Содержание

1. Введение………………………………………………………………. 4
1.1. Основные понятия и определения…………………………………… 4
1.2. Классификация моделей………………………………………............ 6
1.2.1. Классификация моделей по степени абстрагирования модели от Оригинала…………………………………………………………….......... 7
1.2.2. Классификация моделей по степени устойчивости………………… 10
1.2.3. Классификация моделей по отношению к внешним факторам…….. 10
1.2.4. Классификация моделей по отношению ко времени ……………….. 10
1.3. Этапы разработки модели…………………………………………… 11
1.4. Типовые математические схемы моделирования …………………… 15
2. Типовые математические модели…………………………………. 16
2.1. Моделирование по схеме марковских процессов …………………… 17
2.2. Модели систем массового обслуживания……………………………. 23
2.3. Метод динамики средних……………………………………………… 29
2.4. Модели на базе теории игр……………………………………...... 33
2.5. Модели систем искусственного интеллекта………………………… 37
2.6. Модели на базе сетей Петри………………………………………….. 44
2.7. Модели для принятия решений при управлении …………………… 47
3. Планирование экспериментов с моделями систем……………...... 56
3.1. Основные понятия планирования экспериментов…………………… 56
3.2. Виды планов экспериментов…………………………………………. 63
4. Обработка и анализ результатов моделирования систем………… 67
4.1. Методы обработки результатов измерений …………………………. 67
4.2. Корреляционный, регрессионный и дисперсионный анализ результатов моделирован………………………………………………… 73
Заключение………………………………………………………………. 79
Литература………………………………………………………………. 80

1. Введение

Модель - эффективное средство научного познания. Она приходит на помощь исследователю тогда, когда исследуемый объект не может быть изучен непосредственно по причине громоздкости, отдаленности, в силу присущих ему чрезмерно высоких или низких температур, давлений и пр.; в силу того, что непосредственное изучение может привести к нарушению функционирования объекта или даже к его разрушению. Достоинство моделирования состоит также в том, что оно позволяет изучать объекты, которых еще нет и которые должны быть созданы. В этом случае сначала строится модель, а затем, после того как она успешно пройдет теоретическую и экспериментальную проверку, на ее основе создается сам объект.

К помощи моделей прибегают в многочисленных и разнообразных случаях. Их основная функция - познавательная - не является единственной. Следующие пять функций стали уже привычными:

1) средство осмысления действительности;
2) средство общения (чертеж, схема);
3) средство обучения и тренажа (тренажеры летчиков, космонавтов);
4) средство прогнозирования (например, погоды);
5) средство постановки экспериментов не только физических, но и численных на ЭВМ.

1.1. Основные понятия и определения

Слово «модель» (от лат. modelium) означает «мера», «способ», «сходство с какой-то вещью». Термин «модель» широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений.

Модель – это объект или описание объекта, системы для замещения (при определенных условиях, предложениях, гипотезах) одной системы (т.е. оригинала) другой для лучшего изучения оригинала или воспроизведения каких-либо его свойств [1].

Модель – это результат отображения одной структуры (изученной) на другую (малоизученную).

Любая модель строится и исследуется при определенных допущениях, гипотезах. Модель должна строиться так, чтобы она наиболее полно воспроизводила те качества объекта, которые необходимо изучить в соответствии с поставленной целью [1].

Под ***моделью*** будем понимать некий материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале. Для одного и того же объекта могут существовать различные модели, классы моделей, соответствующие различным целям его изучения.

В области моделирования сетей и систем телекоммуникаций и средств их защиты чаще всего используются математические модели. ***Математической моделью*** будем называть совокупность понятий и отношений, выраженных при помощи системы математических символов и обозначений, которые отражают наиболее существенные (характерные) свойства изучаемого объекта (системы).

Применение математических методов при изучении реально существующих или мыслимых систем будет эффективным, если свойства математической модели удовлетворяют требованиям. Рассмотрим основные из этих свойств [1,2].

Полнота математической модели позволяет отразить в достаточной мере именно те характеристики и особенности системы, которые интересуют нас с точки зрения поставленной цели проведения моделирования. Например, модель может достаточно полно описывать протекающие в системе процессы, но не отражать ее габаритные, массовые и стоимостные характеристики.

Точность математической модели дает возможность обеспечить приемлемое совпадение реальных и найденных при помощи математической модели значений выходных переменных систем, составляющих вектор $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Пусть $y_i^м$ и y_i^p - найденное при помощи математической модели и реальное значение i-й выходной переменной. Тогда относительная погрешность математической модели по отношению к этой переменной при одних и тех же значениях входных переменных будет определяться соотношением:

$$\varepsilon_i = \frac{\left| y_i^м - y_i^p \right|}{y_i^p}, \; i = \overline{1, n}.$$

В качестве скалярной оценки вектора погрешности модели $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ можно принять какую-либо его норму, например:

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i} \text{ или } \varepsilon = \max_i \left| \varepsilon_i \right|.$$

Для моделей, предназначенных для приблизительных расчетов, удовлетворительной считается точность 10–15 %, а для моделей, предназначенных для использования в управляющих и контролирующих системах, удовлетворительной считается точность 1–2 % [2].

Адекватность математической модели отражает степень соответствия результатов, полученных по разработанной модели, данным эксперимента или тестовой задачи. Если система, для которой разрабатывается модель, существует, то сравнивают выходные данные модели и этой системы. В том случае, когда два набора данных оказываются подобными, модель существующей системы считается адекватной. Чем больше общего между существующей системой и ее моделью, тем больше уверенность в правильности модели системы.

При этом адекватность математической модели зависит от цели моделирования и принятых критериев. Проверка адекватности модели необходима для того, чтобы убедиться в справедливости совокупности гипотез, сформулированных на первом этапе разработки модели, и точности полученных результатов, требуемых техническим заданием.

Экономичность математической модели оценивают затратами на вычислительные ресурсы, необходимые для проведения вычислительного эксперимента с математической моделью на компьютере.

Очевидно, что требования к экономичности, точности и адекватности математической модели противоречивы и на практике могут быть удовлетворены лишь на основе разумного компромисса.

Робастность математической модели характеризуется ее устойчивостью по отношению к погрешностям исходных данных, способность нивелировать эти погрешности и не допускать их чрезмерного влияния на результат вычислительного эксперимента.

Продуктивность математической модели связана с возможностью располагать достаточно достоверными данными. Если они являются результатами измерений, то точность их измерений не должна быть ниже, чем для тех переменных, которые получаются при использовании математической модели. В противном случае математическая модель будет не продуктивной и ее применение для анализа конкретной системы теряет смысл.

1.2. Классификация моделей

В общем случае все модели, независимо от областей и сфер их применения, бывают трех типов: познавательные, прагматические и инструментальные.

Познавательная модель – форма организации и представления знаний, средство соединения новых и старых знаний. Познавательная модель обычно подгоняется под реальность и является теоретической моделью.

Прагматическая модель – средство организации практических действий, рабочего представления целей системы для ее управления. Реальность в них подгоняется под некоторую прагматическую модель. Это, как правило, прикладные модели.

Инструментальная модель – средство построения, исследования и использования прагматических или познавательных моделей.

Познавательные отражают существующие, а прагматические – хоть и не существующие, но желаемые и, возможно, исполнимые отношения и связи.

Вся остальная классификация моделей выстраивается по отношению к объекту-оригиналу, методам изучения и т.п.

1.2.1. Классификация моделей по степени абстрагирования модели от оригинала.

По степени абстрагирования от оригинала модели могут быть разделены на материальные (физические) и идеальные. К ***материальным*** относятся такие способы, при которых исследование ведется на основе модели, воспроизводящей основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики изучаемого объекта. Основными разновидностями физических моделей являются [1-5]:

- натурные;
- квазинатурные;
- масштабные;
- аналоговые.

Натурные – это реальные исследуемые системы, которые являются макетами и опытными образцами. Натурные модели имеют полную адекватность с системой-оригиналом, что обеспечивает высокую точность и достоверность результатов моделирования; другими словами, модель натурная, если она есть материальная копия объекта моделирования.

Квазинатурные (от лат. «квази» – почти) – это совокупность натурных и математических моделей. Этот вид моделей используется в случаях, когда математическая модель части системы не является удовлетворительной или когда часть системы должна быть исследована во взаимодействии с остальными частями, но их еще не существует либо их включение в модель затруднено или дорого.

Масштабные модели – это системы той же физической природы, что и оригинал, но отличающиеся от него размерами. В основе масштабных моделей лежит математический аппарат теории подобия, который предусматривает соблюдение геометрического подобия оригинала и модели и соответствующих масштабов для их параметров. Примером масштабного моделирования являются любые разработки макетов домов, а порой и целых районов, при проведении проектных работ при строительстве. Также масштабное моделирование используется при проектировании крупных объектов в самолетостроении и кораблестроении.

Аналоговое моделирование основано на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально (одними и теми же математическими уравнениями, логическими схемами и т.п.). В качестве аналоговых моделей используются механические, гидравлические, пневматические системы, но наиболее широкое применение получили электрические и электронные аналоговые модели, в которых сила тока или напряжение является аналогами физических величин другой природы.

Идеальное моделирование носит теоретический характер. Различают два типа идеального моделирования: интуитивное и знаковое.

Под ***интуитивным*** будем понимать моделирование, основанное на интуитивном представлении об объекте исследования, не поддающемся формализации либо не нуждающимся в ней. В этом смысле, например, жизненный опыт каждого человека может считаться его интуитивной моделью окружающего мира.

Знаковым называется моделирование, использующее в качестве моделей знаковые преобразования различного вида: схемы, графики, чертежи, формулы, наборы символов и т.д., включающие совокупность законов, по которым можно оперировать с выбранными знаковыми элементами. Знаковая модель может делиться на лингвистическую, визуальную, графическую и математическую модели.

Модель ***лингвистическая***, если она представлена некоторым лингвистическим объектом, формализованной языковой системой или структурой. Иногда такие модели называют вербальными.

Модель ***визуальная***, если она позволяет визуализировать отношения и связи моделируемой системы, особенно в динамике. Например, на экране компьютера часто пользуются визуальной моделью объектов, клавиатуры в программе-тренажере по обучению работе на клавиатуре.

Модель ***графическая***, если она представлена геометрическими образами и объектами.

Важнейшим видом знакового моделирования является ***математическое*** моделирование, классическим примером математического моделирования является описание и исследование основных законов механики И. Ньютона средствами математики.

Математические модели классифицируются по:

– принадлежности к иерархическому уровню;
– характеру отображаемых свойств объекта;
– способу представления свойств объекта;
– способу получения модели;
– форме представления свойств объекта;
– содержанию вероятностных компонентов.

По принадлежности к иерархическому уровню математические модели делятся на модели микроуровня, макроуровня, метауровня.

Математические модели на ***микроуровне*** процесса отражают физические процессы, протекающие, например, в полупроводниковых приборах. Они описывают процессы на уровне перехода (прохода).

Математические модели на ***макроуровне*** процесса описывают технологические процессы.

Математические модели на ***метауровне*** процесса описывают технологические системы (участки, цехи, предприятие в целом).

По характеру отображаемых свойств объекта модели можно классифицировать на структурные и функциональные.

Модель ***структурная***, если она представлена структурой данных или структурами данных и отношениями между ними; например, структурной моделью может служить описание (табличное, графовое, функциональное или другое) трофической структуры экосистемы. В свою очередь структурная модель может быть иерархической или сетевой.

Модель ***иерархическая*** (древовидная), если представлена некоторой иерархической структурой (деревом); например, для решения задачи нахождения маршрута в дереве поиска можно построить древовидную модель.

Модель ***сетевая***, если она представлена некоторой сетевой структурой.

Модель ***функциональная***, если она представлена в виде системы функциональных соотношений.

По способу представления свойств объекта модели делятся на аналитические, численные, алгоритмические и имитационные [1-5].

Аналитические математические модели представляют собой явные математические выражения выходных параметров как функций от параметров входных и внутренних и имеют единственные решения при любых начальных условиях. Например, квадратное уравнение, имеющее одно или несколько решений, будет аналитической моделью.

Модель будет ***численной***, если она имеет решения при конкретных начальных условиях (дифференциальные, интегральные уравнения).

Модель ***алгоритмическая***, если она описана некоторым алгоритмом или комплексом алгоритмов, определяющим ее функционирование и развитие. Введение данного типа моделей (действительно, кажется, что любая модель может быть представлена алгоритмом ее исследования) вполне обосновано, т.к. не все модели могут быть исследованы или реализованы алгоритмически. Например, моделью вычисления суммы бесконечного убывающего ряда чисел может служить алгоритм вычисления конечной суммы ряда до некоторой заданной степени точности. Алгоритмической моделью корня квадратного из числа X может служить алгоритм вычисления его приближенного, сколь угодно точного значения по известной рекуррентной формуле.

Модель ***имитационная***, если она предназначена для испытания или изучения возможных путей развития и поведения объекта путем варьирования некоторых или всех параметров модели.

По способу получения модели делятся на теоретические и эмпирические.

Теоретические математические модели создаются в результате исследования объектов (процессов) на теоретическом уровне.

Эмпирические математические модели создаются в результате проведения экспериментов (изучения внешних проявлений свойств объекта с помощью измерения его параметров на входе и выходе) и обработки их результатов методами математической статистики.

По форме представления свойств объекта модели делятся на логические, теоретико-множественные и графовые.

Модель ***логическая***, если она представлена предикатами, логическими функциями, например, совокупность двух логических функций может служить математической моделью одноразрядного сумматора.

Модель ***теоретико-множественная***, если она представлена с помощью некоторых множеств и отношений принадлежности к ним и между ними.

Модель ***графовая***, если она представлена графом или графами и отношениями между ними.

По содержанию вероятностных компонентов модели делятся на детерминированные и стохастические.

Если модель не содержит вероятностных (стохастических) компонентов, она называется ***детерминированной***.

Однако множество систем моделируются с несколькими случайными входными величинами, в результате чего создается ***стохастическая*** (***вероятностная***) модель. Стохастические модели выдают результат, который является случайным сам по себе, и поэтому он может рассматриваться как оценка истинных характеристик модели [5].

1.2.2. Классификация моделей по степени устойчивости

Все модели могут быть разделены на устойчивые и неустойчивые.

Устойчивой является такая система, которая, будучи выведена из своего исходного состояния, стремится к нему. Она может колебаться некоторое время около исходной точки подобно обычному маятнику, приведенному в движение, но возмущения в ней со временем затухают и исчезают.

В ***неустойчивой*** системе, находящейся первоначально в состоянии покоя, возникшее возмущение усиливается, вызывая увеличение значений соответствующих переменных или их колебания с возрастающей амплитудой.

1.2.3. Классификация моделей по отношению к внешним факторам

По отношению к внешним факторам модели могут быть разделены на открытые и замкнутые.

Замкнутой моделью является модель, которая функционирует вне связи с внешними (экзогенными) переменными. В замкнутой модели изменения значений переменных во времени определяются внутренним взаимодействием самих переменных. Замкнутая модель может выявить поведение системы без ввода внешней переменной. Пример: информационные системы с обратной связью являются замкнутыми системами. Это самонастраивающиеся системы, и их характеристики вытекают из внутренней структуры и взаимодействий, которые отражают ввод внешней информации.

Модель, связанная с внешними (экзогенными) переменными, называется ***открытой***.

1.2.4. Классификация моделей по отношению ко времени

Существуют две классификации моделей по отношению к временному фактору. Модели могут быть:

- непрерывными или дискретными;

- статическими или динамическими.

Непрерывная модель описывает систему во времени с помощью представления, в котором переменные состояния меняются непрерывно по отношению ко времени. Примером непрерывной модели является сложная система дифференциальных уравнений, которые устанавливают отношения для скоростей изменения переменных состояния во времени. В ***дискретной*** модели значения переменных можно определить только в конкретные моменты времени [1].

По отношению к временному фактору модели делятся на динамические и статические.

Статическая модель в каждый момент времени дает лишь «фотографию» системы, ее временной срез. Одним из видов статических моделей являются структурные модели.

Динамической моделью называется модель, если среди ее параметров есть временной параметр, т.е. она отображает систему (процессы в системе) во времени.

1.3. Этапы разработки модели

Процесс моделирования имеет итерационный характер, проводится в рамках ранее сформулированных целей и с соблюдением границ моделирования. Построение начинается с изучения (обследования) реальной системы, ее внутренней структуры и содержания взаимосвязей между ее элементами, а также внешних воздействий, и завершается разработкой модели.

Моделирование – от постановки задачи до получения результатов – проходит следующие этапы.

Этап I. Анализ требований и проектирование.

Данный этап включает:

1. Постановку и анализ задачи и цели моделирования.
2. Сбор и анализ исходной информации об объекте моделирования.
3. Построение концептуальной модели.
4. Проверку достоверности концептуальной модели.

Этап II. Разработка модели, включает:

1. Выбор среды моделирования.
2. Составление логической модели.
3. Назначение свойств модулям модели.
4. Задание модельного времени.
5. Верификация модели.

Этап III. Проведение эксперимента, включает:

1. Запуск модели, прогон модели.
2. Варьирование параметров модели и сбор статистики.
3. Анализ результатов моделирования.

Заключительный этап - *подведение итогов моделирования согласно поставленной цели и задачи моделирования*.

Схема этапов моделирования представлена на рис. 1.1.

Рис. 1.1. Схема этапов моделирования

При разработке конкретных моделей с определенными целями и границами моделирования необязательно все подэтапы должны выполняться.

На первом этапе моделирования формулируется концептуальная модель, строится ее формальная схема и решается вопрос об эффективности и целесообразности моделирования системы.

Концептуальная модель (***КМ***) – это абстрактная модель, определяющая состав и структуру системы, свойства элементов и причинно-следственные связи, присущие анализируемой системе и существенные для достижения целей моделирования. В таких моделях обычно в словесной форме приводятся сведения о природе и параметрах (характеристиках) элементарных явлений исследуемой системы, о виде и степени взаимодействия между ними, о месте и значении каждого элементарного явления в общем процессе функционирования системы. При создании КМ практически параллельно формируется область исходных данных (информационное пространство системы) - этап подготовки исходных данных. На данном этапе выявляются количественные характеристики (параметры) функционирования системы и ее элементов, численные значения которых составят исходные данные для моделирования. Очевидно, что значительная часть параметров системы – это случайные величины, поэтому особое значение при формировании исходных данных имеют выбор законов распределения случайных величин, аппроксимация функций и т.д. В результате выявления свойств модели и построения концептуальной модели необходимо проверить адекватность модели.

На втором этапе моделирования происходит уточнение или выбор программного пакета моделирования. Выбор средств моделирования: программные и технические средства выбираются с учетом ряда критериев. Непременное условие при этом - достаточность и полнота средств для реализации концептуальной модели. Среди других критериев можно назвать доступность, простоту и легкость освоения, скорость и корректность создания программной модели.

После выбора среды проектирования концептуальная модель, сформулированная на предыдущем этапе, воплощается в компьютерную модель, т.е. решается проблема алгоритмизации и детализации модели.

Модель системы представляется в виде совокупности частей (элементов, подсистем). В эту совокупность включаются все части, которые обеспечивают сохранение целостности системы, с одной стороны, а, с другой, – достижение поставленных целей моделирования (получения необходимой точности и достоверности результатов при проведении компьютерных экспериментов над моделью). В дальнейшем производится окончательная детализация, локализация (выделение системы из окружающей среды), структуризация (указание и общее описание связей между выделенными элементами системы), укрупненное описание динамики функционирования системы и ее возможных состояний.

Введем понятие модельного времени. В компьютерной модели переменная, обеспечивающая текущее значение модельного времени, называется ***часами модельного времени***.

Существует два основных подхода к продвижению модельного времени [1]:

- продвижение времени от события к событию;
- продвижение времени с постоянным шагом.

Подход, использующий продвижение времени в модели от события к событию, применяется всеми основными компьютерными программами и большинством разработчиков, создающих свои модели на универсальных языках (рис. 1.2) [1].

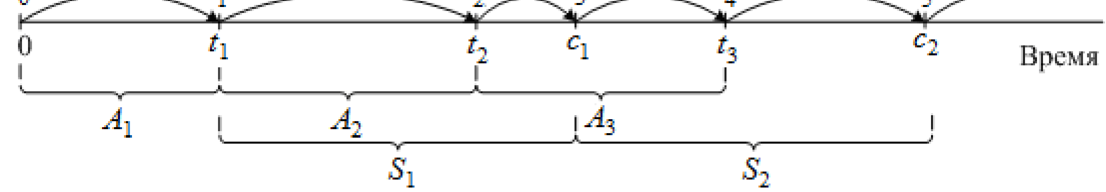

Рис. 1.2. Механизм продвижения модельного времени от события к событию

При использовании продвижения времени от события к событию часы модельного времени в исходном состоянии устанавливаются в 0, и определяется время возникновения будущих событий. После этого часы модельного времени переходят на время возникновения ближайшего события, и в этот момент обновляются состояние системы, с учетом произошедшего события, а также сведения о времени возникновения будущих событий. Затем часы модельного времени продвигаются ко времени возникновения следующего нового ближайшего события, обновляется состояние системы и определяется время будущих событий и т.д. Процесс продвижения модельного времени от времени возникновения одного события ко времени возникновения другого продолжается до тех пор, пока не будет выполнено какое-либо условие останова, указанное заранее. Поскольку в дискретно-событийной имитационной модели все изменения происходят только во время возникновения событий, периоды бездействия системы просто пропускаются, и часы переводятся со времени возникновения одного события на время возникновения другого. При продвижении времени с постоянным шагом такие периоды бездействия не пропускаются, что приводит к большим затратам компьютерного времени. Следует отметить, что длительность интервала продвижения модельного времени от одного события к другому может быть различной [1].

При продвижении времени с постоянным шагом Δt часы модельного времени продвигаются точно на Δt единиц времени для какого-либо соответствующего выбора значения Δt. После каждого обновления часов выполняется проверка, чтобы определить, произошли какие-либо события в течение предыдущего интервала времени Δt или нет. Если на этот интервал запланированы одно или несколько событий, считается, что данные события происходят в конце интервала, после чего состояние системы и статистические счетчики соответствующим образом обновляются. Продвижение времени посредством постоянного шага показано на рис. 1.3, где изогнутые стрелки показывают продвижение часов модельного времени, а e_i (i=1,2,...) - это действительное время возникновения события i любого типа, а не значение часов модельного времени. На интервале $[0, \Delta t)$ событие происходит в момент времени e_1, но оно рассматривается как произошедшее в момент времени Δt. На интервале $[\Delta t, 2\Delta t)$ события не происходят, но все же модель выполняет проверку, чтобы убедиться в этом. На интервале $[2\Delta t, 3\Delta t)$ события происходят в моменты времени e_2 и e_3, однако считается, что они произошли в момент времени $3\Delta t$ и т.д. В ситуациях, когда принято считать, что два или несколько событий происходят в одно и то же время, необходимо применение ряда правил, позволяющих определять, в каком порядке обрабатывать события. Таким образом, продвижение времени посредством постоянного шага имеет два недостатка: возникновение ошибок, связанных с обработкой событий в конце интервала, в течение которого они происходят, а также необходимость решать, какое событие обрабатывать первым, если события, в действительности происходящие в разное время, рассматриваются как одновременные. Подобного рода проблемы можно частично решить, сделав интервалы Δt менее продолжительными, но тогда возрастает число проверок возникновения событий, что приводит к увеличению времени выполнения задачи. Принимая во внимание это обстоятельство, продвижение времени с помощью постоянного шага не используют в дискретно-событийных имитационных моделях, когда интервалы времени между последовательными событиями могут значительно отличаться по своей продолжительности [1].

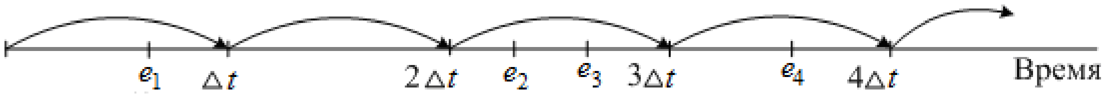

Рис.1.3. Пример продвижения модельного времени посредством постоянного шага

В основном этот подход предназначен для систем, в которых можно допустить, что все события в действительности происходят в один из моментов n времени Δt (n=0,1,2,...) для соответственно выбранного Δt. Следует заметить, что продвижение времени посредством постоянного шага может быть выполнено с помощью механизма продвижения времени от события к событию, если планировать время возникновения событий через Δt единиц времени, т.е. данный подход является разновидностью механизма продвижения времени от события к событию. Третий этап является решающим, на котором, благодаря процессу имитации моделируемой системы, происходит сбор необходимой информации, ее статической обработки в интерпретации результатов моделирования, в результате чего принимается решение: либо исследование будет продолжено, либо закончено. Если известен результат, то можно сравнить его с полученным результатом моделирования. Полученные выводы часто способствуют проведению дополнительной серии экспериментов, а иногда и изменению модели. Основой для выработки решения служат результаты тестирования и экспериментов. Если результаты не соответствуют целям моделирования (реальному объекту или процессу), значит допущены ошибки на предыдущих этапах или входные данные не являются лучшими параметрами в изучаемой области, поэтому разработчик возвращается к одному из предыдущих этапов. На заключительном этапе моделирования проводят оценку проделанной работы, сопоставляют поставленные цели с полученными результатами и создают окончательный отчет по выполненной работе.

1.4 Типовые математические схемы моделирования

В процессе создания математической модели, реализуемой на компьютере, происходит переход от содержательного описания к формальному алгоритму. Промежуточным звеном между ними может служить ***математическая схема.*** Существует ряд типовых математических схем, которые могут лечь в основу разрабатываемого конкретного моделирующего алгоритма.

К ним относятся следующие схемы (модели) [2,3]:

• непрерывно-детерминированные модели (D-схемы);

• дискретно-детерминированные модели (F-схемы);

• дискретно-стохастические модели (P-схемы);

• непрерывно-стохастические модели (Q-схемы).

К ***непрерывно-детерминированным моделям*** относятся модели, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных. В качестве независимой переменной, от которой зависят неизвестные искомые функции, обычно служит время. Тогда вектор-функция искомых переменных будет непрерывной. Математические схемы такого вида отражают динамику изучаемой системы и поэтому называются D-схемами (англ. dynamic).

К ***дискретно-детерминированным моделям*** относятся так называемые конечные автоматы. Автомат можно представить как некоторое устройство, на которое подаются входные сигналы и снимаются выходные и которое может иметь некоторые внутренние состояния. У конечного автомата множество входных сигналов и внутренних состояний является конечным множеством. Название F-схема происходит от английских слов finite automata.

К ***дискретно-стохастическим моделям*** относятся вероятностные (стохастические) автоматы или по-английски probabilistic automat. Отсюда название - P-схема. В общем виде вероятностный автомат можно определить как дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти в нем и может быть описано стохастически.

2. Типовые математические модели

В первом разделе пособия рассмотрена классификация моделей и определены два класса моделей – аналитические и имитационные. С развитием последних область применения аналитических моделей сократилась. Однако актуальность такого моделирования сохраняется для систем, особенно тех, в которых протекают так называемые процессы без последействия. Процессы без последействия находят место при функционировании многих технических систем, в том числе телекоммуникационных систем . Впервые один из типов такого процесса ввел в научный обиход и исследовал отечественный математик А. А. Марков, поэтому процессы без последействия и системы, в которых они протекают, названы марковскими. Популярность марковских моделей состоит в том, что они могут быть применены и к системам с последействием, которые с помощью некоторых ухищрений можно трактовать как марковские.

В данном разделе рассматриваются элементы теории марковских процессов и ряд аналитических моделей, в основе которых лежит допущение о марковости протекающих в моделируемых объектах процессов. К таковым, в первую очередь, относится широкий класс самых разнообразных объектов, имеющих общее название систем массового обслуживания (СМО). Заметим, что для ряда современных сложных СМО аналитическое моделирование неприемлемо в силу недостаточности адекватных математических средств. В этих случаях следует применять имитационное моделирование, которое детально рассматривается в следующих темах.

2.1. Моделирование по схеме марковских процессов

Наиболее полное исследование процесса функционирования систем получается, если известны явные математические зависимости, связывающие искомые показатели с начальными условиями, параметрами и переменными исследуемой системы. Для многих современных систем, являющихся объектами моделирования, такие математические зависимости отсутствуют или малопригодны, и следует применять другое моделирование, как правило, имитационное. Однако есть ряд конкретных математических схем, проверенных практикой и доказавших эффективность моделированием. Целью изучения настоящей темы является освоение таких математических моделей.

В инженерной практике часто возникает задача моделирования процессов случайной смены состояний в исследуемом объекте. Применительно к вычислительным системам нас интересуют, прежде всего, дискретные состояния.

Случайный процесс называется ***марковским***, если вероятность перехода системы в новое состояние зависит только от состояния системы в настоящий момент и не зависит от того, когда и каким образом система перешла в это состояние [1-5].

Практически любой случайный процесс является марковским или может быть сведен к марковскому. В последнем случае достаточно в понятие состояния включить всю предысторию смен состояний системы.

Марковские процессы делятся на два основных класса:

- дискретные марковские процессы (марковские цепи);
- непрерывные марковские процессы.

Дискретной марковской цепью называется случайный процесс, при котором смена дискретных состояний происходит в определенные моменты времени. ***Непрерывным марковским процессом*** называется случайный процесс, при котором смена дискретных состояний происходит в случайные моменты времени.

Рассмотрим ситуацию, когда моделируемый процесс обладает следующими особенностями. Система S имеет n возможных состояний: $S_1, S_2, ..., S_n$. Вообще говоря, число состояний может быть бесконечным.

Однако модель, как правило, строится для конечного числа состояний. Смена состояний происходит, будем считать, мгновенно и в строго определенные моменты времени t_i, $i = 1,2,\ldots$. Известны вероятности перехода p_{ij} системы за один шаг из состояния S_i в состояние S_j. Требуется определить вероятности состояний системы после $k-$го шага. Обозначим эти вероятности $p_j(k)$, $j = \overline{1,n}$.

Марковская цепь называется ***однородной***, если переходные вероятности p_{ij} от времени не зависят, то есть от шага к шагу не меняются. В противном случае, то есть если переходные вероятности $p_{ij}(t)$ зависят от времени, марковская цепь называется ***неоднородной***.

Значения p_{ij} обычно сводятся в матрицу переходных вероятностей:

$$\left\| p_{ij} \right\| = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

Математической моделью нахождения вероятностей состояний однородной марковской цепи является рекуррентная зависимость:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)\, p_{ij},$$

где $p_j(k)$ - вероятность j-го состояния системы после k-го шага, $j = \overline{1,n}$; $p_i(k-1)$ - вероятность i-го состояния системы после $(k-1)$-го шага, $i = \overline{1,n}$; n - число состояний системы.

Для неоднородной марковской цепи вероятности состояний системы находятся по формуле:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)\, p_{ij}^{(k)},$$

где $p_{ij}^{(k)}$ - значения переходных вероятностей для k-го шага.

Сформулируем методику моделирования по схеме дискретных марковских процессов (марковских цепей).

1. Зафиксировать исследуемое свойство системы. Определение свойства зависит от цели исследования. Например, если исследуется загрузка системы, то в качестве свойства выбирается занятость.

2. Определить конечное число возможных состояний системы и убедиться в правомерности моделирования по схеме дискретных марковских процессов.

3. Составить и разметить граф состояний.

4. Определить начальное состояние.

5. По рекуррентной зависимости определить искомые вероятности.

В рамках изложенной методики моделирования исчерпывающей характеристикой поведения системы является совокупность вероятностей $p_j(k)$. При неоднородном марковском процессе переходная вероятность $p_{ij}^{(k)}$ представляет собой условную вероятность перехода $p_{ij}^{(k)} = P\left\{S_j^{(k)} \mid S_i^{(k)}\right.$, зависящую от k - очередного временного шага.

Телекоммуникационные системы, как правило, меняют свои состояния в случайные моменты времени t. Как и в предыдущем случае в этих системах рассматривается процесс с дискретными состояниями $S_1, S_2, ..., S_n$.

Чтобы определить вероятности состояния системы $p_i(t)$ для любого момента времени t необходимо воспользоваться математическими моделями марковских процессов с непрерывным временем (непрерывных марковских процессов).

При моделировании состояния систем с непрерывными марковскими процессами мы уже не можем воспользоваться переходными вероятностями p_{ij}, так как вероятность "перескока" системы из одного состояния в другое точно в момент времени t равна нулю (как вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины).

Поэтому вместо переходных вероятностей вводятся в рассмотрение интенсивность переходов:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t},$$

где $p_{ij}(\Delta t)$ - вероятность того, что система, находившаяся в момент времени t в состоянии S_i за время Δt, перейдет в состояние S_j.

С точностью до бесконечно малых второго порядка из приведенной формулы можно представить:

$$p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \Delta t.$$

Непрерывный марковский процесс называется однородным, если плотности вероятностей переходов λ_{ij} не зависят от времени t (от момента начала промежутка t). В противном случае непрерывный марковский процесс называется неоднородным.

Целью моделирования, как и в случае дискретных процессов, является определение вероятностей состояний системы $p_i(t)$. Эти вероятности находятся интегрированием системы дифференциальных уравнений Колмогорова.

Сформулируем методику моделирования по схеме непрерывных марковских процессов:

1. Определить состояния системы и плотности вероятностей переходов λ_{ij}.

2. Составить и разметить граф состояний.

3. Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Число уравнений в системе равно числу состояний. В левой части уравнения записывается производная вероятности i-го состояния $\dfrac{dp_i(t)}{dt}$. В правой части записывается алгебраическая сумма произведений $\lambda_{ij} p_j(t)$ и $-\lambda_{ij} p_j(t)$.

4. Определить начальные условия и решить систему дифференциальных уравнений.

Однородный марковский процесс с непрерывным временем можно трактовать как процесс смены состояний под влиянием некоторого потока событий. То есть плотность вероятности перехода можно трактовать как интенсивность потока событий, переводящих систему из i-го состояния в j-е. Такими потоками событий являются отказы техники, вызовы на телефонной станции и т.п.

При исследовании сложных объектов всегда интересует: возможен ли в исследуемой системе установившейся (стационарный) режим? То есть, как ведет себя система при $k \to \infty (t \to \infty)$? Существуют ли предельные значения $p_i(k), p_i(t)$? Как правило именно эти предельные значения интересуют исследователя.

Ответ на данный вопрос дает теорема Маркова. Если для однородного дискретного марковского процесса с конечным или счетным числом состояний все $p_{ij} > 0$, то предельные значения $p_i(k)$ существуют и их значения не зависят от выбранного начального состояния системы. Применительно к непрерывным марковским процессам теорема Маркова трактуется так: если процесс однородный и из каждого состояния возможен переход за конечное время в любое другое состояние и число состояний счетно или конечно, то предельные значения $p_i(t)$ существуют и их значения не зависят от выбранного начального состояния. Например (см. рис. 2.1), в системе А стационарный режим есть, а в системе В стационарного режима нет, т.е., если система окажется в состоянии S_4, она не сможет перейти ни в какое другое состояние.

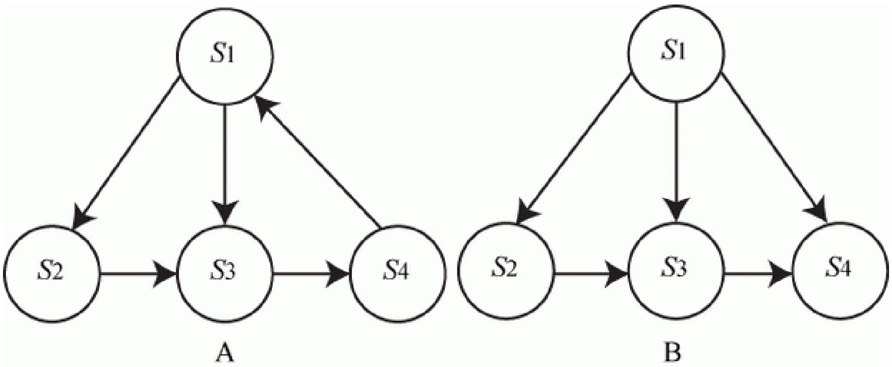

Рис. 2.1. Примеры графов состояний систем с различными режимами

Рассмотрим иллюстрирующие примеры применения марковских моделей к моделированию эшелонированных систем защиты информации в телекоммуникационных системах и сетях (ТКСС). Анализ физической сущности процессов преодоления системы эшелонированной защиты информации позволяет сделать вывод, что данный процесс относится к вероятностным, имеет конечное число дискретных состояний (равное числу преград плюс единица), время преодоления каждой из преград является случайной величиной (в общем случае распределенной по неизвестному закону). Все события в процессе преодоления защиты совершаются в некоторые дискретные моменты времени (шаги), причем ограничений на длительность шага не накладывается. Переход из одного состояния в другое происходит с некоторой вероятностью, которая зависит только от того, в каком состоянии система находилась на предыдущем шаге. Таким образом, процесс преодоления эшелонированной системы защиты информации, в общем случае немарковский, можно представить марковским процессом.

Будем полагать, что средства защиты различных эшелонов неоднородны, попытки преодоления одного и того же средства защиты в одном эшелоне независимы.

Простая марковская модель эшелонированной системы защиты (см. рис. 2.2) строится исходя из следующих ограничений:

- преодоление очередного эшелона защиты возможно только после преодоления предыдущего;
- преодоленные средства защиты не восстанавливаются.

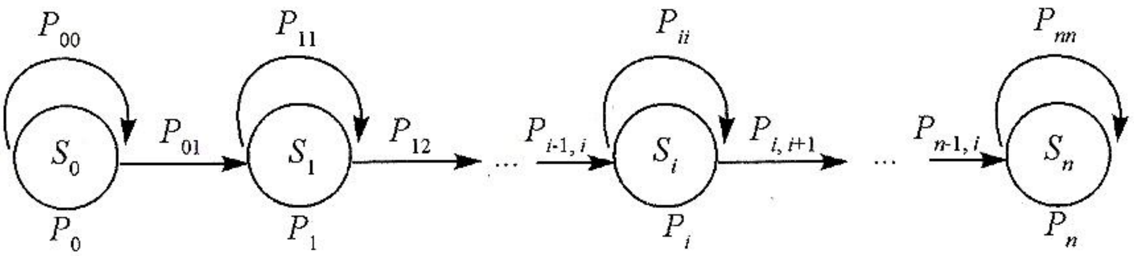

Рис. 2.2. Простая марковская модель эшелонированной системы защиты

Состояния, указанные на графе, имеют следующее содержание: S_0 - злоумышленник осуществляет попытку преодоления внешней преграды (внешнего эшелона); S_1 - злоумышленник преодолел внешнюю преграду и предпринимает попытку преодоления второго эшелона защиты; S_i - злоумышленник преодолел $i-$й эшелон защиты и предпринимает попытку преодоления $(+1)$-го эшелона защиты; S_n - злоумышленник преодолел последний эшелон защиты (поглощающее состояние).

Матрица вероятностей перехода марковской модели, представленной на рис. 2.2 имеет вид:

$$\left\|p_{ij}\right\| = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & & & & & \\ 0 & p_{11} & p_{12} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_{ii} & p_{ii+1} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если в системе защиты информации реализована возможность восстановления преодоленных эшелонов защиты, то рассмотренная модель преобразуется в марковскую модель эшелонированной системы защиты с восстановлением (см. рис. 2.3).

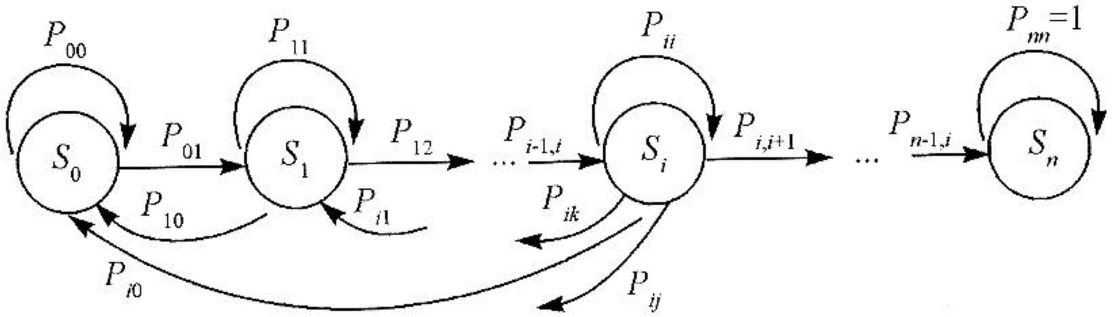

Рис. 2.3. Марковская модель эшелонированной системы защиты с восстановлением

В случае, когда не удается построить «круговую» систему защиты информации, т.е. полностью перекрыть все информационные каналы, используется очаговая система защиты, модель которой представлена на рис. 2.3а.

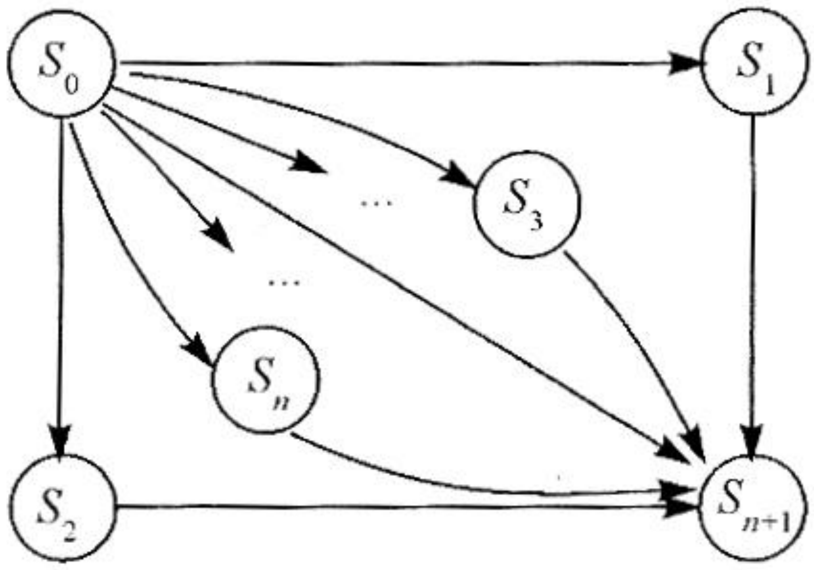

Рис. 2.3а. Марковская модель очаговой системы защиты

Поток событий в однородных непрерывных марковских процессах характеризуется экспоненциальным законом распределения случайных интервалов времени между событиями. Такой поток называют ***простейшим*** или ***стационарным пуассоновским***. Простейший поток обладает свойствами:

- ***стационарности***, что означает независимость характеристик потока от времени;
- ***ординарности***, что означает практическую невозможность появления двух и более событий одновременно;
- ***отсутствия последействия***, об этом говорилось в начале темы.

2.2. Модели систем массового обслуживания

При рассмотрении телекоммуникационных систем часто возникает ряд однотипных задач: оценка пропускной способности системы связи; оценка эффективности системы; определение количества частот для радиосети и др.

Все эти задачи однотипны в том смысле, что в них присутствует массовый спрос на обслуживание. В удовлетворении этого спроса участвует определенная совокупность элементов, образующая систему массового обслуживания (СМО) (см. рис. 2.4).

Элементами СМО являются:

- входной (входящий) поток требований (заявок) на обслуживание;
- приборы (каналы) обслуживания;
- очередь заявок, ожидающих обслуживания;
- выходной (выходящий) поток обслуженных заявок;
- поток не обслуженных заявок;
- очередь свободных каналов (для многоканальных СМО).

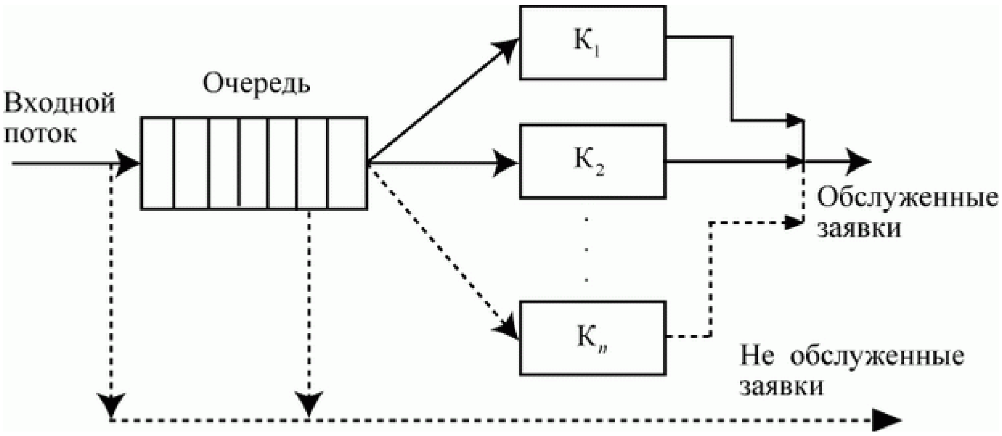

Рис. 2.4. Система массового обслуживания

Входящий поток - это совокупность заявок на обслуживание. Часто заявка отождествляется с ее носителем.

Как правило, на практике имеют дело с так называемыми рекуррентными потоками, потоками, обладающими свойствами: стационарности; ординарности; ограниченного последействия. Первые два свойства мы определили ранее. Что касается ограниченного последействия, то оно заключается в том, что интервалы между поступающими заявками являются независимыми случайными величинами. Рекуррентных потоков много. Каждый закон распределения интервалов порождает свой рекуррентный поток. Рекуррентные потоки иначе называют потоками Пальма.

Поток с полным отсутствием последействия, как уже отмечалось, называется стационарным пуассоновским. У него случайные интервалы между заявками имеют экспоненциальное распределение:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \ f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

где λ - интенсивность потока.

Название потока - пуассоновский - происходит от того, что для этого потока вероятность $p_k(\Delta t)$ появления k заявок за интервал Δt определяется законом Пуассона:

$$p_k(\Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda \Delta t}.$$

Поток такого типа, как отмечалось ранее, называют также простейшим. Именно такой поток предполагают проектировщики при разработке СМО. Вызвано это тремя причинами. Во-первых, поток этого типа в теории массового обслуживания аналогичен нормальному закону распределения в теории вероятностей в том смысле, что к простейшему потоку приводит предельный переход для потока, являющегося суммой потоков с произвольными характеристиками при бесконечном увеличении слагаемых и уменьшении их интенсивности. То есть сумма произвольных независимых (без преобладания) потоков с интенсивностями λ_i является простейшим потоком с интенсивностью $\lambda = \sum_i \lambda_i$. Во-вторых, если обслуживающие каналы (приборы) рассчитаны на простейший поток заявок, то обслуживание других типов потоков (с той же интенсивностью) будет обеспечено с не меньшей эффективностью. В-третьих, именно такой поток определяет марковский процесс в системе и, следовательно, простоту аналитического анализа системы. При других потоках анализ функционирования СМО сложен.

Часто встречаются системы, у которых поток входных заявок зависит от количества заявок, находящихся в обслуживании. Такие СМО называют ***замкнутыми***, иначе - ***разомкнутыми***. Заявки могут иметь разные права на начало обслуживания. В этом случае говорят, что заявки ***неоднородные***. Преимущества одних потоков заявок перед другими задаются шкалой приоритетов. Важной характеристикой входного потока является ***коэффициент вариации***:

$$\nu = \frac{\sigma}{\bar{\tau}_{инт}},$$

где $\bar{\tau}_{инт}$ - математическое ожидание длины интервала; σ - среднеквадратическое отклонение случайной величины (длины интервала) $\tau_{инт}$. Для простейшего потока $\bar{\tau}_{инт} = \frac{1}{\lambda}$, $\sigma = \frac{1}{\lambda}$, $\nu = 1$. Для большинства реальных потоков $0 \le \nu \le 1$. При $\nu = 0$ поток регулярный, детерминированный. Коэффициент вариации - характеристика, отражающая степень неравномерности поступления заявок.

Каналы обслуживания. В СМО могут быть один или несколько обслуживающих каналов. Согласно с этим СМО называют одноканальными или многоканальными. ***Многоканальные*** СМО могут состоять из однотипных или разнотипных каналов. Обслуживающими каналами могут быть линии связи; взлетно-посадочные полосы; транспортные средства и др. Основная характеристика канала - время обслуживания. Как правило, время обслуживания - величина случайная. Обычно практики полагают, что время обслуживания имеет экспоненциальный закон распределения, в котором $\lambda = \frac{1}{\bar{\tau}_{обсл}}$ - интенсивность обслуживания; $\bar{\tau}_{обсл}$ - математическое ожидание времени обслуживания.

Кроме экспоненциального встречаются распределение Эрланга, гиперэкспоненциальное, треугольное и некоторые другие. Это не должно смущать, так как уже сказано, что значение критериев эффективности СМО мало зависят от вида закона распределения вероятностей времени обслуживания.

При исследовании СМО выпадает из рассмотрения сущность обслуживания, качество обслуживания. Каналы могут быть ***абсолютно***

надежными, то есть не выходить из строя. Вернее, так может быть принято при исследовании. Каналы могут обладать ***конечной надежностью***. В этом случае модель СМО значительно сложнее.

Очередь заявок. В силу случайного характера потоков заявок и обслуживания пришедшая заявка может застать канал (каналы) занятым обслуживанием предыдущей заявки. В этом случае она либо покинет СМО не обслуженной, либо останется в системе, ожидая начало своего обслуживания. В соответствии с этим различают: СМО с отказами; СМО с ожиданием.

СМО с ожиданием характеризуются наличием очередей. Очередь может иметь ограниченную или неограниченную емкость $1 \le L < \infty$. Исследователя обычно интересуют такие статистические характеристики, которые связанные с пребыванием заявок в очереди:

- среднее количество заявок в очереди за интервал исследования;
- среднее время пребывания (ожидания) заявки в очереди.

СМО с ограниченной емкостью очереди относят к СМО смешанного типа. Нередко встречаются СМО, в которых заявки имеют ***ограниченное время пребывания в очереди*** независимо от ее емкости. Такие СМО также относят к СМО смешанного типа.

Выходящий поток - это поток обслуженных заявок, покидающих СМО. Встречаются случаи, когда заявки проходят через несколько СМО, например, транзитная связь. В этом случае выходящий поток является входящим для следующей СМО. Совокупность последовательно связанных между собой СМО называют ***многофазными СМО*** или ***сетями СМО***.

Входящий поток первой СМО, пройдя через последующие СМО, искажается и это затрудняет моделирование. Однако следует иметь в виду, что при простейшем входном потоке и экспоненциальном обслуживании (то есть в марковских системах) выходной поток тоже простейший. Если время обслуживания имеет не экспоненциальное распределение, то выходящий поток не только не простейший, но и не рекуррентный.

Заметим, что интервалы между заявками выходящего потока, это не то же самое, что интервалы обслуживания. Ведь может оказаться, что после окончания очередного обслуживания СМО какое-то время простаивает из-за отсутствия заявок. В этом случае интервал выходящего потока состоит из времени незанятости СМО и интервала обслуживания первой, пришедшей после простоя, заявки.

В системах с отказами есть поток необслуженных заявок. Если в СМО с отказами поступает рекуррентный поток, а обслуживание - экспоненциальное, то и поток необслуженных заявок - рекуррентный.

Очереди свободных каналов. В многоканальных СМО могут образовываться очереди свободных каналов. Количество свободных каналов - величина случайная. Исследователя могут интересовать различные характеристики этой случайной величины. Обычно это среднее число каналов, занятых обслуживанием за интервал исследования.

Таким образом, по признакам, влияющим на функционирование, СМО может принадлежать к одному из типов в соответствии с приводимой классификацией (см. рис. 2.5).

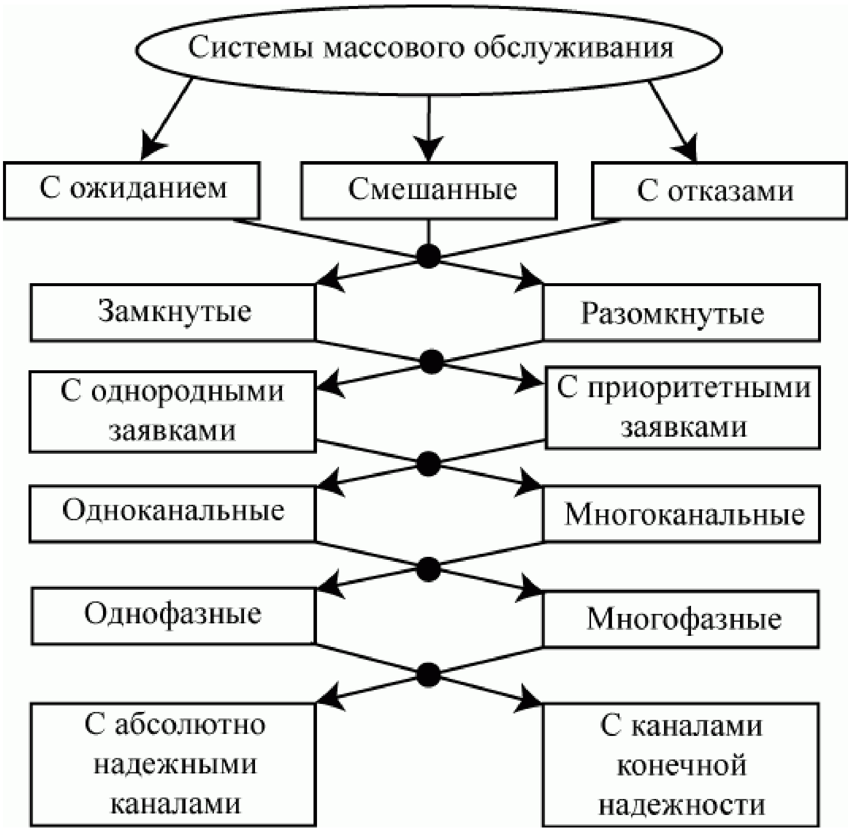

Рис. 2.5. Классификация СМО

Для обозначения простых (однофазных) СМО используется символика, предложенная Кендаллом: $A/B/n/m$.

A- входящий поток заявок: $A = GI$ - рекуррентный поток; $A = M$ - простейший поток с показательным законом распределения вероятностей; $A = D$ - регулярный или детерминированный поток (с постоянными интервалами между моментами поступления заявок).

B - случайная длительность обслуживания: $B = G$ или $B = GI$ - рекуррентное обслуживание с одной и той же функцией распределения $B(t)$ для разных каналов; $B = M$ - показательное обслуживание; $B = D$ - регулярное обслуживание.

n - количество обслуживающих каналов. Если $n < 1$, то система называется многоканальной.

m - количество мест для ожидания заявок в очереди. Если $m = 0$, то СМО с потерями (без ожидания); $m = \infty$ - система с неограниченным ожиданием; $0 < m < \infty$ - система с ограниченным числом мест для ожидания.

Под операцией в СМО понимают комплекс мероприятий по обслуживанию входящего потока заявок на интервале времени T.

В зависимости от типа системы показателями исхода операции или эффективности системы массового обслуживания являются следующие.

Для СМО с отказами:

- ***абсолютная пропускная способность*** (Q) - среднее число заявок, обслуживаемое системой за время T;
- ***относительная пропускная способность*** (q)- средняя доля поступивших заявок, обслуживаемая системой (отношение среднего числа обслуженных заявок к среднему числу поступивших за время T);
- ***среднее число занятых каналов*** $(n_з)$;
- ***коэффициент занятости (использования) каналов*** ($K_и = \frac{\bar{n}_з}{n}$, где n - число каналов в системе);
- ***коэффициент простоя каналов*** $(K_п = 1 - K_и)$.

Для СМО с неограниченным ожиданием как абсолютная, так и относительная пропускная способности теряют смысл, так как каждая поступившая заявка рано или поздно будет обслужена. Для такой СМО важными показателями являются:

- ***среднее число заявок в очереди*** $(\bar{l}_{оч})$;
- ***среднее число заявок в системе*** (в очереди и на обслуживании, $\bar{l}_с$);
- ***среднее время ожидания заявки в очереди*** $(\bar{t}_{ож})$;
- ***среднее время пребывания заявки в системе*** (в очереди и на обслуживании, $\bar{t}_с$);
- ***коэффициенты использования и простоя каналов***;
- ***среднее число свободных и занятых каналов*** $(\bar{n}_с, \bar{n}_з)$.

Для СМО смешанного типа используются обе группы показателей: как относительная и абсолютная пропускная способности, так и характеристики ожидания.

В зависимости от цели операции массового обслуживания любой из приведенных показателей (или совокупность показателей) может быть выбран в качестве критерия эффективности.

Аналитической моделью СМО является совокупность уравнений или формул, позволяющих определять вероятности состояний системы в процессе ее функционирования и рассчитывать показатели эффективности по известным характеристикам входящего потока и каналов обслуживания. Всеобщей аналитической модели для произвольной СМО не существует. Аналитические модели разработаны для ограниченного числа частных случаев СМО. Аналитические модели более или менее точно отображающие реальные системы, как правило, сложны и труднообозримы. Аналитическое моделирование СМО существенно облегчается, если процессы, протекающие в СМО, марковские (потоки заявок простейшие, времена обслуживания распределены экспоненциально). В этом случае все процессы в СМО можно описать обыкновенными дифференциальными уравнениями, а в предельном случае, для стационарных состояний - линейными алгебраическими уравнениями и, решив их, определить выбранные показатели эффективности. Рассмотрим на иллюстрирующих примерах некоторые типы СМО.

2.3. Метод динамики средних

В многоэлементных системах часто целью моделирования является определение средних количеств элементов, находящихся в одинаковых состояниях. Например, в задаче о пеленгации радио-закладок злоумышленника-специалиста по информационной безопасности интересует число запеленгованных передатчиков, а не вероятности пеленгации одного передатчика, двух, трех и т.д. Но чтобы определить среднее число их, надо знать вероятности всех возможных состояний p_i, так как $\bar{n} = \sum_{i=0}^{n} p_i n_i$. Но число состояний и, следовательно, число уравнений Колмогорова может оказаться настолько большим, что вызовет непреодолимые трудности при моделировании по схеме марковских процессов.

Например, пеленгации подлежат 10 радио-закладок. Каждая из них может находиться в состояниях: S_1 - радио-закладка исправна, работает, не обнаружена; S_2 - исправна, работает, обнаружена; S_3 - работоспособна, но подавлена помехами; S_4 - обнаружена, нейтрализована.

Для определения средних численностей каждого из этих состояний пришлось бы составить 4^{10} уравнений Колмогорова. Очевидно, такое моделирование не вполне пригодно.

В исследовании операций есть метод, позволяющий успешно решать такие и аналогичные задачи. Этот метод называется ***метод динамики средних***. Метод динамики средних позволяет непосредственно определять математическое ожидание числа элементов сложной системы, находящихся в одинаковых состояниях. Метод дает приближенные результаты. Но обладает замечательным свойством: чем больше система имеет элементов и состояний, тем точнее результат математического моделирования.

Для получения расчетных формул метода предположим, что имеем дело с системой, обладающей следующими признаками:

- в системе протекает случайный марковский процесс;
- элементы системы однородны в том смысле, что состояния, их число и их вероятности - одинаковые;
- элементы меняют состояния независимо друг от друга.

Цель моделирования: определить средние количества элементов (математические ожидания) $m_i(t)$, находящихся в одинаковых состояниях S_i, и дисперсию $D_i(t)$.

Схематично такая система может быть представлена так, как показано на рис. 2.6. Система имеет N элементов, а каждый элемент имеет n состояний. Численность i-го состояния на любой момент времени - величина случайная. Обозначим ее $x_i(t)$. Математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины:

$$m_i(t) = M[x_i(t)],\ D_i(t) = D[x_i(t)].$$

В дальнейшем для лучшей обозримости формул аргумент t писать не будем.

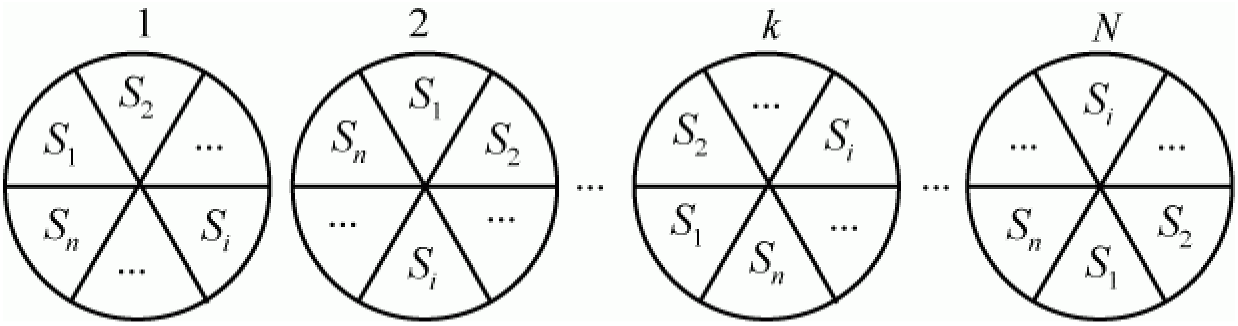

Рис. 2.6. Схематичное представление системы

Введем переменную $x^k = \{0,1\}$, причем $x^k = 1$ - если k-й элемент находится в состоянии i с вероятностью p_i, $x^k = 0$ - если k-й элемент не находится в состоянии i с вероятностью $(1 - p_i)$. Отсюда следует, что случайная величина x_i равна $x_i = \sum_{k=1}^{N} x_i^k$.

В силу однородности элементов и независимости состояний случайная величина x_i имеет биномиальное распределение (распределение Бернулли) с математическим ожиданием и дисперсией соответственно:

$$M[x_i] = Np_i,\ D[x_i] = Np_i(1 - p_i)$$

или окончательно

$$m_i = Np_i,\ D_i = Np_i(1 - p_i) = m_i\left(1 - \frac{m_i}{N}\right).$$

Равенство $m_i = Np_i$ связывает вероятность i-го состояния элемента в произвольный момент времени с математическим ожиданием численности этих состояний по всем элементам.

Система уравнений Колмогорова для одного элемента содержит n уравнений, а для всех N элементов - N^n, а метод динамики средних в n^{N-1} раз меньше. В этом и состоит выигрыш, который дает применение метода динамики средних.

Порядок моделирования с использованием метода динамики средних заключается в следующем:

1. Описать состояния одного элемента системы.
2. Составить размеченный граф состояний для одного элемента, указав рядом с каждым состоянием $S_1, S_2, ..., S_n$ средние численности состояний $m_1, m_2, ..., m_n$, полученные умножением Np_i.
3. Составить дифференциальные уравнения по следующим правилам:
   - производная средней численности состояния равна сумме стольких членов, сколько стрелок связано с данным состоянием;
   - если стрелка направлена из состояния, член имеет знак минус, если в состояние - знак плюс;
   - каждый член равен произведению интенсивности потока событий, переводящего элемент по данной стрелке, на среднюю численность того состояния, из которого исходит стрелка.
4. Решить систему дифференциальных уравнений относительно m_i.
5. Вычислить значения дисперсий D_i и среднеквадратических отклонений.

Поскольку процессы в элементах - марковские, то справедливы все рассуждения об установившихся значениях m_i, об условиях существования установившихся значений $m_i(t) = m_i$.

Полученные уравнения для m_i называют уже не уравнениями Колмогорова, а ***уравнениями динамики средних***. Поскольку они получаются из уравнений Колмогорова путем умножения всех членов на постоянное число N, то их можно писать сразу для средних численностей состояний m_i по образцу уравнений для вероятностей p_i. Рассмотрим на примере методику моделирования с использованием метода динамики средних.

Рассмотрим иллюстрирующий пример. В системе имеются 100 средств связи (СС). СС выходят из строя с интенсивностью λ_{12}. При нахождении СС в неисправном состоянии проводится его диагностика, в результате чего оно может быть отправлено в ремонтное подразделение компании (интенсивность отправки λ_{23}) либо во внешнее ремонтное подразделение сервисной компании (интенсивность отправки λ_{24}), либо списано (интенсивность списания λ_c). В ремонтном подразделении компании СС ремонтируются с интенсивностью λ_{31}, а в сервисной компании - с интенсивностью λ_{41}. СС системы пополняются с интенсивностью λ_n, в среднем равной интенсивности списания.

Требуется провести моделирование с целью определения средних численностей каждого состояния СС. Описание состояний одного средства связи: S_1 - СС исправно; S_2 - СС неисправно, производится диагностика; S_3 - СС находится на ремонте в ремонтном подразделении компании; S_4 - СС находится на ремонте в сервисной компании.

Размеченный граф состояний представлен на рис. 2.7.

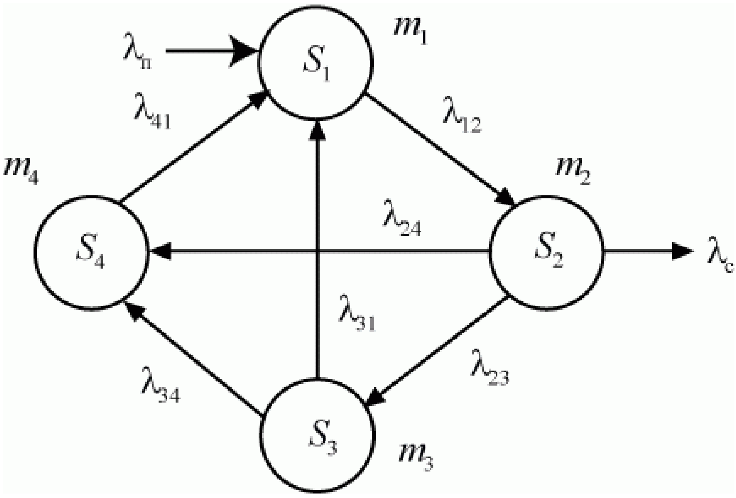

Рис. 2.7. Размеченный граф состояний системы ремонта

Каждое уравнение системы составляется по тому же правилу, что и система дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dm_1}{dt} = -\lambda_{12}m_1 + \lambda_{31}m_3 + \lambda_{41}m_2 + \lambda_{11}m_2; \\ \dfrac{dm_2}{dt} = -\lambda_{23}m_2 - \lambda_{24}m_2 - \lambda_c m_2 + \lambda_{12}m_1; \\ \dfrac{dm_3}{dt} = -\lambda_{31}m_3 + \lambda_{23}m_2; \\ \dfrac{dm_4}{dt} = -\lambda_{41}m_4 + \lambda_{24}m_2. \end{cases}$$

Численности состояний являются функциями времени. Выражение для пополняющего члена написано из условия равенства в среднем пополнения и убыли $\lambda_c m_n = \lambda_2 m_2$. Также мы не можем воспользоваться нормировочным условием $\sum_{i=1}^{4} m_i(t) = 100$, так как в силу случайного характера списания и пополнения в некоторые моменты времени оно может не выполняться. Общее число СС в системе при этом меняется со временем:

$$N(t) = N + \int_{0}^{t} \lambda_n(t)dt - \int_{0}^{t} \lambda_c(t)dt\,.$$

Решить систему дифференциальных уравнений можно методом численного интегрирования, например, Рунге-Кутта, задав начальные значения численностей состояний для момента $t = 0$: $m_1(0) = 100$, $m_2(0) = m_3(0) = m_4(0) = 0$, считая интенсивности $\lambda_{ij}, \lambda_c, \lambda_n$ известными.

Дисперсия вычисляется по формуле:

$$D_i = m_i \left(1 - \frac{m_i}{\sum_{i}^{4} m_i} \right), \; i = \overline{1,4}.$$

По дисперсии определяется среднеквадратическое отклонение численности состояний и находится диапазон возможных значений численности S_i состояния $m_i \pm 3\sigma_i$.

Метод динамики средних справедлив и для предельных значений численностей состояний. В данной задаче уравнения динамики средних - система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_{12}m_1 + \lambda_{31}m_3 + \lambda_{41}m_2 + \lambda_{11}m_2; \\ 0 = -\lambda_{23}m_2 - \lambda_{24}m_2 - \lambda_c m_2 + \lambda_{12}m_1; \\ 0 = -\lambda_{31}m_3 + \lambda_{23}m_2; \\ 0 = -\lambda_{41}m_4 + \lambda_{24}m_2. \end{cases}$$

Однако прежде чем переходить к этим уравнениям, нужно сначала убедиться, что стационарные значения m_i существуют. Здесь численности состояний m_i не являются функциями времени. Поэтому можно воспользоваться нормировочным условием.

2.4. Модели на базе теории игр

Теория игр представляет собой математический метод изучения оптимальных стратегий. Под ***игрой*** понимается процесс, в котором участвуют две и более сторон (система защиты информации и злоумышленники), ведущих борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою цель и использует некоторую стратегию, которая может вести к успеху или проигрышу - в зависимости от поведения игроков. Теория игр помогает выбрать лучшие стратегии с учётом представлений о других участниках и их возможностях.

Наиболее сложной (в смысле предотвращения) и наиболее актуальной задачей для ТКС является борьба с информационными угрозами. Предположим, что все возможные угрозы известны и представлены в виде множества $U=\{u_j \mid i=\overline{1,J}\}$. Очевидно, что угрозы, в зависимости от поведения злоумышленников, могут появляться в различных сочетаниях и поэтому введем вектор $S(k)=\{s_j(k)\}$, который характеризует состояние угроз, причем: $s_j(k)=1$, если $i-$м игроком реализована u_j угроза при проявлении вектора $S(k)$, $s_j(k)=0$ - в противном случае. Известно, что угрозы по желанию атакующей стороны могут быть адресованы тем или иным объектам r_f, $f=\overline{1,F}$ по-разному. Чтобы отразить распределение угроз по объектам, введем матрицу $\Omega(k)$, элементы которой описываются следующим образом: $\omega_{jr_f}(k)=1$ - если при проявлении вектора $S(k)$ угроза типа u_j адресуется к объекту r_f; $\omega_{jr_f}(k)=0$ - в противном случае.

Каждый тип угроз при атаке к определенному объекту в той или иной степени представляет опасность. Уровень опасности угрозы типа u_j к объекту r_f покажем через показатель p_j, который находится в пределах $0 \le p_j \le 1$.

С другой стороны, в целях защиты объектов от предполагаемых угроз ТКС имеет в своем распоряжении множество $Z=\{z_i \mid i=\overline{1,I}\}$ механизмов защиты, эффективность которых по отношению к угрозам характеризуется показателями q_i, находящимися в пределах $0 \le q_i \le 1$, $i=\overline{1,I}$. Обычно известны возможные типы угроз, но заранее не известно поведение злоумышленника, т.е. какие угрозы, для каких объектов ТКС будут инициироваться. В связи с этим, в силу определенных обстоятельств (эффективность функционирования ТКС, рациональное использование пропускной способности сети и т.д.) ТКС может задействовать различные механизмы защиты для борьбы с угрозами.

В связи с этим введем вектор состояний механизмов защиты $\Psi(k)$, элементы вектора определяются следующим образом: $\psi_z(k)=1$ - если ТКС задействовала механизм защиты $z_i \in Z$, $\psi_z(k)=0$ - в противном случае.

Для реализации игрового метода моделирования требуется определить матрицу игры, элементами которой в данном случае могут быть значения уровня ущерба ТКС, зависящие от конкретных реализаций информационных угроз злоумышленником.

Предположим, что, рассматриваемая ТКС содержит r_f, $f=\overline{1,F}$ объектов (WWW-сервер, DNS-сервер, UUCP-сервер, SMTP-сервер, FTP-сервер и т.д.), доступ к которым несанкционированным пользователям запрещен. Злоумышленник, используя современные информационные технологии, реализует информационные атаки (подмена IP-адресов, инициирование отказа в обслуживании, внедрение сетевых вирусов и т.д.) которые известны, т.е. известен $U=\{u_j \mid i=\overline{1,J}\}$. Вектор $\langle u_j, r_f \rangle$ определяет тот факт, что злоумышленник при атаке на объект r_f использует атаку типа u_j.

В целях противодействия информационным атакам ТКС задействует различные средства защиты информации (межсетевой экран, антивирусную программу, криптографические средства защиты, анализаторы пакетов и трафика и т.д.), т.е. известен $Z=\{z_i \mid i=\overline{1,I}\}$. Вектор $\langle z_i, u_j \rangle$ определяет тот факт, что ТКС задействует z_i против атаки типа u_j.

На основании известных или определенных по результатам эксплуатации значений p_j и q_i определим матрицу игры, элементами которой будут значения ущерба от реализации злоумышленником информационных атак, с учетом задействованных средств защиты:

$$\beta_{mn}=p_m(1-q_m),\ m=\overline{1,M},\ n=\overline{1,N},\ 0\le\beta_{mn}\le 1,$$

где M - множество возможных стратегий злоумышленника, т.е. множество векторов $\langle u_j, r_f \rangle$; N - множество стратегий системы защиты ТКС, т.е. множество векторов $\langle z_i, u_j \rangle$.

Требуется найти такие оптимальные стратегии системы защиты ТКС, чтобы свести к минимуму значение ущерба от реализации злоумышленником информационных атак β_{mn}:

$$n^{*}:\min_{\{n\}}\beta_{mn}.$$

Данная задача удобно решается методом итераций (метод Брауна-Робинсона). Идея метода в следующем. Разыгрывается «мысленный эксперимент», в котором стороны А и В поочередно применяют друг против друга свои стратегии, стремясь выиграть побольше (проиграть поменьше). Эксперимент состоит из ряда «партий» игры. Начинается он с того, что один из игроков (скажем, А) выбирает произвольно одну из своих стратегий a_i. Противник В отвечает ему той из своих стратегий b_j, которая обращает выигрыш А в минимум. Дальше снова очередь А - он отвечает В той своей стратегией a_k, которая дает максимальный выигрыш при стратегии противника. Дальше снова очередь В, он отвечает своей стратегией b_l. И так далее: на каждом шаге итерационного процесса каждый игрок отвечает на очередной ход другого той своей стратегией, которая является оптимальной для него относительно смешанной стратегии другого, в которую все примененные до сих пор стратегии входят пропорционально частотам их применения.

Вместо того, чтобы вычислять каждый раз средний выигрыш, можно пользоваться просто «накопленным» за предыдущие ходы выигрышем и выбирать ту свою стратегию, при которой этот накопленный выигрыш максимален (минимален). Доказано, что такой метод сходится: при увеличении числа «партий» средний выигрыш на одну партию будет стремиться к цене игры, а частоты применения стратегий - к их вероятностям в оптимальных смешанных стратегиях игроков.

На рис. 2.8 представлен граф алгоритма принятия решения по противодействию угрозам. Первым делом по данному алгоритму вводятся исходные данные мощности угроз и эффективности МЗ. Затем определяется множество стратегий злоумышленника и множество стратегий СЗИ. После этого вычисляется платежная матрица, которая показывает размер выигрыша (проигрыша) при применении определенных стратегий. На следующем этапе ППР получает из ПОУ информацию о реализуемой злоумышленником стратегии. Затем определяется стратегия защиты с учетом критерия (1). После этого можно рассчитать цену игры, а также оценить математическое ожидание и дисперсию цены игры. Здесь приведен один цикл алгоритма, который можно повторять необходимое для решения количество раз.

Рассмотрим пример. Будем считать, что в сегменте ТКС имеются два объекта. Мощность угроз известна и равняется $P = [0,9 \quad 0,6]$, а эффективность средств защиты $Q = [0,99 \quad 0,9]$.

Платежная матрица имеет вид:

$$\beta = \begin{bmatrix} 0,06000 & 0,12000 & 0,15000 & 0,08000 & 0,03000 & 0,18000 \\ 0,25000 & 0,19000 & 0,18000 & 0,05000 & 0,06000 & 0,04000 \\ 0,03000 & 0,09000 & 0,07000 & 0,08000 & 0,02000 & 0,16000 \\ 0,00096 & 0,08700 & 0,07500 & 0,09200 & 0,47840 & 0,05200 \\ 0,08900 & 0,06500 & 0,07000 & 0,10500 & 0,01700 & 0,06500 \\ 0,03400 & 0,08200 & 0,18000 & 0,04500 & 0,08000 & 0,07500 \\ 0,08500 & 0,06700 & 0,09900 & 0,96000 & 0,04800 & 0,09100 \end{bmatrix}.$$

Далее необходимо определить границы цены игры. Нижняя граница $C_{\max\min} = \max(\min \beta(a;b)) = 0,00096$, где $a = [1;7]$ - номер строки, $b = [1;6]$ - номер столбца, Верхняя граница цены игры $C_{\min\max} = \min(\max \beta(a;b)) = 0,96$, где $a = [1;7]$ - номер строки, $b = [1;6]$ - номер столбца.

Так как цена игры есть величина случайная, то следует определять ее математическое ожидание и дисперсию:

$$M(C) = m_C = \sum_t \frac{C_t}{k},$$

$$D(C) = \sigma_C^2 = \sum_t \frac{(C_t - m_C)^2}{k}.$$

где k - количество итераций, t - номер итерации.

Графики значений представлены на рис. 2.8.

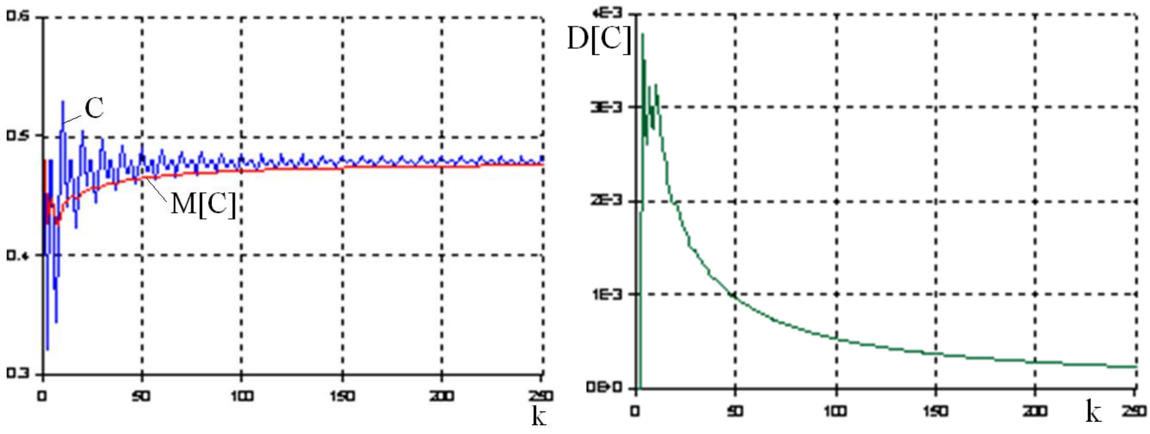

Рис. 2.8. Графики зависимости цены игры, ее математического ожидания и дисперсии от количества итераций

2.5. Модели систем искусственного интеллекта

Искусственный интеллект (ИИ) как раздел науки сформировался во второй половине XX в. на базе вычислительной техники, математической логики, программирования, психологии, лингвистики, нейрофизиологии и других отраслей знаний.

Интеллект (имеется в виду человеческий) обычно понимается в следующем смысле: обладать способностью успешно реагировать на любую, особенно новую, ситуацию путем надлежащих корректировок поведения, а также способностью понимать взаимосвязи между фактами действительности для выработки действий, ведущих к достижению поставленной цели.

В настоящее время общепринятого определения термина «искусственный интеллект» нет. Достаточно полно смысл понятия ИИ отражает следующее определение [1-3].

Искусственный интеллект - научная дисциплина (область исследования, область знаний), основной задачей которой является разработка математических описаний функций человеческого интеллекта с целью аппаратурной, программной и технической реализации этих описаний средствами вычислительной техники.

Иногда вместо ИИ предлагается использовать термин - новая информационная технология решения инженерных задач, связанных с поиском, анализом и синтезом информации в системах искусственного интеллекта.

Под системой искусственного интеллекта (СИИ) будем понимать систему, способную принимать решение в условиях:

- ограниченной информации;
- неопределенности (нечеткости);
- многомерности пространства;

• необходимости обрабатывать и анализировать большой массив информации;

• необходимости распознавать ситуации (образы, сцены и т.д.);

• различных стадий жизненного цикла объектов управления - проектирования, производства, эксплуатации и т.д.

Все существующие СИИ можно разбить на два класса: общего назначения и специализированные. Структура СИИ общего назначения, основанная на знаниях или технологиях обработки и использования знаний, представлена на рис. 2.9.

Рис. 2.9. Структура СИИ общего назначения

Эксперт (технолог, оператор, специалист) формирует знания (данные и правила), описывающие выбранные приложения (прикладные задачи, предметную область). Затем на основе этих знаний, заданной цели и исходных данных генерируют метапроцедуры и исполняют процедуру решения конкретных задач, например, задачи управления технологическим процессом или производством.

Специализированные СИИ предназначены для решения заданного набора задач, определенного на стадии проектирования системы. Однако это существенно ограничивает способность СИИ реагировать на изменения внешней среды. Для устранения этого недостатка специализированные СИИ разрабатывают с использованием технологий инженерии знаний в виде экспертных систем (ЭС). Примером таких СИИ являются АС УВД.

Все СИИ можно подразделить на системы, решающие задачи анализа и задачи синтеза. На рис. 2.10 приведены примеры таких задач.

Существуют различные подходы к построению моделей систем искусственного интеллекта: логический, структурный, имитационный и эволюционный. Отметим, что четкой границы между ними нет и часто для построения моделей СИИ используются смешанные подходы.

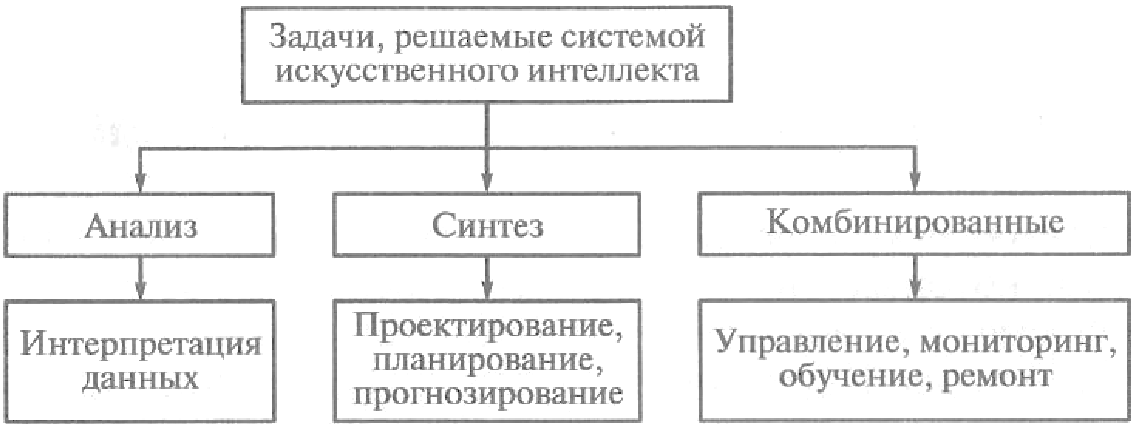

Рис. 2.10. Классификация задач, решаемых системой искусственного интеллекта

Основой логического подхода является алгебра Буля, которая получила дальнейшее развитие в виде исчисления предикатов за счет введения предметных символов, отношений между ними, кванторов существования и всеобщности [29]. Большую выразительность логическому подходу позволило получить сравнительно новое направление - нечеткая логика.

Структурный подход основан на построении СИИ путем моделирования структуры человеческого мозга. Одной из первых моделей такого рода был перцептрон Ф. Розенблатта. Основной моделируемой структурной единицей в перцептронах является нейрон. Позднее возникли и другие модели, которые в настоящее время известны как нейронные сети. Эти модели различаются по строению отдельных нейронов, по топологии связей между ними и по алгоритмам обучения. Среди наиболее распространенных вариантов нейронных сетей можно отметить сети с обратным распространением ошибки, сети Хопфилда, стохастические нейронные сети [1-3].

Для имитационного подхода базовым является понятие «черный ящик». Черный ящик - технологический процесс, аппарат, устройство управления, программный модуль и т.д., информация о внутренней структуре и содержании которых ограничена или отсутствует, но известны входные воздействия и выходные величины.

При эволюционном подходе основное внимание уделяется построению первоначальной модели и правилам, по которым она может изменяться (эволюционировать). Причем модель может быть построена в соответствии с различными подходами - структурным, логическим и т.д.

В системах искусственного интеллекта знания (совместно с данными, на которых они базируются) представляют в некоторой явной форме, т.е. моделью представления знаний.

Под ***знаниями*** будем понимать вид информации, отражающий опыт эксперта (специалиста в определенной предметной области), его понимание множества текущих ситуаций и способов перехода от одного описания объекта к другому.

На рис. 2.11 показана классификация моделей представления знаний.

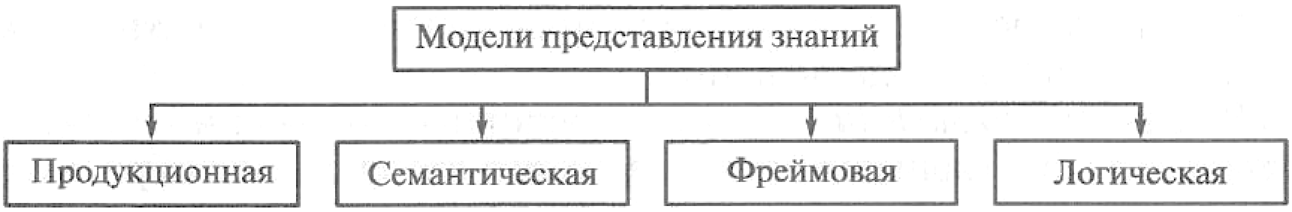

Рис. 2.11. Классификация моделей представления знаний

Продукционная модель - это способ описания знаний в виде продукционных правил (правил продукций): ЕСЛИ «предпосылка, условие» ТО «заключение, действие».

Полнота продукционных правил (базы знаний) определяет возможности СИИ по удовлетворению потребностей пользователей. Логический вывод с помощью продукционных моделей основан на построении прямой и обратной цепочек заключений.

Семантическая модель (семантическая сеть) - модель, в которой структура знаний формализуется ориентированным графом, вершины которого обозначают объекты предметной области (аппараты, агрегаты, регуляторы, свойства, операции), а дуги - отношения между ними (отношение - связи типа «это», «имеет частью», «принадлежит» и т.д.) [2]. Поиск решения в базе знаний типа семантическая сеть сводится к задаче поиска фрагмента сети, соответствующего поставленному вопросу.

Во ***фреймовой модели*** единицей представления знаний является фрейм, т.е. формализованная модель для отображения образа или ситуации. Фрейм имеет определенную внутреннюю структуру, состоящую из множества элементов, называемых слотами. Каждый слот в свою очередь представляется определенной структурой данных. Какая именно структура описывается фреймом, определяется пользователем.

По содержательному смыслу выделяют фреймы-понятия, фреймы-меню и фреймы с иерархически вложенной структурой.

Фрейм-понятие обычно представляет собой фрейм типа И. Например, фрейм «технологическая операция» содержит имена слотов «что делать», «как делать», «кто делает», «где делает» и т.п., которые объединяются связкой «И».

Фрейм-меню (типа ИЛИ) служит для организации процедурных знаний, используя оператор «выбрать». Например, фрейм «что делать» может состоять из слотов «построить математическую модель», «подставить данные», «решить математическую модель» и т.п., объединенные связкой «ИЛИ».

Фреймы с иерархически вложенной структурой (фреймы-сценарии) в качестве слотов могут использовать имена других фреймов и слотов, т.е.

использовать структуру иерархического типа, в которой комбинируются другие виды фреймов.

Важнейшим свойством фреймовых моделей является заимствованное из семантических моделей наследование свойств. Наследование происходит по АКО-связям (сокращение английского выражения A Kind Of - это). Слот АКО указывает на фрейм более высокого уровня, откуда неявно наследуются, т.е. переносятся, значения аналогичных слотов.

Основой ***формальных логических моделей*** является классическое исчисление предикатов первого порядка, т.е., когда предметная область или задача описывается в виде набора аксиом. Описание этих моделей не приводится, так как исчисление предикатов первого порядка в АС УВД практически не используется.

ТКСС, рассматриваемые с позиций системного подхода, состоят из большого количества взаимосвязанных подсистем, между которыми существуют отношения соподчиненности в виде иерархической структуры.

Управление такой системой является чрезвычайно сложной задачей, решаемой методами математического моделирования. Задача управления усложняется тем, что технологические процессы характеризуются следующим, достаточно общим, набором факторов: наличием нелинейности; распределенностью параметров в пространстве и времени; нестационарностью; непрерывным дрейфом параметров; неполной наблюдаемостью некоторых величин; вербальным уровнем формализации информации, используемой для решения задач управления и принятия решений.

Перечисленные факторы являются причиной, порождающей существенные трудности при решении задач оценки переменных состояния и идентификации систем, которые лежат в основе построения их адекватного математического описания, используемого при решении задач управления, принятия решений и оптимизации.

Большинство существовавших методов идентификации ориентировано на идеализированные условия работы объектов (полную наблюдаемость, детерминированность свойств, отсутствие случайных неконтролируемых помех и др.). При таких допущениях для решения задач управления во многих практических случаях используют детерминированные математические модели.

Последние имеют недостатки, обусловленные невозможностью определения точных значений входящих в них параметров, что объясняется влиянием факторов неопределенности.

Под ***неопределенностью*** будем понимать случайность параметров и нечеткость констант, относящихся к некоторому процессу.

Для всех параметров в справочниках приведены их средние или интервальные значения, а на практике они носят случайных характер, который определяется взаимным влиянием этих величин друг на друга, флуктуацией структуры потоков, особенностью конструкций аппаратов, машин и т.д.

Неопределенность может вызываться также погрешностями датчиков, информационных каналов, неточностью задания переменных в математической модели объекта, начальных и граничных условий и т.п.

Рис. 2.12. Типы неопределенностей

Неизвестность - этот тип неопределенности имеет место в том случае, когда неизвестна информация на выходе объекта исследования, т.е. нет технических средств и способов ее измерения.

Неоднозначность имеет место в том случае, когда при строго определенной информации на входе некоторого технологического объекта, информация на выходе имеет различие. Неоднозначность может быть различной природы:

- физическая природа обуславливается случайностью или неточностью информации, что, как правило, определяется техническими измерительными средствами;
- лингвистическая природа имеет место в том случае, когда информация, используемая для анализа технологического объекта, может быть сформулирована на качественном (лингвистическом) уровне.

Недостоверность - этот тип неопределенности может быть в случае, когда информация об исследуемом объекте, явлении или технологических параметрах не является строго определенной (детерминированной).

Начиная со второй половины XX в. развитие промышленных производств характеризуется внедрением прогрессивных технологий, обеспечивающих высокий уровень энерго- и ресурсосбережения, ужесточением требований к качеству выпускаемой продукции и экологической чистоты. Это приводит к тому, что ошибки в управлении при использовании детерминированных математических моделей могут приводить к огромным экономическим потерям и способствуют возникновению аварийных ситуаций.

Для решения задач моделирования, управления и оптимизации в условиях неопределенности обычно используют три подхода: стохастический, интервальный анализ и теорию нечетких множеств.

Построение стохастических моделей для решения задач оптимизации, проверки адекватности этих моделей требует проведения большого числа независимых экспериментальных исследований. Последнее сопряжено со значительными трудностями, которые обуславливаются как сложным аппаратурным оформлением современных технологических процессов, так и ненаблюдаемостью некоторых из них, а также требует больших материальных затрат. Однако даже в том случае, когда применение теории управления стохастическими объектами строго обосновано и получены необходимые статистические характеристики, можно выделить основной недостаток, присущий большинству задач управления. В этих задачах функционал и ограничения рассматриваются в среднем, при этом не формализуются и не определяются выполнения технологических и технических требований на тех или иных режимах с заданной вероятностью.

Такой подход имеет ограниченное применение, так как совершенно не исключает возможности аварийных ситуаций, потерь качества продукта, нарушений технологических требований и условий. Причина этого, очевидно, заключается в том, что стремление приблизить работу реальных объектов к оптимальным режимам одновременно сопровождается приближением к предельным значениям технологических требований. В этих условиях учет стохастических свойств объектов лишь «в среднем» является технологически недопустимым. Тем более невозможно использовать стохастические методы для вновь проектируемых производств, так как в этом случае в принципе нельзя провести прямые эксперименты.

Обычно на практике бывает известен лишь приближенно вид распределения, которому принадлежит неизвестная истинная плотность распределения, или неопределенный параметр задается только верхней и нижней границей, и о его поведении на границах и внутри интервала ничего не известно. В этом случае могут быть применены методы интервального анализа, когда неточность формализуется на основе использования интервальных оценок вместо фиксированных чисел.

Однако интервальный анализ имеет недостатки, которые зачастую могут привести к ошибкам в управлении, потере оптимального решения или к нарушению качественных показателей. Это объясняется, прежде всего, сложностью выбора интервальной оценки технологического параметра, так как при выборе малого интервала увеличивается вероятность нарушения качественных показателей, а при выборе большого интервала - возможно нахождение технологического режима далекого от оптимального.

Наиболее существенным недостатком интервальной оценки является невозможность использования накопленного опыта эксплуатации технологических процессов, имеющихся знаний операторов, технологов, специалистов по управлению.

Между тем практика внедрения АС показывает, что оператор зачастую решает задачи управления более успешно, чем эксплуатируемые системы управления. Это определяет необходимость использования качественной информации, получаемой от инженерно-технического персонала (экспертов), длительное время занимающегося эксплуатацией технологических процессов и систем.

Проблема математической обработки качественной информации включает сбор, оценку достоверности, систематизацию, формализацию, переработку информации качественного характера с применением современных средств вычислительной техники.

Введенное Л.Заде понятие нечеткого множества как математического объекта [3], позволяющего формализовать термины словесного описания особенностей ТП, стимулировало развитие качественного этапа системного анализа и позволило подойти к решению указанной проблемы. При этом стали очевидны следующие достоинства подхода, основанного на аппарате теории нечетких множеств:

- «сжатие» качественной информации, которая определяется целью исследования и осуществляется с использованием методов инженерии знаний;
- наглядность и простота агрегирования и классификации сведений об исследуемом технологическом процессе, получаемых из различных источников;
- возможность применения качественной информации при переходе от смысловой к математической постановке задач;
- формирование стратегий управления технологическим процессом на основе качественной формализации действий оператора-технолога;
- синтез формальных вычислительных процедур для решения задач оптимизации и управления при нечеткой исходной информации и в нечетко определенных ситуациях задач оптимизации и управления с использованием качественной информации [3].

Математическое описание процессов, функционирующих в условиях неопределенности в общем виде может быть представлено следующим образом:

$$\tilde{y} = \tilde{M}(\tilde{x}, u, \tilde{b}), \ \tilde{x} \in \tilde{X}, \ \tilde{y} \in \tilde{Y}, \ \tilde{b} \in \tilde{B}.$$

где $\tilde{M}$ - оператор нечеткой ММ; $\tilde{X}$ - нечеткое множество значений режимных параметров; $\tilde{B}$ - нечеткое множество значений настроечных параметров; $\tilde{y}$ - нечеткая выходная величина.

3.6. Модели на базе сетей Петри

Рассмотрим возможность использования при моделировании систем сетей Петри и их модификаций. Характерной особенностью сетей Петри является то, что с их помощью можно моделировать процессы в системах S, в которых происходит последовательная смена дискретных состояний, в том числе если эта смена происходит при выполнении разнообразных условий.

Таким образом, с использованием сетей Петри могут быть описаны системы S как аппаратные, так и программные.

Применение аппарата сетей Петри и сетевых схем вообще позволяет осуществить структурный подход к построению имитационной модели системы S, при котором обеспечиваются наглядность модели, модульный принцип ее разработки, возможность перехода к автоматизированной интерактивной процедуре проектирования.

Представление системы сетью Петри базируется на двух понятиях: событиях и условиях. Под ***событием*** понимается действие, имеющее место в системе. Появление события определяет состояние системы, которое может быть описано множеством условий. ***Условие*** - это предикат или логическое описание состояния системы. При этом условие может принимать либо значение "истина", либо значение "ложь". Для того чтобы событие произошло, необходимо выполнение соответствующих условий, которые называются предусловиями события. Возникновение события может привести к появлению постусловий. В сети Петри условия моделируются позициями, события - переходами. При этом входы перехода являются предусловиями соответствующего события, выходы – постусловиями. Возникновение события равносильно запуску соответствующего перехода. Выполнение условия представляется фишкой (маркером) в позиции, соответствующей этому условию. Запуск перехода удаляет разрешающие маркеры, представляющие выполнение предусловий и образует новые маркеры, которые представляют выполнение постусловий.

Рассмотрим сначала простой пример. Требуется разработать имитационную модель и представить ее в виде сети Петри для системы «Сборка изделий» при следующих исходных данных: в сборочный узел входят 3 детали типа А и 2 детали типа В. Детали поступают на сборочный участок от независимых экспоненциальных источников с λ равной 0,1 мин$^{-1}$ и 0,04 мин$^{-1}$ соответственно. Длительность сборочной операции находится в пределах 12-18 минут. Сеть Петри рассматриваемой системы представлена на рис. 2.13.

Рассмотрим вычислительную систему, которая обрабатывает задания, поступающие с устройства ввода, и выводит результаты на устройство вывода. Задание поступает на устройство ввода. Когда процессор свободен и в устройстве ввода есть задание, процессор начинает обработку задания. Когда задание выполнено, оно посылается на устройство вывода; процессор либо продолжает обрабатывать другое задание, если оно есть, либо ждет прихода задания. Эта система может быть промоделирована сетью Петри, изображенной на рис. 2.14.

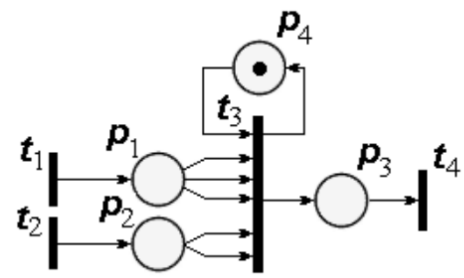

Рис. 2.13 Сеть Петри (пример 1)

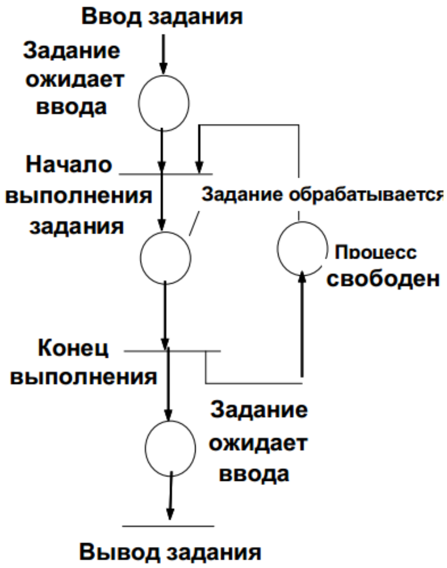

Рис. 2.14. Сеть Петри (пример 2)

Сервер находится в состоянии ожидания до тех пор, пока от пользователя не поступит запрос, который он обрабатывает и отправляет результат пользователю. Он может обрабатывать одновременно два запроса с помощью двух своих процессорных элементов ПЭ1 и ПЭ2.

Условиями для такой системы являются: а1- ПЭ1 ждет; а2 - ПЭ2 ждет; б - запрос поступил и ждет; в1 - ПЭ1 обрабатывает запрос; в2 - ПЭ2 обрабатывает запрос; г - запрос обработан.

Событиями для этой системы являются:

1.Запрос поступил.

2. ПЭ1 начинает обработку запроса.

3. ПЭ1 заканчивает обработку запроса .

4. ПЭ2 начинает обработку запроса.

5. ПЭ2 заканчивает обработку запроса .

6. Результат обработки отправляется.

Для перечисленных событий можно составить следующую таблицу их пред- и постусловий (см. табл. 2.1).

Таблица 2.1

Событие	Предусловия	Постусловия
1	Нет	б
2	А1. б	в1
3	В1	г. а1
4	А2.б	в2
5	В2	г. а2
6	г	нет

Сеть Петри имеет вид, представленный на рис. 2.15.

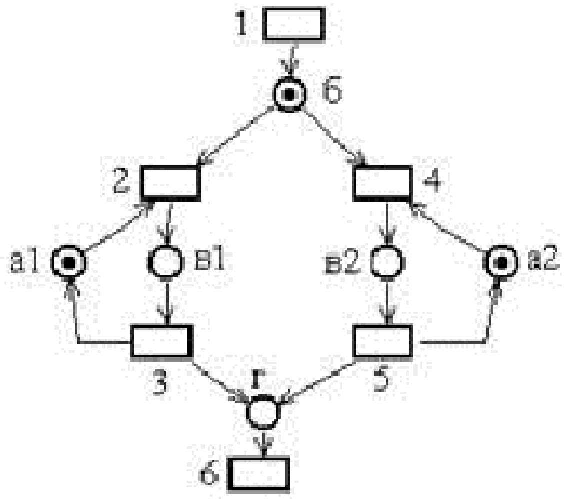

Рис. 2.15. Сеть Петри (пример 3)

2.7. Модели для принятия решений при управлении

Создание системы управления (СУ) различными объектами, в том числе и ТКСС, требует наличия большого объема информации как о самом объекте, так и о его входных и выходных переменных. Эта информация необходима для построения адекватной модели СУ, на основе которой может быть эффективно осуществлен процесс управления.

При этом следует различать два вида информации, необходимой для построения и совершенствования модели и СУ: априорную и текущую. Априорная информация об объекте управления (ОУ), его входных и выходных переменных, внутренних состояниях необходима для построения модели, по которой будет создаваться СУ этим объектом: выбираться структура, алгоритмы и параметры СУ, критерий функционирования. Обычно для сложных вновь проектируемых ОУ отсутствует необходимая для создания СУ модель, и задача управления должна решаться в условиях недостаточной или вовсе отсутствующей априорной информации об объекте. Речь идет об отсутствии информационной («управленческой») модели ОУ, устанавливающей взаимосвязь между выходными и входными переменными [1-3].

Проблема создания СУ неизбежно возникает при разработке ОУ и при их модернизации. На первый взгляд может показаться, что в тех случаях, когда новая СУ разрабатывается для уже давно функционирующей системы S, длительное время находящейся в эксплуатации, положение с априорной информацией лучше и построение модели проще. Опыт показывает, что это не так, и получение информационной модели и в этом случае весьма трудоемко. Таким образом, как для случая вновь проектируемой системы S, так и для уже функционирующей возникает проблема получения дополнительной информации для создания СУ.

Единственным эффективным путем получения такой информации в настоящее время является машинное моделирование. В том случае, когда СУ создана и функционирует вместе с системой S, управляя ею, существует необходимость в получении текущей информации, вызванная в основном двумя причинами. Во-первых, это потребность в совершенствовании СУ, а, во-вторых, необходимость уточнения поведения системы и возникающих в ней ситуаций с целью компенсации изменений характеристик системы S как ОУ. Процессы, с которыми связана текущая информация первого вида, являются достаточно медленными и для управления ими необходима подсистема эволюционного управления, а процессы второго типа являются более быстрыми и для управления ими необходима подсистема оперативного управления в реальном масштабе времени (РМВ).

Следует подчеркнуть, что по темпу принятия решений и месту решения задач подсистемы эволюционного и оперативного управления существенно отличаются друг от друга. Так, например, процессы оперативного управления могут быть на несколько порядков более быстрыми по сравнению с процессами эволюционного управления.

Важнейшей задачей современной теории и практики управления является построение модели ОУ, т.е. формализация закономерностей функционирования объекта. На основе этой модели определяются структура, алгоритмы и параметры СУ, выбираются аппаратно-программные средства реализации системы. Одним из эффективных методов построения модели сложного объекта является идентификация.

Широкое развитие в настоящее время работ по формализации процессов и построению их моделей во многих областях исследований (технике, экономике, социологии и т.д.) преследуют две основные цели. Первая из них связана со значительным увеличением возможностей изучения на базе ЭВМ сложных процессов функционирования различных объектов при помощи метода моделирования, для чего необходимо математическое описание исследуемого процесса. Не меньшее значение в технических системах имеют модели, используемые для достижения второй цели, т.е. применяемые непосредственно в контуре управления объектами.

Невозможность ограничиться только одной универсальной моделью связана с тем, что, с одной стороны, перед этими моделями ставятся различные цели, а, с другой стороны, они описывают процессы, протекающие в различных масштабах времени, причем степень полноты модели, ее соответствие реальному объекту зависят от целей, для которых эта модель используется. Модели первого типа имеют в основном гносеологический характер, от них требуется тесная связь с методами той конкретной области знаний, для которой они строятся. Модели такого типа являются достаточно «инерционными» в своем развитии, так как отражают эволюцию в конкретной области знаний. Такие модели будем называть эволюционными. Модели второго типа имеют информационный характер и должны соответствовать конкретным целям по принятию решений по управлению объектом, который они описывают. Такие модели будем называть ***десиженсными***. Деление на гносеологические (эволюционные) и информационные (десиженсные) модели достаточно условно, но оно удобно для отражения целей моделирования.

В информационных моделях, используемых непосредственно для принятия решений в СУ, требование оперативности является одним из основных. Оно вызвано тем, что при каждом воздействии на ОУ необходимо в модели учесть действительные изменения, происшедшие в объекте, и внешние возмущения, на основе которых рассчитывается управление. Это требование оперативности, т.е. необходимость работы такой модели в РМВ, часто ведет к отказу от сложных и точных моделей, к разработке специальных, так называемых робастных, алгоритмов построения моделей, использование которых в СУ обычно ведет к поставленной цели [3].

Появление идентификации в начале 60-х годов было связано с острой необходимостью разработки методов построения именно информационных моделей ОУ. Отсутствие таких моделей сдерживало процесс автоматизации этих объектов, использования ЭВМ в контуре управления. Объекты оказались неподготовленными к внедрению вычислительной техники из-за отсутствия их математического описания, их информационных моделей. Построение информационной модели методами идентификации должно быть направлено на ликвидацию этого разрыва и разработку методов оперативного получения модели ОУ. При этом методы идентификации должны предусматривать использование ЭВМ для решения задач построения информационной модели.

Элементы теории моделирования. Отсутствие формальных методов перехода от гносеологических моделей к информационным в современной теории управления не дает возможности получить по имеющейся информации адекватное описание, необходимое для создания СУ. Но учет сведений, содержащихся в гносеологических моделях, может значительно увеличить объем априорной информации о рассматриваемом ОУ. Поставив цель построения гносеологической модели процесса функционирования системы S для получения необходимой априорной информации для построения эффективной СУ и сузив класс объектов моделирования до конкретного, т.е. до поведения конкретной системы S, решим задачу построения прикладной теории эволюционного и десиженсного моделирования, позволяющей эффективно (в реализационном аспекте) перейти от гносеологических («исследовательских») моделей к информационным («управленческим») моделям. Наиболее просто такой переход можно совершить, если оба этих класса моделей будут базироваться на единую концептуальную модель, использовать единую систему информации (базу знаний) и иметь единую критериальную систему.

Рассмотрим сначала особенности гносеологических и информационных моделей. Вопрос применимости некоторой математической модели к изучению рассматриваемого объекта не является чисто математическим вопросом и не может быть решен математическими методами. Только критерий практики позволяет сравнивать различные гипотетические модели и выбрать из них такую, которая является наиболее простой и в то же время правильно передает свойства изучаемого объекта, т.е. системы S. Ориентируясь на общие вопросы методологии моделирования сложных технических систем, сформулируем требования к прикладной теории моделирования, а точнее - к элементам этой теории в ее приложении для решения конкретно поставленной задачи.

Как уже отмечалось выше, эта задача ставится следующим образом.

Необходимо сначала построить и реализовать на ЭВМ эволюционную модель процесса функционирования системы S, полученную в ходе стратегической идентификации ОУ, а затем на ее базе построить десиженсную модель, используемую для решения практических задач оперативного управления в адаптивной СУ сетью. Или, используя терминологию теории идентификации, необходимо построить конкретную дискретную адаптивную систему управления с идентификатором и предсказателем (комбинированную) в цепи обратной связи (ДАСК), т.е. реализовать сначала стратегический идентификатор, а затем на его базе тактический оперативный идентификатор и предсказатель, рассматривая в качестве ОУ не реальную систему S (ввиду ее отсутствия), а машинную модель процесса ее функционирования.

Таким образом, можно поставленную задачу трактовать и как задачу автоматизации исследования объекта (машинной модели S_M) для целей синтеза тактической и оперативной модели, используемой непосредственно в контуре управления системой S, а затем для проверки эффективности управления в целом. Прежде чем переходить к изложению элементов теории моделирования процессов в системе S, дадим ряд определений. Напомним, что под моделированием будем понимать исследование объекта посредством изучения его модели, т.е. другого объекта, более удобного для этой цели. Под сложностью моделируемого объекта будем понимать фактически сложность сведений о нем (его описания), зависящую от целей моделирования и уровня, на котором выполняется описание. Таким образом, сложность возрастает не только при введении в рассмотрение новых качеств, но и при переходе к более детальному описанию процесса функционирования объекта моделирования, т.е. системы S.

Задачу прикладной теории моделирования сформулируем, исходя из тех требований, которые будет предъявлять к ней пользователь (исследователь, разработчик системы S), проводящий эксперименты с процессами функционирования 5 и ее элементов для решения конкретной прикладной задачи. В таком контексте основной задачей при решении проблем управления является выбор моделей на уровне оперативного управления, сохраняющих при этом существенные для СУ черты S с учетом ограничений реализации в РМВ (особенно при оперативном управлении). В дальнейшем модель, практически реализуемую с учетом ограниченности ресурсов, будем называть ***трактабельной***. Таким образом, помимо теоретических вопросов построения модели вообще будем рассматривать вопросы трактабельности модели, связанные с формальным представлением ее описания, его упрощением, проверкой адекватности упрощенной модели и т.д. Тот факт, что моделируемая система S существует лишь как замысел разработчика, вносит в проблему разработки такой теории значительные трудности. В частности, не удается непосредственно проверить адекватность модели процесса функционирования системы S с помощью реального объекта. Частично эта трудность устраняется путем проведения натурных экспериментов с элементами S. Ряд существенных трудностей возникает из-за неполноты исходной информации об объекте моделирования.

Большой объем знаний о системах и их элементах, накопленный к настоящему времени, подлежащий объединению в рамках теории моделирования и несоизмеримый с познавательными возможностями одного исследователя, выдвигает необходимость организации и детализации таких знаний (теории) в систему, затрагивающую лишь существенно ограниченное число объектов при сохранении общности подхода. При этом развитие отдельных методов статистического моделирования, языков моделирования, теории планирования машинных экспериментов и т.д. оказывается недостаточным.

Создание прикладной теории, обеспечивающей конкретные потребности разработчика модели и охватывающей весь процесс моделирования в широком смысле этого слова, требует системного подхода и прежде всего установления основ теории: понятий об объекте, предмете, содержании, структуре и логике теории.

Объектом разрабатываемой прикладной теории является непосредственно процесс моделирования поведения системы S, т.е. процесс перехода от моделируемого объекта (системы S) сначала к статической модели $S_{ст}$, используемой при стратегической идентификации, а затем и к динамической модели $S_{дин}$, непосредственно используемой при оперативном управлении с применением методов и алгоритмов СУ. При этом ориентируются на критериальную систему K. Такой переход осуществляется через описание (концептуальную модель), фиксирующее сведения об объекте S в понятиях языка L (терминах типовых математических схем) [3]. При выборе математической схемы моделирования M вводится также понятие среды, позволяющее использовать информацию прикладного характера J о целях моделирования, законах функционирования системы S, имеющемся математическом аппарате и т.д. для исследования методов и алгоритмов управления системой A.

Таким образом, так как объектом данной прикладной теории моделирования является процесс моделирования, то возникает необходимость в построении и изучении «модели моделей», или репромодели *RM* (от англ. reproduce - воспроизводить, делать копию, порождать). ***Репромодель*** представляет собой упрощенный и наглядный прототип создаваемых моделей, используемых в СУ, и дает возможность эффективного приближения к таким моделям с максимальным использованием априорной и оперативной информации о поведении системы S, поступающей в процессе ее функционирования. Для решения поставленной задачи разработки модели для СУ схема репромодели приведена на рис. 2.16.

Рис. 2.16. Схема разработки модели системы управления

После того как сформулирована концептуальная модель C и введены понятия компонент сред, основное содержание элементов прикладной теории моделирования для управления системой составят компоненты M, A, S_{cm} и

$S_{дин}$ (критерий K считается заданным), причем переход от M к $S_{ст}$, следуя терминологии, составит статику моделирования, а переход от M к множеству $S_{дин}$ с привлечением информации из компонент $S_{ст}$ и A составит динамику моделирования. Такое разделение на статику и динамику условно показано пунктирной и сплошной линиями соответственно.

Движение в пространстве статических моделей процесса функционирования системы $S_{ст}$ назовем *эволюцией* (или эволюционным моделированием), а движение в пространстве динамических (активных) моделей) $S_{дин}$, используемых в контуре управления, - *самоорганизацией* (или моделированием с самоорганизацией). Важно отметить, что компоненты объекта теории *L, C, E, M* имеют искусственное происхождение, базирующееся на эвристических представлениях, и могут при необходимости изменяться (развиваться) в интересах самой прикладной теории. Это существенно отличает прикладную теорию моделирования от естественно-научных теорий.

Одной из центральных проблем современной теории управления является проблема управления динамическими объектами в условиях неопределенности, т.е. проблема построения адаптивных СУ. Принцип работы этих систем основан на изменении параметров и структуры в результате наблюдения и обработки текущей информации так, чтобы адаптивная или обучающая система с течением времени улучшила свое функционирование, достигая в конечном итоге оптимального состояния. В адаптивных СУ недостаток априорной информации компенсируется благодаря целенаправленной обработке текущей информации. Рассмотрим возможность и особенности использования машинных моделей S_{M} для решения основных задач построения адаптивных СУ.

Под ***адаптацией*** понимается процесс изменения структуры, алгоритмов и параметров системы S на основе информации, получаемой в процессе управления с целью достижения оптимального (в смысле принятого критерия) состояния или поведения системы при начальной неопределенности и изменяющихся условиях работы системы во взаимодействии с внешней средой E. Адаптация использует обучение и самообучение для получения в условиях неопределенности информации о состояниях и характеристиках объекта, необходимой для оптимального управления. Обучение понимается как процесс выработки в некотором объекте тех или иных свойств его реакции на внешние воздействия путем многократных испытаний и корректировок. Самообучение отличается от обучения отсутствием внешней корректировки.

Характерная черта адаптации - текущее накопление информации о процессе функционирования системы S и внешней среды E и ее использование для улучшения избранного показателя качества. Процесс накопления информации связан с затратами времени, что в итоге приводит к запаздыванию в получении системой управления информации, необходимой для принятия решений. Это существенно снижает эффективность работы систем управления в реальном масштабе времени. Поэтому актуальной является задача прогнозирования состояний (ситуаций) системы S и внешней среды E и характеристик (поведения) системы S для адаптивного управления. Такой прогноз может быть выполнен при использовании методов моделирования в системе управления в реальном масштабе времени.

Выделяются два направления в теории и практике построения адаптивных СУ - создание *систем с эталонной моделью* (АСЭМ) и ***с** идентификацией объекта управления* (АСИ). В АСИ сначала осуществляется идентификация объекта, а затем по оценкам его параметров определяются параметры управляющего устройства, а в АСЭМ осуществляется подстройка параметров управляющего устройства так, чтобы замкнутая система была близка к эталонной модели. Автор считает, что дальнейшее развитие АСЭМ и АСИ пойдет по пути взаимного проникновения методов и результатов исследования, что позволит синтезировать алгоритмы, обладающие всеми достоинствами как того, так и другого направления. Широкое применение в СУ средств вычислительной техники вызвало особый интерес к дискретным адаптивным системам управления (ДАС), которым в последнее время посвящается большая часть публикаций по адаптивным системам [2,3].

Следует отметить, что выбор за классификационный признак наличия или отсутствия эталонной модели для современных ДАС не является, по сути дела, оправданным, так как эталонная модель в той или иной форме присутствует в любой ДАС. Сравнительно недавно предложена и развита более обоснованная классификация ДАС на прямые и непрямые и дана трактовка их общности, свойств и особенностей [3]. Согласно этой классификации, все ДАС можно подразделить на два типа: ***непрямые ДАС***, в которых параметры управляющего устройства определяются по оценкам параметров объекта с помощью некоторого вычислительного устройства, и ***прямые ДАС***, в которых параметры управляющего устройства определяются непосредственно, без вычислительного устройства.

К непрямым ДАС относятся системы с идентификатором в контуре адаптации (ДАСИ), а к прямым - системы с предсказателем (ДАСП) в контуре. В соответствии с этой классификацией ДАС, используемые для управления процессами в таком сложном объекте, как информационная система S, можно отнести к непрямым комбинированным (ДАСК), так как в адаптивной системе управления S имеют место идентификатор и предсказатель, реализуемые с помощью вычислительных устройств, причем комбинирование понимается как в смысле использования ДАСИ и ДАСП, так и в смысле использования принципов АСИ и АСЭМ.

Создание и развитие теории ДАС обусловлено прежде всего неполнотой априорной информации о процессе функционирования исследуемого объекта (в нашем случае ИС и ее элементов). Именно от объема априорной информации зависит и математическая постановка задачи, а часто этим определяется не только подход, но и метод ее решения. Исходя из того, что элементы ИС часто являются мало изученными объектами, т.е. практически отсутствуют априорные сведения о них, напрашивается вывод о необходимости построения непараметрических ДАС. Но для такой сложной системы как ИС, следует отметить возникающие существенные трудности при использовании непараметрической адаптации для всей системы, т.е. при практическом рассмотрении ОУ как «черного ящика»: сложность методов и громоздкость алгоритмов адаптивного управления и, как следствие, их практическая нереализуемость с учетом ограничений вычислительных ресурсов ИС, а часто и необходимости управления в РМВ.

В ряде случаев более перспективен параметрический подход к решению проблемы адаптивного управления при максимальном использовании априорной информации об ОУ и процессе его функционирования. Поэтому применительно к проблеме построения ДАС сложными объектами в ИС можно сделать следующий вывод. Нельзя использовать один и тот же подход к решению задач адаптивного управления на различных уровнях. На каждом из уровней необходимо использовать те методы адаптации, которые позволяют достичь наиболее эффективного управления в каждом конкретном случае.

Как уже отмечалось, одно из важнейших направлений в области идентификации и управления связано с дискретными АС, содержащими в контуре управления идентификатор, т.е. ДАСИ. Процесс идентификации, осуществляемый в ДАСИ, условно разделяется на два этапа, на каждом из которых информация для решения задачи идентификации поступает непосредственно с ОУ в виде реализаций входных и выходных переменных.

Первый этап связан с решением задачи идентификации в широком смысле или задачи стратегической идентификации. Сюда относятся построение концептуальной модели, выбор информативных переменных, оценка степени стационарности объекта, выбор структуры и параметров модели, оценка точности и достоверности модели реальному объекту.

Второй этап предусматривает текущую идентификацию - уточнение модели в связи с текущими изменениями объекта и внешних воздействий; здесь обычно решаются задачи идентификации в узком смысле, т.е. задачи оценки поведения объекта или его состояний. Структурная блок-схема классической ДАСИ приведена на рис. 2.17, где x, y, u - векторы входов, выходов и управления.

Стратегический идентификатор осуществляет решение задач идентификации в широком смысле вне контура управления, а оперативный идентификатор - в узком смысле и является составной частью замкнутого контура управления.

В целом ДАСИ обладают рядом важных практических достоинств: автоматизация идентификации, объединение процессов идентификации и управления, универсальность, высокая надежность. Для сложных объектов трудоемкость процесса идентификации соизмерима с трудоемкостью процесса проектирования системы. Объединение процессов идентификации и управления сокращает сроки создания и освоения системы в результате параллельного проведения работ и, кроме того, является, пожалуй, единственной возможностью оперативно компенсировать текущие изменения характеристик объекта и воздействий внешней среды в процессе функционирования. Из сказанного ясно, что одним из основных в ДАСИ является процесс идентификации.

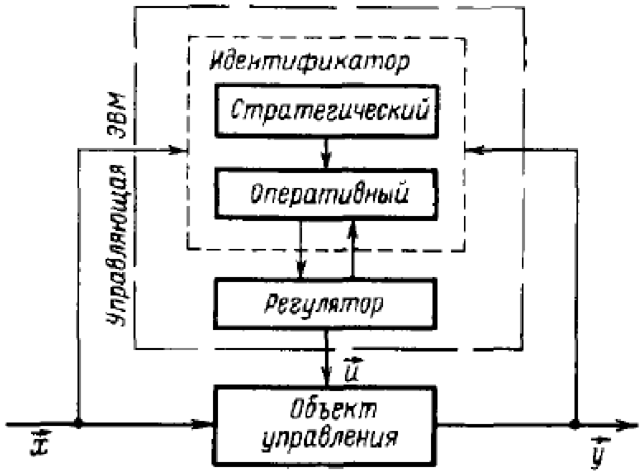

Рис. 2.17. Структурная блок-схема дискретной адаптивной системы с идентификатором

3. Планирование экспериментов с моделями систем

Машинный эксперимент с моделью системы S при ее исследовании и проектировании проводится с целью получения информации о характеристиках процесса функционирования рассматриваемого объекта. Эта информация может быть получена как для анализа характеристик, так и для их оптимизации при заданных ограничениях, т.е. для синтеза структуры, алгоритмов и параметров системы S. В зависимости от поставленных целей моделирования системы S на ЭВМ имеются различные подходы к организации имитационного эксперимента с машинной моделью S_M. Основная задача планирования машинных экспериментов - получение необходимой информации об исследуемой системе S при ограничениях на ресурсы (затраты машинного времени, памяти и т.п.). К числу частных задач, решаемых при планировании машинных экспериментов, относятся задачи уменьшения затрат машинного времени на моделирование, увеличения точности и достоверности результатов моделирования, проверки адекватности модели и т.д.

3.1. Основные понятия планирования экспериментов

Рассмотрим основные понятия теории планирования экспериментов [2-4]. В связи с тем что математические методы планирования экспериментов основаны на кибернетическом представлении процесса проведения эксперимента, наиболее подходящей моделью последнего является абстрактная схема, называемая «черным ящиком». При таком кибернетическом подходе различают входные и выходные переменные: $x_1, x_2, ... x_k$; $y_1, y_2, ... y_l$. В зависимости от того, какую роль играет каждая переменная в проводимом эксперименте, она может являться либо ***фактором***, либо ***реакцией***.

Пусть, например, имеют место только две переменные: x и y. Тогда, если цель эксперимента - изучение влияния переменной x на переменную y, то x - фактор, а y - реакция. В экспериментах с машинными моделями S_M системы S фактор является управляемой (входной) переменной, а реакция - выходной переменной.

Каждый фактор x_i, $i = \overline{1,k}$ может принимать в эксперименте одно из нескольких значений, называемых ***уровнями***. Фиксированный набор уровней факторов определяет одно из возможных состояний рассматриваемой системы. Одновременно этот набор представляет собой условия проведения одного из возможных экспериментов. Каждому фиксированному набору уровней факторов соответствует определенная точка в многомерном пространстве, называемом ***факторным пространством***. Эксперименты не могут быть реализованы во всех точках факторного пространства, а лишь в принадлежащих допустимой области, как, например, это показано для случая двух факторов x_1 и x_2 на рис. 3.1 (плоскость $x_1 O_1 x_2$).

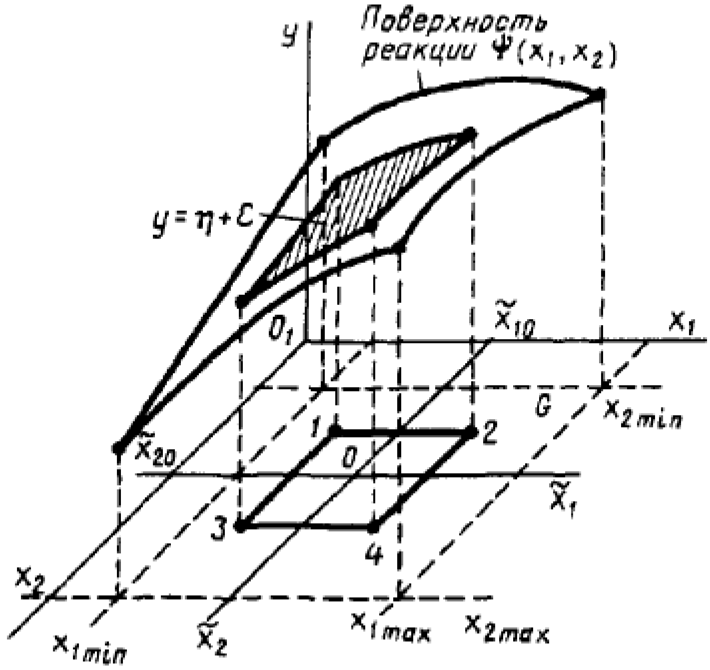

Рис. 3.1. Геометрическое представление поверхности реакции

Существует вполне определенная связь между уровнями факторов и реакцией (откликом) системы, которую можно представить в виде соотношения:

$$y_l = f_l(x_1, x_2, ..., x_k), \; l = \overline{1, m}. \qquad (3.1)$$

Функцию f_l, связывающую реакцию с факторами, называют ***функцией реакции***, а геометрический образ, соответствующий функции реакции - ***поверхностью реакции***. Исследователю заранее не известен вид зависимостей f_l, $l = \overline{1, m}$, поэтому используют приближенные соотношения:

$$\tilde{y}_l = \varphi_l(x_1, x_2, ..., x_k), \; l = \overline{1, m}. \qquad (3.2)$$

Зависимости φ_l находятся по данным эксперимента. Последний необходимо поставить так, чтобы при минимальных затратах ресурсов (например, минимальном числе испытаний), варьируя по специально сформулированным правилам значения входных переменных, построить математическую модель системы и оценить ее характеристики.

При планировании экспериментов необходимо определить основные свойства факторов. Факторы при проведении экспериментов могут быть управляемыми и неуправляемыми, наблюдаемыми и ненаблюдаемыми, изучаемыми и неизучаемыми, количественными и качественными, фиксированными и случайными.

Фактор называется ***управляемым***, если его уровни целенаправленно выбираются исследователем в процессе эксперимента. При машинной реализации модели S_M исследователь принимает решения, управляя изменением в допустимых пределах различных факторов. Фактор называется ***наблюдаемым***, если его значения наблюдаются и регистрируются. Обычно в машинном эксперименте с моделью S_M наблюдаемые факторы совпадают с управляемыми, так как нерационально управлять фактором, не наблюдая его. Но неуправляемый фактор также можно наблюдать. Например, на этапе проектирования конкретной системы S нельзя управлять заданными воздействиями внешней среды E, но можно наблюдать их в машинном эксперименте. Наблюдаемые неуправляемые факторы получили название ***сопутствующих***. Обычно при машинном эксперименте с моделью S_M, число сопутствующих факторов велико, поэтому рационально учитывать влияние лишь тех из них, которые наиболее существенно воздействуют на интересующую исследователя реакцию. Фактор относится к ***изучаемым***, если он включен в модель S_M для изучения свойств системы S, а не для вспомогательных целей, например, для увеличения точности эксперимента. Фактор будет ***количественным***, если его значения – числовые величины, влияющие на реакцию, а в противном случае фактор называется ***качественным***. Качественным факторам в отличие от количественных не соответствует числовая шкала. Однако и для них можно построить условную порядковую шкалу, с помощью которой производится кодирование, устанавливая соответствие между условиями качественного фактора и числами натурального ряда. Фактор называется ***фиксированным***, если в эксперименте исследуются все интересующие экспериментатора значения фактора, а если экспериментатор исследует только некоторую случайную выборку из совокупности интересующих значений факторов, то фактор называется ***случайным***. На основании случайных факторов могут быть сделаны вероятностные выводы и о тех значениях факторов, которые в эксперименте не исследовались. В машинных экспериментах с моделями S_M не бывает неуправляемых или ненаблюдаемых факторов применительно к исследуемой системе S. В качестве воздействий внешней среды E, т.е. неуправляемых и ненаблюдаемых факторов, в машинной имитационной модели выступают стохастические входные переменные.

Если имитационная модель сформулирована, то все факторы определены и нельзя во время проведения данного эксперимента (испытания) с моделью S_M вводить дополнительные факторы.

Как уже отмечалось, каждый фактор может принимать в испытании одно или несколько значений, называемых уровнями, причем фактор будет управляемым, если его уровни целенаправленно выбираются экспериментатором. Для полного определения фактора необходимо указать последовательность операций, с помощью которых устанавливаются его конкретные уровни. Такое определение фактора называется ***операциональным*** и обеспечивает однозначность понимания фактора.

Основными требованиями, предъявляемыми к факторам, являются требование управляемости фактора и требование непосредственного воздействия на объект. Под ***управляемостью фактора*** понимается возможность установки и поддержания выбранного нужного уровня фактора постоянным в течение всего испытания или изменяющимся в соответствии с заданной программой. Требование непосредственного воздействия на объект имеет большое значение в связи с тем, что трудно управлять фактором, если он является функцией других факторов.

При планировании эксперимента обычно одновременно изменяются несколько факторов. Определим требования, которые предъявляются к совокупности факторов. Основные из них – совместимость и независимость. ***Совместимость факторов*** означает, что все их комбинации осуществимы, а независимость соответствует возможности установления фактора на любом уровне независимо от уровней других.

При проведении машинного эксперимента с моделью S_M для оценки некоторых характеристик процесса функционирования исследуемой системы S экспериментатор стремится создать такие условия, которые способствуют выявлению влияния факторов, находящихся в функциональной связи с искомой характеристикой. Для этого необходимо: отобрать факторы x_i, $i=\overline{1,k}$, влияющие на искомую характеристику, и описать функциональную зависимость; установить диапазон изменения факторов $x_{\min}-x_{\max}$; определить координаты точек факторного пространства $(x_1, x_2, ..., x_k)$, в которых следует проводить эксперимент; оценить необходимое число реализаций и их порядок в эксперименте.

Свойства объекта исследования, т. е. процесса машинного моделирования системы S, можно описывать с помощью различных методов (моделей планирования). Для выбора конкретной модели необходимо сформулировать такие ее особенности, как адекватность, содержательность, простота и т.д.

Под ***содержательностью модели планирования*** понимается ее способность объяснять множество уже известных фактов, выявлять новые и предсказывать их дальнейшее развитие. Простота - одно из главных достоинств модели планирования, выражающееся в реализуемости эксперимента на компьютере, но при этом имеет место противоречие с требованиями адекватности и содержательности.

Для экстремального планирования экспериментов наибольшее применение нашли модели в виде алгебраических полиномов. Предполагаем, что изучается влияние k количественных факторов x_i, $i=\overline{1,k}$, на некоторую реакцию η в отведенной для экспериментирования локальной области факторного пространства G, ограниченной $x_{i\min}-x_{i\max}$, $i=\overline{1,k}$ (см. рис. 6.1 для случая k =2). Допустим, что функцию реакции $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ можно с некоторой степенью точности представить в виде полинома степени d от k переменных:

$$\eta=\tilde{b}_0+\sum_{1\le l\le k}\tilde{b}_i x_i+\sum_{1\le l\le j\le k}\tilde{b}_{ij}x_i x_j+...+\sum_{i_1,...,i_k}\tilde{b}_{i_1,i_2,...,i_k}x_1^{i_1}x_2^{i_2}...x_k^{i_k}, \quad (3.3)$$

который содержит C_{k+d}^{d} коэффициентов.

Соотношение (3.3) может быть представлено как

$$\eta=\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{B}, \quad (3.4)$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ - вектор с элементами $f_\alpha(\mathbf{x})$, $\alpha=\overline{0,k'}$, входящими в исходный полином; $\mathbf{B}$ - вектор коэффициентов, которые соответственно имеют такой вид:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\|f_0(\mathbf{x}),..., f_{k'}(\mathbf{x})\|,\ k'=C_{k+d}^{d},$$

$$\mathbf{x}=\left\|1,...,1; x_1,..., x_k;...; x_1^{j},..., x_k^{d}; x_1^{d-1}x_2,..., x_{k-(d-1)}...x_{k-1}x_k\right\|;$$

$$\mathbf{B}=\|b_0; b_1,..., b_k; b_{11},.., b_{kk};...\|.$$

Введем фиктивную переменную $x_0=1$, а также переменные:

$$x_{k+1}=x_1^2, x_{k+2}=x_2^2,..., x_{2k+1}=x_k^2,$$

$$x_{2k+1} = x_1 x_2, ..., x_{k'} = x_{k-(d-1)} \cdots x_{k-1} x_k,$$

тогда (3.3) запишется как однородное линейное уравнение вида:

$$\eta = f(x)B = \sum_{\alpha=0}^{k'} b_\alpha f(\mathbf{x}). \qquad (3.5)$$

Для оценки коэффициентов в (3.5) можно применять методы линейной регрессии.

Функция реакции может иметь и более сложную зависимость от факторов. В этом случае некоторые из них удается привести к линейному виду. Такими моделями являются мультипликативная, регрессионная, экспоненциальная и др. [3].

Если выбрана модель планирования, т.е. выбран вид функции $\eta = \varphi(x_1, x_2, ..., x_k)$ и записано ее уравнение, то остается в отведенной для исследования области факторного пространства G спланировать и провести эксперимент для оценки числовых значений констант (коэффициентов) этого уравнения.

Так как полином (3.4) или (3.5) содержит C_{k+d}^d коэффициентов, подлежащих определению, то план эксперимента **D** должен содержать по крайней мере $N \ge C_{k+d}^d$ различных экспериментальных точек:

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1N} & x_{2N} & \cdots & x_{kN} \end{Vmatrix}, \qquad (3.6)$$

где x_{ij} - значения, которые принимает i-я переменная в j-м испытании.

Реализовав испытания в N точках области факторного пространства, отведенной для экспериментирования, получим вектор наблюдений, имеющий следующий вид:

$$\mathbf{y} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_N \end{Vmatrix}, \qquad (3.7)$$

где y_i - реакция, соответствующая i-й точке плана $\mathbf{x}_j = \begin{Vmatrix} x_{1j} & \cdots & x_{kj} \end{Vmatrix}$.

При незначительном влиянии неуправляемых входных переменных и параметров по сравнению с вводимыми возмущениями управляемых переменных в планировании эксперимента предполагается верной следующая модель:

$$y_j = \eta_j + c_j = \varphi_j(x) + e_j = b_0 x_{0j} + b_1 x_{1j} + ... + b_{k'} x_{k'j} + e_j , \quad (3.8)$$

где e_j - ошибка испытания, которая предполагается независимой нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $M\{e_j\} = 0$ и постоянной дисперсией $D\{e_j\} = \sigma_j^2$.

Выписав аналогичные соотношения для всех точек плана $j = \overline{1, N}$, получим матриц планирования

$$X = \begin{Vmatrix} x_{01} & x_{11} & \cdots & x_{k1} & x_{k+11} & \cdots & x_{k'1} \\ x_{02} & x_{12} & \cdots & x_{k2} & x_{k+12} & \cdots & x_{k'2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{0N} & x_{1N} & \cdots & x_{kN} & x_{k+1N} & \cdots & x_{k'N} \end{Vmatrix} \quad (3.9)$$

размерностью $N \times (k' + 1)$.

Рассмотрим особенности планирования эксперимента для линейного приближения поверхности реакции, причем построению плана предшествует проведение ряда неформализованных действий (принятие решений), направленных на выбор локальной области факторного пространства G (рис. 3.1).

Вначале следует выбрать границы $x_{i\min}$ и $x_{i\max}$ области определения факторов, задаваемые исходя из свойств исследуемого объекта, т.е. на основе анализа априорной информации о системе S и внешней среде E.

После определения области G необходимо найти локальную подобласть для планирования эксперимента путем выбора основного (нулевого) уровня x_{i0} и интервалов варьирования Δx_i, $i = \overline{1, k}$. В качестве исходной точки x_{i0} выбирают такую, которая соответствует наилучшим условиям, определенным на основе анализа априорной информации о системе S, причем эта точка не должна лежать близко к границам области определения факторов $x_{i\min}$ и $x_{i\max}$. На выбор интервала варьирования Δx_i, накладываются естественные ограничения снизу (интервал не может быть меньше ошибки фиксирования уровня фактора, так как в противном случае верхний и нижний уровни окажутся неразличимыми) и сверху (верхний и нижний уровни не должны выходить за область определения G).

В рамках выбранной модели планирования в виде алгебраических полиномов строится план эксперимента путем варьирования каждого из факторов x_i, $i = \overline{1, k}$ на нескольких уровнях q относительно исходной точки x_{i0}, представляющей центр эксперимента.

3.2. Виды планов экспериментов

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется ***полным факторным экспериментом*** (ПФЭ). Если выбранная модель планирования включает в себя только линейные члены полинома и их произведения, то для оценки коэффициентов модели используется план эксперимента с варьированием всех k факторов на двух уровнях, т.е. $q=2$. Такие планы называются планами типа 2^k, где $N=2^k$ - число всех возможных испытаний.

Начальный этап планирования эксперимента для получения коэффициентов линейной модели основан на варьировании факторов на двух уровнях: нижнем $x_{iн}$ и верхнем $x_{iв}$, - симметрично расположенных относительно основного уровня x_{i0}, $i=\overline{1,k}$. Геометрическая интерпретация показана на рис. 3.2. Так как каждый фактор принимает лишь два значения $x_{iн}=x_{i0}-\Delta x_i$ и $x_{iв}=x_{i0}+\Delta x_i$, то для стандартизации и упрощения записи условий каждого испытания и обработки выборочных данных эксперимента масштабы по осям факторов выбираются так, чтобы нижний уровень соответствовал -1, верхний - $+1$, а основной - нулю.

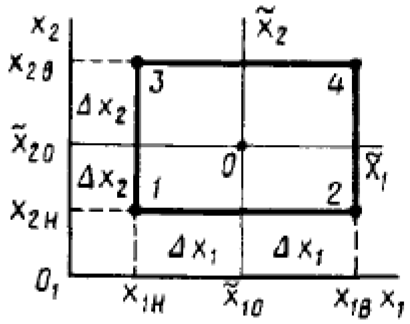

Рис. 3.2. Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента типа 2^k

Это легко достигается с помощью преобразования вида:

$$\tilde{x}_i = \frac{(x_i - x_{i0})}{\Delta x_i},\ i=\overline{1,k}, \tag{3.10}$$

где $\tilde{x}_i$ - кодированное значение i-го фактора; x_i - натуральное значение фактора; x_{i0} - нулевой уровень; $\Delta x_i = \frac{(x_{iн} - x_{iв})}{2}$ - интервал варьирования фактора.

Расположение точек для ПФЭ типа 2^2 показано на рис. 3.3 (а также на рис. 3.1).

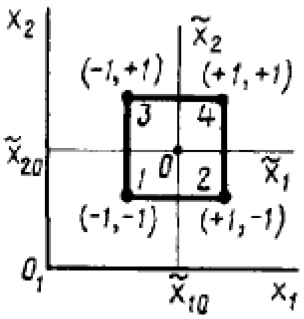

Рис. 3.3. Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента типа 2^k при масштабировании по осям

Выписывая комбинации уровней факторов для каждой экспериментальной точки квадрата, получим план D полного факторного эксперимента типа 2^2 (см. табл. 3.1).

При этом планы можно записывать сокращенно с помощью условных буквенных обозначений строк. Для этого порядковый номер фактора ставится в соответствие строчной букве латинского алфавита: $x_1 \to a$, $x_2 \to b$ и т.д.

Таблица 3.1

Номер испытания	1	2	3	4
$\tilde{x}_1$	-1	+1	-1	+1
x_2	-1	-1	+1	+1
Обозначения строк	(1)	*a*	*b*	*ab*

Затем для каждой строки плана выписываются латинские буквы только для факторов, находящихся на верхних уровнях; испытание со всеми факторами на нижних уровнях обозначается как (1). Запись плана в буквенных обозначениях показана в последней строчке.

На рис. 3.4 представлен пример геометрической интерпретации полного факторного эксперимента типа 2^3.

Для оценки свободного члена b_0 и определения эффектов взаимодействия $b_{12}, b_{13}, ..., b_{123}, ...$ план эксперимента D расширяют до матрицы планирования X путем добавления соответствующей «фиктивной переменной»: единичного столбца $\tilde{x}_0$ и столбцов произведений $\tilde{x}_1\tilde{x}_2, \tilde{x}_1\tilde{x}_3, ..., \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3, ...$, как показано, например, для ПФЭ 2^3 в табл. 3.2.

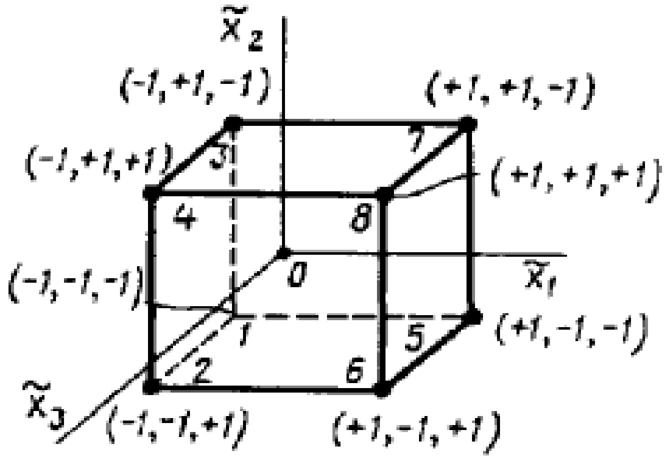

Рис. 3.4. Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента типа 2^3

Как видно из рассмотренных планов экспериментов типа 2^2 и 2^3, количество испытаний в ПФЭ значительно превосходит число определяемых коэффициентов линейной модели плана эксперимента, т.е. ПФЭ обладает большой избыточностью и поэтому возникает проблема сокращения их количества.

Таблица 3.2

Номер испытания	$\tilde{x}_0$	План ПФЭ			$\tilde{x}_1\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_2\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$	Реакция y
		$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$					
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	y_1
2	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	y_3
4	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	y_4
5	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	y_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	y_6
7	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	y_8

Рассмотрим построение планов так называемого ***дробного факторного эксперимента***. Пусть имеется простейший полный факторный эксперимент типа 2^2. Используя матрицу планирования, приведенную в табл. 3.3, можно вычислить коэффициенты и представить результаты в виде уравнения:

$$y = b_0 + b_1\tilde{x}_1 + b_2\tilde{x}_2 + b_{12}\tilde{x}_1\tilde{x}_2.$$

Если в выбранных интервалах варьирования уровня процесс можно описать линейной моделью, то достаточно определить три коэффициента: b_0, b_1, b_2. Таким образом, остается одна степень свободы, которую можно использовать для минимизации числа испытаний. При линейном приближении $b_{12} \to 0$ и вектор-столбец $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ можно использовать для нового фактора $\tilde{x}_3$.

Таблица 3.3

Номер испытания	$\tilde{x}_0$	План ПФЭ		$(\tilde{x}_3)\tilde{x}_1\tilde{x}_2$	Реакция y
		$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$		
1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

Поставим в табл. 3.2 этот фактор в скобках над взаимодействием $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$. В этом случае раздельных оценок, которые имели место в ПФЭ типа 2^2, уже не будет и оценки смещаются следующим образом: $\tilde{b}_1 \to \beta_1 + \beta_{23}$, $\tilde{b}_2 \to \beta_2 + \beta_{13}$, $\tilde{b}_3 \to \beta_3 + \beta_{12}$.

При постулировании линейной модели все парные взаимодействия не учитывают. Таким образом, вместо восьми испытаний в полном факторном эксперименте типа 2^3 необходимо провести только четыре. Правило проведения дробного факторного эксперимента формулируется так: для сокращения числа испытаний новому фактору присваивается значение вектор-столбца матрицы, принадлежащего взаимодействию, которым можно пренебречь. При проведении эксперимента из четырех испытаний для оценки влияния трех факторов пользуются половиной ПФЭ типа 2^3, так называемой ***полурепликой***. Если приравнять x_3 и $-x_1x_2$, то можно получить вторую полуреплику. Для обозначения дробных реплик, в которых d линейных эффектов приравнены к эффектам взаимодействия, пользуются условным обозначением 2^{k-d}. Кроме симметричных двухуровневых планов типа 2^k при планировании экспериментов применяют также многоуровневые планы, в которых факторы варьируются на 3, 4, ..., m-м уровнях и обозначаются соответственно как 3^k, 4^k,..., m^k-планы. Многоуровневые несимметричные планы, в которых факторы варьируются на различных уровнях, строятся различными способами: комбинированием полных и дробных факторных планов типа 2^k, методом преобразования симметричных планов в несимметричные и т.д. Рассмотренные планы носят название ***планов регрессионного анализа*** для многофакторного эксперимента [3].

4. Обработка и анализ результатов моделирования систем

После того как машинный эксперимент спланирован, необходимо предусмотреть меры по организации эффективной обработки и представления его результатов. Вообще, проблема статистической обработки результатов эксперимента с моделью выделяется в самостоятельную проблему. При этом надо иметь в виду, что применяемые на практике методы обработки результатов моделирования составляют только небольшую часть арсенала математической статистики [2-5].

При выборе методов обработки существенную роль играют три особенности машинного эксперимента с моделью системы S:

1. Возможность получать при моделировании системы S на компьютере большие выборки позволяет количественно оценить характеристики процесса функционирования системы, но превращает в серьезную проблему хранение промежуточных результатов моделирования. Эту проблему можно решить, используя рекуррентные алгоритмы обработки, когда оценки вычисляют по ходу моделирования, причем большой объем выборки дает возможность пользоваться при этом достаточно простыми для расчетов на компьютере асимптотическими формулами.

2. Сложность исследуемой системы S при ее моделировании на компьютере часто приводит к тому, что априорное суждение о характеристиках процесса функционирования системы, например, о типе ожидаемого распределения выходных переменных, является невозможным. Поэтому при моделировании систем широко используются непараметрические оценки и оценки моментов распределения.

3. Блочность конструкции машинной модели S_M и раздельное исследование блоков связаны с программной имитацией входных переменных для одной частичной модели по оценкам выходных переменных, полученных на другой частичной модели. Если компьютер, используемый для моделирования, не позволяет воспользоваться переменными, записанными на внешние носители, то следует представить эти переменные в форме, удобной для построения алгоритма их имитации.

4.1. Методы обработки результатов измерений

Рассмотрим наиболее удобные для программной реализации методы оценки распределений и некоторых их моментов при достаточно большом объеме выборки (числе реализаций N). Математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ соответственно имеют вид:

$$m_\xi = M\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx;$$

$$\sigma_\xi^2 = D\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^2 f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ - плотность распределения случайной величины ξ, принимающей значения x.

При проведении имитационного эксперимента со стохастической моделью системы S определить эти моменты нельзя, так как плотность распределения, как правило, априори неизвестна. Поэтому при обработке результатов моделирования приходится довольствоваться лишь некоторыми оценками моментов, полученными на конечном числе реализаций N. При независимых наблюдениях значений случайной величины ξ в качестве таких оценок используются:

$$\bar{x} = \tilde{m}_\xi = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,$$

$$S_b^2 = \tilde{\sigma}_\xi^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2,$$

где $\bar{x}$ и S_b^2 - выборочное среднее и выборочная дисперсия соответственно. Знак ~ над $\tilde{m}_\xi$ и $\tilde{\sigma}_\xi^2$ означает, что эти выборочные моменты используются в качестве оценок математического ожидания m_ξ и дисперсии σ_ξ^2.

К качеству оценок, полученных в результате статистической обработки результатов моделирования, предъявляются следующие требования [2-4]:

1) ***несмещенность оценки***, т.е. равенство математического ожидания оценки определяемому параметру:

$$M\{\tilde{x}\} = x,$$

где $\tilde{x}$ — оценка переменной (параметра) x;

2) ***эффективность оценки***, т.е. минимальность среднего квадрата ошибки данной оценки:

$$M\{(\tilde{x}_1 - x)^2\} = M\{(\tilde{x}_i - x)^2\},$$

где $\tilde{x}_1$ - рассматриваемая оценка; $\tilde{x}_i$ - любая другая оценка;

3) ***состоятельность оценки***, т.е. сходимость по вероятности при $N \to \infty$ к оцениваемому параметру:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\bar{x}-x\right|\ge\varepsilon\right\}=0,\ \varepsilon>0 .$$

Рассмотрим оценку выборочного среднего значения $\bar{x}$. Математическое ожидание выборочного среднего значения $\bar{x}$ составит:

$$M\left\{\bar{x}\right\}=M\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right\}=\frac{1}{N}M\left\{\sum_{i=1}^{N}x_i\right\}=\frac{Nm_\xi}{N}=m_\xi ,$$

т.е. оценка $\tilde{m}_\xi=\bar{x}$ является несмещенной.

С учетом независимости значений x_i средний квадрат ошибки:

$$M\left\{\left(\bar{x}-m_\xi\right)^2\right\}=M\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-m_\xi\right)^2\right\}=\frac{1}{N^2}M\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-m_\xi\right)^2\right\}=\frac{N\sigma_\xi^2}{N^2}=\frac{\sigma_\xi^2}{N},$$

т.е. оценка $\tilde{m}_\xi=\bar{x}$ состоятельна.

В [3] показано, что эта оценка также и эффективна.

При моделировании сложных систем, к которым относятся сети и системы телекоммуникаций, при большом числе реализаций N в результате моделирования получается значительный объем информации о состояниях процесса функционирования системы. Поэтому необходимо так организовать в процессе вычислений фиксацию и обработку результатов моделирования, чтобы оценки для искомых характеристик формировались постепенно по ходу моделирования, т.е. без специального запоминания всей информации о состояниях процесса функционирования системы S.

Если при моделировании процесса функционирования конкретной системы S учитываются случайные факторы, то и среди результатов моделирования присутствуют случайные величины. В качестве оценок для искомых характеристик рассчитывают средние значения, дисперсии, корреляционные моменты и т.д.

Пусть в качестве искомой величины фигурирует вероятность некоторого события A. В качестве оценки для искомой вероятности $p=P(A)$ используется частость наступления события $\frac{m}{N}$, где m - число случаев наступления события A; N - число реализаций. Такая оценка вероятности появления события A является состоятельной, несмещенной и эффективной. В случае необходимости получения оценки вероятности в памяти компьютера при обработке результатов моделирования достаточно накапливать лишь число m (при условии, что N задано заранее).

Аналогично при обработке результатов моделирования можно подойти к оценке вероятностей возможных значений случайной величины, т.е. закона распределения. Область возможных значений случайной величины η

разбивается на n интервалов. Затем накапливается количество попаданий случайной величины в эти интервалы m_k, $k = \overline{1, n}$. Оценкой для вероятности попадания случайной величины в интервал с номером к служит величина $\frac{m_k}{N}$. Таким образом, при этом достаточно фиксировать n значений m_k при обработке результатов моделирования на компьютере.

Для оценки среднего значения случайной величины η накапливается сумма возможных значений случайной величины y_k, $k = \overline{1, N}$, которые она принимает при различных реализациях. Тогда среднее значение:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} y_k \, . \tag{4.1}$$

При этом ввиду несмещенности и состоятельности оценки:

$$M\{\bar{y}\} = M\{\eta\} = m_\eta, \; D\{\bar{y}\} = \frac{D\{\eta\}}{N} = \frac{\sigma_\eta^2}{N}.$$

В качестве оценки дисперсии случайной величины η при обработке результатов моделирования можно использовать:

$$S_b^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2 \, . \tag{4.2}$$

Непосредственное вычисление дисперсии по этой формуле нерационально, так как среднее значение $\bar{y}$ изменяется в процессе накопления значений y_k. Это приводит к необходимости запоминания всех N значений y_k. Поэтому более рационально организовать фиксацию результатов моделирования для оценки дисперсии с использованием следующей формулы:

$$D\{\eta\} = \sigma_\eta^2 = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{k=1}^{N} y_k^2 - \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} y_k \right)^2}{N} \right). \tag{4.3}$$

Тогда для вычисления дисперсии достаточно накапливать две суммы: значений y_k и их квадратов y_k^2. Для случайных величин ξ и η с возможными значениями x_k и y_k корреляционный момент:

$$K_{\xi\eta} = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=1}^{N} (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \right] \text{ или}$$

$$K_{\xi\eta} = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{k=1}^{N} x_k y_k - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \sum_{k=1}^{N} y_k\right].$$

Последнее выражение вычисляется при запоминании в процессе моделирования небольшого числа значений.

Если при моделировании системы S искомыми характеристиками являются математическое ожидание и корреляционная функция случайного процесса $y(t)$, $t \in [0, T]$, то для нахождения оценок этих величин указанный интервал разбивают на отрезки с постоянным шагом Δt и накапливают значения процесса $y_k(t)$ для фиксированных моментов времени $t = t_m = m\Delta t$.

При обработке результатов моделирования математическое ожидание и корреляционную функцию запишем так:

$$\bar{y}(t_m) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k(t_m),$$
$$\tilde{B}(u, z) = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{y_k}{u} - \bar{y}(u)\right)(y_k(z) - \bar{y}(z)), \tag{4.4}$$

где u и z пробегают все значения t_m.

Для уменьшения затрат машинных ресурсов на хранение промежуточных результатов последнее выражение также целесообразно привести к следующему виду:

$$\tilde{B}(u, z) = (N-1)\left(\sum_{k=1}^{N} y_k(u) y_k(z) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{y_k}{u}\sum_{k=1}^{N} y_k(z)\right). \tag{4.5}$$

Отметим особенности фиксации и обработки результатов моделирования, связанные с оценкой характеристик стационарных случайных процессов, обладающих эргодическим свойством.

Пусть рассматривается процесс $y(t)$. Тогда с учетом этих предположений поступают в соответствии с правилом: среднее по времени равно среднему по множеству. Это означает, что для оценки искомых характеристик выбирается одна достаточно продолжительная реализация процесса $y(t)$, для которой целесообразно фиксировать результаты моделирования. Для рассматриваемого случая запишем математическое ожидание и корреляционную функцию процесса:

$$\bar{y} = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\right)\int_0^T y(t);$$

$$B(\tau) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T-\tau}\right)\int_0^T y(t) y(t+\tau) dt - \bar{y}^2.$$

На практике при моделировании системы S интервал $[0,T]$ оказывается ограниченным и, кроме того, значения $y(t)$ удается определить только для конечного набора моментов времени t_m. При обработке результатов моделирования для получения оценок $\bar{y}$ и $B(\tau)$ используем приближенные формулы:

$$\bar{y}=\left(\frac{\Delta t}{T}\right)\sum_{m=1}^{\left(\frac{T}{\Delta t}\right)} y(t_m);$$

$$B(\tau)=\left(\frac{\Delta t}{T-\tau}\right)\sum_{m=1}^{\left(\frac{T-\tau}{\Delta t}\right)} y(t_m)\,y(t_m+\tau)-\bar{y}^2. \tag{4.6}$$

которые целесообразно преобразовать к виду, позволяющему эффективно организовать порядок фиксации и обработки результатов моделирования [3].

При обработке результатов машинного эксперимента с моделью S_M наиболее часто возникают следующие задачи:

- определение эмпирического закона распределения случайной величины;
- проверка однородности распределений;
- сравнение средних значений и дисперсий переменных, полученных в результате моделирования и т.д.

Эти задачи с точки зрения математической статистики являются типовыми задачами по проверке статистических гипотез.

Задача определения эмпирического закона распределения случайной величины наиболее общая из перечисленных, но для правильного решения требует большого числа реализаций N. В этом случае по результатам машинного эксперимента находят значения выборочного закона распределения $F_Э(y)$ (или функции плотности $f_Э(y)$) и выдвигают нулевую гипотезу H_0, что полученное эмпирическое распределение согласуется с каким-либо теоретическим распределением. Проверяют эту гипотезу H_0 с помощью статистических критериев согласия Колмогорова, Пирсона, Смирнова и т.д., причем необходимую в этом случае статистическую обработку результатов ведут по возможности в процессе моделирования системы S.

Для принятия или опровержения гипотезы выбирают некоторую случайную величину U, характеризующую степень расхождения теоретического и эмпирического распределения, связанную с недостаточностью статистического материала и другими случайными причинами. Закон распределения этой случайной величины зависит от закона распределения случайной величины η и числа реализаций N при статистическом моделировании системы S. Если вероятность расхождения теоретического и эмпирического распределений $P\{U_T \geq U\}$ велика в понятиях применяемого критерия согласия, то проверяемая гипотеза о виде распределения H_0 не опровергается. Выбор вида теоретического распределения $F(y)$ (или $f(y)$) проводится по полученным графикам (гистограммам) $F_Э(y)$ (или $f_Э(y)$).

4.2. Корреляционный, регрессионный и дисперсионный анализ результатов моделирования

Возможность фиксации при моделировании системы S на компьютере значений переменных (параметров) и их статистическая обработка для получения интересующих экспериментатора характеристик позволяют провести объективный анализ связей между этими величинами. Для решения этой задачи существуют различные методы, зависящие от целей исследования и вида получаемых при моделировании характеристик. Рассмотрим особенности использования методов корреляционного, регрессионного и дисперсионного анализа для результатов моделирования систем [2-4].

Корреляционный анализ результатов моделирования. С помощью корреляционного анализа исследователь может установить, насколько тесна связь между двумя (или более) случайными величинами, наблюдаемыми и фиксируемыми при моделировании конкретной системы S. Корреляционный анализ результатов моделирования сводится к оценке разброса значений η относительно среднего значения $\bar{y}$, т.е. к оценке силы корреляционной связи. Существование этих связей и их тесноту можно для схемы корреляционного анализа $y = M\{\eta \mid \xi = x\}$ выразить при наличии линейной связи между исследуемыми величинами и нормальности их совместного распределения с помощью коэффициента корреляции:

$$r_{\xi\eta} = \frac{M\{[\xi - M(\xi)][\eta - M(\eta)]\}}{\sqrt{D(\xi)D(\eta)}} = \frac{M[(\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta)]}{\sigma_\eta \sigma_\xi}, \qquad (4.7)$$

т.е. второй смешанный центральный момент делится на произведение средних квадратичных отклонений, чтобы иметь безразмерную величину, инвариантную относительно единиц измерения рассматриваемых переменных.

На рис. 4.1 приведены примеры различных случаев корреляции переменных.

Для того чтобы оценить точность полученной при обработке результатов моделирования системы S оценки $r_{\xi\eta}$, целесообразно ввести в рассмотрение коэффициент $w = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r_{\xi\eta}}{1-r_{\xi\eta}}\right)$, причем w приближенно подчиняется гауссовскому распределению со средним значением и дисперсией:

$$m_w = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r_{\xi\eta}}{1-r_{\xi\eta}}\right),\ \sigma_w^2 = \frac{1}{N-3}. \qquad (4.8)$$

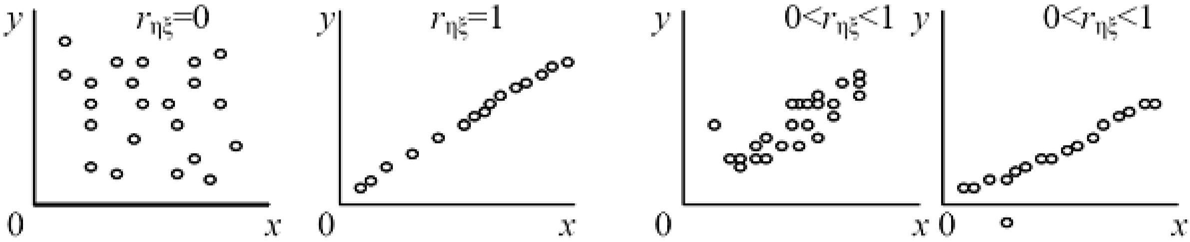

Рис. 4.1. Различные случаи корреляции переменных

Из-за влияния числа реализаций при моделировании S на оценку коэффициента корреляции необходимо убедиться в том, что $0 \le r_{\xi\eta} \le 1$ действительно отражает наличие статистически значимой корреляционной зависимости между исследуемыми переменными модели S_M. Это можно сделать проверкой гипотезы H_0: $r_{\xi\eta}$. Если гипотеза H_0 при анализе отвергается, то корреляционную зависимость признают статистически значимой. Очевидно, что выборочное распределение введенного в рассмотрение коэффициента w при $r_{\xi\eta} = 0$ является гауссовским с нулевым средним $m_w = 0$ и дисперсией $\sigma_w^2 = (N-3)^{-1}$. Следовательно, область принятия гипотезы H_0 определяется неравенством:

$$-z_{\alpha/2} \le \sqrt{N-3}\,\frac{\ln\left(\dfrac{1+r_{\xi\eta}}{1-r_{\xi\eta}}\right)}{2} \le z_{\alpha/2}, \qquad (4.9)$$

где $z_{\alpha/2}$ подчиняется нормированному гауссовскому распределению. Если $r_{\xi\eta}$ лежит вне приведенного интервала, то это означает наличие корреляционной зависимости между переменными модели на уровне значимости γ.

При анализе результатов моделирования системы S важно отметить то обстоятельство, что даже если удалось установить тесную зависимость между двумя переменными, то отсюда еще непосредственно не следует их причинно-следственная взаимообусловленность. Возможна ситуация, когда случайные ξ и η стохастически зависимы, хотя причинно они являются для системы S независимыми. При статистическом моделировании наличие такой зависимости может иметь место, например, из-за коррелированности последовательностей псевдослучайных чисел, используемых для имитации событий, положенных в основу вычисления значений x и y.

Таким образом, корреляционный анализ устанавливает связь между исследуемыми случайными переменными машинной модели и оценивает тесноту этой связи. Однако в дополнение к этому желательно располагать моделью зависимости, полученной после обработки результатов моделирования.

Регрессионный анализ результатов моделирования. Регрессионный анализ дает возможность построить модель, наилучшим образом соответствующую набору данных, полученных в ходе машинного эксперимента с системой S. Под наилучшим соответствием понимается минимизированная функция ошибки, являющаяся разностью между прогнозируемой моделью и данными эксперимента. Такой функцией ошибки при регрессионном анализе служит сумма квадратов ошибок.

Рассмотрим пример регрессионного анализа результатов моделирования при построении линейной регрессионной модели. На рис. 4.2 показаны точки $x_i, y_i, i = \overline{1, N}$, полученные в машинном эксперименте с моделью S_M системы S. Делаем предположение, что модель результатов машинного эксперимента графически может быть представлена в виде прямой:

$$\hat{y} = \varphi(x) = b_0 + b_1 x,$$

где $\hat{y}$ величина, предсказываемая регрессионной моделью.

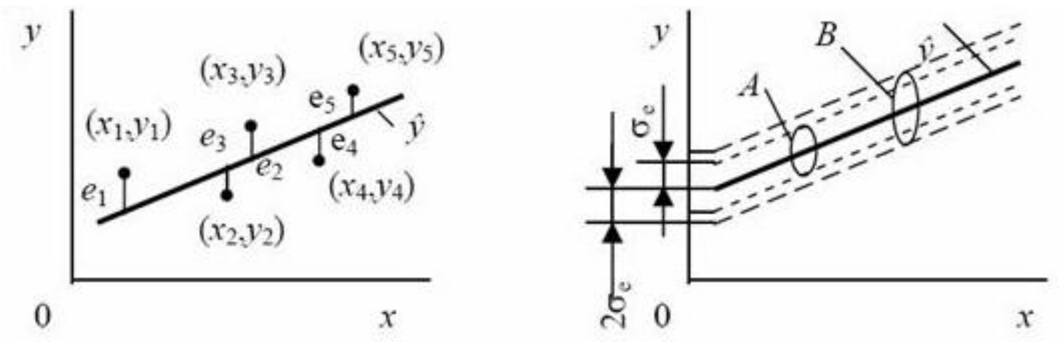

Рис. 4.2. Построение линейной регрессионной модели

Требуется получить такие значения коэффициентов b_0 и b_1, при которых сумма квадратов ошибок модели является минимальной. На рисунке ошибка e_i, $i = \overline{1, N}$ для каждой экспериментальной точки определяется как расстояние по вертикали от этой точки до линии регрессии $y = \varphi(x)$.

Обозначим $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$, $i = \overline{1, N}$. Тогда выражение для ошибок будет иметь вид:

$$e_i = \hat{y}_i - y_i = b_0 + b_1 x_i - y_i,$$

а функция ошибки:

$$F_o = \sum_{i=1}^{N} (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2 .$$

Для получения b_0 и b_1, при которых функция F_0 является минимальной, применяются обычные методы математического анализа. Условием минимума является $\frac{\partial F_0}{\partial b_0} = 0$, $\frac{\partial F_0}{\partial b_1} = 0$.

Дифференцируя F_0, получаем:

$$\frac{\partial F_0}{\partial b_0} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{N} (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2\right)}{\partial b_0} = 2\left(Nb_0 + b_1\sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} y_i\right) = 0,$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial b_1} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{N} (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2\right)}{\partial b_1} = 2b_0\sum_{i=1}^{N} x_i + 2b_1\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N} x_i y_i = 0.$$

Решая систему этих двух линейных алгебраических уравнений, можно получить значения b_0 и b_1. В матричном представлении эти уравнения имеют вид:

$$\left\|\begin{matrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} b_0 \\ b_1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{matrix}\right\|.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$b_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i\right)}{\left(N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right)},$$

$$b_1 = \frac{\left(N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i\right)}{\left(N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right)}.$$

где N - число реализаций при моделировании системы.

Соотношения для вычисления b_0 и b_1 требуют минимального объема памяти компьютера для обработки результатов моделирования. Обычно мерой ошибки регрессионной модели служит среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_e = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} e_i^2}{N-2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2}{N-2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для нормально распределенных процессов приблизительно 67% точек находится в пределах одного отклонения σ_e от линии регрессии и 95% - в пределах $2\sigma_e$. Для проверки точности оценок b_0 и b_1 регрессионной модели могут быть использованы, например, критерии Фишера и Стьюдента. Аналогично могут быть оценены коэффициенты уравнения регрессии и для случая нелинейной аппроксимации.

Дисперсионный анализ результатов моделирования. При обработке и анализе результатов моделирования часто возникает задача сравнения средних выборок. Если в результате такой проверки окажется, что математическое ожидание совокупностей случайных переменных $y(1)$, $y(2)$, …, $y(n)$ отличается незначительно, то статистический материал, полученный в результате моделирования, можно считать однородным (в случае равенства двух первых моментов). Это дает возможность объединить все совокупности в одну и позволяет существенно увеличить информацию о свойствах исследуемой модели S_M, а ,следовательно, и системы S. Попарное использование для этих целей критериев Смирнова и Стьюдента для проверки нулевой гипотезы затруднено в связи с наличием большого числа выборок при моделировании системы. Поэтому для этой цели используется дисперсионный анализ.

Рассмотрим решение задачи дисперсионного анализа при обработке результатов моделирования системы на примере. Пусть генеральные совокупности случайной величины $y(1)$, $y(2)$, …, $y(n)$ имеют нормальное распределение и одинаковую дисперсию. Необходимо по выборочным средним значениям при некотором уровне значимости **у** проверить нулевую гипотезу H_0 о равенстве математических ожиданий. Выявим влияние на результаты моделирования только одного фактора, т.е. рассмотрим однофакторный дисперсионный анализ.

Допустим, изучаемый фактор x привел к выборке значений неслучайной величины Y следующего вида: $y_1, y_2, ..., y_k$, где k - количество уровней фактора x. Влияние фактора будем оценивать неслучайной величиной D_x, называемой факторной дисперсией:

$$D_x = \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(y_i - \bar{y})^2}{k},$$

где $\bar{y}$ среднее арифметическое значение величины Y.

Если генеральная дисперсия $D(y)$ известна, то для оценки случайности разброса наблюдений необходимо сравнить $D(y)$ с выборочной дисперсией S_b^2, используя критерий Фишера (F-распределение). Если эмпирическое значение $F_э$ попадает в критическую область, то влияние фактора x считается значимым, а разброс значений x - неслучайным. Если генеральная дисперсия $D(x)$ до проведения машинного эксперимента с моделью S_M неизвестна, то необходимо при моделировании найти ее оценку.

Пусть серия наблюдений на уровне y_i, имеет вид $y_{i1}, y_{i2}, ..., y_{in}$, где n - число повторных наблюдений на $i-$м уровне. Тогда на $i-$м уровне среднее значение наблюдений:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_{ij},$$

а среднее значение наблюдений по всем уровням:

$$\bar{y} = \frac{1}{kn} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} y_i.$$

Общая выборочная дисперсия всех наблюдений:

$$S_b^2 = \frac{1}{kn-1} \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{1}{kn} \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \right)^2 \right).$$

При этом разброс значений y определяется суммарным влиянием случайных причин и фактора x. Задача дисперсионного анализа состоит в том, чтобы разложить общую дисперсию $D(y)$ на составляющие, связанные со случайными и неслучайными причинами.

Оценка генеральной дисперсии, связанной со случайными факторами:

$$\tilde{D}_0(y) = \frac{1}{k(n-1)} \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \right)^2 \right),$$

а оценка факторной дисперсии:

$$\tilde{D}_x = \tilde{D}(y) - \tilde{D}_0(y).$$

Учитывая, что факторная дисперсия наиболее заметна при анализе средних значений на $i-$м уровне фактора, а остаточная дисперсия (дисперсия случайности) для средних значений в n раз меньше, чем для отдельных измерений, найдем более точную оценку выборочной дисперсии:

$$\tilde{D}_x + \frac{1}{n}\tilde{D}_0\{y\} = \frac{f}{k-f}\sum_{i=1}^{k}(y_i - y)^2 .$$

Умножив обе части этого выражения на n, получим в правой части выборочную дисперсию S_b^2, имеющую $(k-1)$-ю степень свободы. Влияние фактора x будет значимым, если при заданном γ выполняется неравенство $\frac{\tilde{S}_b^2}{\tilde{D}_0\{y\}} > F_{1-\gamma}$. В противном случае влиянием фактора x на результаты моделирования можно пренебречь и считать нулевую гипотезу H_0 о равенстве средних значений на различных уровнях справедливой.

Таким образом, дисперсионный анализ позволяет вместо проверки нулевой гипотезы о равенстве средних значений выборок проводить при обработке результатов моделирования проверку нулевой гипотезы о тождественности выборочной и генеральной дисперсий.

Возможны и другие подходы к анализу и интерпретации результатов моделирования, но при этом необходимо помнить, что их эффективность существенно зависит от вида и свойств конкретной моделируемой системы S .

Заключение

Большое значение при реализации модели на ПЭВМ имеет вопрос правильного выбора языка программирования. Язык программирования должен отражать внутреннюю структуру понятий при описании широкого круга понятий. Высокий уровень языка моделирования значительно упрощает программирование моделей.

Основными моментами при выборе языка программирования для решения задачи моделирования (ЯМ) является: проблемная ориентация; возможности сбора, обработки, вывода результатов; быстродействие; простота отладки; доступность восприятия.

Наиболее известными языками моделирования являются SIMULA, SIMSCRIPT, GPSS, SOL, CSL и др. [2,3].

Литература

1. Замятина О.М. Моделирование сетей: учебное пособие /О.М. Замятина: Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011.

2. Советов Б.Я. Моделирование систем: учебник для вузов /Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – 6-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2009.

3. Моделирование систем: учебник для студ. высш. учеб. заведений/ С.И. Дворецкий, В.А. Погонин, А.Г. Схиртладзе – М.: Издательский центр «Академия», 2009.

4. Шелухин О.И., Тенякшев А.М., Осин А.В. Моделирование информационных систем /под ред. О.И. Шелухина: учебное пособие. – М.: Радиотехника, 2005.

5. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем /Н.П. Бусленко. – М.: Наука, 1988.