frac{b1}{2}\right)^2 + b2} \quad Zn2 := \frac{b1}{2} - \sqrt{\left(\frac{b1}{2}\right)^2 + b2}$$

$$k := 0..8$$

$$h_{0,k} := \frac{Zn1^{k+1} - Zn2^{k+1}}{Zn1 - Zn2}$$

$$h = (1 \ 0.6 \ 0.36 \ 0.216 \ 0.13 \ 0.078 \ 0.047 \ 0.028 \ 0.017)$$

Рис.10

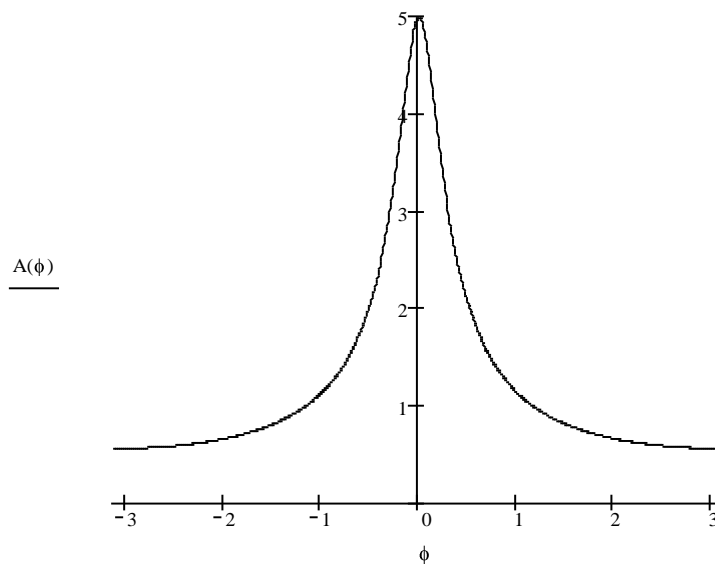
Вариант 2:

RTCS21M

$$b1 := 0.8 \quad b2 := 0$$

$$\phi := -\pi, -\pi + 0.01.. \pi$$

$$A(\phi) := \frac{1}{\sqrt{1 + b1^2 + b2^2 - 2 \cdot [b1 \cdot (1 - b2) \cdot \cos(\phi) + b2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)]}}$$



$$Zn1 := \frac{b1}{2} + \sqrt{\left(\frac{b1}{2}\right)^2 + b2} \quad Zn2 := \frac{b1}{2} - \sqrt{\left(\frac{b1}{2}\right)^2 + b2}$$

$$k := 0..8$$

$$h_{0,k} := \frac{Zn1^{k+1} - Zn2^{k+1}}{Zn1 - Zn2}$$

$$h = (1 \ 0.8 \ 0.64 \ 0.512 \ 0.41 \ 0.328 \ 0.262 \ 0.21 \ 0.168)$$

Рис. 11

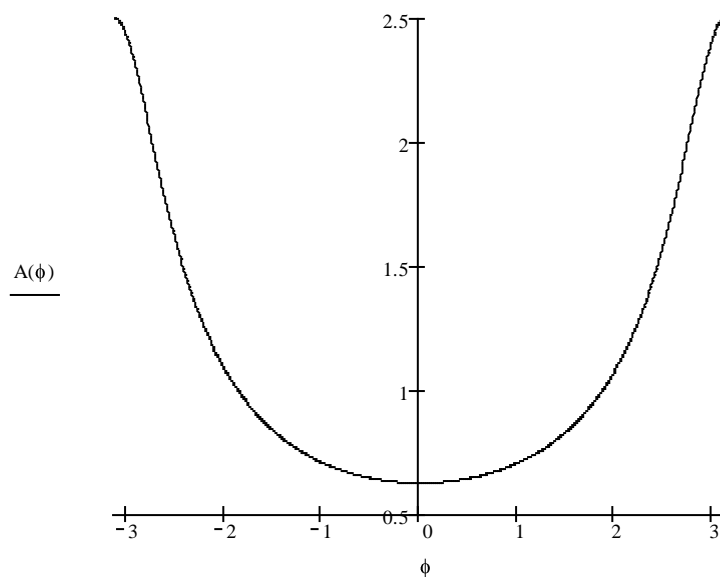
Вариант 3:

RTCS22M

$$b1 := -0.6 \quad b2 := 0$$

$$\phi := -\pi, -\pi + 0.01.. \pi$$

$$A(\phi) := \frac{1}{\sqrt{1 + b1^2 + b2^2 - 2 \cdot [b1 \cdot (1 - b2) \cdot \cos(\phi) + b2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)]}}$$



$$Zn1 := \frac{b1}{2} + \sqrt{\left(\frac{b1}{2}\right)^2 + b2} \quad Zn2 := \frac{b1}{2} - \sqrt{\left(\frac{b1}{2}\right)^2 + b2}$$

$$k := 0..8$$

$$h_{0,k} := \frac{Zn1^{k+1} - Zn2^{k+1}}{Zn1 - Zn2}$$

$$h = (1 \quad -0.6 \quad 0.36 \quad -0.216 \quad 0.13 \quad -0.078 \quad 0.047 \quad -0.028 \quad 0.017)$$

Рис. 12

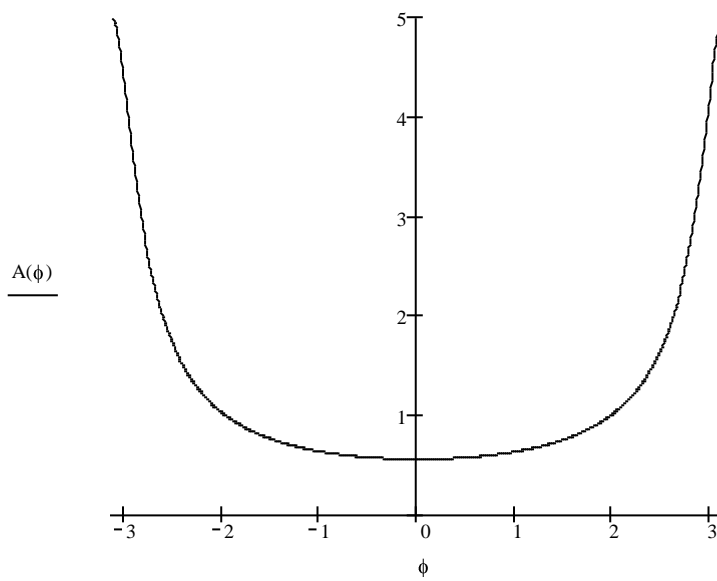
Вариант 4:

RTCS23M

$$b1 := -0.8 \quad b2 := 0$$

$$\phi := -\pi, -\pi + 0.01.. \pi$$

$$A(\phi) := \frac{1}{\sqrt{1 + b1^2 + b2^2 - 2 \cdot [b1 \cdot (1 - b2) \cdot \cos(\phi) + b2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)]}}$$



$$Zn1 := \frac{b1}{2} + \sqrt{\left(\frac{b1}{2}\right)^2 + b2} \quad Zn2 := \frac{b1}{2} - \sqrt{\left(\frac{b1}{2}\right)^2 + b2}$$

$$k := 0..8$$

$$h_{0,k} := \frac{Zn1^{k+1} - Zn2^{k+1}}{Zn1 - Zn2}$$

$$h = (1 \quad -0.8 \quad 0.64 \quad -0.512 \quad 0.41 \quad -0.328 \quad 0.262 \quad -0.21 \quad 0.168)$$

Рис. 13

6.2. Расчет АЧХ и импульсных характеристик рекурсивного ЦФ 2-го порядка

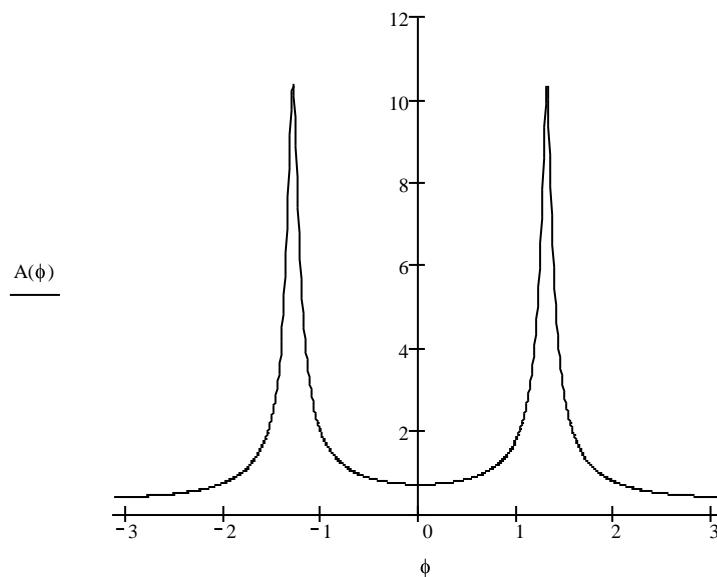
Вариант 1:

RTCS24M

$$b1 := 0.5 \quad b2 := -0.9$$

$$\phi := -\pi, -\pi + 0.01.. \pi$$

$$A(\phi) := \frac{1}{\sqrt{1 + b1^2 + b2^2 - 2 \cdot [b1 \cdot (1 - b2) \cdot \cos(\phi) + b2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)]}}$$



$$Zn1 := \frac{b1}{2} + \sqrt{\left(\frac{b1}{2}\right)^2 + b2} \quad Zn2 := \frac{b1}{2} - \sqrt{\left(\frac{b1}{2}\right)^2 + b2}$$

$$k := 0..8$$

$$h_{0,k} := \frac{Zn1^{k+1} - Zn2^{k+1}}{Zn1 - Zn2}$$

$$h = (1 \quad 0.5 \quad -0.65 \quad -0.775 \quad 0.198 \quad 0.796 \quad 0.22 \quad -0.606 \quad -0.502)$$

Рис. 14

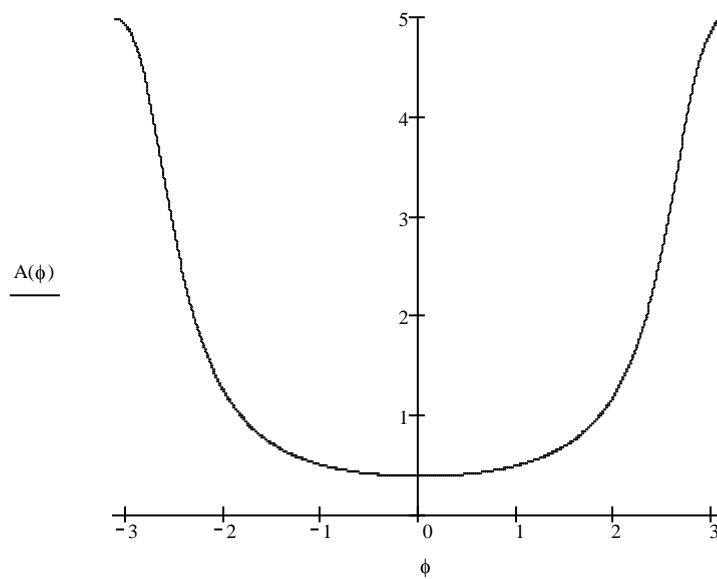
Вариант 2:

RTCS25M

$$b1 := -1.2 \quad b2 := -0.4$$

$$\phi := -\pi, -\pi + 0.01.. \pi$$

$$A(\phi) := \frac{1}{\sqrt{1 + b1^2 + b2^2 - 2 \cdot [b1 \cdot (1 - b2) \cdot \cos(\phi) + b2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)]}}$$



$$Zn1 := \frac{b1}{2} + \sqrt{\left(\frac{b1}{2}\right)^2 + b2} \quad Zn2 := \frac{b1}{2} - \sqrt{\left(\frac{b1}{2}\right)^2 + b2}$$

$$k := 0..8$$

$$h_{0,k} := \frac{Zn1^{k+1} - Zn2^{k+1}}{Zn1 - Zn2}$$

$$h = (1 \quad -1.2 \quad 1.04 \quad -0.768 \quad 0.506 \quad -0.3 \quad 0.157 \quad -0.069 \quad 0.02)$$

Рис. 15

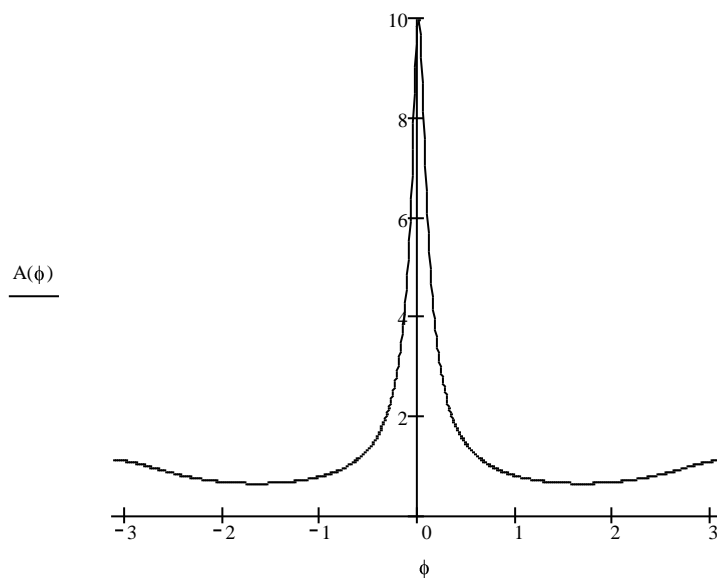
Вариант 3:

RTCS26M

$$b1 := 0.4 \quad b2 := 0.5$$

$$\phi := -\pi, -\pi + 0.01.. \pi$$

$$A(\phi) := \frac{1}{\sqrt{1 + b1^2 + b2^2 - 2 \cdot [b1 \cdot (1 - b2) \cdot \cos(\phi) + b2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)]}}$$



$$Zn1 := \frac{b1}{2} + \sqrt{\left(\frac{b1}{2}\right)^2 + b2} \quad Zn2 := \frac{b1}{2} - \sqrt{\left(\frac{b1}{2}\right)^2 + b2}$$

$$k := 0..8$$

$$h_{0,k} := \frac{Zn1^{k+1} - Zn2^{k+1}}{Zn1 - Zn2}$$

$$h = (1 \quad 0.4 \quad 0.66 \quad 0.464 \quad 0.516 \quad 0.438 \quad 0.433 \quad 0.392 \quad 0.373)$$

Рис. 16

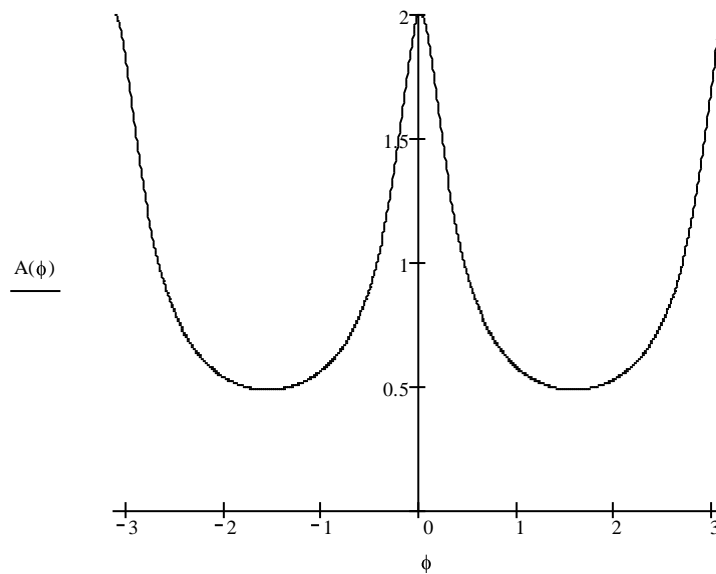
Вариант 4:

RTCS27M

$$b1 := -0.5 \quad b2 := 1.0$$

$$\phi := -\pi, -\pi + 0.01.. \pi$$

$$A(\phi) := \frac{1}{\sqrt{1 + b1^2 + b2^2 - 2 \cdot [b1 \cdot (1 - b2) \cdot \cos(\phi) + b2 \cdot \cos(2 \cdot \phi)]}}$$



$$Zn1 := \frac{b1}{2} + \sqrt{\left(\frac{b1}{2}\right)^2 + b2} \quad Zn2 := \frac{b1}{2} - \sqrt{\left(\frac{b1}{2}\right)^2 + b2}$$

$$k := 0..8$$

$$h_{0,k} := \frac{Zn1^{k+1} - Zn2^{k+1}}{Zn1 - Zn2}$$

$$h = (1 \quad -0.5 \quad 1.25 \quad -1.125 \quad 1.813 \quad -2.031 \quad 2.828 \quad -3.445 \quad 4.551)$$

Рис. 17

7. Литература

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Высшая школа, 2005, с. 396 - 405, 409 - 413.

Анализ характеристик нелинейного резонансного усилителя

1. Цель работы - исследование характеристик одноконтурного нелинейного резонансного усилителя.

2. Основные теоретические положения

Исследуемый нелинейный резонансный усилитель выполнен по схеме, представленной на рис. 1.

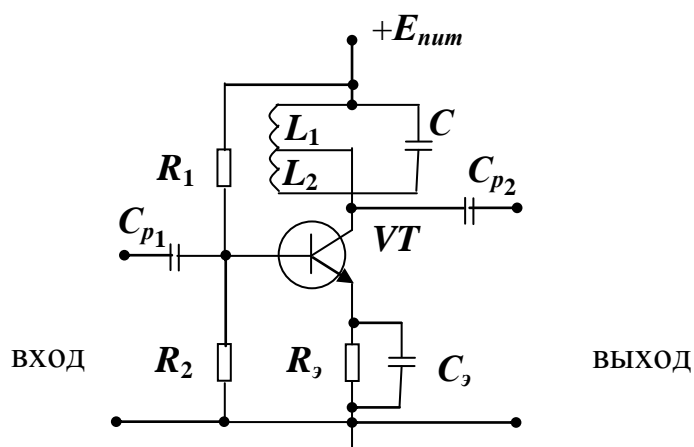


Рис. 1

Здесь R_1 , R_2 , C_{p1} , C_{p2} , R_3 , C_s - вспомогательные элементы схемы R_1 и R_2 - создают начальное смещение U_0 рабочей точки, C_{p1} и C_{p2} - разделительные конденсаторы, R_3 и C_s - элементы цепи смещения и термостабилизации рабочей точки. В схеме усилителя использовано неполное включение контура для уменьшения шунтирующего влияния выходного сопротивления транзистора на его избирательные свойства.

Режим работы транзистора - нелинейный с рабочей точкой на нижнем сгибе вольтамперной характеристики (ВАХ) $i_k(U_{бэ})$. Нелинейный режим работы усилителя с отсечкой коллекторного тока используется для повышения его коэффициента полезного действия (КПД). Такие усилители используются обычно в радиопередающих устройствах, а также в оконечных каскадах усилителя промежуточной частоты (УПЧ) радиоприемных устройств, поскольку для этих применений усилителей важен высокий КПД. В лабораторной работе рассматривается случай применения нелинейного резонансного усилителя в качестве оконечного каскада УПЧ.

Основные теоретические положения, касающиеся вопросов спектрального анализа при нелинейных преобразованиях сигналов и характеристик нелинейных резонансных усилителей имеются в [1], с. 274 - 286.

При больших уровнях сигнала, как в рассматриваемом случае, обычно используется кусочно-линейная аппроксимация ВАХ транзистора, поскольку она

в отличие от степенной аппроксимации, хорошо описывающей лишь начальный участок ВАХ, описывает всю характеристику.

При кусочно-линейной аппроксимации ВАХ описывается выражением:

$$i_{\kappa} \approx \begin{cases} 0, & u < U_n, \\ S(u - U_n), & u \geq U_n, \end{cases} \quad (1)$$

где U_n и S - начальное напряжение и крутизна наклонного участка аппроксимирующей функции. При этом угол отсечки коллекторного тока определяется выражением:

$$\theta = \arccos [(U_n - U_0) / A_{mex}], \quad (2)$$

где A_{mex} - амплитуда входного сигнала, U_0 - начальное смещение.

Способ кусочно-линейной аппроксимации ВАХ проходной ВАХ транзистора $i_{\kappa}(U_{\delta\alpha})$ и характер нелинейных преобразований (отсечки коллекторного тока транзистора) иллюстрируется рис. 2.

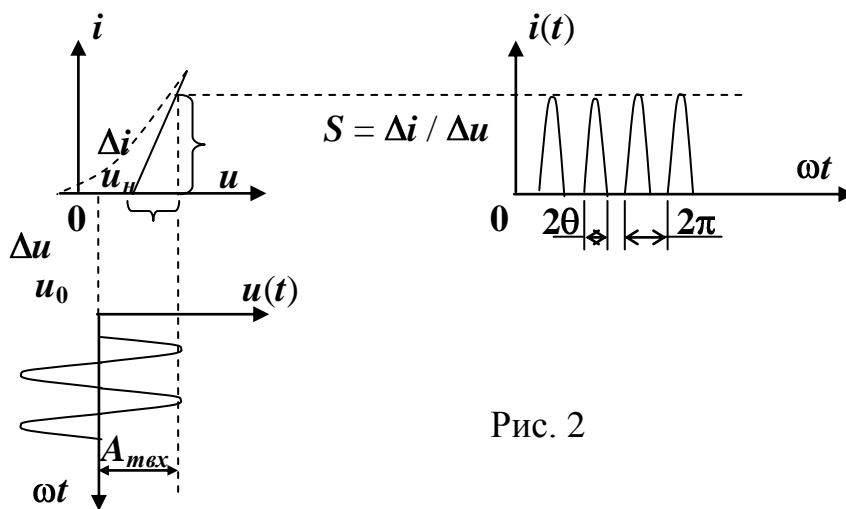


Рис. 2

Важной характеристикой нелинейного резонансного усилителя является его колебательная характеристика, под которой понимается зависимость амплитуды выходного сигнала усилителя от амплитуды входного сигнала $A_{mвых}(A_{mвх})$. Основным требованием, предъявляемым к этой характеристике, является ее линейность. Особенно важно это при усилении амплитудно-модулированного (АМ) сигнала, поскольку в этом случае полезная информация заключена в изменениях амплитуды сигнала.

При кусочно-линейной аппроксимации ВАХ транзистора колебательная характеристика определяется выражением:

$$A_{mвых} = S R_{p.э} A_{mвх} \gamma_1(\theta), \quad (3)$$

$$\text{где} \quad \gamma_1(\theta) = \frac{1}{\pi} (\theta - \sin \theta \cdot \cos \theta) \quad (4)$$

коэффициент Берга 1-го порядка; $R_{p.э}$ - эквивалентное резонансное сопротивление контура, определяемое выражением:

$$R_{p.э} = R_p / (1 + R_p/R_i), \quad (5)$$

где $R_p = \kappa_e^2 \rho Q$, κ_e , $\rho = \sqrt{L/C}$, Q , L и C - соответственно резонансные сопротивления, коэффициент включения, характеристическое сопротивление, индуктивность и емкость контура, а R_i - выходное сопротивление транзистора.

Следует обратить внимание на то, что $A_{m_{вых}}$ зависит от $A_{m_{вх}}$ как непосредственно, так и через θ . Поэтому в общем случае колебательная характеристика нелинейна. Зависимость θ от $A_{m_{вх}}$, как это видно из (2) только при $\theta = \pi/2$, что имеет место при $U_0 = U_n$. Поэтому угол отсечки $\theta = \pi/2$ является оптимальным с точки зрения линейности колебательной характеристики. Заметим, что сверху колебательная характеристика ограничена $A_{m_{вых}} = E_{num}$, где E_{num} - напряжение питания транзистора. Вид колебательной характеристики иллюстрируется рис. 3.

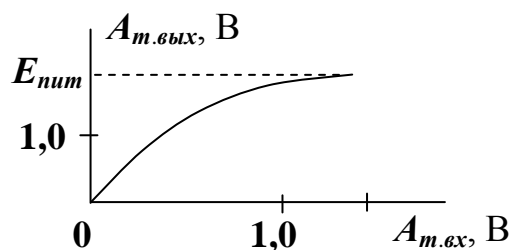


Рис. 3

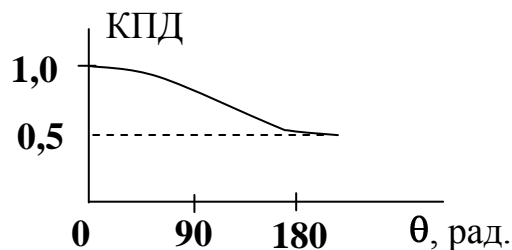


Рис. 4

КПД нелинейного резонансного усилителя определяется выражением:

$$\eta = \frac{1}{2} [\gamma_1(\theta) / \gamma_0(\theta)], \quad (6)$$

где

$$\gamma_0(\theta) = \frac{1}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta) - \quad (7)$$

коэффициент Берга нулевого порядка; а $\gamma_1(\theta)$ - коэффициент Берга первого порядка, определяемый выражением (4). Зависимость КПД от угла отсечки θ показана на рис. 4. Как видим максимум КПД имеет место при угле отсечки близком к $\theta = 0$. Поэтому такой угол оптимален с точки зрения КПД усилителя. Однако такой режим не используется из-за малости выходного сигнала. Обычно из соображений компромисса между требованиями по КПД усилителя и линейности его колебательной характеристики выбирают угол отсечки несколько меньший $\pi/2$, порядка 80° .

3. Порядок выполнения работы

3.1. Расчет колебательной характеристики нелинейного резонансного усилителя

Расчет производится с использованием ЭВМ.

Расчетная формула:

Таблица 1

Амплитуда выходного сигнала $A_{m_{вых}}$
$\frac{S R_{p.э} A_{m_{вх}}}{\pi} \left(1 - \sin \theta \cos \theta \right)$

Вспомогательные формулы:

$$\theta = \arccos [(U_H - U_0) / A_{mex}] ; R_{pз} = R_p / (1 + R_p/R_i); R_p = \kappa_e^2 \rho Q; \rho = \sqrt{L/C} .$$

Размерность исходных и выходных данных:

Таблица 2

Параметр	$A_{mвых}$	$A_{mвх}$	θ	S	U_H	U_0
Размерность	В	В	рад.	А/В	В	В
Параметр	Q	κ_e	L	C	R_i	
Размерность	-	-	Гн	Ф	Ом	

Имя программы и язык программирования: RTCS7M (MATHCAD).

3.2. Расчет КПД нелинейного резонансного усилителя

Расчетная формула:

Таблица 3

$\eta(\theta)$
$(\theta - \sin \theta \cos \theta) / 2 (\sin \theta - \theta \cos \theta)$

Размерность исходных и выходных данных:

Таблица 4

Параметр	$\eta(\theta)$	θ
Размерность	-	рад

Имя программы и язык программирования: RTCS8M (MATHCAD).

Результаты расчетов, проведенных в подразделах 3.2 и 3.3, представить в виде графиков, аналогичных графикам, представленным в виде примеров в разделе 6 настоящего описания лабораторной работы. Исходные данные для расчетов получить у преподавателя либо, если таковые им не будут выданы, использовать данные, указанные в примерах, приведенных в разделе 6.

4. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- принципиальную схему одноконтурного нелинейного резонансного усилителя, представленную на рис.1;
- графики, иллюстрирующие способ кусочно-линейной аппроксимации ВАХ транзистора рассматриваемого усилителя;
- аналитические выражения для кусочно-линейной аппроксимации ВАХ транзистора рассматриваемого усилителя, угла отсечки коллекторного тока транзистора, колебательной характеристики усилителя и зависимости КПД усилителя от угла отсечки коллекторного тока транзистора, описываемые формулами (1) - (4), (6) и (7).
- распечатку результатов расчетов на ЭВМ колебательной характеристики усилителя и зависимости его КПД от угла отсечки с записью программ расчетов на языке программирования MATHCAD, исходных данных, расчетных формул и полученных в результате расчетов графиков и численных результатов;

- выводы по работе, содержащие анализ колебательной характеристики с точки зрения степени ее линейности и зависимости КПД усилителя от угла отсечки с точки зрения рационального выбора этого угла.

5. Контрольные вопросы

1. Каковы области применения кусочно-линейной и степенной аппроксимаций вольтамперной характеристики нелинейного двухполосника?
2. Как осуществляется кусочно-линейная аппроксимация вольтамперной характеристики нелинейного двухполосника? Запишите аналитическое выражение для нее.
3. Как осуществляется степенная аппроксимация вольтамперной характеристики нелинейного двухполосника? Запишите аналитическое выражение для нее.
4. Дайте определение колебательной характеристики нелинейного резонансного усилителя. Какие к ней предъявляются требования?
5. Из каких соображений выбирают угол отсечки коллекторного тока в нелинейном резонансном усилителе, работающем при больших уровнях входного сигнала?
6. Какой угол отсечки коллекторного тока в нелинейном резонансном усилителе оптимален с точки зрения наилучшей линейности колебательной характеристики усилителя?
7. Какой угол отсечки коллекторного тока в нелинейном резонансном усилителе оптимален с точки зрения наибольшего коэффициента полезного действия?
8. На каких участках вольтамперной характеристики транзистора должна выбираться рабочая точка при работе усилителя с отсечкой тока коллектора и без нее?
9. Дайте физическое объяснение высокому коэффициенту полезного действия усилителя при работе с отсечкой коллекторного тока транзистора.

6. Программы и примеры расчетов на ЭВМ

6.1. Расчет колебательной характеристики нелинейного резонансного усилителя

RTCS7M

$$L := 100 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} \quad C := 250 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \quad S := 20 \cdot 10^{-3} \frac{\text{А}}{\text{В}} \quad R_i := 20 \cdot 10^3 \text{ Ом}$$

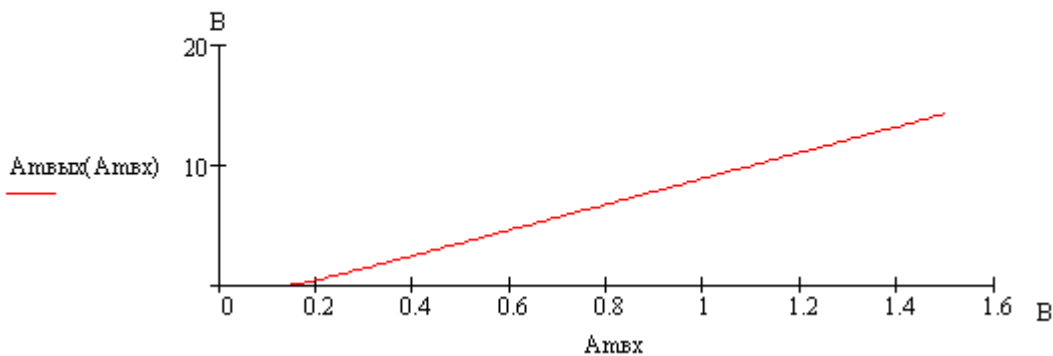
$$K_b := 0.3 \quad Q := 20 \quad U_n := 0.3 \text{ В} \quad U_o := 0.16 \text{ В}$$

$$R_p := K_b^2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot Q \quad R_p = 1.138 \times 10^3 \text{ Ом}$$

$$R_{pз} := \frac{R_p}{1 + \frac{R_p}{R_i}} \quad R_{pз} = 1.077 \times 10^3 \text{ Ом}$$

$$A_{пвх} := 0.01, 0.02 \dots 1.5 \text{ В} \quad \theta(A_{пвх}) := \arccos\left[\frac{(U_n - U_o)}{A_{пвх}}\right]$$

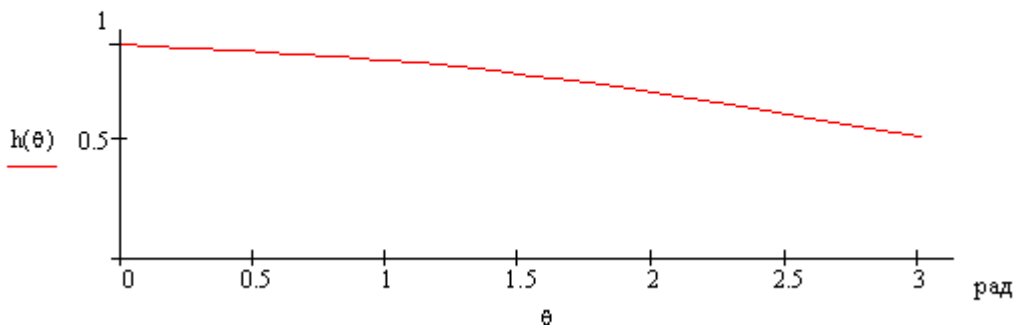
$$A_{пввх}(A_{пвх}) := \frac{S \cdot R_{pз} \cdot A_{пвх} \cdot (\theta(A_{пвх}) - \sin(\theta(A_{пвх})) \cdot \cos(\theta(A_{пвх})))}{\pi}$$



6.2. Расчет КПД нелинейного резонансного усилителя

RTCS8M

$$\theta := 0 \dots \pi \text{ рад} \quad h(\theta) := \frac{\theta - \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)}{2 \cdot (\sin(\theta) - \theta \cdot \cos(\theta))}$$



7. Литература

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Высшая школа, 2005, с. 283 - 286.

Анализ характеристик автогенератора гармонических колебаний

1. Цель работы - исследование характеристик автогенератора гармонических колебаний с трансформаторной обратной связью.

2. Основные теоретические положения

Исследуемый автогенератор (АГ) гармонических колебаний с трансформаторной обратной связью выполнен на биполярном транзисторе по схеме, представленной на рис.1.

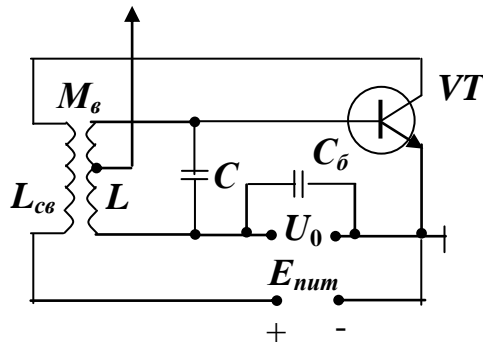


Рис. 1

Здесь M_g - коэффициент взаимной индукции трансформатора в цепи обратной связи, $L_{св}$ - индуктивность катушки связи, L и C - соответственно индуктивность и емкость колебательного контура, C_b - блокировочная емкость, $E_{пит}$ и U_0 - соответственно напряжения питания и смещения, VT - обозначение транзистора.

Основные теоретические положения, касающиеся вопросов спектрального анализа при нелинейных преобразованиях сигналов и характеристик нелинейных резонансных усилителей имеются в [1], с. 364 - 366, 372 - 378.

Предполагается, что в АГ обеспечивается мягкий режим возбуждения, не требующий в отличие от жесткого режима пускового импульса для возбуждения колебаний. При мягком режиме возбуждения рабочая точка выбирается в середине линейного участка проходной вольтамперной характеристики (ВАХ) $i_k(U_{бэ})$ транзистора АГ. Недостатком мягкого режима является невысокий (порядка 0,5) коэффициент полезного действия (КПД) АГ. Поэтому такой режим используется в маломощных АГ, например, в гетеродине приемного устройства.

Для расчета стационарного режима АГ необходимо на основании данных степенной аппроксимации ВАХ транзистора

$$i_k(U_{бэ}) = a_0 + a_1(U_{бэ} - U_0) + a_2(U_{бэ} - U_0)^2 + a_3(U_{бэ} - U_0)^3 \quad (1)$$

построить кривую зависимости средней крутизны ВАХ, под которой понимается крутизна по первой гармонике, от амплитуды напряжения на входе транзистора (см. [1], с. 374 - 375)

$$S_1(A_2) \cong a_1 + (3/4) a_3 A_2^2, \quad (2)$$

где a_1 и a_3 - коэффициенты аппроксимирующего ВАХ полинома (1).

Стационарная амплитуда автоколебаний $A_{z.cm}$ определяется по точке пересечения кривой (2) с линией обратной связи (линией с ординатой $1/2\pi f_2 Q_3 M_6$, параллельной оси абсцисс), то есть путем графического решения уравнения

$$S_1(A_z) = 1 / 2 \pi f_2 Q_3 M_6, \quad (3)$$

где A_z , f_2 и Q_3 - соответственно амплитуда автоколебаний, их частота и эквивалентная (то есть учитывающая шунтирующее действие выходного сопротивления транзистора) добротность колебательного контура (см. рис. 2).

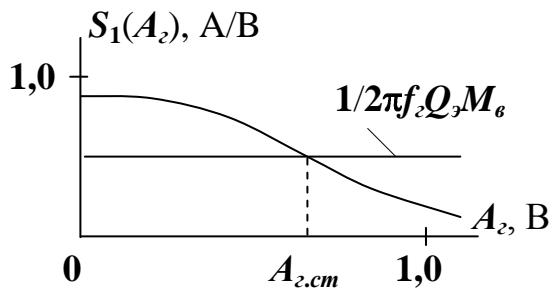


Рис. 2

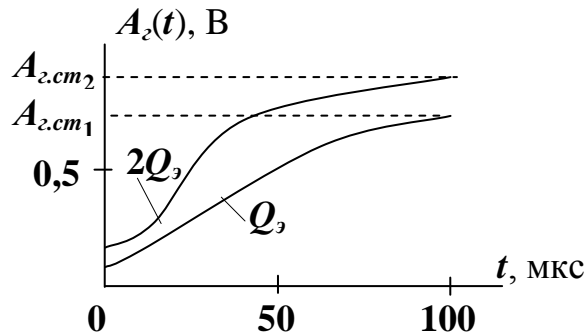


Рис. 3

При известных значениях A_z , f_2 и Q_3 положение линии обратной связи, соответствующее $A_{z.cm}$, однозначно определяет необходимую глубину обратной связи, характеризуемую коэффициентом взаимной индукции M_6 .

Кривая установления стационарной амплитуды автоколебаний определяется выражением:

$$A_z(t) = \frac{A_z(0) \sqrt{\alpha \exp(\alpha t)}}{\sqrt{\alpha + \beta A_z^2(0) [1 - \exp(\alpha t)]}}, \quad (4)$$

где $A_z(0)$ - начальное напряжение, которое следует принять равным $0,1 A_{z.cm}$;

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[a_1 M_6 (\pi f_2)^2 - \frac{2\pi f_2}{Q_3} \right]; \quad (5)$$

$$\beta = \frac{3}{8} a_3 M_6 (\pi f_2)^2. \quad (6)$$

Вид кривой $A_z(t)$ показан на рис. 3. При этом для оценки влияния добротности колебательного контура Q_3 на характер переходного процесса в АГ кривые построены для двух значений Q_3 . Как видим, с увеличением добротности длительность переходного процесса уменьшается. При этом увеличивается значение стационарной амплитуды автоколебаний $A_{z.cm}$.

Заметим, что характер влияния добротности контура на длительность переходного процесса в данном случае отличается от такого влияния в пассивных цепях, в которых увеличение добротности наоборот приводит к увеличению длительности переходного процесса. Это можно объяснить тем, что в случае автогенератора контур включен в цепь обратной связи и увеличение его добротности приводит к увеличению коэффициента передачи в цепи, что приводит, в свою очередь, к убыстрению переходного процесса.

Увеличение значения стационарной амплитуды автоколебаний $A_{z,ст}$ с увеличением добротности контура Q , объясняется тем, что линия обратной связи с увеличением добротности опускается (см. рис.3) и точка ее пересечения с кривой $S_1(A_z)$, определяющая значение стационарной амплитуды автоколебаний $A_{z,ст}$, смещается вправо.

3. Порядок выполнения работы

3.1. Расчет кривых установления стационарной амплитуды в АГ

Расчет производится с использованием ЭВМ. При этом кривых рассчитывается для двух, отличающихся в два раза, значений добротности контура.

Расчетная формула:

Таблица 1

Амплитуда автоколебаний $A_z(t)$
$A_z(t) = \sqrt{\alpha} \exp(\alpha t) \left[\sqrt{\alpha + \beta A_z^2(t)} - \exp(-\alpha t) \right]$

Вспомогательные формулы: $\alpha = 1/2 [a_1 M_e (2 \pi f_2)^2 - 2 \pi f_2 / Q]$;
 $\beta = 3/8 [a_3 M_e (2 \pi f_2)^2]$; $A_z(0) = 0,1 A_z$.

Размерность исходных и выходных данных:

Таблица 2

Параметр	$A_z(t)$	A_z	t	M_e
Размерность	В	В	с	Гн
Параметр	f_2	Q	a_1	a_3
Размерность	Гц	-	А/В	А/В ³

Имя программы и язык программирования: RTCS6M (MATHCAD).

Результаты проведенных расчетов представить в виде графиков, аналогичных графикам, представленным в виде примеров в разделе 6 настоящего описания лабораторной работы. Исходные данные для расчетов получить у преподавателя либо, если таковые им не будут выданы, использовать данные, указанные в примерах, приведенных в разделе 6.

4. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- принципиальную схему АГ гармонических колебаний, представленную на рис.1;
- аналитические выражения для степенной аппроксимации ВАХ транзистора, зависимости средней крутизна ВАХ от амплитуды напряжения на входе транзистора, уравнения для определения стационарной амплитуды автоколебаний и выражение, описывающее процесс установления этой амплитуды, описываемые формулами (1) - (6);
- рис. 2, иллюстрирующий графическое решение уравнения (3);
- распечатку результатов расчетов на ЭВМ кривых установления стационарной амплитуды автоколебаний с записью программы расчетов на языке программирования MATHCAD, исходных данных, расчетных формул и полученных в результате расчетов графиков и численных результатов;

- выводы по работе, содержащие анализ зависимостей режима возбуждения автогенератора от выбора рабочей точки на ВАХ транзистора, величины стационарной амплитуды автоколебаний от глубины обратной связи и добротности колебательного контура, а также зависимости продолжительности процесса установления стационарной амплитуды автоколебаний от добротности колебательного контура.

5. Контрольные вопросы

1. Изобразите принципиальную схему автогенератора с трансформаторной обратной связью.

2. Сформулируйте условия баланса амплитуд и баланса фаз, обеспечивающие самовозбуждение автогенератора. Как они реализуются в автогенераторе с трансформаторной обратной связью?

3. Каковы достоинства и недостатки мягкого и жесткого режимов возбуждения автогенератора?

4. Как реализуются мягкий и жесткий режимы возбуждения автогенератора на примере автогенератора с трансформаторной обратной связью.

5. Как влияет выбор рабочей точки на ВАХ транзистора на коэффициент полезного действия автогенератора?

6. Каковы области применения автогенераторов с мягким и жестким режимами возбуждения?

7. Как влияет добротность колебательного контура на продолжительность установления стационарной амплитуды автоколебаний в автогенераторе?

8. Как влияет глубина обратной связи на величину стационарной амплитуды автоколебаний в автогенераторе?

9. Изобразите фазовые портреты автогенераторов с мягким и жестким режимом возбуждения при различных начальных условиях.

6. Программа и пример расчетов на ЭВМ

6.1. Расчет кривых установления стационарной амплитуды в АГ

RTCS6M

$$a1 := 5.1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{A}}{\text{B}} \quad a3 := -1.9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{A}}{\text{B}^3} \quad A_{r0} := 1 \text{ В} \quad Mb := 10^{-8} \text{ Гн}$$

$$fr := 99 \cdot 10^6 \text{ Гц} \quad Q_{\Sigma} := 44 \quad Q_{\Sigma 1} := 2 \cdot Q_{\Sigma} \quad Q_{\Sigma 1} = 88$$

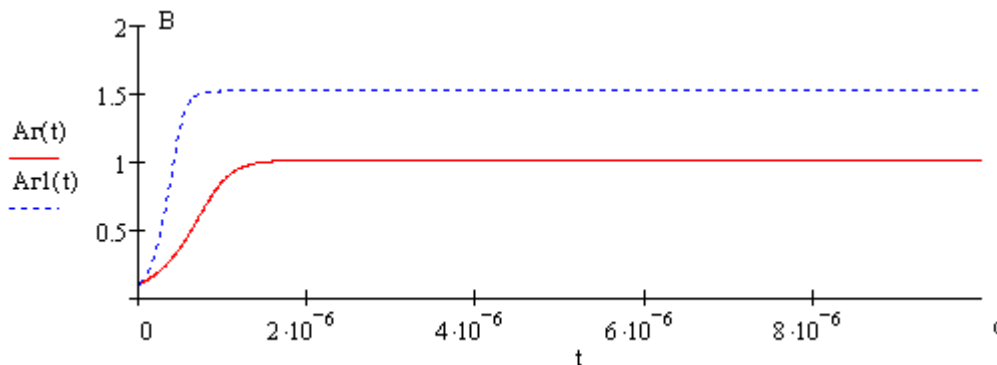
$$\alpha := \frac{1}{2} \cdot \left[a1 \cdot Mb \cdot (2 \cdot \pi \cdot fr)^2 - 2 \cdot \pi \cdot \frac{fr}{Q_{\Sigma}} \right] \quad \alpha = 2.798 \times 10^6 \text{ с}^{-1}$$

$$\beta := \frac{3}{8} \cdot a3 \cdot Mb \cdot (2 \cdot \pi \cdot fr)^2 \quad \beta = -2.757 \times 10^6 \text{ с}^{-1} \text{ В}^{-2}$$

$$\alpha 1 := \frac{1}{2} \cdot \left[a1 \cdot Mb \cdot (2 \cdot \pi \cdot fr)^2 - 2 \cdot \pi \cdot \frac{fr}{Q_{\Sigma 1}} \right] \quad \alpha 1 = 6.332 \times 10^6 \text{ с}^{-1}$$

$$Ar0 := 0.1 A_r \quad Ar0 = 0.1 \text{ В} \quad t := 0, 0.1 \cdot 10^{-7} .. 10 \cdot 10^{-6} \text{ с}$$

$$Ar(t) := \frac{Ar0 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot e^{\alpha \cdot t}}{\sqrt{\alpha + \beta \cdot Ar0^2 \cdot (1 - e^{2 \cdot \alpha \cdot t})}} \quad Ar1(t) := \frac{Ar0 \cdot \sqrt{\alpha 1} \cdot e^{\alpha 1 \cdot t}}{\sqrt{\alpha 1 + \beta \cdot Ar0^2 \cdot (1 - e^{2 \cdot \alpha 1 \cdot t})}}$$



7. Литература

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Высшая школа, 2005, с. 364 - 366, 372 - 378.