

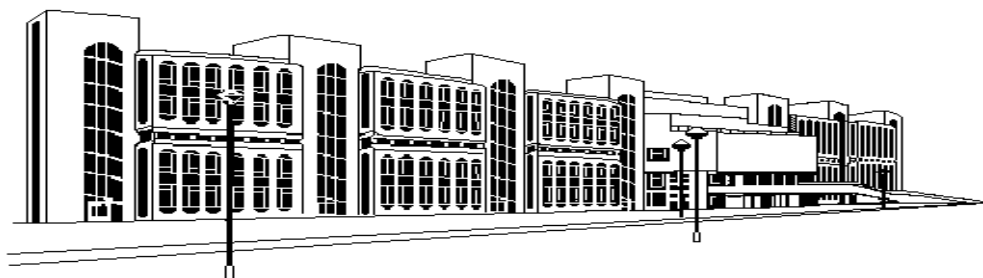


ISSN 2079-0619

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК МГТУ ГА

№ 165



Москва
2011

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ»**

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК МГТУ ГА

№ 165

Издается с 1998 г.

**Москва
2011**

Научный Вестник МГТУ ГА решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ включен в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

Главная редакция

Главный редактор - заслуженный юрист РФ, д-р юрид. наук,
проф. Б.П. Елисеев (МГТУ ГА)

Зам. главного редактора - д-р техн. наук, проф. Е.Е. Нечаев (МГТУ ГА)

Ответственный секретарь главной редакции - д-р техн. наук, доц. О.Г. Феоктистова
(МГТУ ГА)

Члены главной редакции - д-р экон. наук, проф. Б.В. Артамонов (МГТУ ГА);
д-р филос. наук, проф. О.Д. Гаранина (МГТУ ГА);
д-р экон. наук, проф. В.А. Казаков (МГУ им. М.В. Ломоносова);
заслуженный деятель науки РФ, д-р техн. наук,
проф. В.Т. Калугин (МГТУ им. Н.Э. Баумана);
заслуженный деятель науки и техники РФ,
д-р физ.-мат. наук, проф. А.И. Козлов (МГТУ ГА);
д-р техн. наук, проф. В.Л. Кузнецов (МГТУ ГА);
д-р техн. наук, проф. С.В. Кузнецов (МГТУ ГА);
заслуженный деятель науки и техники РФ,
д-р физ.-мат. наук, проф. Д.С. Лукин (МФТИ);
д-р техн. наук, проф. В.В. Соломенцев (НТЦ «Промтехазро»);
заслуженный деятель науки РФ, д-р техн. наук,
проф. В.Г. Ципенко (МГТУ ГА);
д-р техн. наук, проф. В.С. Шапкин (Гос НИИ ГА)

Редакционная коллегия выпуска

Ответственный редактор выпуска - д-р техн. наук, проф. А.В. Самохин

Ответственный секретарь выпуска - д-р техн. наук, проф. В.Л. Кузнецов

Члены редакционной коллегии - д-р техн. наук, проф. С.К. Камзолов;
д-р физ.-мат. наук, проф. И.С. Красильщик;
д-р физ.-мат. наук, проф. И.С. Меньшов;
д-р техн. наук, проф. Г.Г. Спирин

E-mail: samohinalexey@gmail.com

тел. +7(495)459-04-74

ISBN 978-5-86311-780-5

Плата за публикацию в Научном Вестнике МГТУ ГА с аспирантов не взимается.

**НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**

№ 165

2011

СОДЕРЖАНИЕ

Богданов Р.И., Богданов М.Р., Кузин П.С. Термодинамические симметрии в слабо диссипативной теории КАМ.....	5
Евсеев А.В., Четвериков В.Н. Использование компьютерной алгебры в задаче реализации отображений вход-выход.....	19
Лукацкий А.М. Геометрический подход в динамике сплошной среды.....	26
Морозов О.И. Накрытие уравнения dKP-hyperCR и многозначные структуры Эйнштейна-Вейля.....	34
Павлухин П.В., Меньшов И.С. Эффективная параллельная реализация метода LU-SGS для задач газовой динамики.....	46
Самохин А.В. О симметриях обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.....	56
Тарасчев С.И. Моделирование и управление в системах массового обслуживания в режиме установления и неоднородных потоков.....	65
Четвериков В.Н. Структура C-спектральных последовательностей систем с управлением.....	70
Илларионова Т.М. Об обобщенном показателе задержки рейсов как индикаторе эффективности работы авиакомпании. Анализ задержек чартеров.....	80
Солодов В.В. Слоения малой гладкости.....	90
Пантелеев А.В., Алёшина Е.А. Разработка алгоритмического и программного обеспечения метода гравитационной кинематики.....	95
Пантелеев А.В., Рязанцева О.В. Применение метода направленного табу-поиска к задаче оптимального управления дискретными системами.....	103
Рыбаков К.А. Анализ чандлеровских колебаний полюса Земли спектральным методом....	111
Кудрявцева И.А., Пантелеев А.В. Моделирование процессов переноса с учетом кулоновских столкновений вблизи заряженной пластины в потоке плазмы.....	118
Машошин О.Ф., Самойлов Е.А. Перспективы развития конструкций механизмов космических аппаратов.....	125
Корсун А.В. Модель модернизации оборудования информационных сетей.....	132

Статьи настоящего Вестника можно разделить на четыре тематические части.

Первая, носящая более теоретико-математический характер, в основном посвящена исследованию аналитических объектов (таких как уравнения и/или многообразия) методами алгебры и геометрии. Сюда входит статья Лукацкого А.М. о дифференциально-геометрических методах в механике сплошной среды и близкая ей по предмету исследований статья Богданова Р.И., Богданова М.Р., Кузина П.С. о термодинамических симметриях в слабо диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера.

Вторую группу составляют исследования геометрических структур дифференциальных уравнений. Это статья Морозова О.И., в которой изучается накрытие уравнения популярных уравнений математической физики и многозначные структуры Эйнштейна-Вейля, статья В.В. Солодова о слоениях малой гладкости, статья Самохина А.В. о симметриях обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, а также статья Четверикова В.Н. о структуре С-спектральных последовательностей систем с управлением.

Использование компьютерного моделирования в различных прикладных задачах объединяет в третью группу статьи Павлухина П.В., Меньшова И.С. - об эффективной параллельной реализации метода LU-SGS для задач газовой динамики; Евсеева А.В., Четверикова В.Н. - об использовании компьютерной алгебры в задаче реализации отображений вход - выход. Ещё три работ: Пантелеева А.В., Алёшиной Е.А. - об алгоритмическом и программном обеспечении метода гравитационной кинематики; Рыбакова К.А. - об анализе чандлеровских колебаний полюса Земли спектральным методом и Кудрявцевой И.А., Пантелеева А.В. - о моделировании в потоке плазмы процессов переноса вблизи заряженной пластины имеют наиболее выраженный физический характер.

Задачи управления (в широком смысле) являются предметом исследования последней группы статей. Это относится к работе Пантелеева А.В., Рязанцевой О.В. «Применение метода направленного табу-поиска к задаче оптимального управления дискретными системами» и к статье Илларионовой Т.М., где предложен обобщенный показатель задержки рейсов как индикатор эффективности работы авиакомпании и на основе реальной открытой статистики проведен анализ задержек чартеров. Результаты такого рода анализа позволят принимать оперативные и рациональные решения о заявках авиакомпаний на выполнение чартерных рейсов. В статье Тарасчева С.И. о моделировании и управлении в системах массового обслуживания в режиме установления и неоднородных потоков традиционный предмет исследования опирается на компьютерные методы статистической обработки данных.

Ответственный редактор -

доктор технических наук, профессор

А.В. Самохин

Пропустите 2 пустые страницы

Пропустите пустую страницу

УДК 517.983+517.55+517.95

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ В СЛАБО-ДИССИПАТИВНОЙ ТЕОРИИ КАМ

Р.И. БОГДАНОВ, М.Р. БОГДАНОВ, П.С. КУЗИН

В слабо-диссипативной теории КАМ (или теории почти открытых систем) мы изучаем динамические системы, являющиеся малыми возмущениями гамильтоновых систем в классе всех гладких динамических систем. Классическая теория КАМ описывает динамику общего положения гамильтоновых систем, являющихся малыми возмущениями вполне интегрируемых гамильтоновых систем. Слова "почти, слабо" обозначают возможность использовать для анализа динамики интегралы невозмущенной системы, что позволяет разобраться в структуре возникающих квазиравновесных состояний в почти открытой динамике: сопоставить взаимозависимость интегралов с классическими соотношениями математической физики.

Здесь, в частности, мы приводим новые численные данные о расчете термодинамических потенциалов простейшей модели наряду с обсуждением их связи со стационарными группами динамики (группами внутренних симметрий). "Простейшая модель" – система на прямой второго порядка с полем потенциальных сил, отвечающих ангармоническому потенциалу, слабо возмущенная силами трения с коэффициентом трения, аффинно зависящим от фазовой переменной.

Ключевые слова: гамильтоновы динамические системы, стохастическая динамика струй.

1. Основная модель

В классической теории КАМ [4,6,19] рассматриваются гамильтоновы системы в четномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n} \{(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)\}$, где q_i – фазовые координаты, а p_i – сопряженные им импульсы. Гамильтониан $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ представляется в виде

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots, \quad (1)$$

где система с гамильтонианом H_0 вполне интегрируемая (например $H_0 = \sum p_i^2/2 + (q, Bq)$, где B симметричная положительно определенная матрица)[6,8]. Возмущение H_1 выбирается отвечающим случаю общего положения.

Таким образом, возникает динамическая система вида [4,6,14,19]

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Движение материальной точки в системе происходит на поверхности уровня

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \equiv Const, \quad (3)$$

которая является гиперповерхностью в \mathbb{R}^{2n} , т.е. имеет коразмерность один в случае общего положения.

В слабо-диссипативной теории КАМ мы разрушаем интеграл (3). Другими словами, мы пишем на H дифференциальное уравнение. Точнее, мы рассматриваем полупрямое произведение гамильтоновой системы (2), являющейся прямым сомножителем, на систему в проекции на H . В окрестности неособого значения H это эквивалентно рассмотрению динамической системы в проекции на трансверсаль к поверхности уровня гамильтониана (3).

В простейшем содержательном (нетривиальном) случае такое уравнение можно представить в виде

$$\ddot{x} = \varepsilon F(x, \dot{x}, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n). \quad (4)$$

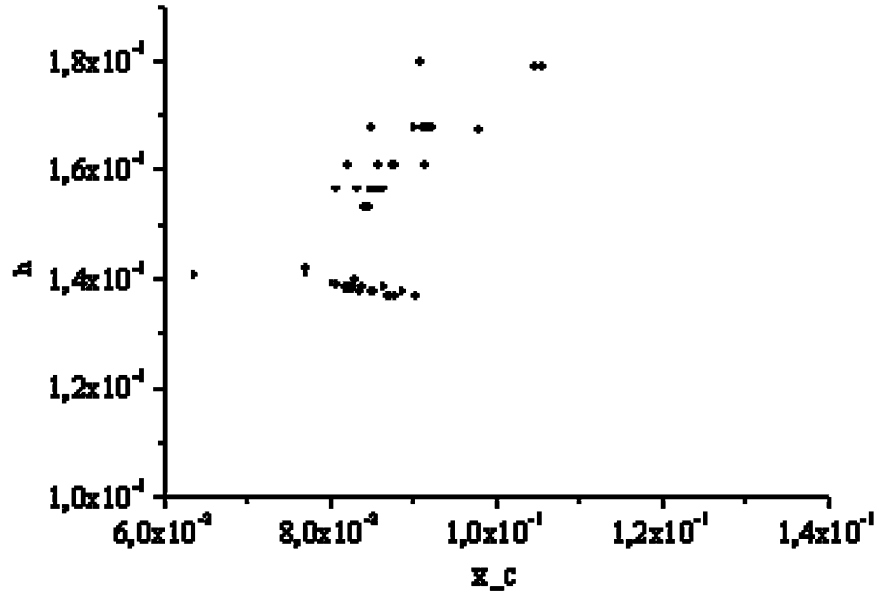


Рис. 1. Зависимость энтальпии от центра тяжести орбиты

Осталось заметить, что в окрестности нерезонансного тора [4,19] вполне интегрируемой системы с гамильтонианом H_0 в уравнении (4) зависимость от $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ можно убить, т.е. привести систему в \mathbb{R}^{2n+1} к прямому произведению [4,6,19]. Ниже мы приводим результаты исследования слагаемого (4) в нормальной форме.

2. Дискретное время и параметры модели

Численные данные, приводимые ниже представлены в обезразмеренном виде. Для понимания способов их оразмеривания следует иметь в виду следующие три аспекта: локальная форма модели; глобальная форма; связь непрерывной и дискретной модели.

Локальная форма в соответствии с бифуркацией Богданов-Тakens [1,4,5,8,14] имеет простую нормальную форму

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + f(x)\dot{x}, \quad (5)$$

где потенциал $U = \varepsilon x - x^3/3$, а коэффициент трения $f(x) = \mu + x$, причем, ε и μ - малые параметры ($\varepsilon, \mu \ll 1$).

Для оразмеривания данных важной линейной величиной (единицей длины) является расстояние между дном потенциальной ямы и кором ангармонического потенциала U (в (5) это $x = -\sqrt{\varepsilon}$ и $x = \sqrt{\varepsilon}$).

Соответственно для оразмеривания сил трения полезно учесть, что нуль коэффициента трения $f(x) : x = -\mu$. Дальнейшие полезные соображения заключаются в том, что в окрестности дна потенциальной ямы потенциал имеет малый коэффициент при квадратичном слагаемом, т.е. мы имеем дело с малым коэффициентом упругости Гука окружающей среды. С

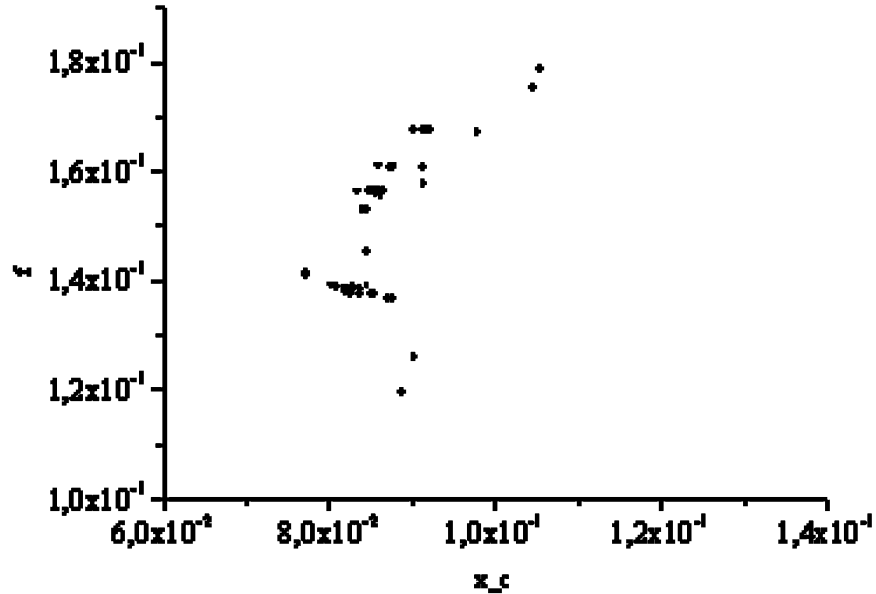


Рис. 2. Зависимость свободной энергии от центра тяжести орбиты

учетом малости μ мы имеем также малую вязкость окружающей среды. Эти соображения позволяют оценить область применимости излагаемых ниже результатов [2,16,23].

Глобальная форма получается из локальной (5) с помощью ремасштабирования величин x и \dot{x} таким образом, что локальная яма ангармонического потенциала и его кор разведены на единичное расстояние, а масштаб импульса \dot{x} подчинен квазиоднородности гамильтониана системы (5) при $\varepsilon = \mu = 0$ [14]. В результате мы получаем систему

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + f(x)\dot{x}, \quad (6)$$

где потенциал $U = x^2/2 - x^3/3$, $f(x) = \varepsilon + \mu x$, параметры ε и μ вычисляются через параметры ε, μ системы (4) [1,14].

Локальная дискретная форма отвечает дискретизации (5) по полуявной схеме Эйлера первого порядка [1]

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h y_{n+1} \\ y_{n+1} &= y_n + h \ddot{x}|_{x=x_n, y=y_n} = \\ &= y_n + h [(x_n^2 - \varepsilon) + (\mu + x_n) y_n]. \end{aligned} \quad (7)$$

Ренормализация этой модели после подходящего сдвига начала отсчета переменной x дает отображение плоскости на себя следующего вида

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_{n+1} \\ y_{n+1} &= y_n + k x_n (x_n - 1) + (\varepsilon + \mu x_n) y_n, \end{aligned} \quad (8)$$

где k, ε, μ вычисляются либо через параметры (7), либо (6).

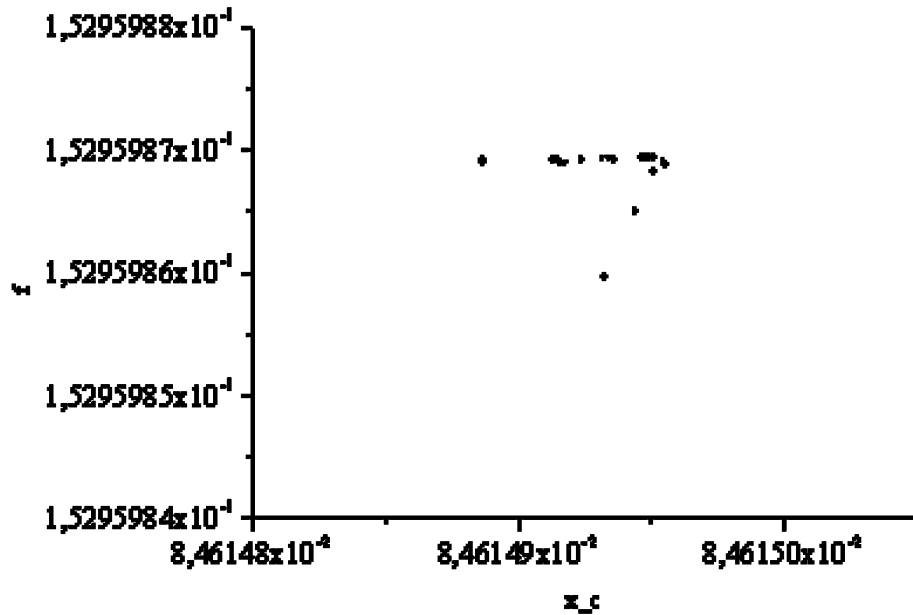


Рис. 3. Зависимость свободной энергии от центра тяжести орбиты гр.1

Основное преимущество системы (8) заключается в возможности ее естественной реализации на ЭВМ и исследования ее свойств численно. Связь (8) с (5) и (6) позволяет использовать разнообразие идей статистической механики, физики и математической физики для понимания свойств динамики, рассчитанной по схеме (8) [11,12,13,14,15,16,17,21,25].

3. Периодические орбиты в дискретном времени

Система (7) показывает, что пробная частица движется прямолинейно в течении пролетного времени h , а затем мгновенно меняет скорость движения по величине и направлению. Таким образом, мы изучаем движение свободно движущейся частицы в окружающей среде с актами мгновенного перерасеяния с учетом внешнего поля сил: потенциальных с малым возмущением силами вязкости переменного знака. Тот факт, что в расчетах мы учитываем до $\sim 10^8$ актов рассеяния, требует привлечения специальных методов анализа соответствующих численных данных ввиду их большого количества [8,13,14,24].

Одним из наиболее устоявшихся методов является вычисление временных средних, которые в дискретном времени имеют вид

$$\widehat{F}(n, x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F(g^j(x)), \quad (9)$$

где через g обозначено отображение (8), x - начальная точка, а n - число итераций (8).

Если x - точка периодической орбиты, т.е. для некоторого целого N имеем $g^N(x) = x$, то

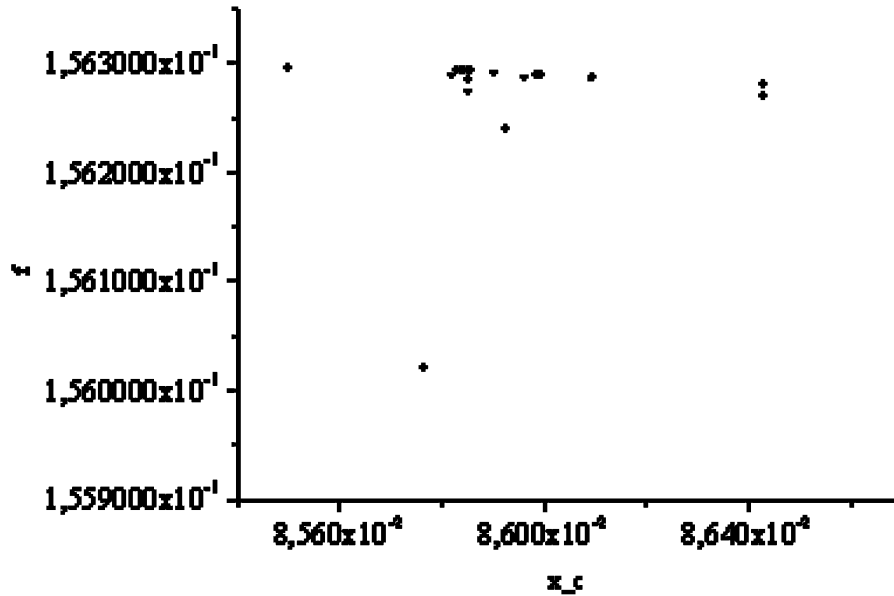


Рис. 4. Зависимость свободной энергии от центра тяжести орбиты гр.2

$$\widehat{F}(n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(g^j(x)) = \widehat{F}(x), \quad (10)$$

т.е. временные средние имеют предел при $n \rightarrow \infty$ и он равен среднему вдоль периодической орбиты. Последний факт определяет значение исследования периодических орбит. Это значение усиливается следующим соображением.

В окрестности периодической точки отображение $g^N(x)$ можно линеаризовать. В случае общего положения (т.е. при отсутствии специальных ограничительных условий) линейная часть позволяет разбить орбиты на три класса: асимптотически устойчивые ($\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\text{Re } \lambda_i < 0$); асимптотически неустойчивые ($\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\text{Re } \lambda_i > 0$); гиперболические ($\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 < 1$) [4,8,9,10].

Оказывается, для асимптотически устойчивых периодических орбит существует окрестность точки $x \in \mathbb{R}^2$, такая что $\forall y \in O_\varepsilon(x)$

$$\widehat{F}(n, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \widehat{F}(x), \quad (11)$$

причем, для асимптотически неустойчивых орбит имеет место аналог

$$\widehat{F}(n, y) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} \widehat{F}(x). \quad (12)$$

Этот факт оправдывает специальное название $\widehat{F}(x)$ - адиабатический инвариант [6,8,29].

Указанное поведение временных средних является особенностью слабо-диссипативной теории КАМ в отличие от классической, в которой поведение временных средних имеет более

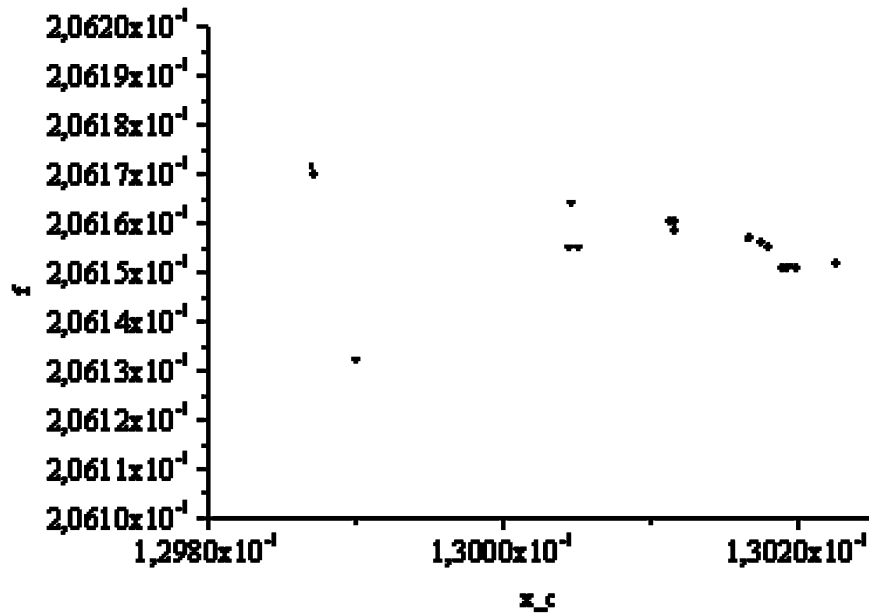


Рис. 5. Зависимость свободной энергии от центра тяжести орбиты гр.5

сложную природу [4,6,15,16,17,18,19,21,29]. В окрестности седловых периодических орбит поведение временных средних связано с понятием "хаотической динамики", обязанной явлению стохастической диффузии Арнольда [6,8,14,19]. Отметим здесь, что в слабо-диссипативной КАМ зачастую в окрестности асимптотически (не) устойчивых орбит лежат гиперболические, которые имеют средние вдоль седловой орбиты, мало ($\sim 10\%$) отличающиеся от значений вдоль асимптотически (не) устойчивых орбит, что ведет к замечательным свойствам стохастической диффузии Арнольда (например, возможности определения и вычисления таких характеристик динамики, как средняя длина пробега и т.п.). Важно подчеркнуть, что асимптотически (не) устойчивые орбиты поддаются экспериментальному изучению с подходящим разрешением в фазовом пространстве (характерный масштаб определяется вышеуказанными размерами "областей захвата" в (11) и (12)) [2,3,6,8,14,20,22,23, 26,28,30].

Некоторое неудобство работы с асимптотически (не) устойчивыми орбитами связано с их "принципиальной" дискретностью: в определенной окрестности (11), (12) асимптотически (не) устойчивой орбиты в фазовом пространстве нет других периодических орбит. Этот факт приводит к дискретности вычисляемых характеристик движения частицы в изучаемой модели [8,11,13,14,16,18,21,24,27,31].

Важно другое: мы приводим результаты обработки ~ 1000 асимптотически (не) устойчивых орбит. Эти результаты показывают наличие порядка $\sim 10 \div 20$ групп орбит, у которых адиабатические инварианты могут совпадать с весьма высокой точностью: расстояния между группами на порядки превышают "совпадение" данных внутри группы. Таким образом происходит "естественное" сжатие объемов информации, описывающих динамику.

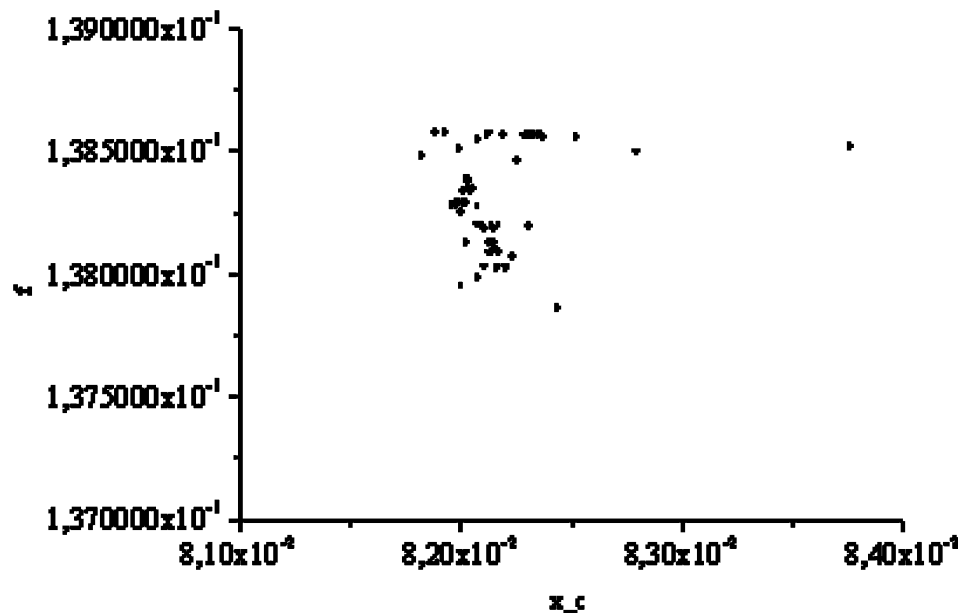


Рис. 6. Зависимость свободной энергии от центра тяжести орбиты гр.7

4. Группы симметрий в термодинамике

Мы отправляемся от такого термодинамического потенциала, как энергия u : в рассматриваемом нами случае невозмущенная система в непрерывном времени является гамильтоновой с гамильтонианом $u = \dot{x}^2/2 + U(x)$ (5). Фазовый портрет гамильтоновой системы имеет стационарную подгруппу (группу симметрий) в группе всех диффеоморфизмов фазовой плоскости. В подходящих случаях стационарная подгруппа содержит однопараметрические коммутативные подгруппы, порождаемые фазовыми потоками соответствующих векторных полей на фазовом пространстве. В случае гамильтоновости генератора, а также при наличии достаточно гладкого интегрирующего делителя гамильтониан является преобразованием Лежандра исходного гамильтониана [8,14].

В термодинамике используются четыре термодинамических потенциала, являющихся преобразованием Лежандра относительно подходящих фазовых переменных [20]. Ниже мы приводим графики расчетных величин соответствующих термодинамических потенциалов, показывающие особенности динамики. Точнее, мы используем средние величины, вычисленные вдоль периодических орбит. Графики мы предварительно снабжаем табл. 1 и 2. В этих таблицах приведены группы периодических асимптотически (не) устойчивых орбит. В каждой группе величина средней полной (невозмущенной) энергии $u = \dot{x}^2/2 + U(x)$ меняется в указанном диапазоне. Ширина зоны меньше расстояния до другой (иногда на порядки величин)[8,13,14].

Уместно отметить, что "контрастность" разбиения на группы возрастает с увеличением периода орбит. В области низких периодов мы видим шум, который может варьироваться по интенсивности [2,3,7,30].

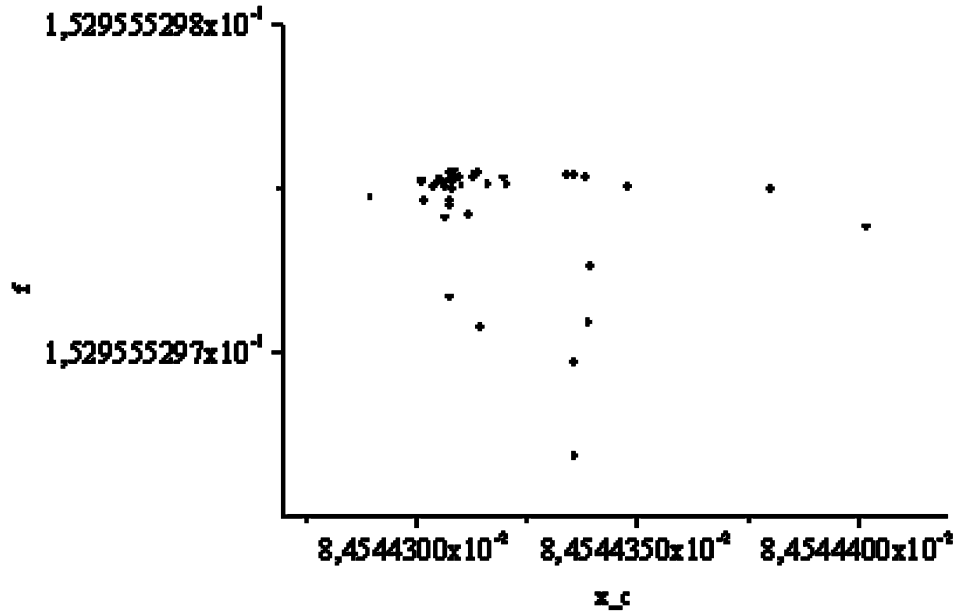


Рис. 7. Зависимость свободной энергии от центра тяжести орбиты гр.8

На рис. 1,2 приведены графики зависимости энтальпии $h = u + pv$ и свободной энергии $f = u - Ts$ от центра тяжести периодической орбиты x_c (здесь u - энергия, s - энтропия, v - объем, p - давление, T - температура). Указанные величины вычисляются для асимптотически (не) устойчивых орбит с помощью площади области захвата [8,9,11,13,14]. Показаны вместе асимптотически (не) устойчивые орбиты для значений $\varepsilon = -1.0E - 5$, $\mu = 5.93805E - 5$, $k = 1.261502$.

Часть характеристик с точностью до 10% может приписываться соответствующим гиперболическим орбитам, лежащим в области стохастической диффузии Арнольда.

Центр тяжести периодической орбиты определяется следующим образом

$$x_c = 1/N \sum_{j=1}^N x(g^j(\mathbf{x})),$$

где \mathbf{x} - точка периодической орбиты, а x - абсцисса соответствующей итерации $g^j(\mathbf{x})$ [3,4,5,6, 7,8,14].

На рис. 3 приведена расшифровка зависимости свободной энергии f от тяжести x_c с помощью фильтрации периодических орбит на группы в соответствии с величиной энергии u , указанной в табл. 1 и 2. Видно появление бифуркаций, качественно связанное с изменениями центра тяжести орбиты.

На рис. 8 показана зависимость свободной энергии f от размеров области захвата (которая для асимптотически (не) устойчивых орбит может, например, интерпретироваться как размер вихря, соответственно (анти) циклона.

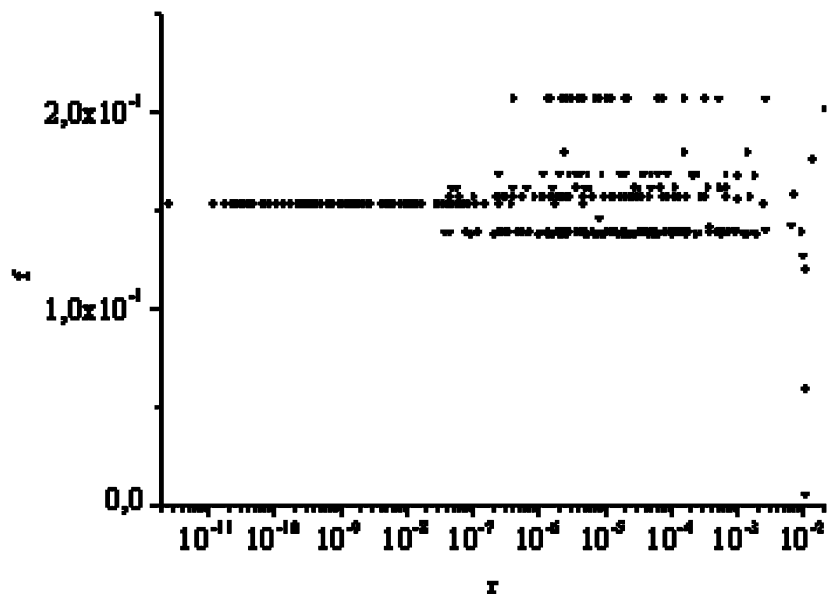


Рис. 8. Зависимость свободной энергии от размеров вихря всех орбит

На рис. 9 приведен общий вид для всех найденных периодических орбит. Затем, с увеличением разрешения приведены группы, для которых основной гамильтониан имеет постоянное значение.

Таблица 1

Неустойчивые фокусы

$N_{\text{группы}}$	$u \text{ min}$	$u \text{ max}$
1	1.529598686E-0001	1.529598695E-0001
2	1.562802784E-0001	1.562957006E-0001
3	1.607279249E-0001	1.609381684E-0001
4	1.676186886E-0001	1.677931781E-0001
5	2.061509114E-0001	2.061718280E-0001

Таблица 2

Устойчивые фокусы

$N_{\text{группы}}$	$u \text{ min}$	$u \text{ max}$
6	1.367901889E-0001	1.37932265E-0001
7	1.380262292E-0001	1.385728181E-0001
8	1.52955529749E-0001	1.52955529757E-0001

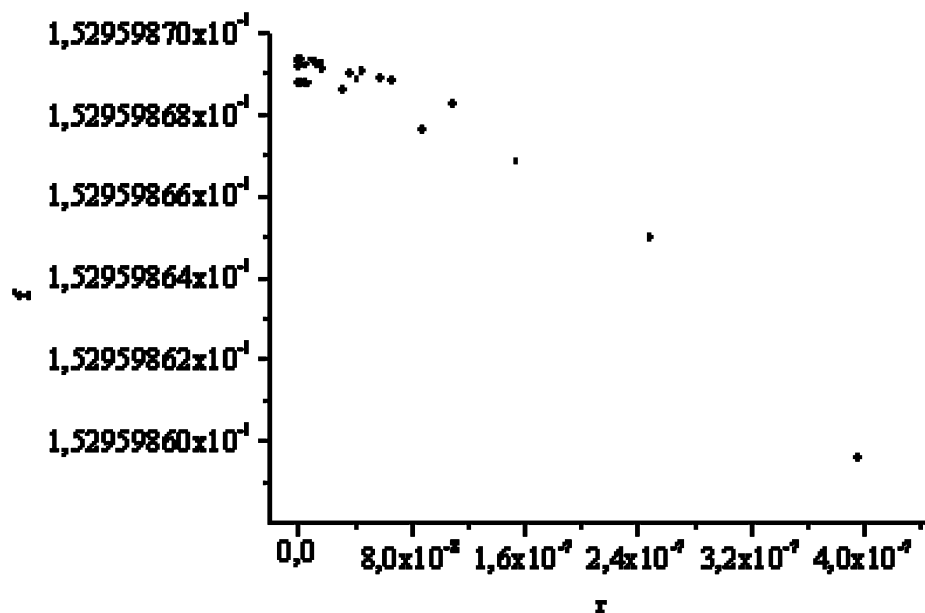


Рис. 9. Зависимость свободной энергии от размеров вихря гр.1

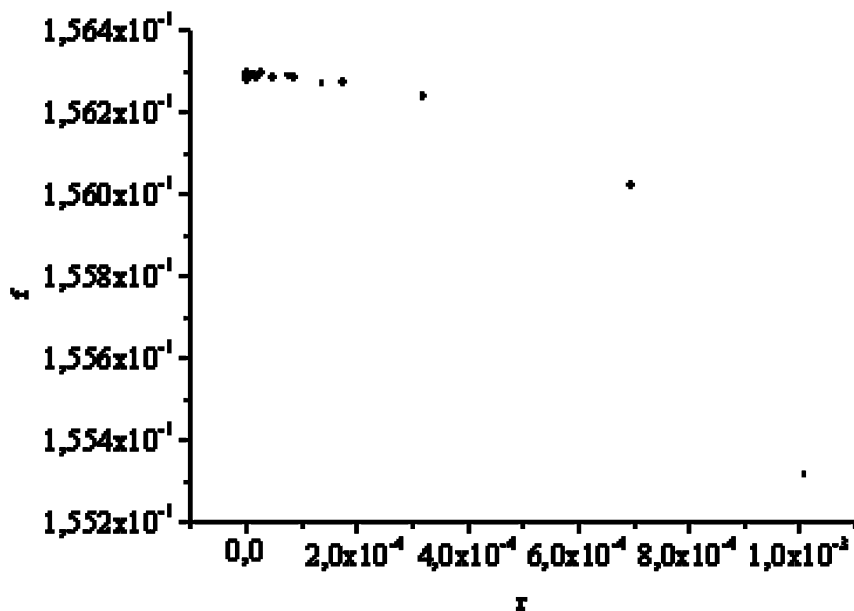


Рис. 10. Зависимость свободной энергии от размеров вихря гр.2

5. Заключение

Факт вырожденности энергетических уровней был установлен и, в частности, разрабо-

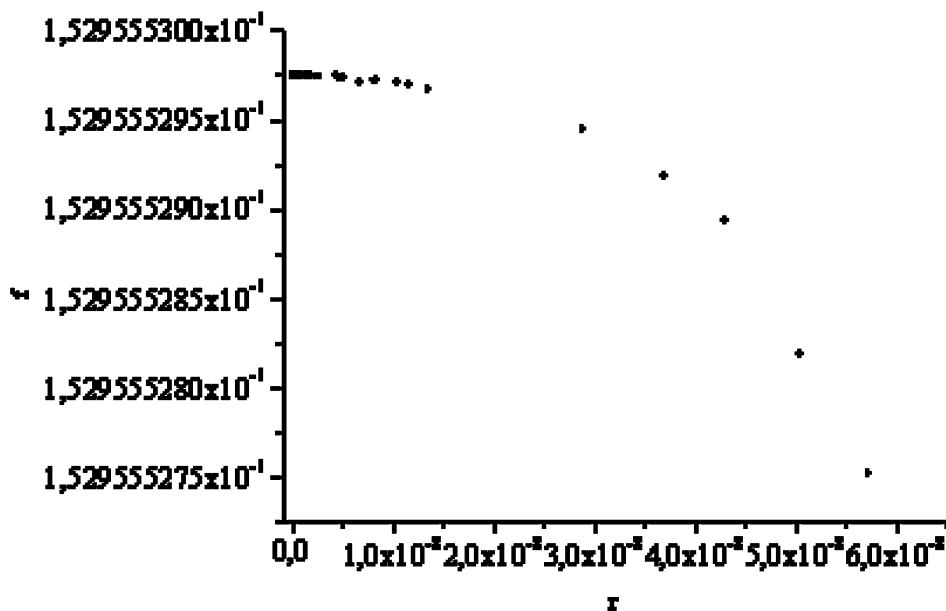


Рис. 13. Зависимость свободной энергии от размеров вихря гр.8

орбит в фазовом пространстве [13,14]. Заселение энергетических уровней в квантово-механических моделях апеллирует к принципу Паули, поверхностям Ферми в твердом теле, статистикам Бозе или Ферми в теории элементарных частиц.

Результаты, изложенные выше, показывают новые сценарии заселения энергетических орбит, снятия вырождений в области ансамблей частиц $\sim 10^4 \div 10^{13}$, т.е. в области разреженных газов. В частности, наша модель связывает энергии 5 неустойчивых уровней (истоков) с 3 устойчивыми уровнями (стоками). Полезно иметь в виду "переходные" гиперболические состояния, отвечающие стохастической диффузии и способствующие "рассеянию" энергии.

Возможность вычисления порядка 20 ÷ 40 физических параметров в широком диапазоне их изменения [8,10,11,13,14] позволяет эффективнее решать конструкционные, материаловедческие и т.п. проблемы, связанные с прохождением различных пучков частиц в окружающей сплошной среде. Включение групп симметрий возникающих самоорганизующихся структур показывает новые возможности проведения соответствующих экспериментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arrowsmith D.K., Cartwright J.H.E., Lansbury A.N., Place C.M. The Bogdanov-map: bi-furcations, mode locking, and chaos in a dissipative system // International Journal of Bifurcation and Chaos. -1993, v. 3. - №4. - P. 803-842.
2. Belotserkovskii O.V. Turbulence and Instabilities. - M: MZpress, 2003.
3. Bogdanov R.I., Nagornykh S.N., Bogdanov M.R.. New Nature of the Noise of Thermally Stimulated Electron Emission from Rods under Cyclic Torsion. // Journal of Surface Investigation, X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques. - 2007. - С. 157-166.
4. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978.

5. **Арнольд В.И.** Лекции о бифуркациях и версальных семействах // УМН. - 1972. -Т. 27. - № 5. - С. 119–184.
6. **Арнольд В.И., Авец А.** Эргодические проблемы классической механики. - Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999.
7. **Богданов Р.И., Богданов М.Р.** Турбулентность в рамках слабо-диссипативной версии теории КАМ / Тезисы докладов международной конференции "Анализ и особенности", посвященной семидесятилетию Владимира Игоревича Арнольда 20–24 августа. - М.: МГУ, 2007. - С. 35–38.
8. **Богданов Р.И.** Нелинейные динамические системы на плоскости и их приложения. - М.: Вузовская книга, 2003.
9. **Богданов Р.И.** Факторизация диффеоморфизмов над фазовыми портретами векторных полей на плоскости. //Функциональный анализ и его приложения. - 1997. -Т. 31. - Вып. 2. - С. 67-70.
10. **Богданов Р.И., Богданов М.Р.** Переход от развитой турбулентности к квазиравновесному состоянию //Научный Вестник МГУ ГА. - 2007. - № 114. - С. 50–55.
11. **Богданов Р.И., Богданов М.Р.** Слабо-диссипативная версия теории Колмогорова-Арнольда-Мозера: теория и практика расчетов // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2008. - Т. 48. - № 3. - С.73–90.
12. **Богданов Р.И., Богданов М.Р.** Структурообразование в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. //ДАН. -2008. - Т. 418. - № 6. - С. 754–758.
13. **Богданов Р.И., Гайдученко И.В., Расторгуев В.А., Тарасов Ю.И.** Спектрометрия в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера/ Труды семинара "Время, хаос и математические проблемы". -М.: Книжный дом "Университет", 1999. - С. 203–224.
14. **Богданов Р.И.** Фазовые портреты динамических систем на плоскости и их инварианты. - М.: Вузовская книга, 2008.
15. **Боголюбов Н.Н.** Собрание научных трудов: в 12 т. - Т.5.: Механика, 1939-1980 / под ред. И.И. Плакида, А.Д. Суханова. - М.: Наука, 2006.
16. **Больцман Л.** Избранные труды. Молекулярно-кинетическая теория газов. Термодинамика. Статистическая механика. Теория излучения. Общие вопросы физики. - М.: Наука, 1984.
17. **Бор Н.** Избранные научные труды: в 2 т. - М.: Наука, 1970, 1971. - Т.2.
18. **Бэкстер Р.** Точно решаемые модели в статистической механике. - М.: Мир, 1985.
19. **Заславский Г.М.** Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. - Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ижевский институт компьютерных исследований, 2010.
20. **Зоммерфельд А.** Термодинамика и статистическая физика. -М: Изд-во иностр. лит-ры. 1955.
21. **Рюэль Д.** Термодинамический формализм. Математические структуры классической равновесной статистической механики. -М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
22. **Ильющин А.А.** Механика сплошной среды. -М.: МГУ, 1990.
23. **Капица П.Л.** Научные труды. Физика и техника низких температур. - М.: Наука, 1989.
24. **Колмогоров А.Н.** Избранные труды. Кн. 1: Математика и механика. - М.: Наука, 1988.
25. **Ландау Л.Д.** Собрание трудов. - М.: Наука, 1969. - Т.1.
26. **Планк М.** Избранные труды. Термодинамика. Теория излучения и квантовая теория. Теория относительности. Статьи и речи.- М.:Наука, 1975.
27. **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика /пер. с англ. В.А. Гущина и В.Я. Митницкого /под ред. П.И. Чушкина. - М.: Мир, 1980.
28. **Седов Л.И.** Механика сплошной среды.: в 2 т. - М.: Наука, 1973.
29. **Синай Я.Г.** Современные проблемы эргодической теории //Современные проблемы математики. -М.:Физматгиз, 1995. - Вып. 31.
30. **Фриш У.** Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова /пер. с англ. А.Н. Соболевского /под ред М.Л. Бланка. - М.: ФАЗИС, 1998.
31. **Хайрер Э., Ваннер Г.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жёсткие и дифференциально-алгебраические задачи /пер. с англ. - М.: Мир, 1999.

THERMODYNAMIC SYMMETRIES IN WEAKLY-DISSIPATIVE THEORY КАМ

Bogdanov R. I, Bogdanov M. R , Kuzin P.S.

In the КАМ weakly-dissipative theory (a.k.a. the theory of almost open systems) we study the dynamical systems which are small perturbations of Hamiltonian systems in a class of all dynamical systems. The classical КАМ theory describes the dynamics of general positions of the Hamiltonian systems which are small perturbations

of completely integrable Hamiltonian systems. Words "almost, weakly" mean a possibility to use integrals of the unperturbed system for the analysis of dynamics. It allows to understand structure of arising quasi-equilibrium states in almost open dynamics: to compare interdependence of integrals with classical relations of mathematical physics. In particular, we cite the new numerical data on calculation of thermodynamic potentials of the elementary model. Their connection with stationary groups of dynamics (groups of interior symmetries) is also discussed. "The elementary model" is a system of the second order on a straight line with a field of the forces corresponding to an unharmonic potential; it is weakly perturbed by a frictional force with a friction coefficient depending affinely on a phase variable.

Key words: Hamiltonian dynamical systems, stochastic dynamics of jets.

Сведения об авторах

Богданов Рифкат Ибрагимович, 1950 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1972), доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института ядерной физики им. Д.В. Скобельцына Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, автор более 200 научных работ, область научных интересов - нелинейные уравнения математической физики, теория бифуркаций динамических систем.

Богданов Михаил Рифкатович, 1984 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (2006), кандидат физико-математических наук, старший преподаватель Московского государственного университета инженерной экологии, автор научных 20 работ, область научных интересов - нелинейные уравнения математической физики, теория бифуркаций динамических систем.

Кузин Петр Сергеевич, 1986 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (2008), аспирант Московского государственного университета инженерной экологии, автор 1 научной работы, область научных интересов - теория бифуркаций динамических систем.

Пропустите 2 пустые страницы

Пропустите пустую страницу

УДК 517.977

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ В ЗАДАЧЕ РЕАЛИЗАЦИИ ОТОБРАЖЕНИЙ ВХОД–ВЫХОД

А. В. ЕВСЕЕВ, В. Н. ЧЕТВЕРИКОВ¹

Решается задача реализации отображения вход – выход в виде уравнений состояния. Предложенный ранее алгоритм реализован в виде библиотеки процедур в среде символьных вычислений MAPLE. Работа разработанных процедур продемонстрирована на двух примерах.

Ключевые слова: компьютерная алгебра, теория управления, отображения вход-выход, задача реализации.

Современные методы нелинейной теории управления требуют сложных аналитических вычислений, которые невозможно проделать вручную, без применения компьютера. И хотя методы компьютерной алгебры для решения задач теории дифференциальных уравнений разрабатывались многими авторами, в доступной литературе эти методы изложены недостаточно.

В работе решается задача реализации отображения вход – выход в виде уравнений состояния. Разрабатываются методы компьютерной алгебры для решения конкретных задач реализации. Предложенный в [1] алгоритм модифицирован и реализован в виде библиотеки процедур в среде MAPLE. При этом разработанные процедуры предназначены только для сопровождения сложных символьных вычислений, а не для полного решения поставленной задачи. По нашему мнению, аналитические вычисления на компьютере следует сочетать с контролем человека и дополнительными численными расчетами. Это необходимо, так как системы аналитических вычислений в конкретной ситуации иногда не находят нужное решение или находят, но представляют полученный результат в неудобном виде. Тем не менее, применение компьютера значительно облегчает решение задачи. И данная работа еще раз доказывает это.

1. Задача реализации отображения вход – выход

Многие задачи теории управления формулируются на языке отображений вход – выход. Такая формулировка предполагает, что среди переменных технической системы выделены *входные* u_1, \dots, u_m (их совокупность называется также *управлением*) и *выходные* y_1, \dots, y_p переменные. В случае динамических систем те и другие понимаются как функции времени, а сама система понимается как преобразователь функций $u_q(t)$ в функции $y_i(t)$. Упомянутые задачи управления состоят в поиске таких функций $u_q(t)$, которые системой преобразуются в функции $y_i(t)$ требуемого вида.

Существует два распространённых способа описания отображения вход-выход.

В первом случае выход ($y \in \mathbb{R}^p$) непосредственно связывается с входом ($u \in \mathbb{R}^m$) при помощи дифференциальных уравнений:

$$y_i^{(k_i)} = \varphi_i(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k-1)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(s)}), \quad i = 1, \dots, p. \quad (1)$$

В системе (1) функции φ_i зависят от выходов y_j и их производных до порядка не выше $k_j - 1$, $j = 1, \dots, p$ и от входов u_q , $q = 1, \dots, m$ и их производных до порядка не выше s .

Уравнения системы (1) называют *уравнениями отображения вход – выход*.

¹Работа выполнена авторами при финансовой поддержке гранта НШ-4144.2010.1 ведущих научных школ и РФФИ, 10-07-00617.

Второе описание, кроме переменных входа и выхода, использует дополнительные переменные $x = (x_1, \dots, x_n)$, которые называют *переменными состояния*. Вход u изменяет состояние x системы в соответствии с системой

$$\dot{x} = f(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r_0)}), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

которую называют *уравнениями состояния*. При этом выход явно выражается через переменные состояния, управления и их производные до некоторого порядка r

$$y = h(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}), \quad y \in \mathbb{R}^p. \quad (3)$$

Будем считать управления гладкими функциями переменной t . При подстановке управления $u = u(t)$ как в систему (1), так и в систему (2) получаем в первом случае систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно выходов, а во втором случае — систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных состояния. Чтобы выход был однозначно определен, и в том и в другом случае нужно указать начальные условия для этих систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, отображение $u(t) \mapsto y(t)$ определено в случае, когда заданы соответствующие начальные условия. При этом задачи перехода от одного из описаний к другому предполагают нахождение как самих описаний, так и правил пересчета начальных условий. Например, эти правила могут задаваться невырожденной гладкой заменой переменных.

Выражения (3) определяют замену переменных, позволяющую перейти от описания (2)–(3) к описанию (1). *Задача реализации* — это задача перехода от описания (1) к эквивалентному описанию (2)–(3), т.е. поиск системы (2)–(3) и такой векторной функции

$$x = X(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k_0-1)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(s_1)}), \quad (4)$$

что при подстановке выражений (3) в систему (1) с учётом (2) и при подстановке (4) в систему (2)–(3) при условии (1) получаются верные тождества. Отметим, что рассматриваются только замены, не меняющие u .

От описания (1) к описанию (2)–(3) можно перейти с помощью следующей замены:

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = \dot{y}_1, \quad \dots, \quad x_{k_1} = y_1^{(k_1-1)}, \quad x_{k_1+1} = y_2, \quad x_{k_1+2} = \dot{y}_2, \quad \dots, \quad x_{k_1+\dots+k_p} = y_p^{(k_p-1)}.$$

Однако в этом случае уравнения (2) будут содержать производные управления u до порядка s включительно. В то же время многие алгоритмы управления используют уравнения состояния, не зависящие от производных управлений:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \quad (5)$$

Поэтому особый интерес представляют реализации вида (5)–(3), поиску которых и посвящена данная работа.

2. Теоретическое обоснование алгоритма

Сформулируем полученные ранее результаты [1, 2], устанавливающие возможность приведения системы (1) к виду (5)–(3), а также свойства соответствующих функций h_j , $j = 1, \dots, p$ из (3).

Пусть \mathcal{F} — кольцо гладких функций, каждая из которых зависит от t , переменных y , u и некоторого конечного (но произвольного) числа их производных. Рассмотрим следующий модуль 1-форм над кольцом \mathcal{F} :

$$\mathcal{H}_1 = \text{span}_{\mathcal{F}} \{dt, dy_1, d\dot{y}_1, \dots, dy_1^{(k_1-1)}, dy_2, d\dot{y}_2, \dots, dy_p^{(k_p-1)}, du_1, \dots, du_1^{(s-1)}, du_2, \dots, du_m^{(s-1)}\}.$$

Для 1-формы $\omega \in \mathcal{H}_1$ обозначим через $\dot{\omega}$ производную в силу системы (1). Определим по индукции

$$\mathcal{H}_{k+1} = \{\omega \in \mathcal{H}_k : \dot{\omega} \in \mathcal{H}_k\}, \quad k \geq 1.$$

Можно показать [1], что \mathcal{H}_k есть модуль над \mathcal{F} и $dt \in \mathcal{H}_k$ для всех $k \geq 1$.

Для каждого выхода y_i обозначим через \varkappa_i минимальный порядок производной в силу системы (1), для которого $y_i^{(\varkappa_i)}$ зависит от $u_q^{(s)}$ для некоторого $q = 1, \dots, m$. Если такого \varkappa_i не существует, положим $\varkappa_i = \infty$.

Теорема 1. [1]. а) Реализация вида (5)–(3) локально существует для системы (1) тогда и только тогда, когда модуль \mathcal{H}_{s+1} имеет базис из точных 1-форм. При этом в качестве компонент векторной функции X из (4) можно взять функции, дифференциалы которых вместе с dt образуют базис \mathcal{H}_{s+1} .

Если такая реализация существует, то:

б) $n = k_1 + \dots + k_p$;

в) функция $y_i = h_i$ в (3) зависит только от t, x , если $\varkappa_i > s$, и зависит от $t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(s-\varkappa_i)}$, если $\varkappa_i \leq s$.

Таким образом, для решения задачи реализации нужно, в частности, найти базис модуля \mathcal{H}_{s+1} и проверить интегрируемость соответствующего кораспределения. Если условие интегрируемости не выполняется, то реализации вида (5)–(3) не существует. Если кораспределение интегрируемо, то необходимо найти какой-либо базис модуля \mathcal{H}_{s+1} вида $\{dt, dx_1, \dots, dx_n\}$, где x_1, \dots, x_n — функции тех же переменных, от которых зависят правые части уравнений (1). Векторная функция $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ и есть та функция, которая определяет искомую замену (4). Даже при условии использования компьютера данные вычисления для конкретной системы нетривиальны. Удобнее сформулировать условия существования реализации вида (5)–(3) и функции X на языке векторных полей.

Обозначим через η_1, \dots, η_N переменные

$$t, y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, \dot{y}_2, \dots, y_p^{(k_p-1)}, u_1, \dots, u_1^{(s-1)}, u_2, \dots, u_m^{(s-1)},$$

дифференциалы $d\eta_1, \dots, d\eta_N$ которых порождают \mathcal{H}_1 .

Лемма 1. [2]. Для любого $j \geq 1$ базис модуля \mathcal{H}_j можно выбрать из 1-форм вида $\sum_{l=1}^N f_l d\eta_l$, где функции f_1, \dots, f_N зависят только от

$$t, y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, \dot{y}_2, \dots, y_p^{(k_p-1)}, u_1, \dots, u_1^{(j+s-2)}, u_2, \dots, u_m^{(j+s-2)}. \quad (6)$$

Обозначим через \mathcal{E} пространство с координатами (6) при $j = s + 1$. По лемме 1 для любого $j = 1, \dots, s + 1$ базис модуля \mathcal{H}_j можно выбрать из 1-форм на \mathcal{E} . А значит, при их вычислении можно использовать методы конечномерной дифференциальной геометрии. Рассмотрим на \mathcal{E} векторное поле

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^p \sum_{l_\alpha=0}^{k_\alpha-2} y_\alpha^{(l_\alpha+1)} \frac{\partial}{\partial y_\alpha^{(l_\alpha)}} + \sum_{\alpha=1}^p \varphi_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha^{(k_\alpha-1)}} + \sum_{\beta=1}^m \sum_{k=0}^{2s-2} u_\beta^{(k+1)} \frac{\partial}{\partial u_\beta^{(k)}}$$

и распределения

$$\mathcal{D}_i = \text{span}_{C^\infty(\mathcal{E})} \{B_1, \dots, B_m, \text{ad}_D B_1, \dots, \text{ad}_D B_m, \dots, \text{ad}_D^{i-1} B_1, \dots, \text{ad}_D^{i-1} B_m\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где

$$B_\beta = \frac{\partial}{\partial u_\beta^{(s)}}, \quad \beta = 1, \dots, m.$$

Сопряженное дополнение к модулю \mathcal{D}_i в \mathcal{H}_1 обозначим через \mathcal{D}_i^T

$$\mathcal{D}_i^T = \{\omega \in \mathcal{H}_1 : \forall X \in \mathcal{D}_i \quad X] \omega \equiv 0\}.$$

Теорема 2. [2]. Для $j = 2, \dots, s + 1$ имеем $\mathcal{H}_j = \mathcal{D}_{j-1}^T$.

Отметим, что так как $dt \in \mathcal{H}_j$, то t есть первый интеграл распределения \mathcal{D}_{j-1} при $j = 2, \dots, s+1$.

Из теорем 1 и 2 получаем

Следствие 1. *Реализация вида (5)–(3) локально существует для системы (1) тогда и только тогда, когда распределение \mathcal{D}_s интегрируемо. При этом в качестве компонент векторной функции X из (4) можно взять набор первых интегралов распределения \mathcal{D}_s , который вместе с t образует функционально независимую систему.*

3. Алгоритм решения задачи реализации

Постановка задачи: для отображения вход-выход, заданного уравнениями (1), требуется проверить условия существования реализации вида (5)–(3) и в случае существования найти такую реализацию, а также замену переменных (4), приводящую систему (1) к виду (5)–(3).

Из следствия 1 вытекает следующий алгоритм решения этой задачи.

1. Используя коммутатор векторных полей, вычисляем распределения \mathcal{D}_i для $i = 1, \dots, s$ и проверяем их интегрируемость. Если какое-либо из данных распределений не интегрируемо, то делаем вывод, что система (1) не имеет реализации вида (5)–(3) и прекращаем работу.

2. Если все распределения интегрируемы, то дополняем t до максимального набора функционально независимых первых интегралов распределения \mathcal{D}_s и формируем векторную функцию (4).

3. Обращаем замену

$$(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k-1)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(s)}) \longrightarrow (t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(s)}), \quad (7)$$

которая определяется векторной функцией (4). Вычисляем выражения (3).

4. Дифференцируем функцию (4) в силу системы (1) и исключаем из полученных выражений выходы y с помощью соотношений (3). Получаем реализацию (5).

Известны следующие три способа проверки интегрируемости распределения.

1. Проверка регулярности и инволютивности распределения (условий Фробениуса на языке векторных полей).

2. Поиск базиса $\omega_1, \dots, \omega_k$ сопряжённого кораспределения и проверка для него условий Фробениуса на языке дифференциальных форм

$$d\omega_j \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (8)$$

3. Непосредственный поиск первых интегралов $\{g\}$ распределения \mathcal{D} интегрированием системы уравнений в частных производных первого порядка

$$X_i(g) = 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad (9)$$

где X_1, \dots, X_q — векторные поля, порождающие распределение \mathcal{D} . При этом количество искомых функционально независимых решений этой системы должно совпадать с разностью размерностей пространства и распределения \mathcal{D} .

4. Особенности использования Maple

Приведённый выше алгоритм реализован в среде символьных вычислений Maple в виде процедуры **realization_varchange**, осуществляющей поиск замены переменных (4), и программного кода, выполняющего построение реализации (5)–(3).

Векторные поля в процедуре представляются как данные типа **Vector**. Для работы с ними используются стандартные пакеты **LinearAlgebra** и **VectorCalculus** (о Maple см.,

например, [5]). Распределения в рассматриваемой задаче определяются как линейные комбинации векторных полей, поэтому удобно хранить распределения как матрицы, составленные из столбцов координат соответствующих векторных полей.

Процедура **realization_varchange** включает в себя процедуру вычисления коммутатора векторных полей. Для вычисления коммутатора используется функция вычисления матрицы Якоби **VectorCalculus[Jacobian]**.

На вход процедуры **realization_varchange** подаётся система, записанная в переменную типа *list*, и параметры p, m, k_1, \dots, k_p, s системы в переменной того же типа. Переменные входа u и выхода y и их производные преобразуются в имена. Производится формирование списка координат пространства \mathcal{E} и векторных полей D и B_1, \dots, B_m .

Далее происходит выполнение алгоритма решения задачи реализации.

Для проверки интегрируемости распределений \mathcal{D}_i , $i = 1, \dots, s$ решаются системы вида (9) с помощью функции **pdsolve**, то есть интегрируемость проверяется непосредственно, а не по условиям Фробениуса. Это позволяет избежать возможной некорректной работы процедуры определения ранга **LinearAlgebra[Rank]** в случае функциональных матриц. Причина некорректной работы заключается в том, что процедура **LinearAlgebra[Rank]** выполняет приведение матрицы к ступенчатому виду и предназначена для работы с числовыми матрицами. В случае же функциональных матриц ранг, вычисленный этой процедурой, может оказаться выше истинного за счёт невозможности символично преобразовать выражение, являющееся в действительности тождественным нулем. Поэтому для проверки правильности работы данной процедуры необходимо анализировать численные значения ранга функциональной матрицы в нескольких точках.

Если проинтегрировать систему вида (9) при помощи функции **pdsolve** не удаётся, то проверка интегрируемости осуществляется в терминах 1-форм. Для этого сначала вычисляется базис сопряжённого к \mathcal{D}_i кораспределения \mathcal{H}_{i+1} . Базис кораспределения вычисляется как базис ядра линейного оператора, соответствующего матрице распределения (матрице, составленной из столбцов координат векторных полей, порождающих распределение). Поиск базиса ядра осуществляется для транспонированной матрицы распределения с помощью функции **LinearAlgebra[NullSpace]**, результатом работы которой является множество переменных, имеющих тип **Vector**. Эти переменные преобразуются в 1-формы путём умножения их на ковектор дифференциалов координат, после чего для базиса из k 1-форм проверяется условие Фробениуса (8). Для работы с 1-формами используется пакет **diforms**. Отметим, что распределение может являться интегрируемым, однако его первые интегралы при этом могут не выражаться аналитически.

В случае, когда удастся вычислить необходимое количество функционально независимых первых интегралов распределения \mathcal{D}_s , для поиска обратной к (7) замены переменных используется функция **solve**. Если обратная замена не может быть найдена, следует попробовать найти её в ручную.

5. Примеры работы программы

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\ddot{y}_1 = y_1 y_2^2 + \frac{\ddot{u}}{y_2}, \quad \dot{y}_2 = u.$$

В Maple система задаётся следующим образом:

```
>sys1_string:="[diff(y[1],t$2)=y[1]*y[2]^2+diff(u,t$2)/y[2],diff(y[2],[t])=y[2]^2]";
>sys1:=subs({seq(y[i]=y[i](t),i=1..2),u=u[1](t)},parse(sys1_string));
```

Задаются также параметры системы

`>opts1:={k=[2,1], p=2, m=1, s=2};`

Применение процедуры **realization_varchange** даёт следующий набор функционально независимых первых интегралов распределения \mathcal{D}_2

$$x_1 = y_2, \quad x_2 = u - y_2 y_1, \quad x_3 = \dot{u} - y_2 \dot{y}_1 + y_2^2 y_1.$$

После соответствующей замены переменных получаем реализацию

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2, & \dot{x}_2 &= x_3 - 2x_1 u + 2x_1 x_2, & \dot{x}_3 &= x_1^2(u - x_2), \\ y_1 &= \frac{u - x_2}{x_1}, & y_2 &= x_1. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае удалось получить реализацию вида (5)–(3). Однако, как следует из теоремы 1, такая реализация существует не всегда. Но даже тогда, когда условия теоремы 1 не выполняются, процедура **realization_varchange** позволяет в некоторых случаях понизить порядок производной управления в системе. Для этого достаточно найти такое максимальное s_0 ($s_0 < s$), что все распределения $\mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_{s_0}$ интегрируемы. Затем необходимо выполнить шаги 2–4 приведённого выше алгоритма с заменой \mathcal{D}_s на \mathcal{D}_{s_0} . Получим реализацию более общего вида (2)–(3), где $r_0 = s - s_0$.

Пример 2 (упрощённая модель подъёмного крана). Рассмотрим следующую систему [3,4]

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g \sin x_1}{R} - \frac{2x_2}{R} \dot{R} - \frac{\cos x_1}{R} \ddot{D}, \quad (10)$$

где x_1 — угол между канатом и вертикальной осью, x_2 — скорость изменения угла x_1 , R — длина каната, D — положение тележки. Входом системы является (R, D) , выходом (x_1, x_2) (подробности см. в [3]).

В работе [4] показано, что для системы (10) не существует реализации, не содержащей производных управлений, а также получены два частных вида реализаций.

Применение процедуры **realization_varchange** позволяет найти следующую замену переменных

$$\tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_2 = \dot{D} + \frac{x_2 R}{\cos x_1}.$$

В итоге получается реализация

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \frac{\cos \tilde{x}_1 (\tilde{x}_2 - \dot{D})}{R}, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \frac{\sin \tilde{x}_1 \tilde{x}_2^2 - 2 \sin \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \dot{D} + \sin \tilde{x}_1 \dot{D}^2 - \tilde{x}_2 \dot{R} + \dot{R} \dot{D}}{R} - g \operatorname{tg} \tilde{x}_1, \\ x_1 &= \tilde{x}_1, \\ x_2 &= \frac{(\tilde{x}_2 - \dot{D}) \cos \tilde{x}_1}{R}, \end{aligned}$$

которая отличается от найденных в [4]. В данном случае удалось понизить порядок производной входа D на единицу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Преобразования описаний нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. - 2009. - Т. 45. -№ 5. -С. 706–715.
2. Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Минимальные реализации нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. -2010 - Т. 46. -№ 11. -С. 1612–1622.
3. Fliess M., Lévine J., Rouchon P. Generalized state variable representation for a simplified crane description // Int. J. Control. -1993. -V. 58. -P. 277–283.
4. Delaleau E., Respondek W. Lowering the Orders of Derivatives of Controls in Generalized State Space Systems // Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control. -Boston: Birkhäuser. -1995. V. 5. - №. 3. -P. 1–27
5. Аладьев В.З. Основы программирования в Maple. -Таллин: Международная академия ноосферы, 2006.

USING COMPUTER ALGEBRA IN THE PROBLEM OF REALIZATION OF
INPUT–OUTPUT MAPS

Evseev A.V., Chetverikov V.N.

The problem of realization of input-output map in the form of state equations is solved. The earlier algorithm is realised in the form of library of procedures (LIB) in the environment of MAPLE symbolical calculations. The developed procedures are applied to two worked out examples.

Key words: computer algebra, control theory, input-output maps, realization problem.

Сведения об авторах

Евсеев Артём Владимирович, 1987 г.р., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана (2010), аспирант МГТУ им. Н.Э. Баумана, автор 1 научной работы, область научных интересов — теория управления, уравнения отображения вход-выход, реализации, компьютерная алгебра.

Четвериков Владимир Николаевич, 1958 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1980), доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования МГТУ им. Н.Э. Баумана, автор 41 научной работы, область научных интересов — преобразования уравнений в частных производных, функционально–дифференциальные уравнения, симметрии, законы сохранения, нелинейные динамические системы с управлением, динамическая обратная связь, плоские системы.

Пропустите 2 пустые страницы

Пропустите пустую страницу

УДК 519.46

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ДИНАМИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

А.М. ЛУКАЦКИЙ¹

В статье предлагается обобщение известного представления уравнений Эйлера трёхмерной гидродинамики в форме Бернулли на случай риманова многообразия произвольной размерности. Дается интерпретация давления несжимаемой жидкости в терминах алгебраических инвариантов.

Ключевые слова: гидродинамика, уравнения Эйлера трёхмерной гидродинамики, алгебраические инварианты.

Введение

Пусть имеется 3-мерное риманово многообразие M с метрикой \langle, \rangle_x . Будем рассматривать M как область течения идеальной несжимаемой жидкости. Уравнения Эйлера динамики жидкости с полем скоростей u на M можно записать в форме Бернулли [1-3] или Громеки – Лембы [2]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \wedge \operatorname{rot} u + \nabla \alpha. \quad (1)$$

Преимущество формы Бернулли состоит в том, что она позволяет провести локальный анализ уравнений Эйлера, в частности, вычислить производную скалярного квадрата поля скоростей жидкости в каждой точке $x \in M$. А именно, рассмотрим квадратичную векторнозначную форму

$$b(u, u) = u \wedge \operatorname{rot} u. \quad (2)$$

Из свойств векторного и скалярного произведений в каждой точке $x \in M$ имеем

$$\langle b(u, u), u \rangle_x = \langle u \wedge \operatorname{rot} u, u \rangle_x = - \langle \operatorname{rot} u, u \wedge u \rangle_x = 0. \quad (3)$$

Нашей целью будет обобщить форму Бернулли уравнений 3-мерной гидродинамики на случай компактного риманова многообразия произвольной размерности, причем в таком варианте, чтобы выполнялся аналог свойства (3). В n -мерном случае удастся построить аналог квадратичной формы (2) со свойством (3). При этом используются только свойства оператора ковариантного дифференцирования римановой геометрии. Аналог (с точки зрения интегральных инвариантов) формы Бернулли построен в [3] путем перехода к сопряженному векторным полям пространству дифференциальных форм.

1. Необходимые геометрические конструкции

Пусть дано n -мерное ориентированное компактное риманово многообразие M . Обозначим через \langle, \rangle_x скалярное произведение в касательном пространстве $T_x M$. Уравнения Эйлера динамики идеальной несжимаемой жидкости на M имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_u u + \nabla p = 0. \quad (4)$$

Здесь u – бездивергентное векторное поле, $\nabla_u u$ — ковариантная производная векторного поля u вдоль самого себя, p – давление жидкости.

¹Работа выполнена при частичной поддержке фонда РФФИ, грант 07-01-00230.

Известно, что в семействе римановых связностей, соответствующих заданной римановой метрике, существует единственная с нулевым кручением, т.е. со свойством

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0,$$

называемая связностью Леви-Чивиты. Предположим далее, что риманова связность на M является связностью Леви-Чивиты. Пусть X, Y, Z – гладкие векторные поля на M .

Будем далее использовать известное дифференциально-геометрическое тождество [4, п. 3.5]. Пусть X, Y, Z – произвольные гладкие векторные поля на M . Тогда в каждой точке $x \in M$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle = & \frac{1}{2}(X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle + \\ & + \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle). \end{aligned}$$

Для гладкого векторного поля u на M имеем

$$\langle \nabla_u u, u \rangle_x = \frac{1}{2}u(\langle u, u \rangle)_x = \langle \nabla(\langle u, u \rangle)_x, u_x \rangle, \quad (5)$$

причем (5) также выполняется не интегрально, а в каждой точке $x \in M$. Введем теперь векторнозначную квадратичную форму

$$b(u, u) = -\nabla_u u + \frac{1}{2}\nabla(\langle u, u \rangle). \quad (6)$$

Используя (5), получаем тождество, которое также выполняется в каждой точке $x \in M$

$$\langle b(u, u)_x, u_x \rangle = 0. \quad (7)$$

Зададим функцию

$$\alpha = -p - \frac{1}{2}\langle u, u \rangle. \quad (8)$$

Используя (4) и (6), получаем следующую форму уравнений Эйлера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b(u, u) + \nabla\alpha. \quad (9)$$

Заметим, что для трехмерной гидродинамики известно, что функция α в уравнениях Эйлера в форме Бернулли (1) связана с давлением жидкости формулой (8), [2].

Таким образом, форма (9) уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости на компактном римановом многообразии M является полным аналогом уравнений Эйлера в форме Бернулли (1).

Вычисление формы $b(u, u)$ для n -мерного риманова многообразия может быть самостоятельной непростой задачей. Поэтому для практических приложений полезно получить ее выражение в системе локальных координатах на многообразии.

Выберем атлас на многообразии M . Пусть (x_1, \dots, x_n) – локальные координаты в некоторой окрестности $U \subset M$ этого атласа. Обозначим через $G = (g_{i,j})$ – матрицу коэффициентов римановой метрики в локальных координатах (x_1, \dots, x_n) . Введем векторные поля $e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$. Имеем

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{i,j}^k e_k. \quad (10)$$

Здесь функции $\Gamma_{i,j}^k$ – компоненты римановой связности относительно карты U , [4].

Рассмотрим выражение $\nabla_u u$. Запишем векторное поле u в локальных координатах

$$u = \sum_{i=1}^n u_i e_i. \quad (11)$$

Из свойств ковариантной производной имеем

$$\nabla_u u = u(u) + \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{i,j}^k u_i u_j e_k. \quad (12)$$

Далее будем использовать известное тождество [4, п. 3.5] для записи $\Gamma_{i,j}^k$ в локальных координатах через коэффициенты метрического тензора

$$\sum_l g_{l,k} \Gamma_{l,j}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{j,k}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{k,i}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_k} \right). \quad (13)$$

Отсюда в локальных координатах имеем

$$G(\nabla_u u) = G(u(u)) + \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_{j,r} u_r u_j \left(\frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_r} + \frac{\partial g_{i,r}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{r,j}}{\partial x_i} \right) \right) e_i.$$

Далее

$$G(u(u)) = \sum_i \left(\sum_{r,j} g_{i,r} \frac{\partial u_r}{\partial x_j} u_j \right) e_i.$$

Представим далее $G(\nabla_u u)$ в виде суммы трех выражений $G(\nabla_u u) = F + H + K$, где

$$F = \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_{j,r} u_r u_j \left(\frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_r} + \frac{\partial g_{i,r}}{\partial x_j} - 2 \frac{\partial g_{r,j}}{\partial x_i} \right) \right) e_i, \quad (14)$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_{r,j} (2g_{i,r} \frac{\partial u_r}{\partial x_j} u_j - g_{r,j} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_i} u_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} u_r \right)) \right) e_i, \quad (15)$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_{r,j} \left(\frac{\partial g_{r,j}}{\partial x_i} u_r u_j + g_{r,j} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_i} u_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} u_r \right) \right) \right) e_i. \quad (16)$$

Заметим далее, что $K = G(G^{-1}K)$, причем непосредственно проверяется, что

$$G^{-1}K = \frac{1}{2} \nabla \langle u, u \rangle.$$

Таким образом, имеем

$$\nabla_u u = G^{-1}F + G^{-1}H + \frac{1}{2} \nabla \langle u, u \rangle. \quad (17)$$

Выражение

$$G^{-1}F + G^{-1}H = \nabla_u u - \frac{1}{2} \nabla \langle u, u \rangle \quad (18)$$

есть форма $-b(u, u)$ (6) и, в частности, не зависит от выбора локальных координат.

В локальных координатах проверим выполнимость тождества (7).

Имеем $-\langle b(u, u), u \rangle = (Gb(u, u), u) = P + Q$, где

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i,j,r} u_i u_j u_r \left(\frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_r} + \frac{\partial g_{i,r}}{\partial x_j} - 2 \frac{\partial g_{r,j}}{\partial x_i} \right).$$

и

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{i,j,r} (2g_{i,r} \frac{\partial u_r}{\partial x_j} u_j u_i - g_{r,j} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_i} u_j u_i \right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} u_i u_i).$$

Перестановкой индексов суммирования получаем $P = 0, Q = 0$. Это дает прямое доказательство свойства (7) через локальные координаты.

Проведенные рассуждения имеют локальный характер и легко обобщаются на случай некомпактного риманова многообразия M . Здесь надо рассматривать векторные поля, быстро убывающие на бесконечности, как это делается в [5]. Наиболее типичным примером такой ситуации является $M = R^n$.

2. Приложения к динамике сплошной среды

2.1. Случай идеальной несжимаемой жидкости

Особенность формы Бернулли уравнений динамики идеальной жидкости состоит в том, что свойство (7) выполняется в каждой точке области течения жидкости. В частности, из формы Бернулли уравнений динамики трехмерной жидкости сразу следует формула для производной скалярного квадрата поля скоростей в каждой точке

$$\frac{\partial \langle u, u \rangle_x}{\partial t} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right)_x = 2(u, \nabla \alpha) = 2u(\alpha)_x.$$

В общем случае, используя (7) и (8), получаем аналог этого свойства для произвольного компактного риманова многообразия

$$\frac{\partial \langle u, u \rangle_x}{\partial t} = 2u(\alpha)_x. \quad (19)$$

Возникает вопрос, существуют ли нестационарные течения жидкости, для которых

$$u(\alpha) = 0. \quad (20)$$

Для таких течений $|u(x)|$ сохраняется в любой точке $x \in M$.

Пример 2.1.

Рассмотрим векторное поле на 3-мерном торе

$$u = (a, \sin(f(x)), \cos(f(x))). \quad (21)$$

Это векторное поле можно представить в виде

$$u = h + v, h = (a, 0, 0), v = (0, \sin(f(x)), \cos(f(x))).$$

Легко проверяется, что движение идеальной несжимаемой жидкости с такими начальными условиями будет решением типа бегущей волны, [6-7]. Оно задается формулами

$$u^t = (a, \sin(f(x - at)), \cos(f(x - at))). \quad (22)$$

Сразу видно, что $|u(x)|$ сохраняется в каждой точке. Далее имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = af'(x - at)(0, -\cos(f(x - at)), \sin(f(x - at))).$$

Также

$$\text{rot } u = f'(x - at)(0, \sin(f(x - at)), \cos(f(x - at))).$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \times \text{rot } u. \quad (23)$$

Заметим, в этом случае в форме Бернулли член $\alpha = 0$.

Представляют также интерес ситуации, когда член α в форме Бернулли содержит только составляющую – кинетическую энергию (течения жидкости с постоянным давлением).

Пример 2.2.

Рассмотрим векторное поле на трехмерном торе

$$u = (a, b(x), c(x, y)). \quad (24)$$

Имеем

$$\operatorname{rot} u = (c'_y, -c'_x, b'_x),$$

$$u \times \operatorname{rot} u = (bb'_x + cc'_x, -ab'_x + cc'_y, -ac'_x - bc'_y) = \frac{1}{2} \langle u, u \rangle + h.$$

Здесь $h = (0, -ab'_x, -ac'_x - bc'_y)$. Имеем $\operatorname{div} h = 0$. Отсюда $\alpha = \frac{1}{2} \langle u, u \rangle$, а $p = 0$, т.е. векторное поле (24) имеет постоянное давление. Вычислим решение уравнений Эйлера с начальным условием (24). Будем искать решение в виде

$$u^t = (a, b(x(t)), c(x(t), y(t))). \quad (25)$$

Уравнения Эйлера приводят к системе

$$\dot{x} = -a, \quad \dot{y} = -b(x).$$

Отсюда получаем следующее решение

$$u^t = (a, b(x - at), c(x - at, y - \int_0^t b(x - a\tau) d\tau)). \quad (26)$$

Итак, мы получили новый класс решений уравнений Эйлера, продолжаемых во времени на бесконечность. В [8] установлено, что для решений с постоянным давлением сохраняется не только интеграл от скалярного квадрата поля скоростей жидкости, но и от любой его степени. Это легко проверить по формулам (26), сделав при интегрировании замену переменных $x' = x - at, y' = y - \int_0^t b(x - a\tau) d\tau$.

Приведем аналог рассмотренных гидродинамических течений для уравнения Ландау–Лифшица [9]

$$\frac{\partial m}{\partial t} = m \times Nu. \quad (27)$$

Здесь m – гладкое векторное поле на 3-х мерном ориентированном римановом многообразии M , N – эллиптический дифференциальный оператор. Пусть M – трехмерный тор, а $N = \Delta$ оператор Лапласа. Возьмем векторное поле

$$u = (f_1, f_2, f_3), \quad (28)$$

где $f_i, i = 1, 2, 3$ – собственные функции оператора Лапласа f с одним и тем же собственным числом λ . Пусть

$$m = a + u. \quad (29)$$

Здесь a постоянное векторное поле на торе. Уравнение (27) приводится к системе

$$\frac{\partial a}{\partial t} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda a \times u, \quad (30)$$

которая имеет решение

$$u(t) = a + \exp(\lambda t \operatorname{ad} a)(u). \quad (31)$$

Здесь $\operatorname{ad} a$ – оператор присоединенного действия в алгебре Ли $so(3)$, изоморфной трехмерному векторному пространству с операцией векторного произведения, $\exp : so(3) \rightarrow SO(3)$, – экспоненциальное отображение ортогональной группы.

Предложение 2.1.

Пусть дано стационарное решение u уравнения Ландау–Лифшица вида (28), причем $\lambda \neq 0$.

Тогда u неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Дадим векторному полю u возмущение $u_a = a + u$. Возьмем произвольную точку x , в которой $u(x) \neq 0$. Тогда из (31) и свойств ортогональной группы следует, что для заданного $\delta > 0$ можно подобрать такие a , $|a| < \delta$ и t , что $u_a(t) = a - u$. Отсюда следует предложение.

Рассмотрим также другой тип решений уравнения Ландау–Лифшица. Пусть

$$m = a + fb, \quad (32)$$

где a, b – постоянные векторные поля на торе, f – произвольная гладкая функция. Имеем

$$\frac{\partial m}{\partial t} = (a + fb) \times \Delta(f)b = \Delta(f)a \times b. \quad (33)$$

Отсюда получаем следующее решение

$$m(t) = a + fb + (\exp(t\Delta(f) \operatorname{ad} a) - \operatorname{Id})(b). \quad (34)$$

По аналогии с предыдущим предложением получаем

Предложение 2.2.

Пусть дано стационарное решение уравнения Ландау–Лифшица вида (28) с $a = 0, b \neq 0$, т.е. $u = fb$, причем $\Delta f \neq 0$.

Тогда u неустойчиво по Ляпунову.

Пример 2.2.

Рассмотрим модифицированный вариант (A, B, C) – поля на трехмерном торе.

$$v = (-A \sin z + C \cos y, -B \sin x + A \cos z, -C \sin y + B \cos x). \quad (35)$$

От стандартного (A, B, C) – поля [1] оно отличается тем, что $\operatorname{rot} v = -v$, тогда как стандартное совпадает со своим ротором. Для векторного поля (35) имеем также $\Delta v = -v$. Пусть теперь

$$u = h + v, \quad (36)$$

где $h = (a, b, c)$ – постоянное векторное поле. Уравнение Ландау–Лифшица для (36) приводится к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -h \times v \quad (37)$$

и согласно (31) имеет решение

$$u(t) = h + \exp(-t \operatorname{ad} h)(v). \quad (38)$$

Пример 2.3.

Рассмотрим теперь течение идеальной несжимаемой жидкости с начальными условиями (36). Здесь также получается решение типа бегущей волны [6-7], которое имеет вид

$$w(t) = h + v(t), \quad (39)$$

где $v(t) = (-A \sin(z - ct) + C \cos(y - bt), -B \sin(x - at) + A \cos(z - ct), -C \sin(y - bt) + B \cos(x - at))$. Уравнения Эйлера приобретают вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -h \times v + \nabla \alpha. \quad (40)$$

Здесь $\alpha(t)$ вычисляется как градиентная составляющая выражения $u \wedge \operatorname{rot} u$ и имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & bB \sin(x - at) - cB \cos(x - at) + cC \sin(y - bt) - aC \cos(y - bt) + \\ & + aA \sin(z - ct) - bA \cos(z - at). \end{aligned}$$

Давление дается формулой $p = -\frac{1}{2} \langle u, u \rangle - \alpha$ и с точностью до аддитивной константы имеет вид

$$p = 2(AC \sin(z - ct) \cos(y - bt) + AB \sin(x - at) \cos(z - ct) + CB \sin(y - bt) \cos(x - at)).$$

2.2. Случай идеальной сжимаемой жидкости

Рассмотрим теперь идеальную сжимаемую жидкость. Ее динамика также подчинена уравнению (4), где b дается (6), с той разницей, что не требуется бездивергентность поля скоростей u , а давление p подчинено некоторому закону, позволяющему однозначно получить решение. Здесь так же, как и для случая несжимаемой жидкости уравнение приводится к виду (9), причем функция α дается (8).

Пример 2.4.

Рассмотрим идеальную сжимаемую жидкость с начальными условиями (36) и силой давления, задаваемой по закону $p = -\frac{1}{2} \langle u, u \rangle$. Тогда в уравнениях Эйлера идеальной жидкости (8) член $\alpha = 0$ и они приобретают вид (37). Таким образом, получаем, что идеальная сжимаемая жидкость в этом случае эволюционирует так же, как решение уравнения Ландау–Лифшица (намагниченность ферромагнетика) при тех же начальных условиях.

2.3. Случай вязкой жидкости

Рассмотрим вязкую несжимаемую жидкость. Ее динамика подчинена уравнению Навье–Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_u u + \nabla p - \nu \Delta u = 0. \quad (41)$$

Здесь u – бездивергентное векторное поле, ν – вязкость. Уравнение Навье–Стокса имеет аддитивную составляющую $\nabla_u u + \nabla p$ и поэтому также приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b(u, u) + \nabla \alpha + \nu \Delta u, \quad (42)$$

где b дается (6), а функция α – (8).

Для уравнения Навье–Стокса аналог свойства (19) для произвольного ориентированного риманова многообразия M имеет вид

$$\frac{\partial \langle u, u \rangle_x}{\partial t} = 2(u(\alpha)_x + \nu \langle \Delta u, u \rangle_x). \quad (43)$$

В случае некомпактного многообразия M здесь также надо рассматривать векторные поля, быстро убывающие на бесконечности по аналогии с [5].

В заключение остановимся на виде функции давления p несжимаемой жидкости. Предположим, что риманово многообразие M является локально евклидовым. Тогда в локально евклидовых координатах $x = (x_1, \dots, x_n)$ уравнение Навье–Стокса имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u(u) + \nabla p - \nu \Delta u = 0. \quad (44)$$

Отсюда

$$\Delta p = -\operatorname{div} u(u) = -\sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Имеем

$$\sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \operatorname{tr} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Обозначим теперь через $(\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x))$ – собственные числа матрицы $\frac{\partial u}{\partial x}$. Из условия $\operatorname{div} u = 0$ имеем $\sum_i \lambda_i = 0$. Используя жорданову нормальную форму матрицы, получаем

$\text{tr} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_i \lambda_i^2$. Далее имеем $0 = (\sum_i \lambda_i)^2 = \sum_i \lambda_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} \lambda_i * \lambda_j$. В итоге получаем следующее

Предложение 2.3.

Для давления p несжимаемой жидкости в локально-евклидовом случае справедливо равенство

$$\Delta p = 2 \sum_{i \neq j} \lambda_i * \lambda_j. \quad (45)$$

Следствие 2.1.

Характеристический многочлен $\xi(\lambda)$ матрицы $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точке $x \in M$ имеет вид

$$\xi = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-2} \frac{\Delta p(x)}{2} \lambda^{n-2} + \dots, \quad (46)$$

а для трехмерного случая

$$\xi = -\lambda^3 - \frac{\Delta p(x)}{2} \lambda + \det\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right). \quad (47)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Математические методы в классической механике. - М.: Эдиториал УРСС, 2000.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды. -М.: Наука, 1973. - Т. 1
3. Арнольд В. И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике. - М.: МЦМНО УРСС, 2007.
4. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом - М.: Мир, 1971.
5. Лукацкий А. М. О геометрии группы диффеоморфизмов, сохраняющих меру некомпактного многообразия//Научный Вестник МГТУ ГА. - 2005. - № 91. - С. 36-47.
6. Лукацкий А. М. О примерах бесконечномерных групп Ли и некоторых физических приложениях//Научный Вестник МГТУ ГА.- 2003. - № 64. - С. 7-17.
7. Лукацкий А. М. О применении одного класса бесконечномерных групп Ли к динамике несжимаемой жидкости//Прикладная математика и механика. - 2003. - № 5. - С. 784-794.
8. Лукацкий А. М. Структурно-геометрические свойства бесконечномерных групп Ли в применении к уравнениям математической физики. - Ярославль: ЯрГУ им. П. Г. Демидова, 2010.
9. Алексовский В. А., Лукацкий А. М. Нелинейная динамика намагниченности ферромагнетиков и движение обобщенного твердого тела с группой токов // Теоретическая и математическая физика. - 1990. - Т. 85. - № 1. - С. 1090-1096.

THE GEOMETRICAL APPROACH IN DYNAMICS OF THE CONTINUOUS MEDIUM

Lukatsky A.M.

A generalization of the Bernoulli representation of Euler 3D-hydrodynamics equations for a Riemannian manifold of arbitrary dimension is obtained. Examples are analyzed. An interpretation of the incompressible fluid pressure in terms of algebraic invariants is given.

Key words: hydrodynamics, Riemannian manifolds, algebraic invariants.

Сведения об авторе

Лукацкий Александр Михайлович, 1949 г.р., окончил МГУ (1972), доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник института энергетических исследований (ИНЭИ) РАН, автор 90 научных работ, область научных интересов – бесконечномерные группы Ли в применении к уравнениям математической физики.

Пропустите 2 пустые страницы

Пропустите пустую страницу

УДК 514.763.8, 514.747.3, 517.956.3

НАКРЫТИЕ УРАВНЕНИЯ dKP–hyperCR И МНОГОЗНАЧНЫЕ СТРУКТУРЫ ЭЙНШТЕЙНА–ВЕЙЛЯ

О.И. МОРОЗОВ¹

Статья представлена доктором технических наук, профессором Самохиным А.В.

Мы применяем технику контактных интегрируемых расширений к псевдогруппе симметрий уравнения dKP–hyper CR. Это позволяет найти накрытие этого уравнения и построить многозначные структуры Эйнштейна–Вейля.

Ключевые слова: псевдогруппы Ли, накрытия дифференциальных уравнений.

Введение

Мы рассматриваем уравнение

$$u_{yy} = u_{tx} + (b u_x - c u_y) u_{xx} + c u_x u_{xy}, \quad (1)$$

$b = \text{const}$, $c = \text{const}$, введенное М. Дунайским [8] как редукция второго небесного уравнения Плебанского [24]. При $c = 0$ и $b \neq 0$ уравнение (1) совпадает с потенциальной формой уравнения Хохлова–Заболотской [12], иначе называемого бездисперсионным уравнением Кадомцева–Петвиашвили (dKP). При $b = 0$ и $c \neq 0$ уравнение (1) совпадает с уравнением hyperCR, изучавшимся в работах [23, 7]. Соответствующая уравнению (1) структура Эйнштейна–Вейля имеет вид

$$\begin{cases} h &= (dy - c u_x dt)^2 - 4(dx + (c u_y - b u_x) dt) dt, \\ \omega &= -c u_{xx} dy + ((c^2 u_x + 4b) u_{xx} - 2c u_{xy}) dt. \end{cases} \quad (2)$$

В работе [8] для уравнения (1) была предложена пара Лакса

$$\begin{cases} q_t &= ((c z - b) u_x + c u_y + z^2) q_x + b(z u_{xx} + u_{xy}) q_z, \\ q_y &= (c u_x + z) q_x + b u_{xx} q_z. \end{cases} \quad (3)$$

Она содержит дифференцирование по дополнительной независимой переменной z . Условие совместности $q_{ty} = q_{yt}$ для системы (3) вместе с требованием $u_z = 0$ совпадает с уравнением (1). При этом уравнение $u_z = 0$ не следует из (3).

При $b \neq 0$ и $c \neq 0$ простое масштабное преобразование

$$t = c^4 b^{-3} \tilde{t}, \quad x = c^2 b^{-1} \tilde{x}, \quad y = -c^3 b^{-2} \tilde{y} \quad (4)$$

дает после отбрасывания тильд следующее уравнение

$$u_{yy} = u_{tx} + (u_x + u_y) u_{xx} - u_x u_{xy}. \quad (5)$$

В этой статье мы находим накрытие [13–16] для уравнения (5). Мы применяем метод, предложенный в [21], и находим контактное интегрируемое расширение структурных

¹Работа выполнена при частичной поддержке российско-тайваньского гранта 95WFE0300007 (грант РФФИ 06-01-89507-ННС) и совместного гранта 09-01-92438-КЭа РФФИ и Consortium E.I.N.S.T.E.I.N (Италия).

уравнений псевдогруппы симметрий уравнения (5), из которого находим накрытие. Мы используем этот результат для построения многозначных структур Эйнштейна–Вейля (2) аналогично тому, как в статье [20] были построены многозначные решения уравнения dKP.

1. Основные обозначения

1.1. Накрытия дифференциальных уравнений

Пусть $\pi_\infty: J^\infty(\pi) \rightarrow \mathbb{R}^n$ — расслоение джетов бесконечного порядка локальных сечений расслоения $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Координаты на $J^\infty(\pi)$ имеют вид (x^i, u_I) , где $I = (i_1, \dots, i_k)$ — симметричные мультииндексы, $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, $u_\emptyset = u$, и для любого локального сечения f расслоения π существует сечение $j_\infty(f): \mathbb{R}^n \rightarrow J^\infty(\pi)$, такое что $u_I(j_\infty(f)) = \frac{\partial^{\#I} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}$, $\#I = \#(i_1, \dots, i_k) = k$. Полные производные на $J^\infty(\pi)$ определены в локальных координатах формулами

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_{Ii} \frac{\partial}{\partial u_I}$$

(здесь и далее мы подразумеваем суммирование по повторяющимся (мульти)индексам). Эти векторные поля коммутируют всюду на $J^\infty(\pi)$: $[D_i, D_j] = 0$ при $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Дифференциальное уравнение $F(x^i, u_K) = 0$ задает подмногообразие $\mathcal{E}^\infty = \{D_I(F) = 0 \mid \#I \geq 0\} \subset J^\infty(\pi)$, где $D_I = D_{i_1} \circ \dots \circ D_{i_k}$ при $I = (i_1, \dots, i_k)$. Мы обозначаем через \bar{D}_i ограничения D_i на \mathcal{E}^∞ .

В локальных координатах накрытие над уравнением \mathcal{E}^∞ представляет собой расслоение $\tilde{\mathcal{E}}^\infty = \mathcal{E}^\infty \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{E}^\infty$ с координатами слоя v^γ , $\gamma \in \{1, \dots, N\}$ или $\gamma \in \mathbb{N}$, снабженное продолженными полными производными

$$\tilde{D}_i = \bar{D}_i + T_i^\gamma(x^j, u_I, v^\beta) \frac{\partial}{\partial v^\gamma}, \quad (6)$$

такими что

$$[\tilde{D}_i, \tilde{D}_j] = 0 \iff (x^i, u_I) \in \mathcal{E}^\infty. \quad (7)$$

Действие \tilde{D}_i на координаты слоя v^γ дает систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$v_{x^i}^\gamma = T_i^\gamma(x^j, u_I, v^\beta). \quad (8)$$

Равенство (7) эквивалентно следующему требованию: условие совместности переопределенной системы (8) совпадает с уравнением \mathcal{E}^∞ . Система (8) является частным случаем общей конструкции преобразования Бэклунда [15, § 3.8]. Исключение функции u из (8) дает систему уравнений в частных производных для функций v^γ . Эта система называется *накрывающим уравнением*. Система (8) определяет продолженные полные производные (6), поэтому мы можем сказать, что она задает накрытие.

В терминах дифференциальных форм накрытие задается 1-формами [27]

$$\tau^\gamma = dv^\gamma - T_i^\gamma(x^j, u_I, v^\beta) dx^i, \quad (9)$$

такими что

$$d\tau^\gamma \equiv 0 \pmod{\tau^\beta, \bar{\vartheta}_I} \iff (x^i, u_I) \in \mathcal{E}^\infty, \quad (10)$$

где $\bar{\vartheta}_I$ — ограничения контактных форм $\vartheta_I = du_I - u_{I,k} dx^k$ на \mathcal{E}^∞ .

1.2. Структурная теория Картана псевдогрупп Ли

Пусть M — многообразие размерности n . Локальным диффеоморфизмом на M называется диффеоморфизм $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \hat{\mathcal{U}}$ двух открытых подмножеств M . Псевдогруппой \mathfrak{G} на

M называется совокупность локальных диффеоморфизмов на M , которая замкнута относительно композиции (если композиция определена), содержит тождественное преобразование многообразия M и вместе с каждым локальным диффеоморфизмом содержит обратный диффеоморфизм. *Псевдогруппой Ли* называется псевдогруппа, локальные диффеоморфизмы которой являются аналитическими решениями инволютивной системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Метод Картана для изучения псевдогрупп Ли основан на возможности охарактеризовать преобразования из псевдогруппы в терминах инвариантных дифференциальных 1-форм, называемых *формами Маурера–Картана*. В общем случае формы Маурера–Картана $\omega^1, \dots, \omega^m$ бесконечномерной псевдогруппы Ли \mathfrak{G} определены на прямом произведении $M \times \tilde{M} \times G$, где \tilde{M} — пространство параметров продолжения [22, Ch. 12], G — конечномерная группа Ли и $m = \dim M + \dim \tilde{M}$. Формы ω^i независимы и содержат только дифференциалы координат на $M \times \tilde{M}$, в то время как их коэффициенты также зависят от координат на G . Эти формы определяют псевдогруппу \mathfrak{G} в следующем смысле: локальный диффеоморфизм $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \hat{\mathcal{U}}$ на M принадлежит \mathfrak{G} тогда и только тогда, когда существует локальный диффеоморфизм $\Psi: \mathcal{W} \rightarrow \hat{\mathcal{W}}$ на $M \times \tilde{M} \times G$, такой что $\rho \circ \Psi = \Phi \circ \rho$ для проекции $\rho: M \times \tilde{M} \times G \rightarrow M$ и формы ω^j инвариантны относительно Ψ , то есть

$$\Psi^*(\omega^i|_{\hat{\mathcal{W}}}) = \omega^i|_{\mathcal{W}}. \quad (11)$$

Выражения для внешних дифференциалов форм ω^i в терминах самих этих форм дают *структурные уравнения Картана* псевдогруппы \mathfrak{G}

$$d\omega^i = A_{\gamma j}^i \pi^\gamma \wedge \omega^j + B_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad B_{jk}^i = -B_{kj}^i. \quad (12)$$

Формы π^γ , $\gamma \in \{1, \dots, \dim G\}$ являются линейными комбинациями форм Маурера–Картана μ^γ группы Ли G и форм ω^i . Коэффициенты $A_{\gamma j}^i$ и B_{jk}^i либо постоянны, либо являются функциями от инвариантов $U^\kappa: M \rightarrow \mathbb{R}$, $\kappa \in \{1, \dots, l\}$, $l < \dim M$, псевдогруппы \mathfrak{G} , так что $\Phi^*(U^\kappa|_{\hat{\mathcal{U}}}) = U^\kappa|_{\mathcal{U}}$ для каждого $\Phi \in \mathfrak{G}$. В последнем случае дифференциалы функций U^κ суть инвариантные 1-формы, поэтому они являются линейными комбинациями форм ω^j

$$dU^\kappa = C_j^\kappa \omega^j, \quad (13)$$

причем коэффициенты C_j^κ зависят только от инвариантов U^1, \dots, U^l .

Уравнения (12) должны быть совместными, то есть должны выполняться следующие условия

$$d(d\omega^i) = 0 = d(A_{\gamma j}^i \pi^\gamma \wedge \omega^j + B_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k). \quad (14)$$

Поэтому должны существовать выражения

$$d\pi^\gamma = W_{\lambda j}^\gamma \chi^\lambda \wedge \omega^j + X_{\beta\epsilon}^\gamma \pi^\beta \wedge \pi^\epsilon + Y_{\beta j}^\gamma \pi^\beta \wedge \omega^j + Z_{jk}^\gamma \omega^j \wedge \omega^k \quad (15)$$

с некоторыми дополнительными 1-формами χ^λ , такие что правые части равенств (14) оказываются тождественно равными нулю после подстановки (12), (13) и (15). Кроме того, из (13) следует, что правые части уравнений

$$d(dU^\kappa) = 0 = d(C_j^\kappa \omega^j) \quad (16)$$

должны быть тождественно равными нулю после подстановки (12) и (13).

Формы π^γ неинвариантны относительно псевдогруппы \mathfrak{G} . Соответственно структурные уравнения (12) не меняются при замене $\pi^\gamma \mapsto \pi^\gamma + z_j^\gamma \omega^j$ для некоторых параметрических

коэффициентов z_j^γ . Размерность $r^{(1)}$ линейного пространства этих коэффициентов удовлетворяет неравенству

$$r^{(1)} \leq n \dim G - \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \sigma_k, \quad (17)$$

где *редуцированные характеры Картана* σ_k определены равенствами

$$\sigma_k = \max_{u_1, \dots, u_k} \text{rank } \mathbb{A}_k(u_1, \dots, u_k) - \sum_{j=1}^{k-1} \sigma_j$$

с матрицами \mathbb{A}_k , определенными индуктивно формулами

$$\mathbb{A}_1(u_1) = (A_{\gamma j}^i u_1^j), \quad \mathbb{A}_l(u_1, \dots, u_l) = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{l-1}(u_1, \dots, u_{l-1}) \\ A_{\gamma j}^i u_l^j \end{pmatrix},$$

[3, § 5], [22, Def. 11.4]. Система форм ω^k *инволютивна*, если обе части в (17) равны [3, § 6], [22, Def. 11.7].

Фундаментальные теоремы Картана [3, §§ 16, 22–24], [6], [26, §§ 16, 19, 20, 25, 26], [25, §§ 14.1–14.3] утверждают, что для псевдогруппы Ли существует множество форм Маурера–Картана, причем их структурные уравнения удовлетворяют условиям совместности и инволютивности; обратно, если уравнения (12), (13) удовлетворяют условиям совместности (14), (16) и инволютивности, то существует совокупность 1-форм $\omega^1, \dots, \omega^m$ и функций U^1, \dots, U^l , для которых выполнены уравнения (12) и (13). Тогда уравнения (11) определяют локальные диффеоморфизмы из некоторой псевдогруппы Ли.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим расслоение $J^2(\pi)$ джетов второго порядка локальных сечений расслоения $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi: (x^1, \dots, x^n, u) \mapsto (x^1, \dots, x^n, u)$. Дифференциальная 1-форма ϑ на $J^2(\pi)$ называется *контактной формой*, если она равна нулю на любом 2-джете локального сечения f расслоения π : $j_2(f)^* \vartheta = 0$. В локальных координатах каждая контактная форма является линейной комбинацией форм $\vartheta_0 = du - u_i dx^i$, $\vartheta_i = du_i - u_{ij} dx^j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $u_{ji} = u_{ij}$. Локальный диффеоморфизм $\Delta: J^2(\pi) \rightarrow J^2(\pi)$, $\Delta: (x^i, u, u_i, u_{ij}) \mapsto (\hat{x}^i, \hat{u}, \hat{u}_i, \hat{u}_{ij})$ называется *контактным преобразованием*, если для любой контактной 1-формы $\hat{\vartheta}$ форма $\Delta^* \hat{\vartheta}$ также является контактной. Обозначим через $\text{Cont}(J^2(\pi))$ псевдогруппу контактных преобразований на $J^2(\pi)$. Рассмотрим 1-формы

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= a \vartheta_0, \quad \Theta_i = g_i \Theta_0 + a B_i^k \vartheta_k, \quad \Xi^i = c^i \Theta_0 + f^{ik} \Theta_k + b_i^k dx^k, \\ \Theta_{ij} &= a B_i^k B_j^l (du_{kl} - u_{klm} dx^m) + s_{ij} \Theta_0 + w_{ij}^k \Theta_k, \end{aligned} \quad (18)$$

определенные на $J^2(\pi) \times \mathcal{H}$, где \mathcal{H} — открытое подмножество $\mathbb{R}^{(2n+1)(n+3)(n+1)/3}$ с локальными координатами $(a, b_i^k, c^i, f^{ik}, g_i, s_{ij}, w_{ij}^k, u_{ijk})$, $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, такими что $a \neq 0$, $\det(b_i^k) \neq 0$, $f^{ik} = f^{ki}$, $s_{ij} = s_{ji}$, $w_{ij}^k = w_{ji}^k$, $u_{ijk} = u_{ikj} = u_{jik}$, где (B_i^k) — обратная матрица для матрицы (b_i^k) . Как доказано в статье [19], формы (18) являются формами Маурера–Картана для псевдогруппы $\text{Cont}(J^2(\pi))$, так что локальный диффеоморфизм $\tilde{\Delta}: J^2(\pi) \times \mathcal{H} \rightarrow J^2(\pi) \times \mathcal{H}$ удовлетворяет условиям $\tilde{\Delta}^* \hat{\Theta}_0 = \Theta_0$, $\tilde{\Delta}^* \hat{\Theta}_i = \Theta_i$, $\tilde{\Delta}^* \hat{\Xi}^i = \Xi^i$ и $\tilde{\Delta}^* \hat{\Theta}_{ij} = \Theta_{ij}$ тогда и только тогда, когда он является проектируемым на $J^2(\pi)$ и его проекция $\Delta: J^2(\pi) \rightarrow J^2(\pi)$ является контактным преобразованием. Структурные уравнения для $\text{Cont}(J^2(\pi))$ имеют вид

$$\begin{aligned} d\Theta_0 &= \Phi_0^0 \wedge \Theta_0 + \Xi^i \wedge \Theta_i, \\ d\Theta_i &= \Phi_i^0 \wedge \Theta_0 + \Phi_i^k \wedge \Theta_k, \\ d\Xi^i &= \Phi_0^0 \wedge \Xi^i - \Phi_k^i \wedge \Xi^k + \Psi^{i0} \wedge \Theta_0 + \Psi^{ik} \wedge \Theta_k, \\ d\Theta_{ij} &= \Phi_i^k \wedge \Theta_{kj} + \Phi_j^k \wedge \Theta_{ki} - \Phi_0^0 \wedge \Theta_{ij} + \Upsilon_{ij}^0 \wedge \Theta_0 + \Upsilon_{ij}^k \wedge \Theta_k + \Xi^k \wedge \Theta_{ijk}, \end{aligned}$$

где дополнительные формы $\Phi_0^0, \Phi_i^0, \Phi_i^k, \Psi^{i0}, \Psi^{ij}, \Upsilon_{ij}^0, \Upsilon_{ij}^k$ и Θ_{ijk} зависят от дифференциалов координат на \mathcal{H} .

ПРИМЕР 2. Пусть \mathcal{E} — дифференциальное уравнение второго порядка с одной зависимой и n независимыми переменными. Мы рассматриваем \mathcal{E} как подмногообразие в $J^2(\pi)$. Пусть $\text{Cont}(\mathcal{E})$ — псевдогруппа контактных симметрий для \mathcal{E} . Она состоит из всех контактных преобразований на $J^2(\pi)$, которые отображают \mathcal{E} на себя. Пусть $\iota_0: \mathcal{E} \rightarrow J^2(\pi)$ — вложение, и $\iota = \iota_0 \times \text{id}: \mathcal{E} \times \mathcal{H} \rightarrow J^2(\pi) \times \mathcal{H}$. Формы Маурера–Картана псевдогруппы $\text{Cont}(\mathcal{E})$ получаются из форм $\theta_0 = \iota^* \Theta_0, \theta_i = \iota^* \Theta_i, \xi^i = \iota^* \Xi^i$ и $\theta_{ij} = \iota^* \Theta_{ij}$ алгоритмически с помощью процедур метода эквивалентности Картана [3–6, 9, 11, 22] [10, 18, 19].

2. Структурные уравнения псевдогруппы симметрий уравнения dKP -hyperCR

Мы используем метод, обсуждавшийся в предыдущем разделе, для вычисления форм Маурера–Картана и структурных уравнений псевдогруппы симметрий уравнения (5). Ниже приведены структурные уравнения только для форм $\theta_0, \theta_j, \xi^j$ с $j \in \{1, 2, 3\}$; инволютивная система структурных уравнений выписана в приложении.

Мы имеем

$$\begin{aligned}
d\theta_0 &= \eta_1 \wedge \theta_0 + \xi_1 \wedge \theta_1 + \xi_2 \wedge \theta_2 + \xi_1 \wedge \theta_1 + \xi_3 \wedge \theta_3, \\
d\theta_1 &= \frac{1}{2} \eta_1 \wedge \theta_1 + \frac{1}{4} \eta_2 \wedge (\theta_0 + 8\theta_3) + \frac{1}{16} (24(\theta_{22} - U\xi_1 - \xi_2) - 5\xi_3) \wedge \theta_1 + 2\theta_2 \wedge \theta_3 \\
&\quad + \frac{1}{8} (11\theta_2 - 16V\theta_{22} + 8\theta_{23} + 4(2V - 1)\xi_2 + (8V - 3U)\xi_3) \wedge \theta_0 + \xi_1 \wedge \theta_{11} \\
&\quad + \xi_2 \wedge \theta_{12} + \xi_3 \wedge \theta_{13}, \\
d\theta_2 &= \frac{1}{16} (8(\eta_1 + \theta_{22} - U\xi_1 - \xi_2) - 3\xi_3) \wedge \theta_2 + \xi_1 \wedge \theta_{12} + \xi_2 \wedge \theta_{22} + \xi_3 \wedge \theta_{23}, \\
d\theta_3 &= \eta_2 \wedge \theta_2 + (\eta_1 + \theta_{22} - U\xi_1 - \xi_2 - \frac{1}{4}\xi_3) \wedge \theta_3 + \frac{5}{64} (8\theta_{22} - \xi_2 + 3\xi_3) \wedge \theta_0 + \xi_1 \wedge \theta_{13} \\
&\quad + \xi_2 \wedge \theta_{23} + \xi_3 \wedge \theta_{12}, \\
d\xi_1 &= -\frac{1}{16} (8\eta_1 + 24(\theta_{22} + \xi_2) - 5\xi_3) \wedge \xi_1, \\
d\xi_2 &= \frac{1}{8} (5\theta_0 + 8V\theta_2 + 8\theta_3 - 4U\xi_2) \wedge \xi_1 + \frac{1}{16} (8(\eta_1 - \theta_{22}) + 3\xi_3) \wedge \xi_2 - \eta_2 \wedge \xi_3, \\
d\xi_3 &= -(2\eta_2 + \theta_2 + U\xi_3) \wedge \xi_1 - (\theta_{22} - \xi_2) \wedge \xi_3, \tag{19}
\end{aligned}$$

причем инварианты

$$\begin{aligned}
U &= u_{xx}^{-4} ((u_x + u_y) u_{xxx}^2 + (u_{txx} - u_x u_{xxy} + u_{xx} (u_{xy} + 4u_{xx}) u_{xxx} - u_{xxy}^2 - u_{xx}^2 u_{xxy})), \\
V &= u_{xxx} u_{xx}^{-2} \tag{20}
\end{aligned}$$

удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
dU &= \frac{1}{2} U \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 - \frac{5}{8} \theta_0 - (V + \frac{1}{8}) \theta_2 - \theta_3 - (4V - \frac{3}{2} U) \theta_{22} - \theta_{23} \\
&\quad + (4V - U + \frac{1}{2}) \xi_2 - (V - \frac{11}{16} U) \xi_3, \tag{21}
\end{aligned}$$

$$dV = \frac{1}{2} V (\eta_1 + \theta_{22} + (6V - U) \xi_1 - \xi_2) - \frac{5}{16} V \xi_3. \tag{22}$$

Мы получаем следующие выражения для форм Маурера–Картана

$$\begin{aligned}
 \theta_0 &= V^2 u_{xx}^3 (du - u_t dt - u_x dx - u_y dy), \\
 \theta_2 &= -V (du_x - u_{tx} dt - u_{xx} dx - u_{xy} dy), \\
 \theta_3 &= V u_{xxy} u_{xx}^{-2} du_x - V^2 du_y + V (V u_{ty} - u_{tx} u_{xxy} u_{xx}^{-2}) dt + V (V u_{xy} - u_{xxy} u_{xx}^{-1}) dx \\
 &\quad + V (V (u_{tx} + (u_x + u_y) u_{xx} - u_x u_{xy}) - u_{xy} u_{xxy} u_{xx}^{-2}) dy - \frac{5}{8} \theta_0, \\
 \theta_{22} &= -u_{xx}^{-1} (du_{xx} - u_{txx} dt - u_{xxx} dx - u_{xxy} dy), \\
 \xi_1 &= u_{xx} V^{-1} dt, \\
 \xi_2 &= u_{xx}^{-1} (u_{xxx} dx + u_{xxy} dy - (u_{xxx} (u_x + u_y) - u_{xxy} u_x - u_{xxy}^2 u_{xxx}^{-1}) dt), \\
 \xi_3 &= u_{xx} (u_x + 2 u_{xxy} u_{xxx}^{-1}) dt + u_{xx} dy, \\
 \eta_1 &= 2 u_{xxx}^{-1} du_{xxx} + (10V - 3U + 4(V u_{xy} u_{xx}^{-1} - u_{xxy} u_{xx}^{-2})) \xi_1 + \frac{5}{8} \xi_3 + 3(\theta_{22} - \xi_2), \\
 \eta_2 &= -u_{xx}^{-2} du_{xxy} - (V^2 (u_x + u_y + (u_{tx} - u_{xy} (u_x - 1)) u_{xx}^{-2}) \\
 &\quad + (4V u_{xxy} - \frac{3}{2} U u_{xxy}) u_{xx}^{-2} - u_{xxy}^2 u_{xx}^{-4}) \xi_1 + \frac{1}{2} (3 u_{xxy} u_{xx}^{-2} - 1) \xi_2 \\
 &\quad - (V (u_{xy} u_{xx} + 2) - \frac{11}{16} u_{xxy} u_{xx}^{-2}) \xi_3 - \frac{3}{2} u_{xxy} u_{xx}^{-2} \theta_{22} + \frac{1}{2} u_{xxy} u_{xx}^{-2} \eta_1. \tag{23}
 \end{aligned}$$

Явные выражения для остальных форм Маурера–Картана нам в дальнейшем не понадобятся.

3. Интегрируемые расширения

В [2, § 6] для изучения конечномерных накрытий дифференциальных уравнений было предложено определение интегрируемого расширения внешней дифференциальной системы. Как показано в работе [17], в общем случае накрытия дифференциальных уравнений с тремя и более независимыми переменными бесконечномерны. Для изучения бесконечномерных накрытий мы используем предложенное в [21] естественное обобщение определения из [2].

Как и в [21], мы рассматриваем внешнее дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
 d\tau_0 &= \left(\sum_{i=0}^3 A_i \theta_i + \sum^* B_{ij} \theta_{ij} + \sum_{s=1}^7 C_s \eta_s + \sum_{j=1}^3 D_j \xi^j + E \tau_1 \right) \wedge \tau_0 \\
 &\quad + \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=0}^3 F_{jk} \theta_k + G_j \tau_1 \right) \wedge \xi^j \tag{24}
 \end{aligned}$$

с неизвестными формами τ_0 , τ_1 , и требуем, чтобы уравнение (24) в совокупности со структурными уравнениями (43), (21) и (22) удовлетворяло условиям совместности и инволютивности. В уравнении (24) знак \sum^* обозначает суммирование по всем $i, j \in \mathbb{N}$, таким что $1 \leq i \leq j \leq 3$, $(i, j) \neq (3, 3)$, коэффициенты от A_i до G_j предполагаются зависящими либо от инвариантов U и V , определенных равенствами (20) (*контактное интегрируемое расширение первого типа*), либо от инвариантов U , V и одного дополнительного инварианта W (*контактное интегрируемое расширение второго типа*). В последнем случае должна существовать форма $\zeta \equiv dW \bmod \theta_i, \theta_{ij}, \xi^j, \tau_0, \tau_1$, такая что $d\zeta \equiv 0 \bmod \zeta, \theta_i, \theta_{ij}, \tau_0, \tau_1$. Условия совместности и инволютивности дают переопределенную систему уравнений в частных производных на коэффициенты A_i — G_j уравнения (24). Результаты анализа этой системы сформулированы в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. *У структурных уравнений (43), (21) и (22) нет контактных интегрируемых расширений первого типа. Каждое их контактное интегрируемое расширение второго типа эквивалентно относительно псевдогруппы контактных преобразований следующему*

уравнению

$$d\tau_0 = \left(\frac{1}{2}(\eta_1 - \theta_{22}) - \tau_1 - \frac{1}{2}(W^2 + 2(V - W) - U)\xi_1 - \frac{1}{16}(8W - 11)\xi_3\right) \wedge \tau_0 + (W^2\tau_1 + \frac{5}{8}\theta_0 + W\theta_2 + \theta_3) \wedge \xi_1 + \tau_1 \wedge \xi_2 + (W\tau_1 + \theta_2) \wedge \xi_3, \quad (25)$$

$$\zeta = dW + \frac{1}{2}(W - V + 2Z + 1)\tau_0 - V\tau_1 - \eta_2 - \frac{1}{2}W(\eta_1 + \theta_{22}) - \theta_2 - Z\xi_2 - \frac{1}{2}W(W^2 + W + 2WZ + 4V - U)\xi_1 - \left(\frac{1}{2}W^2 + \frac{3}{16}W + WZ + V\right)\xi_3, \quad (26)$$

где Z — новый инвариант.

Из фундаментальных теорем Картана следует существование формы τ_0 , удовлетворяющей уравнению (25). Так как формы (23) известны, нетрудно найти форму τ_0 явно.

ТЕОРЕМА 2. Уравнение (25) с точностью до контактной эквивалентности имеет единственное решение

$$\tau_0 = u_{xxx} u_{xx}^{-1} v_x^{-1} (dv - v_x (\ln^2 |v_x| - u_y - (\ln |v_x| + 1) u_x + 1) dt - v_x dx - v_x (\ln |v_x| - u_x) dy). \quad (27)$$

Эта форма определяет следующее преобразование Бэклунда, или пару Лакса

$$\begin{cases} v_t = v_x (\ln^2 |v_x| - u_y - (\ln |v_x| + 1) u_x + 1), \\ v_y = v_x (\ln |v_x| - u_x). \end{cases} \quad (28)$$

Нетрудно проверить, что уравнения (28) совместны тогда и только тогда, когда выполняется уравнение (5). Из уравнений (28) следует, что

$$\begin{cases} u_x = \ln |v_x| - v_y v_x^{-1}, \\ u_y = (v_y (\ln |v_x| + 1) - v_t) v_x^{-1} - \ln |v_x| + 1. \end{cases} \quad (29)$$

Перекрестное дифференцирование функции u дает накрывающее уравнение

$$v_{yy} = v_{tx} + ((v_y \ln |v_x| - v_t) v_x^{-1} + 1) v_{xx} + (v_y v_x^{-1} - \ln |v_x|) v_{xy}. \quad (30)$$

4. Многозначные структуры Эйнштейна–Вейля

В этом разделе мы строим два семейства структур Эйнштейна–Вейля (2), зависящие от двух произвольных функций одной переменной.

Для нахождения первого семейства мы применяем анзац из [1, гл. VIII, § 5.IV]

$$u_t = P(u_x), \quad u_y = Q(u_x). \quad (31)$$

Эта система совместна для любых (гладких) функций P и Q . Подставляя (31) в (5) и обозначая

$$u_x = s, \quad (32)$$

мы получаем

$$P'(s) = (Q'(s))^2 + s Q'(s) - Q(s) - s. \quad (33)$$

Из (31) и (32) следует, что функция s удовлетворяет совместной системе уравнений в частных производных

$$s_t = P'(s) s_x, \quad s_y = Q'(s) s_x. \quad (34)$$

Общее решение этой системы в неявной форме задается формулой

$$s = A(x + t P'(s) + y Q'(s)), \quad (35)$$

где A — произвольная (гладкая) функция одной переменной. При $t = 0$ и $y = 0$ мы получаем $s = A(x)$, поэтому A представляет собой начальное значение для уравнений (34). В общем

случае уравнение (35) определяет s как многозначную функцию, зависящую от переменных t , x и y .

Тогда уравнения (31) и (32) дают

$$u_y = Q(s), \quad (36)$$

причем s определена равенством (35). Уравнения (32), (36) вместе с уравнениями (4) определяют семейство структур Эйнштейна–Вейля (2), зависящее от двух произвольных функций Q , A одной переменной.

Другое семейство структур Эйнштейна–Вейля может быть получено из уравнения (30) с помощью аналогичной подстановки

$$v_t = R(v_x), \quad v_y = S(v_x). \quad (37)$$

Мы полагаем

$$v_x = q, \quad (38)$$

тогда из (30) мы находим

$$(S'(q))^2 = R'(q) + (S(q) \ln |q| - R(q)) q^{-1} + 1 + (S(q) q^{-1} - \ln |q|) S'(q).$$

Мы можем рассматривать это уравнение как обыкновенное дифференциальное уравнение с неизвестной функцией R и функциональным параметром S , который является произвольной (гладкой) функцией. Тогда мы получаем

$$R(q) = q \int q^{-1} \left((S'(q))^2 + \ln |q| (S'(q) - q^{-1} S(q)) - q^{-1} S(q) S'(q) - 1 \right) dq. \quad (39)$$

Функция q удовлетворяет совместной системе уравнений в частных производных

$$q_t = R'(q) q_x, \quad q_y = S'(q) q_x. \quad (40)$$

Общее решение этой системы в неявной форме имеет вид

$$q = B(x + t R'(q) + y S'(q)), \quad (41)$$

где B — произвольная гладкая функция одной переменной. Тогда уравнения (29), (37) и (38) дают

$$\begin{cases} u_x = \ln |q| - q^{-1} S(q), \\ u_y = (q^{-1} S(q) - 1) \ln |q| - q^{-1} R(q) + 1, \end{cases} \quad (42)$$

причем функция R определена уравнением (39), а функция q определена уравнением (41). Тогда уравнения (42), (4) дают семейство структур Эйнштейна–Вейля (2), зависящее от двух произвольных функций S , B одной переменной.

Благодарности. Я очень признателен Национальному университету обороны Тайваня (National Defence University), в котором была выполнена часть этой работы. Я хочу выразить мою особую благодарность профессору Жен-Сю Чангу за гостеприимство и полезные обсуждения и М.В. Павлову за организацию моего визита на Тайвань и плодотворное сотрудничество.

Приложение

Структурные уравнения псевдогруппы симметрий уравнения dKP-hyperCR

$$\begin{aligned}
d\theta_0 &= \eta_1 \wedge \theta_0 + \xi_1 \wedge \theta_1 + \xi_2 \wedge \theta_2 + \xi_1 \wedge \theta_1 + \xi_3 \wedge \theta_3, \\
d\theta_1 &= \frac{1}{2} \eta_1 \wedge \theta_1 + \frac{1}{4} \eta_2 \wedge (\theta_0 + 8\theta_3) + \frac{1}{16} (24(\theta_{22} - U\xi_1 - \xi_2) - 5\xi_3) \wedge \theta_1 + 2\theta_2 \wedge \theta_3 \\
&\quad + \frac{1}{8} (11\theta_2 - 16V\theta_{22} + 8\theta_{23} + 4(2V - 1)\xi_2 + (8V - 3U)\xi_3) \wedge \theta_0 + \xi_1 \wedge \theta_{11} \\
&\quad + \xi_2 \wedge \theta_{12} + \xi_3 \wedge \theta_{13}, \\
d\theta_2 &= \frac{1}{16} (8(\eta_1 + \theta_{22} - U\xi_1 - \xi_2) - 3\xi_3) \wedge \theta_2 + \xi_1 \wedge \theta_{12} + \xi_2 \wedge \theta_{22} + \xi_3 \wedge \theta_{23}, \\
d\theta_3 &= \eta_2 \wedge \theta_2 + (\eta_1 + \theta_{22} - U\xi_1 - \xi_2 - \frac{1}{4}\xi_3) \wedge \theta_3 + \frac{5}{64} (8\theta_{22} - \xi_2 + 3\xi_3) \wedge \theta_0 + \xi_1 \wedge \theta_{13} \\
&\quad + \xi_2 \wedge \theta_{23} + \xi_3 \wedge \theta_{12}, \\
d\xi_1 &= -\frac{1}{16} (8\eta_1 + 24(\theta_{22} + \xi_2) - 5\xi_3) \wedge \xi_1, \\
d\xi_2 &= \frac{1}{8} (5\theta_0 + 8V\theta_2 + 8\theta_3 - 4U\xi_2) \wedge \xi_1 + \frac{1}{16} (8(\eta_1 - \theta_{22}) + 3\xi_3) \wedge \xi_2 - \eta_2 \wedge \xi_3, \\
d\xi_3 &= -(2\eta_2 + \theta_2 + U\xi_3) \wedge \xi_1 - (\theta_{22} - \xi_2) \wedge \xi_3, \\
d\theta_{11} &= \frac{3}{2} \eta_2 \wedge \theta_1 + ((2V - \frac{1}{2}U)\eta_2 + 2V\eta_3 - \eta_4) \wedge \theta_0 + \eta_5 \wedge \xi_2 + \eta_6 \wedge \xi_3 + \eta_7 \wedge \xi_1 \\
&\quad + ((U - 2V^2 + \frac{51}{32}V)\theta_2 + (1 - 2V)\theta_3 + \frac{7}{4}\theta_{12} - 2V(U + 3V)\theta_{22} \\
&\quad + \frac{1}{4}(6U - V)\theta_{23} + \frac{1}{8}(U(24V - 7) + V(48V - 1))\xi_2 \\
&\quad + \frac{1}{16}(44V^2 - 15U^2 + 28UV)\xi_3) \wedge \theta_0 + (2\theta_2 - 11V\theta_{22} + \theta_{23} \\
&\quad + \frac{1}{2}(22V - 1)\xi_2 + \frac{1}{4}(4V + U)\xi_3) \wedge \theta_1 + (V\theta_{12} - 3\theta_{13}) \wedge \theta_2 \\
&\quad + (\frac{3}{4}V\theta_2 + \theta_{12} - 2V\theta_{23} + (U - 2V)\xi_2 - 2V(U + V)\xi_3) \wedge \theta_3 \\
&\quad + (2\eta_1 + 3\theta_{22} - 3\xi_2 - \frac{5}{8}\xi_3) \wedge \theta_{11} + 2U\xi_2 \wedge \theta_{12} + (4\eta_2 + \frac{5}{2}U\xi_3) \wedge \theta_{13}, \\
d\theta_{12} &= (\frac{1}{4}\eta_2 - 2V\theta_{22} - \theta_{23} + 3V\xi_2 + \frac{1}{8}U\xi_3) \wedge \theta_2 + \eta_3 \wedge \xi_2 + \eta_4 \wedge \xi_3 + \eta_5 \wedge \xi_1 \\
&\quad + (\eta_1 + 2\theta_{22} - 2\xi_2 - \frac{1}{2}\xi_3) \wedge \theta_{12} - (\frac{5}{8}\theta_0 - \theta_3 + U\xi_2) \wedge \theta_{22} \\
&\quad + (2\eta_2 + \frac{3}{2}U\xi_3) \wedge \theta_{23}, \\
d\theta_{13} &= \frac{5}{64} (6\eta_2 - 8(\eta_3 - \theta_3 - U\theta_{22} - \theta_{23}) + (8V - 7)\theta_2 - 6U(2\xi_2 + \xi_3)) \wedge \theta_0 + \eta_4 \wedge \xi_2 \\
&\quad + \eta_5 \wedge \xi_3 + \eta_6 \wedge \xi_1 + \frac{5}{64} (8(\theta_{22} - \xi_2) + 3\xi_3) \wedge \theta_1 + (3\eta_2 + 2\theta_2 + 2U\xi_3) \wedge \theta_{12} \\
&\quad - (\frac{7}{8}\theta_3 + \frac{1}{2}(2V - U)\xi_2 + V(U + V)\xi_3) \wedge \theta_2 - (\theta_3 - \frac{3}{2}U\xi_2) \wedge \theta_{23} \\
&\quad + \frac{3}{8} (2\eta_2 - 4V(\theta_{22} - \xi_2) + U\xi_3) \wedge \theta_3 + \frac{1}{16} (24\eta_1 + 40(\theta_{22} - \xi_2) - 9\xi_3) \wedge \theta_{13}, \\
d\theta_{22} &= \eta_3 \wedge \xi_1 + \frac{1}{16} (8(\eta_2 - \theta_{22}) + 3\xi_3) \wedge \xi_2 - \eta_2 \wedge \xi_3, \\
d\theta_{23} &= \frac{1}{2} \eta_1 \wedge \theta_{23} + \eta_2 \wedge (\theta_{22} - \xi_2) + \eta_4 \wedge \xi_1 + \frac{1}{64} (8(\theta_{22} - \xi_2) + (64V - 1)\xi_3) \wedge \theta_2 \\
&\quad + \frac{1}{8} (8(\eta_3 - \theta_3) - 5\theta_0 + 12U\xi_2) \wedge \xi_3 + \frac{1}{8} \theta_{22} \wedge (3(4\theta_{23} - \xi_2) - 8U\xi_3) \\
&\quad + \frac{1}{16} \theta_{23} \wedge (24\xi_2 - 7\xi_3), \\
d\eta_1 &= -\frac{1}{8} (2\eta_2 + 6\theta_2 - 16(V\theta_{22} + \theta_{23}) + 4(2V - 1)\xi_2 + (8V - 3U)\xi_3) \wedge \xi_1 \\
&\quad - \frac{5}{8} (\theta_{22} - \xi_2) \wedge \xi_3, \\
d\eta_2 &= \frac{1}{16} (8(\eta_1 + \theta_{22} - U\xi_1 - \xi_2) + 3\xi_3) \wedge \eta_2 + \frac{5}{16} \theta_0 \wedge \xi_1 - \frac{1}{8} \theta_2 \wedge (3V\xi_1 - \xi_3) \\
&\quad + \frac{1}{2} \theta_3 \wedge \xi_1 + (\theta_{12} + V\theta_{23} + V(V + U)\xi_3) \wedge \xi_1 + \frac{1}{2} (\theta_{22} + (U - 2V)\xi_1) \wedge \xi_2 \\
&\quad + (2V\theta_{22} + \theta_{23} - \frac{1}{4}(8V + 1)\xi_2) \wedge \xi_3, \\
d\eta_3 &= \frac{1}{16} \eta_1 \wedge (8(\eta_3 + V\theta_2 + \theta_3) + 5\theta_0 - 2U\xi_2) - \theta_{12} \wedge ((V + \frac{9}{8})\xi_1 + \xi_3) - \theta_{13} \wedge \xi_1 \\
&\quad + \frac{1}{2} \eta_2 \wedge (2\theta_2 + 2(U - 2V)\xi_1 - \xi_2 + U\xi_3) + \eta_4 \wedge \xi_1 - \frac{5}{8} \theta_1 \wedge \xi_1 \\
&\quad + \frac{1}{16} (24\theta_{22} + 8(3U - 8V)\xi_1 - 16\xi_2 - 5\xi_3) \wedge \eta_3 + \frac{1}{32} (19U - 8V)\xi_2 \wedge \xi_3 \\
&\quad + \frac{5}{128} \theta_0 \wedge (8\theta_{22} + 16(U - 4V - 1)\xi_1 - 11\xi_3) - \frac{1}{2} (U^2 - 2UV - 8V^2)\xi_1 \wedge \xi_3 \\
&\quad + \frac{1}{16} \theta_2 \wedge (8V\theta_{22} + 2((16V + 9)U - (56V + 9)V)\xi_1 - 9\xi_2 + 3V\xi_3) \\
&\quad + \frac{1}{16} \theta_3 \wedge (8\theta_{22} + 16(2U - 4V - 1)\xi_1 - 11\xi_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\theta_{22} \wedge (V(U - 12V)\xi_1 + (\frac{1}{4}U + V)\xi_2) \\
 & +\frac{1}{2}\theta_{23} \wedge ((U - 2V)\xi_1 - \xi_2 - 2V\xi_3) + \frac{1}{2}((U - 2V)(U - 1) - 24V^2)\xi_1 \wedge \xi_2, \\
 d\eta_4 = & \eta_8 \wedge \xi_1 + \frac{1}{32}(60\theta_0 + (96V - 1)\theta_2 + 96\theta_3 + 48U\theta_{22} - 24\theta_{23} - 96U\xi_2 \\
 & + 32(2V - U)\xi_3) \wedge \eta_2 + \frac{1}{8}(24\eta_2 + 7\theta_2 - 12\theta_{23} + 3\xi_2 + 4(7U - 8V)\xi_3) \wedge \eta_3 \\
 & + (\eta_1 + 3(\theta_{22} - \xi_2) - \frac{7}{4}\xi_3) \wedge \eta_4 + \frac{1}{16}(17U\theta_{22} + (24V - 1)\theta_{23} - 6(V + 4U)\xi_2) \wedge \theta_2 \\
 & - \frac{5}{64}(7(\theta_2 - \theta_{22}) + 12\theta_{23} + 4(\xi_2 - (7U - 8V - 2)\xi_3)) \wedge \theta_0 \\
 & + \frac{1}{8}\theta_3 \wedge (7(\theta_2 + \theta_{22}) - 12\theta_{23} - 4\xi_2 - 8(7U - 8V - 2)\xi_3) \\
 & - \frac{1}{64}(72(\theta_{22} + \xi_2) + 73\xi_3) \wedge \theta_{12} + \frac{1}{128}(U(448V + 143) - 16V(32V^2 + 9))\theta_2 \wedge \xi_3 \\
 & + ((V - \frac{11}{16}U)\xi_2 - (U^2 - 13V^2)\xi_3) \wedge \theta_{22} + \frac{1}{8}(2(3U + 1)\xi_2 + (U + 4V)\xi_3) \wedge \theta_{23} \\
 & + \frac{1}{4}(4V(13V^2 - 1) - U(11U - 8V - 2))\xi_2 \wedge \xi_3, \\
 d\eta_5 = & \frac{3}{2}\eta_1 \wedge \eta_5 + \eta_2 \wedge (4\eta_4 + \frac{1}{2}\theta_{12} - 2U\theta_{23} + (U - 2V)\xi_2) + (2\theta_2 - \xi_2 + \frac{5}{2}U\xi_3) \wedge \eta_4 \\
 & + \frac{1}{16}(56(\theta_{22} - \xi_2) - 13\xi_3) \wedge \eta_5 + \eta_8 \wedge \xi_3 + \eta_9 \wedge \xi_1 + \frac{5}{8}\theta_1 \wedge (\theta_{22} - \xi_2) \\
 & + \frac{5}{64}(16\eta_3 - (24V + 1)\theta_2 + 16\theta_{12} - 8U(\theta_{22} + \theta_{23} + (U - 4V + 1)\xi_2)) \wedge \theta_0 \\
 & + \frac{1}{16}\theta_2 \wedge (16V\eta_3 - 2(24V + 1)\theta_3 - 8(4V + 1)\theta_{12} - 48V(U - 2V)\theta_{22} \\
 & - (U + V)\theta_{23} + 2(2U(2V + 5) + V(16V - 11))\xi_2 + (U^2 - 4UV - 4V^2)\xi_3) \\
 & + (2(\eta_3 + \theta_{12}) - \theta_{23} + (4V - 2U + 1)\xi_2) \wedge \theta_3 + \theta_{13} \wedge (\theta_{22} - \xi_2) \\
 & + \frac{1}{8}(16(\eta_3 + 2V\theta_{22} - \theta_{23}) + (4U - 16V + 13)\xi_2 - 4(4V - 3U)\xi_3) \wedge \theta_{12} \\
 & + (\frac{1}{2}U^2 + UV - 12V^2)\theta_{22} \wedge \xi_2 + \frac{1}{2}(3(2V - U)\xi_2 + (4V(U + V) - 3U^2)\xi_3) \wedge \theta_{23} \\
 & - \frac{1}{2}(2(3U - 4V)\eta_3 + (8V^2 + 2UV - U^2)\xi_3) \wedge \xi_2, \\
 d\eta_6 = & \frac{1}{64}\eta_2 \wedge (320\eta_5 + (80V - 85U)\theta_0 - 60\theta_1 + 128V(U + V)\theta_2 + 24U\theta_3 - 160U\theta_{12}) \\
 & + (6V\theta_3 - \frac{5}{2}\theta_{13}) \wedge \eta_3 + \eta_4 \wedge (V\theta_2 + 2(\theta_3 - U\xi_2)) - 3\eta_5 \wedge (\theta_2 + U\xi_3) \\
 & + (2\eta_1 + 4\theta_{22} - 4\xi_2 - \frac{7}{8}\xi_3) \wedge \eta_6 + \eta_8 \wedge \xi_2 + \eta_9 \wedge \xi_3 + \eta_{10} \wedge \xi_1 \\
 & + \frac{5}{64}(8(\eta_4 + (5U - 4V)\eta_3) + 10\theta_1 - 2\theta_{12} - 4(5U + 4V - 2)\theta_3 + 2(7V - 8U)\theta_{23} \\
 & - (96V^2 + 7U - 10U^2 + 8UV - 14V) \wedge \xi_2 + 2(17V^2 - 5U^2 + 7UV)\xi_3) \wedge \theta_0 \\
 & + \frac{5}{128}(32(\eta_3 - \theta_3) + 8(U\theta_{22} - \theta_{23} + U\xi_2) - 9U\xi_3) \wedge \theta_1 \\
 & + \frac{1}{256}((U(400V + 310) - V(640V + 295))\theta_0 + 40(8V + 5)\theta_1) \wedge \theta_2 \\
 & + \frac{1}{32}((14U + 192V^2 + 23V)\theta_2 - 52\theta_{12} + 288V(2V - U)\theta_{22} + 8(3V - 2U)\theta_{23} \\
 & + 4(3U(16V - 1) - 6V(24V + 1))\xi_2 + 24V(V + U)\xi_3) \wedge \theta_3 \\
 & - \frac{5}{64}(8(\theta_{22} + \xi_2) - 3\xi_3) \wedge \theta_{11} + \theta_{12} \wedge ((U + \frac{9}{8}V)\theta_2 - 3V\theta_{23} + 2(U - 2V)\xi_2 \\
 & + 2(U^2 - 2V^2 - 2UV)\xi_3) + \frac{1}{16}\theta_{13} \wedge (25\theta_0 + 40(\theta_3 + \theta_{23}) + (40V + 23)\theta_2 \\
 & - 144V\theta_{22} + 4(36V - 5U - 3)\xi_2 + 12(2V - U)\xi_3) + \frac{5}{8}V(U - 12V)\theta_0 \wedge \theta_{22} \\
 & + \frac{3}{4}U(2V\theta_2 - U\xi_2) \wedge \theta_{23} + \frac{1}{2}V\theta_2 \wedge ((U - 6V)\xi_2 - V(5U + 12V)\xi_3), \\
 d\eta_7 = & 3\eta_2 \wedge (2\eta_6 - \frac{1}{4}\theta_{11} - \theta_{13}) - \eta_3 \wedge (13V\theta_1 - 3\theta_{11}) + 2\eta_4 \wedge (\theta_1 - V\theta_3) \\
 & + \frac{1}{8}\eta_5 \wedge (19\theta_0 + 16(V\theta_2 + \theta_3) - 20U\xi_2) - \frac{1}{2}\eta_6 \wedge (8\theta_2 + 7U\xi_3) \\
 & + \frac{1}{16}(40\eta_1 + 72(\theta_{22} - \xi_2) - 15\xi_3) \wedge \eta_7 - \eta_8 \wedge \theta_0 + \eta_9 \wedge \xi_2 + \eta_{10} \wedge \xi_3 + \eta_{11} \wedge \xi_1 \\
 & + \frac{1}{32}(4(13U^2 - 248V^2 + 4UV)\eta_2 - 256V(U + V)\eta_3 + 8(6U + 7V)\eta_4 \\
 & - 5(52V + 1)\theta_1 + (128V^3 + V^2(4U - 345) + 56U^2 + 45UV)\theta_2 \\
 & + 8(16V(U + V) - 3U)\theta_3 + 60\theta_{11} - (88U + 59V)\theta_{12} - 72\theta_{13} \\
 & - 32V(U^2 - 2UV - 12V^2)\theta_{22} + 12V(U + 2V)\theta_{23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(192V^3 + U^2(V - 11) + 8UV + 4(U - 3)V^2)\xi_2 \\
& -2(92UV^2 - 15U^3 + 6U^2V + 360V^3)\xi_3) \wedge \theta_0 + U^2\theta_{12} \wedge \xi_2 \\
& + \frac{1}{16}(16(3U - 4V)\eta_2 + 4(52V - 3)\theta_3 - 36\theta_{12} - 16V(20U - 39V)\theta_{22} \\
& + 28V\theta_{23} + 2(3U(36V - 1) - 2V(156V - 7))\xi_2 \\
& + (17(U^2 - 4V^2) + 12UV)\xi_3) \wedge \theta_1 \\
& + \frac{1}{32}((117V - 416V^2 - 88U)\theta_1 + 4(24V + 23)\theta_{11} - 32V(U + 3V)\theta_{12} \\
& + 8(4U + 9V)\theta_{13}) \wedge \theta_2 + \frac{1}{4}(16V(U + V)\eta_2 + 9V(2U - V)\theta_2 + 12\theta_{11} \\
& - (4U + 3V)\theta_{12} - 4\theta_{13} - 12V(U - 2V)\theta_{23} + 2(U^2 + 4UV + 12V^2)\xi_2 \\
& - 4V(U^2 - 4UV - 12V^2)\xi_3) \wedge \theta_3 + \frac{3}{8}(40V\theta_{22} - 8\theta_{23} + 4(U - 10V + 1)\xi_2 \\
& + (9U - 8V)\xi_3) \wedge \theta_{11} + (6V\theta_{23} - 3(U - 2V)\xi_2 \\
& + (6V(U + V) - \frac{5}{2}U^2)\xi_3) \wedge \theta_{13}.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Богоявленский О.И.** Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. - М.: Наука, 1991.
2. **Bryant R.L. , Griffiths Ph.A.** Characteristic cohomology of differential systems (II): conservation laws for a class of parabolic equations // Duke Math. J. - 1995. - Vol. 78. - P. 531–676.
3. **Cartan É.** Sur la structure des groupes infinis de transformations // Œuvres Complètes, Part II. - Vol. 2. - Paris: Gauthier - Villars. - 1953. - P. 571–715.
4. **Cartan É.** Les sous-groupes des groupes continus de transformations // Œuvres Complètes, Part II, Vol. 2. - Paris: Gauthier - Villars. - 1953. - P. 719–856.
5. **É. Cartan.** Les problèmes d'équivalence // Œuvres Complètes, Part II. - Vol. 2. - Paris: Gauthier - Villars. - 1953. - P. 1311–1334
6. **Cartan É.** La structure des groupes infinis // Œuvres Complètes, Part II. - Vol. 2. - Paris: Gauthier - Villars. - 1953. - P. 1335–1384.
7. **Dunajski M.** A class of Einstein–Weil spaces associated to an integrable system of hydrodynamic type // J. Geom. Phys. - 2004. - Vol. 51. - P. 126–137.
8. **Dunajski M.** An interpolating dispersionless integrable system // J. Phys. A, Math. Theor. - 2008. - Vol. 41. - Paper 315202.
9. **Gardner R.B.** The method of Equivalence and Its Applications./ CBMS–NSF regional conference series in applied math. - Philadelphia: SIAM, 1989.
10. **Fels M., Olver P.J.** Moving coframes. I. A practical algorithm // Acta. Appl. Math. - 1998. - Vol. 51. - P. 161–213.
11. **Kamran N.** Contributions to the Study of the Equivalence Problem of Élie Cartan and its Applications to Partial and Ordinary Differential Equations.// Mem. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg. - 45 Fac. 7. - 1989.
12. **Zabolotskaya E.A., Khokhlov R.V.** Quasi-plane waves in the nonlinear acoustics of confined beams //J. Phys. A. - 1969. - Vol. 15. - P. 35–40.
13. **Krasil'shchik I.S., Vinogradov A.M.** Nonlocal symmetries and the theory of coverings // Acta Appl. Math. - 1984. - Vol. 2. - P. 79–86.
14. **Krasil'shchik I.S., Lychagin V.V., Vinogradov A.M.** Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations. - New York: Gordon and Breach, 1986.
15. **Krasil'shchik I.S., Vinogradov A.M.** Nonlocal trends in the geometry of differential equations: symmetries, conservation laws, and Bäcklund transformations // Acta Appl. Math. - 1989. - Vol. 15. - P. 161–209.

16. Krasil'shchik I.S., Vinogradov A.M. (eds.). Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics. Transl. Math. Monographs, Vol. 182. - Providence: Amer. Math. Soc., 1999

17. Marvan M.. On zero-curvature representations of partial differential equations / Proc. Conf. on Diff. Geom. and Its Appl., Opava (Czech Republic). - 1992. - P. 103–122.

18. Morozov O.I.. Moving coframes and symmetries of differential equations // J. Phys. A, Math. Gen. - 2002. - Vol. 35. - P. 2965–2977.

19. Morozov O.I.. Contact-equivalence problem for linear hyperbolic equations // J. Math. Sci. - 2006. - Vol. 135. - P. 2680–2694.

20. Morozov O.I.. Cartan's structure theory of symmetry pseudo-groups, coverings and multi-valued solutions for the Khokhlov–Zabolotskaya equation // Acta Appl. Math. - 2008. - Vol. 101. P. 231–241.

21. Morozov O.I.. Contact integrable extensions of symmetry pseudo-groups and coverings of (2+1) dispersionless integrable equations // J. Geom. Phys. - 2009. - Vol. 59. - № 11. - P. 1461 – 1475.

22. Olver P.J.. Equivalence, Invariants, and Symmetry. Cambridge: - Cambridge University Press, 1995.

23. Pavlov M.V.. Integrable hydrodynamic chains // J. Math. Phys. - 2003. - Vol. 44. - P. 4134–4156.

24. Plebański J.F.. Some solutions of complex Einstein equations // J. Math. Phys. - 1975. - Vol. 16. - P. 2395–2402.

25. Stormark O.. Lie's Structural Approach to PDE Systems. -Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

26. Васильева М.В.. Структура бесконечных групп Ли преобразований. - М.: МГПИ, 1972.

27. Wahlquist H.D., Estabrook F.B.. Prolongation structures of nonlinear evolution equations // J. Math. Phys. - 1975. - Vol. 16. - P. 1–7.

A COVERING FOR THE dKP–hyper CR EQUATION AND MULTI-VALUED EINSTEIN – WEYL STRUCTURES

Morozov O.I.

We apply the technique of integrable extensions to the symmetry pseudo-group of the dKP–hyper CR interpolating equation. This allows us to find a covering for this equation and to construct multi-valued Einstein–Weyl structures.

Key words: Lie pseudogroups, coverings of differential equations.

Сведения об авторе

Морозов Олег Игоревич, 1963 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1986), член Московского математического общества, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МГТУ ГА, автор 46 научных работ, область научных интересов — дифференциальные уравнения, симметрии, псевдогруппы Ли.

Пропустите 2 пустые страницы

Пропустите пустую страницу

УДК 519.612

ЭФФЕКТИВНАЯ ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА LU-SGS ДЛЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

П. В. ПАВЛУХИН, И. С. МЕНЬШОВ

В статье предлагается эффективный алгоритм расчета газодинамических течений на многопроцессорных вычислительных системах с распределенной памятью. В основе алгоритма лежит неявная схема, приводящая к большим линейным системам с сильно разреженной матрицей, которые решаются методом приближенной факторизации LU-SGS (Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel). Параллельный алгоритм точно воспроизводит работу последовательного и обладает высокой степенью масштабируемости.

Ключевые слова: параллельные алгоритмы, численные методы газовой динамики, LU-SGS, высокопроизводительные вычисления.

Введение

Современные многомерные задачи вычислительной газовой динамики требуют значительного количества вычислительных ресурсов. Решение таких задач за приемлемое время невозможно без использования высокопроизводительных параллельных компьютеров. Для целого ряда задач, например стационарных, применение неявных численных схем даёт возможность существенно сократить время расчёта. В то же время переход к неявной схеме вычислений значительно усложняет задачу построения алгоритма распараллеливания вычислений. Прежде всего, это связано с тем, что в результате линеаризации возникает система линейных уравнений большого порядка, параллельное решение которой сопряжено с рядом трудностей.

В настоящей работе представлена оригинальная разработка параллельного алгоритма LU-SGS (Lower-Upper Symmetric Gauss-Zeidel) для сильносвязанных кластеров с распределённой памятью. Метод LU-SGS - итерационный метод решения систем алгебраических уравнений, нашедший широкое применение в численных методах динамики сжимаемой жидкости. Он был предложен в работе Джеймисона-Туркеля [1] и позже развит в работах [2, 3]. Основное отличие предлагаемого параллельного алгоритма реализации метода LU-SGS от имеющихся в литературе подходов состоит в том, что при распараллеливании осуществляется точное соблюдение исходного последовательного алгоритма во всей расчетной области, а не приближенное (как, например, в [4]), когда последовательный алгоритм реализуется только в определенных подобластях исходной расчетной области.

1. Метод LU-SGS для решения задач газовой динамики

Мы рассматриваем систему уравнений Навье-Стокса для сжимаемой жидкости в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) , записанную в форме законов сохранения

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \vec{g}_k}{\partial x_k}, \quad (1)$$

где \vec{q} – вектор консервативных переменных размерности 5, компонентами которого являются плотность, проекции импульса на оси координат и полная энергия, $\vec{f}_k = \vec{f}_k(\vec{q})$, $k = 1, 2, 3$ – векторы невязких потоков, $\vec{g}_k = \vec{g}_k(\vec{q}, \frac{\partial \vec{q}}{\partial x_1}, \frac{\partial \vec{q}}{\partial x_2}, \frac{\partial \vec{q}}{\partial x_3})$, $k = 1, 2, 3$ – векторы вязких потоков.

Уравнения (1) дискретизируются по пространственным переменным методом конечных объемов. Предполагая, что расчетная область покрыта сеткой, состоящей из неперекрывающихся многогранных ячеек, этот метод реализуется интегрированием уравнения (1) по каждой счетной ячейке с последующим преобразованием объемных интегралов от потоков

в интегралы по боковым граням. Применяя затем неявную схему интегрирования по времени (для простоты рассматривается простейшая схема Эйлера), в результате приходим к следующей системе дискретных уравнений

$$\omega_i(\vec{q}_i^{n+1} - \vec{q}_i^n) = -\Delta t \sum_{\sigma} s_{\sigma}(\vec{f}_{\sigma}^{n+1} - \vec{g}_{\sigma}^{n+1}), \quad \vec{f}_{\sigma} = (\vec{f}_k n_k)_{\sigma}, \quad \vec{g}_{\sigma} = (\vec{g}_k n_k)_{\sigma}, \quad (2)$$

$i = 1, \dots, N$, где N – число счетных ячеек, ω_i – объем ячейки, Δt – шаг по времени, s_{σ} – площадь боковой грани ячейки и $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – внешняя единичная нормаль к грани. Нижний индекс σ указывает на грань, верхний индекс n – на дискретный временной уровень.

Определяя ортонормированный базис на грани $(\vec{n}, \vec{k}, \vec{l})$, где $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ и $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ – касательные векторы, невязкий поток можно представить через локально-одномерный поток \vec{F}_{σ}

$$\vec{f}_{\sigma} = T_{\sigma}^{-1} \vec{F}_{\sigma}, \quad \vec{F}_{\sigma} = \vec{f}_1(\vec{Q}_{\sigma}), \quad \vec{Q}_{\sigma} = T_{\sigma} \vec{q}, \quad (3)$$

где T_{σ} – матрица преобразования к локальному базису, определяемая координатами базисных ортов $(\vec{n}, \vec{k}, \vec{l})$

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & n_3 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 & k_3 & 0 \\ 0 & l_1 & l_2 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В уравнении (3) поток \vec{f}_1 имеет такое же определение, как и в уравнении (1), но аргументами его являются контравариантные компоненты вектора \vec{q} в локальном базисе боковой грани ячейки $(\vec{n}, \vec{k}, \vec{l})$.

Ниже мы ограничим наше рассмотрение схемами первого порядка аппроксимации по пространству. В этом случае численный поток в общем виде представляется функцией, аргументы которой суть векторы решений в двух ячейках, примыкающих к грани

$$\vec{F}_{\sigma} = \vec{F}_{\sigma}(\vec{Q}_i, \vec{Q}_{\sigma(i)}),$$

где индексом $\sigma(i)$ мы указываем на ячейку, которая является соседней к текущей ячейке по ребру σ . Функция численного потока выбирается по методу С. К. Годунова как дифференциальный поток, возникающий на грани в результате взаимодействия двух однородных потоков с параметрами \vec{Q}_i и $\vec{Q}_{\sigma(i)}$ [6]

$$\vec{F}_{\sigma} = \vec{f}_1(\vec{Q}_{\sigma}^R), \quad \vec{Q}_{\sigma}^R = \vec{Q}^R(0, \vec{Q}_{\sigma}, \vec{Q}_{\sigma(i)}),$$

где \vec{Q}^R обозначает точное решение задачи Римана. Первый аргумент в \vec{Q}^R – это автомодельный параметр, который принимается здесь равным нулю, поскольку рассматриваются неподвижные сетки. В общем случае (для движущихся сеток) этот параметр отличен от нуля и равен нормальной скорости смещения грани.

Система дискретных уравнений (2) решается методом установления по псевдо-временной переменной с использованием неявной дискретизации и ньютоновских итераций [7]. Результатом такого подхода является линейная система уравнений для определения итерационного инкремента $\delta^s \vec{q} = \vec{q}^{n+1, s+1} - \vec{q}^{n+1, s}$

$$\omega_i \left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau} + 1 \right) \delta^s \vec{q}_i = -\vec{R}_i^{n+1, s} - \Delta t \sum_{\sigma} s_{\sigma} (\delta^s \vec{f}_{\sigma} - \delta^s \vec{g}_{\sigma}), \quad (4)$$

где s – итерационный индекс; $\Delta\tau$ – шаг дискретизации по псевдовремени; \vec{R} – итерационная невязка

$$\vec{R}_i^{n+1,s} = \Delta t \sum_{\sigma} s_{\sigma} (\vec{f}_{\sigma}^{n+1,s} - \vec{g}_{\sigma}^{n+1,s}) + \omega_i \Delta \vec{q}_i^s,$$

где Δ обозначает итерационный инкремент по времени, $\Delta \vec{q}^s = \vec{q}^{n+1,s} - \vec{q}^n$.

При линеаризации итерационной вариации вязкого потока обычно используется приближенный подход, в котором матрица линеаризации заменяется мажорирующим ее спектральным радиусом. Итерационную вариацию невязкого потока можно приближенно получить, используя упрощенное выражение для численного потока

$$\vec{F}_{\sigma} = 0.5[\vec{F}_{\sigma}(\vec{Q}_i) + \vec{F}_{\sigma}(\vec{Q}_{\sigma(i)})] - 0.5\rho_{inv,\sigma}(\vec{Q}_{\sigma(i)} - \vec{Q}_i),$$

где $\rho_{inv,\sigma}$ – спектральный радиус якобиана $A_{\sigma} = \partial \vec{F}_{\sigma} / \partial \vec{Q}$. Линеаризация в этом случае приводит к простым формулам

$$\delta^s \vec{f}_{\sigma} = T_{\sigma}^{-1} [A_{\sigma}^{(1)} \delta^s \vec{Q}_i + A_{\sigma}^{(2)} \delta^s \vec{Q}_{\sigma(i)}]$$

с матрицами $A_{\sigma}^{(1,2)}$ вида

$$A_{\sigma}^{(1)} = 0.5[\vec{Q}_{\sigma}(\vec{Q}_i) + \rho_{inv,\sigma}];$$

$$A_{\sigma}^{(2)} = 0.5[\vec{Q}_{\sigma}(\vec{Q}_{\sigma(i)}) - \rho_{inv,\sigma}].$$

В результате получается линейная система для определения итерационных невязок, которую в матричном виде можно записать так

$$(D + L + U) \delta^s \vec{q}_i = -\vec{R}_i^{n+1,s}, \quad (5)$$

где D – блочно-диагональная матрица, а L и U – блочно-диагональные нижняя и верхняя треугольные. Вид этих матриц здесь не приводится. Преобразуем уравнение (5) к следующему виду

$$(D + L)D^{-1}(D + U)\delta^s \vec{q}_i = -\vec{R}_i^{n+1,s} - LD^{-1}U$$

Метод LU-SGS сводится к приближенной факторизации левой части уравнений, которая получается, если в этих уравнениях пренебречь последним слагаемым правой части. Следует заметить, что этот член пропорционален Δt^2 , и такое приближение видится вполне оправданным.

Факторизованные таким образом уравнения распадаются на две подсистемы

$$\begin{aligned} (D + L)\delta^s \vec{q}_i^* &= -\vec{R}_i^{n+1,s}; \\ (D + L)\delta^s \vec{q}_i &= D\delta^s \vec{q}_i^*. \end{aligned} \quad (6)$$

Первая система уравнений в (6) имеет ниже-треугольную блочную матрицу, каждый элемент которой представляется блоком размерностью (5×5) , а вторая – соответственно верхне-треугольную. Это позволяет эффективно вычислить их решения за два расчетных цикла по ячейкам: первый – в прямом направлении (от первой ячейки к последней), а второй – в обратном. При этом необходимо обращать только диагональные блоки, т. е. матрицы размером (5×5) . Получающаяся при этом итерационная невязка служит для обновления итерационного вектора, $\vec{q}^{n+1,s} = \vec{q}^n + \delta^s \vec{q}$, после чего процедура (6) повторяется.

Таким образом, если рассмотреть алгоритм LU-SGS как объект для распараллеливания, то его последовательный вариант выглядит как два прохода (прямой и обратный) по ячейкам расчетной области. Оба прохода осуществляются по одной последовательности ячеек, но в разных направлениях. В общем случае значения искоемых функций в ячейке на следующем

временном слое зависят от всех ячеек расчетной области на текущем временном слое, что затрудняет построение параллельного алгоритма.

2. Параллельный алгоритм для LU-SGS

Особенностью данного метода является обход расчетной области: все ячейки линейно упорядочиваются, то есть определяется и фиксируется порядок, в котором будет происходить обход всех этих ячеек, причем этот порядок можно определять любым образом - не обязательно, чтобы следующая ячейка была геометрическим соседом предыдущей. Вычисления выполняются для каждой ячейки, начиная с первой в соответствии с заданным последовательным порядком и заканчивая последней, причем для операций в текущей ячейке используются данные из геометрически соседних ячеек. Если при этом ячейка-сосед уже была обчислена (то есть в линейно упорядоченном множестве, определяющем порядок обхода, она встречается раньше текущей ячейки), то выполняется один блок вычислений, если она еще не обчислена (в линейно упорядоченном множестве она встречается позже текущей ячейки) - выполняется другой блок вычислений. Изменения записываются как в текущую ячейку, так и в соседнюю (соседние ячейки при этом не меняют свой статус "обчислена/не обчислена").

Для параллельного счета расчетная область делится на блоки ячеек, и каждый блок считается на отдельном процессоре. Причем мы хотим, чтобы параллельно работающая программа выдавала всегда один и тот же результат, в точности совпадающий с результатом работы последовательной программы. Ясно, что для выполнения этого требования обходы во всех блоках параллельной программы должны быть эквивалентны некоторому обходу в последовательном решении. Это означает, что задавать линейный порядок ячеек нужно не в пределах одного блока, а глобально для всех блоков, из которых состоит расчетная область, тем самым определяя однозначно статус (обчислены/не обчислены) передаваемых между соседними блоками ячеек.

Наряду с проблемой корректности счета необходимо учитывать и эффективность получаемого алгоритма. В ряде работ приводятся параллельные алгоритмы для этого метода, но они либо являются приближенными [4] (точный метод соблюдается лишь для части расчетной области), либо в процессе счета возникают простои процессоров [8]. Ниже будет представлен параллельный алгоритм, эквивалентный работе последовательного, простои в котором сведены к минимуму благодаря асинхронным вычислениям/передаче данных между процессорами.

Построение параллельного алгоритма проводится для расчетных областей с использованием структурированных сеток. Для простоты изложения рассмотрим двумерный случай. Тогда элемент сеточного разбиения - четырехугольник, каждая его вершина, не лежащая на границе области, является также вершиной ровно трех соседствующих элементов, так что каждая ячейка, ни одна из граней которой не является частью физической границы расчетной области, имеет ровно 4 геометрически соседних ячейки. Расчетная область топологически эквивалентна прямоугольной матрице; блоки, на которые она разбивается, также являются прямоугольными (с той же геометрической структурой, что и сами ячейки - 4 соседа для каждого блока, не имеющего части физической границы).

Внутренние части разных блоков (это часть блока без ячеек, расположенных по границе (по периметру) блока; их мы будем называть граничными) напрямую не связаны соотношениями ячеек "обчислены/не обчислены" (поскольку не имеют общих ячеек-соседей), поэтому обходы на таких частях можно проводить параллельно, сохраняя при этом корректность счета. Основная проблема здесь - упорядочить вычисления в граничных ячейках блоков с минимальными потерями в эффективности счета.

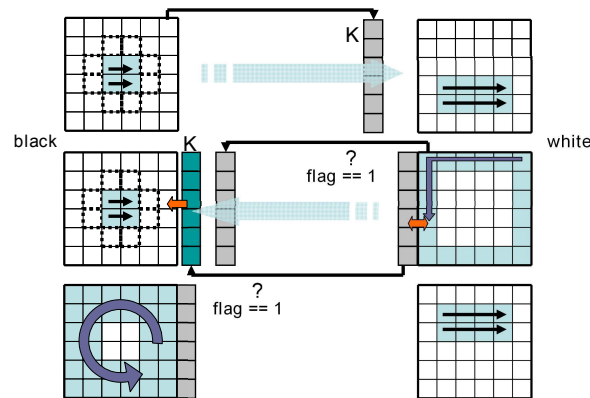


Рис. 1. Последовательность действий в black и white блоках

Организовать корректный, в то же время эффективный счет на нескольких блоках можно, разделив все блоки определенным образом на два класса - black и white, задав в них разные обходы ячеек. Все блоки из black имеют в качестве своих геометрических соседей только блоки из white и наоборот - разбиение образует "шахматную доску".

Тогда можно рассмотреть следующий порядок действий, выполняемый в блоках black и white.

Для black:

1. Из блоков класса black отсылаются соседям в white копии K граничных частей ячеек (рис. 1), которые являются соответствующими соседями для ячеек из блоков white, при этом отсылаемые ячейки для white не являются обчисленными. В это же время в блоках black также запускается обход по всем ячейкам, кроме граничных и кроме ячеек, являющихся соседними к граничным внутри блока, т. е. обход по всем ячейкам, кроме "двойного" периметра ячеек.

Если бы был выбран обход по всем внутренним ячейкам, то происходило бы изменение данных и в самих граничных ячейках. При этом могли возникать ситуации, когда данные граничных ячеек отсылались бы в блоки white как с обновленными компонентами, так и с необновленными. При выбранном же обходе граничные ячейки остаются неизменными и таковыми передаются соседним блокам. Схематично последовательность действий в white и black блоках показана на рис. 1. Все изменяемые ячейки здесь отмечены пунктиром.

2. В блоках black граничные ячейки обновляются из присланной копии K (операция корректна, т.к. никаких действий над граничными ячейками в black еще не производилось).

3. В блоках black по флагу проверяется, присланы ли ячейки из соседних white-блоков, которые уже являются обчисленными, и обновились ли граничные ячейки в блоке. После подтверждения этого в блоках black выполняется обход по оставшимся приграничным ячейкам из "двойного" периметра блока с обращениями к полученным ячейкам из white.

Для white:

1. Во всех блоках из white запускается обход по первой половине внутренних ячеек, то есть обход будет сделан только по части внутренних ячеек. В момент счета из соседних блоков black присылаются необчисленные ячейки, соседние к граничным в блоках white.

2. Затем в white по флагу проверяется, получены ли ячейки из соседних блоков (к этому моменту они будут доставлены, если время счета указанной выше части ячеек в white будет больше времени передачи ячеек из black), и выполняется обход по граничным ячейкам, причем используется копия K ячеек, полученных из black, в этой копии также обновляются

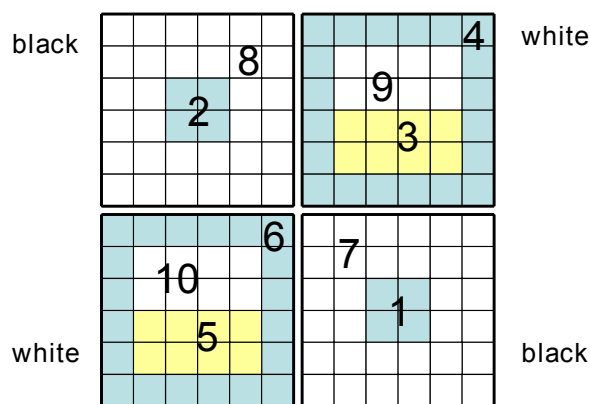


Рис. 2. Обход области с 2x2 блоками

ячейки (полученные из black, они еще не обчислены). После завершения этого обхода из white соседям в black отправляются граничные ячейки блока white, которые являются соседями для соответствующих ячеек из black, и обновленная копия K ячеек из black.

3. Наконец, в блоках white выполняется обход оставшейся второй половины внутренних ячеек.

Обратный обход в блоках строится в соответствии с прямым: в black он начинается с "двойного периметра" приграничных ячеек в обратном порядке и заканчивается на внутренней оставшейся их части (так же в обратном порядке); в white сначала выполняется обход второй половины внутренних ячеек, затем граничных и, наконец, оставшейся первой части (в обратном порядке). Все необходимые пересылки ячеек выполняются с последующей проверкой соответствующих флагов.

Описанный алгоритм эффективно работает на блоках с примерно равным числом ячеек, поскольку время счета в разных блоках будет мало отличаться, и они не будут значительным образом тормозить счет друг друга. Как будет показано в результатах тестирования, даже на грубых сетках не возникает простоев, поскольку все пересылки ячеек происходят за время, меньшее времени счета соответствующих ячеек, и они выполняются непосредственно в момент счета этих ячеек. Алгоритм корректен, поскольку для него существует эквивалентный обход всей расчетной области, для которого результаты счета последовательного алгоритма совпадают с таковыми для рассмотренного параллельного. Построим такой обход, например, для области с 2x2 блоками (рис. 2).

Числами на рис. 2 обозначена последовательность обхода частей расчетной области, каждая часть соответствует обходу в параллельном счете: 1, 2 - ячейки блока без "двойного периметра"; 3, 5 - первая половина внутренних ячеек; 4, 6 - граничные ячейки; 7, 8 - "двойной периметр" приграничных ячеек блока; 9, 10 - вторая половина внутренних ячеек. При параллельном счете в black запускается счет в 1 и 2, используя при этом необчисленные еще ячейки из 7 и 8; в white считается 3 и 5, используя также необчисленные ячейки из 4, 9, 6, 10; затем, используя полученные из 7 и 8 еще необчисленные соответствующие копии граничных ячеек, в white считается 4 и 6, используя соответственно уже обчисленные ячейки из 3 и 5, а также еще необчисленные из 9 и 10, 7 и 8 (копии). Обновленные копии отсылаются обратно для обновления своих оригиналов, что соответствует обходу 4 и 6 в последовательном случае с обновлением соседних ячеек в 7 и 8. После в white считаются 9 и 10 с использованием уже посчитанных 3 и 4, 5 и 6. В black считаются 7 и 8, используя уже

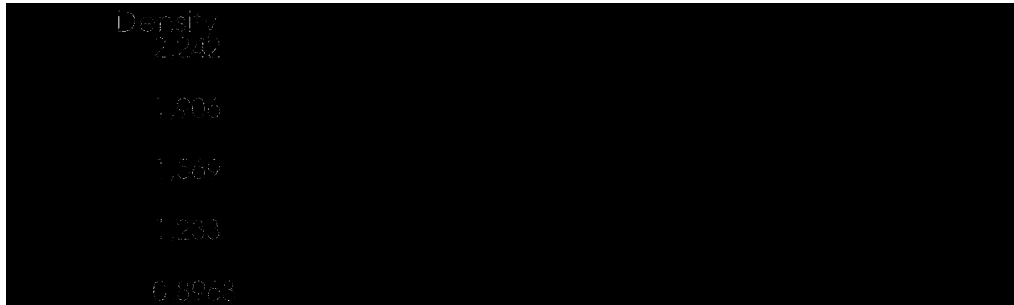


Рис. 3. Распределение плотности в задаче о коническом теле при $t = 0.5c$.

полученные обчисленные копии из 4 и 6. Таким образом, работа параллельного алгоритма эквивалентна работе последовательного с соответствующим обходом.

В случае произвольной конфигурации $N \times M$ блоков последовательный обход строится следующим образом: сначала выполняется обход всех ячеек без "двойного периметра" во всех блоках black в произвольном порядке, затем в каждом white первой половины внутренних ячеек и граничных ячеек (последовательность обхода самих блоков white произвольная), после обсчитываются все "двойные периметры" приграничных ячеек в black в произвольном порядке блоков, затем оставшиеся вторые половины внутренних ячеек в white (также произвольно). Нетрудно видеть, что этот обход будет эквивалентным для параллельного алгоритма.

3. Результаты

Для оценки эффективности алгоритма использовалась задача о коническом теле, мгновенно помещенном в однородный сверхзвуковой поток газа с числом Маха $M = 1.6$. Решалась нестационарная задача об образовании ударно-волновой структуры в результате взаимодействия потока с поверхностью тела (рис. 3). Сетка расчетной области строилась с тремя разрешениями: 450×135 , 900×270 , 1800×540 ячеек соответственно.

Наряду с реализацией параллельного алгоритма при помощи средств MPI также оценивалась и реализация в среде OST (Object, Space, Time) [5]. Данная среда предполагает использование объектно-ориентированного подхода для написания прикладных задач, поэтому естественным выглядит представление параллельного счета в виде объектов, распределенных по имеющимся процессорам, каждый объект при этом содержит блок ячеек и методы, отвечающие как непосредственно за счет в блоке, так и за обмен ячейками между объектами-соседями (соседство объектов определяется по соседству содержащихся в них блоков).

Запуск задач выполнялся на многопроцессорной вычислительной системе RSC4 в ИПМ им М.В.Келдыша РАН (<http://www.kiam.ru/MVS/resources/>). Используемая сеть для OST-версии - Gigabit Ethernet, для MPI-версии - Myrinet.

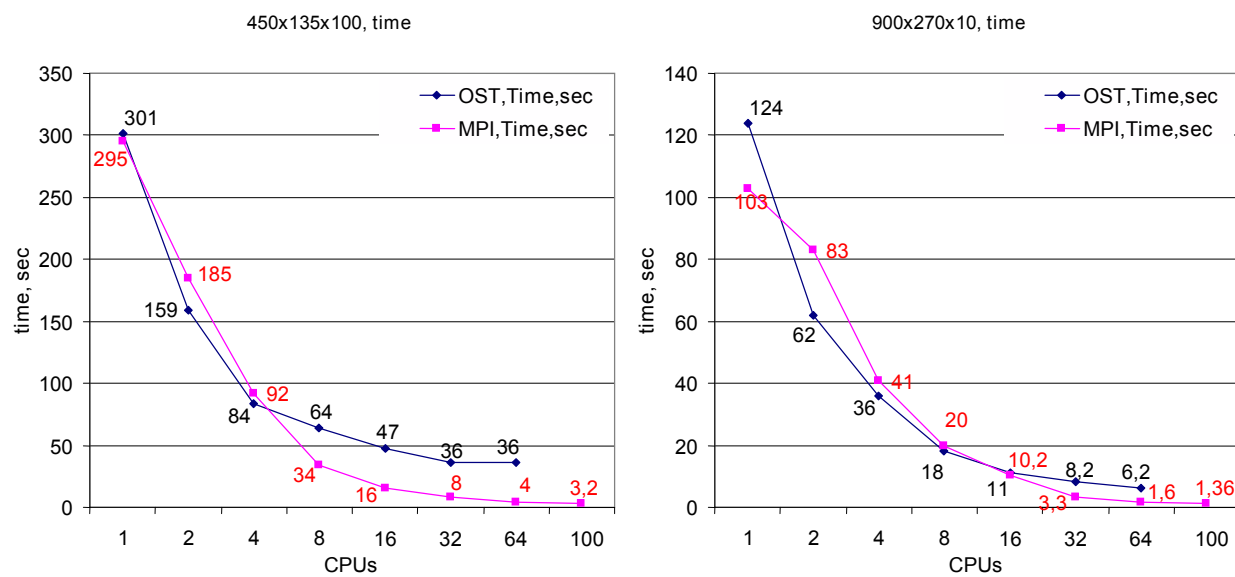


Рис. 4. Время счета для областей 450x135 и 900x270

При счете области 450x135 (рис. 4) на 2 и 4 ядрах обе реализации показывают высокую эффективность, с дальнейшим увеличением числа ядер эффективность MPI кода остается столь же высокой; для OST эффективность, начиная с 8 ядер, начинает падать и уже на 32 ядрах возникает насыщение, когда увеличение доступных ядер в 2 раза не дает никакого уменьшения времени счета. Это связано с неэффективной работой потоков (threads) в Python, когда вычисления в каждом блоке на одной итерации по времени становятся сравнимы с временем, затрачиваемым на обслуживание потоков синхронизации времени и передачи ячеек.

На области 900x270 (рис. 4) наблюдается похожая картина, высокая эффективность OST версии сохраняется уже вплоть до 16 ядер, при дальнейшем увеличении числа ядер она значительно падает. Улучшение эффективности в сравнении с областью 450x135 связано с тем, что отношение времени счета в объекте к издержкам, связанным с обслуживанием потоков, увеличилось (каждый объект содержит в 4 раза больше ячеек).

На области 1800x540 (рис. 5) особенности работы потоков в Python практически не сказываются на эффективности во всех протестированных конфигурациях, и результаты OST оказываются близкими к MPI даже на 64 и 100 ядрах.

4. Выводы

В работе предложен оригинальный параллельный алгоритм, реализующий метод LU-SGS для задач газовой динамики. Доказана корректность, проведены вычислительные эксперименты на многопроцессорной системе, которые подтвердили его эффективность. Помимо точного соблюдения действий последовательного аналога на всей расчетной области у предлагаемого параллельного алгоритма есть еще одно достоинство - толерантность к характеристикам коммуникационной сети: задержки, связанные с ее латентностью и скоростью, компенсируются асинхронным режимом счета/передачи ячеек. Таким образом, время счета даже на сравнительно грубых сетках оказывается больше времени пересылки данных между блоками, поэтому отсутствуют простои в вычислениях, и задача хорошо масштабируется на большое число процессоров.

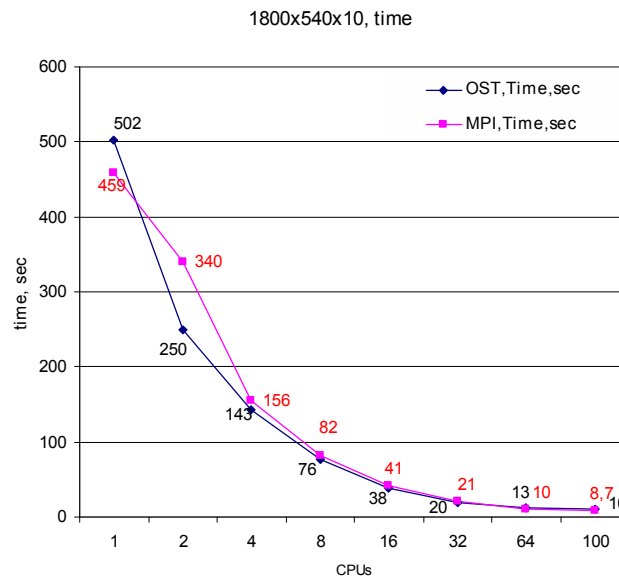


Рис. 5. Время счета для области 1800x540

ЛИТЕРАТУРА

1. Jameson A., Turkel E. Implicit schemes and LU decomposition // Math.of Comp.-1981. -Vol. 37. -№ 156. -P.385-397.
2. Menshov I., Nakamura Y. On implicit Godunov's method with exactly linearized numerical flux // Computers & Fluids. - 2000. - Vol. 29. -№ 6. -P. 595 – 616.
3. Menshov I., Nakamura Y. Hybrid Explicit-Implicit, Unconditionally Stable Scheme for Unsteady Compressible Flows // AIAA Journal. -2004. -Vol. 42. -№ 3. -P. 551-559.
4. Sharov D., Luo H., Baum J.D., Loehner R. Implementation of unstructured grid GMRES-SGS method on shared-memory, cache-based parallel computers // AIAA-2000-927 - Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 38th. -Reno: NV. -2000. Jan. 10-13.
5. <http://ost.kiam.ru> (документация по среде OST).
6. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. -1959, - Т. 47. -№ 3. - С. 271-30.
7. Rogers S., Kwak D. Upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier - Stokes equations // AIAA Journal. - 1990. - Vol. 28. - С. 253-259.
8. Семенов И.В., Ахмедьянов И.Ф. Разработка параллельного алгоритма LU-SGS для решения многомерных задач вычислительной газодинамики // Материалы 4-й Сибирской школы-семинара по параллельным и высокопроизводительным вычислениям. -Томск: Дельтаплан, 2008. - С. 122–129.

EFFICIENT PARALLEL IMPLEMENTATION OF THE LU-SGS METHOD FOR GAS DYNAMICS PROBLEMS.

Pavluhkhin P.V., Menshov I.S.

In present paper an effective algorithm for calculation of gas dynamics problems by using multiprocessor computing systems with distributed memory is proposed. The algorithm is based on the implicit scheme that leads to large-size linear systems with sparse matrices, which are solved with the method of LU-SGS (Lower-Upper Symmetric Gauss-Zeidel) approximate factorization. The parallel algorithm exactly copies the work of the sequential one and possesses a high-level of scalability.

Key words: parallel algorithms, numerical methods for gas dynamics problems, LU-SGS, high-performance computing.

Сведения об авторах

Павлухин Павел Викторович, 1986 г. р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (2010), аспирант механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, автор 1 научной работы, область научных интересов — математическое моделирование, высокопроизводительные вычисления, параллельные алгоритмы.

Меньшов Игорь Станиславович, 1957 г. р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1979), доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, профессор кафедры высшей математики МГТУ ГА и вычислительной механики МГУ им. М.В. Ломоносова, автор 47 научных работ, область научных интересов — численные методы, математическое моделирование, механика сплошных сред.

Пропустите 2 пустые страницы

Пропустите пустую страницу

УДК 514.7

О СИММЕТРИЯХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

А. В. САМОХИН¹

Многочисленные процессы управления, передачи информации, энергии и др. сопровождаются запаздыванием. В статье изучается структура алгебры симметрий простейшего уравнения $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h))$, где h — запаздывание. Различные концепции решения для таких уравнений приводят к различным алгебрам симметрий.

Ключевые слова: симметрии, дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.

1. Постановка задачи

Процессы, основанные на передаче массы, энергии, информации (в том числе наследственной), сопровождаются конечным запаздыванием. Это запаздывание может быть вызвано различными причинами - ограниченностью скорости распространения взаимодействия электрического сигнала, задержкой нервной и/или мышечной реакции, наличием инерционности некоторых элементов (например, индуктивности в электрических цепях), ограниченностью скорости протекания технологических процессов (например, горения в камере двигателя). Список легко продолжить.

Таким образом, многие процессы не могут быть адекватно описаны обыкновенными дифференциальными уравнениями, в которых значения неизвестной функции и ее производных входят при одном и том же значении независимой переменной — времени. Необходимо рассматривать уравнения, в которых неизвестная функция входит при различных значениях аргумента. Одним из представителей таких уравнений является простейшее дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом (дифференциально-разностное уравнение в другой принятой терминологии) вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad (1)$$

где x - неизвестная функция независимого аргумента t ; $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, а h - положительное число (запаздывание).

В настоящей работе сделана попытка описать устройство алгебры симметрий такого рода уравнений. Ответ не будет однозначен, потому что симметрия — это инфинитезимальный поток на множестве решений уравнения, но дело в том, что решения такого уравнения можно определять различными способами; соответственно и алгебры получаются разными.

Работа устроена следующим образом. В разделе 1 описываются классы решений уравнения (1) и способы получения таких решений. Раздел 2 содержит в определенном смысле полное описание алгебр симметрий для нескольких важных классов решений.

2. Решения и начальные данные

Метод шагов. Решением дифференциально-разностного уравнения (1) на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ называется функция $x(t)$, определенная на более широком отрезке $[t_0 - h, t_0 + T]$, обращающая уравнение (1) в тождество на $t \in [t_0, t_0 + T]$. Необходимость рассматривать более широкий отрезок связана с тем, что если считать функцию x определенной лишь на

¹Работа выполнена при частичной поддержке гранта RBRF/CNRS, 08-07-92496-CNRS-a.

отрезке $[t_0, t_0 + T]$, то, вообще говоря, невозможно проверить выполнение уравнения (1) при t , равном t_0 , а также близких к t_0 значениях; например, при $t = t_0$ уравнение (1) записывается в виде

$$\dot{x}(t_0) = f(t_0, x(t_0), x(t_0 - h)).$$

Однако в правую часть входит в этом случае неопределенная величина $x(t_0 - h)$!

При данном выше определении решения наблюдается аналогия с обыкновенными дифференциальными уравнениями, а именно, решение уравнения (1) на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ при естественных ограничениях однозначно определяется своими значениями на отрезке $[t_0 - h, t_0]$. Точнее: начальной задачей (или задачей Коши) для уравнения с запаздыванием (1) называется задача о нахождении решения x уравнения (1), совпадающего на отрезке $[t_0 - h, t_0]$ с заранее заданной функцией φ_0 . Т.е. задача о нахождении функции x , определенной на $[t_0 - h, t_0 + T]$, удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), x(t - h)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ x(t) &= \varphi_0(t), & t \in [t_0 - h, t_0]. \end{aligned} \quad (2)$$

Если функция f непрерывна и удовлетворяет по второму аргументу условию Липшица

$$|f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

функция φ_0 непрерывна на отрезке $[t_0 - h, t_0]$, то решение задачи (2) существует и единственно на любом $[t_0, t_0 + T]$, $\forall T > 0$.

Доказательство основывается на так называемом методе шагов. Будем сначала искать решение задачи (2) на отрезке $[t_0, t_0 + h]$. Если $t \in [t_0, t_0 + h]$, то $t - h \in [t_0 - h, t_0]$ и в силу (2), $x(t - h) = \varphi_0(t - h)$. Поэтому задача при $t \in [t_0, t_0 + h]$ эквивалентна обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_0(t - h)) = f_1(t, x(t)). \quad (3)$$

Очевидно, функция $f_1(t, x)$ удовлетворяет условиям теоремы существования/единственности и поэтому (3) имеет на отрезке $[t_0, t_0 + h]$ единственное решение φ_1 , удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = \varphi_0(t_0)$.

Функция x_1 , равная φ_0 на отрезке $[t_0 - h, t_0]$ и φ_1 на отрезке $[t_0, t_0 + h]$, является решением задачи Коши (2) на отрезке $[t_0, t_0 + h]$. Оно точно так же продолжается на отрезок $[t_0, t_0 + 2h]$. Для этого достаточно заметить, что решение на отрезке $[t_0, t_0 + 2h]$ совпадает на отрезке $[t_0 + h, t_0 + 2h]$ с решением задачи

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), x(t - h)), & t \in [t_0 + h, t_0 + 2h], \\ x(t) &= \varphi_1(t), & t \in [t_0, t_0 + h]. \end{aligned}$$

Таким способом решение можно продолжить вправо сколь угодно далеко. Однако при продолжении влево, вообще говоря, нарушается непрерывность. Действительно, рассмотрим простейшее линейное уравнение $\dot{x}(t) = x(t - h)$, которое можно переписать как

$$x(t - h) := \dot{x}(t). \quad (4)$$

Поэтому продолжение влево получается через производную, а не через интеграл, как при продолжении вправо (непрерывность правого продолжения обеспечивается правильным выбором произвольной константы!). На рис. 1 представлен результат продолжения начального значения $\varphi_0(t) = -t - t^2$ на $[-1, 0]$ для уравнения $\dot{x}(t) = x(t - 1)$ на два шага вперед и назад.

Замечание 1. В определении решения можно считать t_0 и h фиксированными или понимать так, что решениями будут признаваться продолжения φ_0 для всевозможных t_0 и h . Множества решений в этих случаях будут, разумеется, различны.

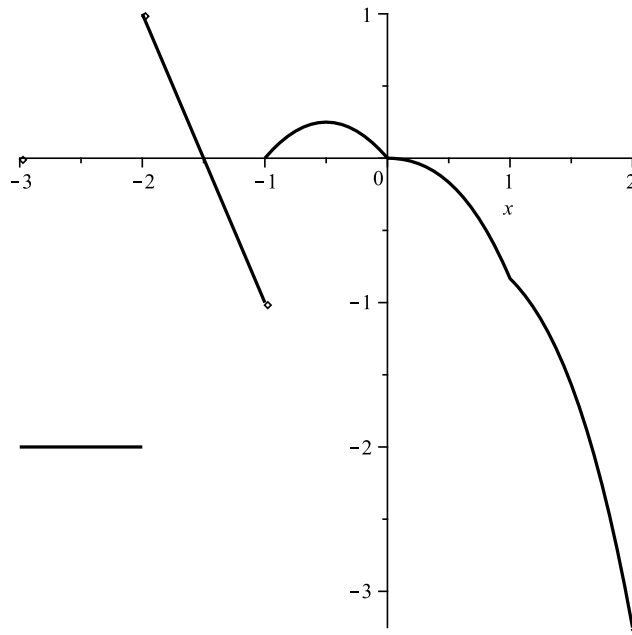


Рис. 1. Продолжение начальных значений $\varphi_0(t) = -t - t^2$ для уравнения $\dot{x}(t) = x(t-1)$ с отрезка $[-1, 0]$ на два шага вперед и назад

Замечание 2. То, что начальными данными является функция на отрезке, делает уравнения с запаздывающим аргументом гораздо более похожими на уравнения с частными производными. Множество их решений, в частности, бесконечномерно.

Вышеописанная концепция решения уравнения с запаздывающим аргументом хороша для многих практических целей. Например, при описании работы системы с управлением, начальное распределение φ_0 описывает функционирование системы до возникновения эффекта управляющего воздействия, которое сказывается с определенной задержкой. Однако при таком подходе нелегко найти решения, непрерывные на всей оси; непросто изучать устойчивость получаемых решений и т.д.

Поэтому для линейных уравнений существует альтернативный подход к понятию решения.

Метод Эйлера. Для линейного уравнения

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-h), \quad (5)$$

где a, b — вещественные константы, будем искать решение в виде $x(t) = e^{\lambda t}$.

Подстановка в уравнение (5) дает характеристическое уравнение на λ

$$\lambda + a + b \cdot e^{-\lambda h} = 0. \quad (6)$$

В левой части уравнения (6) стоит целая функция комплексной переменной λ , не являющаяся полиномом. Соответственно существует бесконечный набор корней $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots\} \in \mathbb{C}$, из которых не более двух действительных. Корень кратности l дает серию решений $t^j e^{\lambda t}, j = 0 \dots l-1$.

Доказывается, что любое решение, заданное при помощи (1) для (5), представимо в виде суммы ряда, составленного из этих частных решений.

С другой стороны, если такой ряд сходится равномерно на каждом конечном промежутке, то его сумма является решением (5) на всей действительной оси. Эти обстоятельства являются поводом считать решениями (5) сходящиеся ряды, составленные из частных решений, соответствующим корням характеристического уравнения (6).

Приведенные результаты, касающиеся уравнений с запаздывающим аргументом, допускают разнообразные обобщения на системы уравнений, непостоянные коэффициенты и др.

3. Симметрии

3.1. Общее решение и дифференциальные константы для нелинейного обыкновенного уравнения

Начнем с определений и обозначений.

Пусть \mathcal{E} обозначает нелинейное обыкновенное уравнение общего вида порядка n

$$y^{(n)} - F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0. \quad (7)$$

Его *общее решение* (или *общий интеграл*) имеет вид

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0. \quad (8)$$

Если (8) разрешено относительно y , получаем

$$y = f(x, c_1, \dots, c_n). \quad (9)$$

Почти каждое решение (7) получается из (9) при подходящем выборе констант c_i . (Те решения, которые не получаются из общего, называются *особыми решениями*; они здесь не рассматриваются.)

Замечание. Существование общего решения (7) отнюдь не гарантировано. Однако, если F непрерывно дифференцируемо, классическая теорема о гладкой зависимости решения обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) от начальных данных гарантирует существование локального представления (8) в окрестности выбранного решения. В этом локальном представлении начальные данные $y^{(k)}(x_0)$ выбираются в качестве дифференциальных констант c_k , $k = 0, \dots, n-1$. Дальше рассуждения проводятся с глобальным общим решением, однако всегда есть возможность сформулировать соответствующее локальное утверждение.

Дифференцируя (9) по x , получаем следующую систему n независимых уравнений

$$\begin{cases} y = f(x, c_1, \dots, c_n), \\ y' = f'(x, c_1, \dots, c_n), \\ \dots y' = f'(x, c_1, \dots, c_n) \\ y^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x, c_1, \dots, c_n) \end{cases} \quad (10)$$

(дальнейшие дифференцирования приводят к зависимым уравнениям, поскольку $y^{(k)}$, $k \geq n$, выражаются через $y^{(i)}$, $i < n$ посредством (7)).

Можно выразить c_i (необязательно явно) решая (10). Имеем

$$c_i = c_i(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

В этом смысле все c_i являются дифференциальными константами порядка не выше n . Другими словами, они являются дифференциальными операторами порядка $n-1$, или функциями на пространстве джетов $J^{n-1}(\mathbb{R})$.

В случае системы m дифференциальных уравнений

$$\mathbf{y}^{(n)} - \mathbf{F}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \dots, \mathbf{y}^{(n-1)}) = 0, \quad (12)$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$, $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_m)$, общее решение имеет вид

$$\Phi_k(x, \mathbf{y}, c_1, c_2, \dots, c_{mn}) = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (13)$$

или

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(x, c_1, \dots, c_{mn}). \quad (14)$$

Почти все решения (12) получаются из (14) при подходящем выборе констант c_i .

3.2. Полная алгебра симметрий ОДУ

По определению решения, если подставить правую часть (9), $f(x, y, c_1, \dots)$ вместо y в (7), то получим тождество

$$f^{(n)} - F(x, f, f', \dots, f^{(n-1)}) \equiv 0. \quad (15)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial c_i} (f^{(n)} - F(x, f, f', \dots, f^{(n-1)})) = 0 \quad (16)$$

для всех i или

$$\left(D^n - \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{\partial y_j} D^j \right) \Big|_{y=f(x, y, c_1, \dots, c_n)} f_{c_i} = 0, \quad (17)$$

где $D = d/dx$ есть полная производная по x и f_{c_i} обозначает частную производную по c_i .

Напомним, что

$$\mathcal{L}_{y^{(n)}-F} \stackrel{\text{def}}{=} D^n - \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{\partial y_j} D^j \quad (18)$$

называется *универсальной линеаризацией* оператора $y^{(n)} - F$ и что решение ϕ уравнения

$$(\mathcal{L}_{y^{(n)}-F}) \varphi|_{\mathcal{E}} = 0 \quad (19)$$

есть *симметрия* \mathcal{E} .

Теорема. Частные производные f_{c_i} , $i = 1, \dots, n$ составляют полный функционально независимый базис алгебры симметрий уравнения (7).

Доказательство. Разница между (17) и (19) состоит в том, что один и тот же оператор применяется к формально различным объектам. Заметим, однако, что множество

$$\{ y = f(x, c_1, \dots, c_n), y' = f'(x, y, c_1, \dots, c_n), \dots \mid \forall c_i \in \mathbb{R} \} \subset J^n(\mathbb{R})$$

совпадает с \mathcal{E} . Действительно, $\dim J^n(\mathbb{R}) = n + 2$, $\text{codim } \mathcal{E} \subset J^n(\mathbb{R}) = 1$, так что $\dim \mathcal{E} = n + 1$. Из теоремы существования для обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что решение можно провести через любую начальную точку $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{n-1} \in \mathcal{E}$. Далее, поскольку (9) порождает почти все решения и

$$\dim \{ y = f(x, y, \mathbf{c}), y' = f'(x, y, \mathbf{c}), \dots \mid \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \} = n + 1,$$

закключаем, что (17) совпадает с симметрией уравнения (19) почти всюду на \mathcal{E} . Поэтому f_{c_i} , $i = 1, \dots, n$ — симметрии уравнения (7). Более того, они образуют базис алгебры симметрий.

Действительно, пусть φ — симметрия. Тогда она определяет поток на решениях по формуле

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \varphi|_y, \quad (20)$$

где $y = f(x, y, c_1, \dots, c_n)$. Решение (20) является однопараметрическим семейством решений (7). В силу (9) оно имеет вид

$$y = f(x, c_1(\tau), \dots, c_n(\tau)). \quad (21)$$

С другой стороны, дифференцируя (21) по τ , найдем (при помощи (20)), что

$$\varphi|_y = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial c_i}{\partial \tau} f_{c_i} \right) \Big|_y \quad (22)$$

для любого решения y of equation (7). Следовательно,

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial c_i}{\partial \tau} f_{c_i} \quad (23)$$

верно везде на \mathcal{E} .

Отметим, что производные $\partial c_i / \partial \tau|_y$ зависят от y , то есть от c_1, \dots, c_n , которые являются функциями на $J^{n-1}(\mathbb{R})$ в силу (11). Поскольку каждый выбор произвольных функций $c_i(\tau)$ определяет некоторую симметрию с помощью (21), функции $\partial c_i / \partial \tau|_y$ также являются произвольными.

Итак, мы получили общую формулу для симметрий уравнения (7)

$$\varphi = \sum_{i=1}^n A_i(c_1, \dots, c_n) \frac{\partial}{\partial c_i} f(x, y, c_1, \dots, c_n), \quad (24)$$

здесь f — общее решение, A_i — произвольные функции и c_i суть функции на $J^{n-1}(\mathbb{R})$, заданные системой (10).

Формула (24) завершает доказательство теоремы. \square

Замечание. Полная алгебра симметрий есть модуль над кольцом дифференциальных констант. Модуль порожден частными производными общего решения по дифференциальным константам.

Замечание. Формула (24) дает представление алгебры векторных полей на \mathbb{R}^n в полной алгебре симметрий (12) при помощи изоморфизма

$$\sum_{i=1}^n A_i(c_1, \dots, c_n) \frac{\partial}{\partial c_i} \longleftrightarrow \sum_{i=1}^n A_i(c_1, \dots, c_n) \frac{\partial}{\partial c_i} f(x, c_1, \dots, c_n) \quad (25)$$

(слева c_i суть координаты в \mathbb{R}^n ; справа они обозначают дифференциальные инварианты (11) уравнения (7) — некоторые специальные функции на $J^{n-1}(\mathbb{R})$).

Таким образом, алгебра симметрий ОДУ совпадает с алгеброй векторных полей на пространстве его решений. Теорема дает явный вид этого представления в случае, когда общее решение известно. Однако его существование гарантировано только локально; соответственно формула (25), вообще говоря, тоже локальна.

Замечание. Теорема легко обобщается на случай системы дифференциальных уравнений (12). Её полная алгебра симметрий изоморфна \mathbb{R}^{mn} ; представление задано формулой

$$\sum_{i=1}^{mn} A_i(c_1, \dots, c_{mn}) \frac{\partial}{\partial c_i} \longleftrightarrow \partial \mathbf{f} \times \mathbf{A},$$

where $\partial \mathbf{f}$, \mathbf{A} are respectively $m \times mn$ and $mn \times 1$ matrices with matrix elements given by the formulas

$$(\partial \mathbf{f})_{j,i} = \frac{\partial f_j}{\partial c_i}, \quad (\mathbf{A})_i = A_i.$$

Версия теоремы справедлива в более общем случае системы ОДУ

$$y_j^{(n_j)} - F_j(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n_1-1)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(n_m-1)}) = 0.$$

Будем называть f_{c_i} , $i = 1, \dots, n$ *базисными симметриями*. Они соответствуют потокам $y(\tau) = f(x, c_1, \dots, c_i + \tau, \dots, c_n)$. В случае явного вида общего решения (9) базисными симметриями являются $f_{c_i} = y_{c_i}$.

Замечание. Если общее решение уравнения (7) задано в неявной форме (8), то

$$\frac{d\Phi}{dc_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial c_i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c_i} = 0.$$

Отсюда немедленно следует, что

$$y_{c_i} = - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial c_i} \right) / \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right). \quad (26)$$

Эта формула очевидным образом обобщается на системы уравнений.

3.3. Обобщения на бесконечномерные ситуации

Пример. Рассмотрим линейную граничную задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=-\pi} = 0.$$

Общее решение по методу Фурье-разложения на $[-\pi, 0]$ для этой струны есть

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sin nx (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

где a_n, b_n суть константы, не являющиеся ни дифференциальными, ни даже локальными: формула Фурье для коэффициентов дает

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 u|_{t=0} \sin nx \, dx, \quad b_n = \frac{2}{\pi n} \int_{-\pi}^0 u_t|_{t=0} \sin nx \, dx. \quad (27)$$

Общий вид симметрии (понимаемый как поток на решениях) дается, в соответствии с вышеизложенным, формулой

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sin nx (A_n(a_1, b_1, \dots, a_i, b_i, \dots) \cos nt + B_n(a_1, b_1, \dots, a_i, b_i, \dots) \sin nt).$$

Здесь A_n, B_n — произвольные функции, зависящие от конечного числа a_i, b_j , которые заданы формулой (27).

Нашей целью является описание симметрий уравнений с запаздывающим аргументом. Будем действовать по аналогии с предыдущим примером. В том случае, когда промежуток начальных данных зафиксирован (например, $[-2\pi, 0]$), решение полностью определяется значениями $x(t) = \varphi_0(t)$ на этом отрезке. Соответственно симметрия, т.е. поток на решениях полностью определяется своим действием на множестве $\{\varphi_0(t)\}$. Таким образом задача сводится к Фурье - разложению и явным формулам пошагового продолжения на $[0, 2\pi]$, $[4\pi, 4\pi] \dots$

Точнее, пусть

$$\varphi_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt). \quad (28)$$

Обозначим через $f_n(t), g_n(t)$ (предполагается $t \geq -2\pi$) те решения простейшего уравнения

$$\dot{x}(t) = ax(t - 2\pi), \quad (29)$$

которые являются продолжениями вправо синусов и косинусов

$$f_n(t)|_{[-2\pi,0]} = \sin(nt), g_n(t)|_{[-2\pi,0]} = \cos(nt).$$

Эти решения получаются пошаговым продолжением (для этого уравнения — просто взятием неопределенного интеграла, сравни с (4)).

В силу линейности уравнения (29) его решение при $t > 0$ имеет вид

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n g_n(t) + b_n f_n(t)), \quad (30)$$

где коэффициенты

$$\begin{cases} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-2\pi}^0 x(t) \cos nt dt, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-2\pi}^0 x(t) \sin nt dt. \end{cases} \quad (31)$$

Симметрии, т.е. потоку на решениях уравнения, взаимнооднозначно соответствует поток на начальных данных $\{\varphi_0(t)\}$, которому, в свою очередь, взаимнооднозначно соответствует поток на коэффициентах $\mathfrak{I} = \{a_n, b_n | n = 0, 1, \dots\}$

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} a_n &= A_n(a_0, \dots, a_i, b_i, \dots), \\ \frac{d}{d\tau} b_n &= B_n(a_0, \dots, a_i, b_i, \dots), \end{cases} \quad (32)$$

где A_n, B_n — произвольные функции, зависящие от конечного числа a_i, b_j , τ — параметр потока.

Имея в виду (30) и (32), получаем формулу для симметрий уравнения (28) с начальным отрезком $[-2\pi, 0]$

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \frac{d}{d\tau} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \left(\frac{1}{\pi} \int_{-2\pi}^0 x(t) dt, \dots, \frac{1}{\pi} \int_{-2\pi}^0 x(t) \cos(it) dt, \frac{1}{\pi} \int_{-2\pi}^0 x(t) \sin(it) dt, \dots \right) g_n(t) \right. \\ &+ \left. B_n \left(\frac{1}{\pi} \int_{-2\pi}^0 x(t) dt, \dots, \frac{1}{\pi} \int_{-2\pi}^0 x(t) \cos(it) dt, \frac{1}{\pi} \int_{-2\pi}^0 x(t) \sin(it) dt, \dots \right) f_n(t) \right] \quad (33) \end{aligned}$$

Здесь τ — параметр потока.

Для задачи с фиксированным интервалом нет трансляционной инвариантности, однако само уравнение выдерживает замену $t \mapsto t + \theta$. Если разрешить начальному интервалу сдвигаться (а это приводит к другому, более широкому множеству решений), то в формуле (33) надо просто изменить границы интегрирования на $[\theta(\tau) - 2\pi, \theta(\tau)]$.

Для решений уравнения (5), определенных на всей оси, воспользуемся методом Эйлера. Этот метод дает решение в виде

$$x(t) = \sum_j Res \left[\frac{e^{pt}}{p - a - b e^{-ph}} \left(\varphi_0(0) + b \int_{-h}^0 \varphi_0(t) e^{-p(t+h)} dt \right); p_j \right], \quad (34)$$

где j — номера корней характеристического уравнения

$$p - a - b \cdot e^{-ph} = 0 \quad (35)$$

(например, в порядке убывания их действительных частей). Для кратных корней сумма будет содержать слагаемые вида $t^l e^{pt}$, соответствующие вычетам в кратных полюсах. Если

все корни простые, то (34) приобретает особенно простой вид

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi_0(0) + b \int_{-h}^0 \varphi_0(t) e^{-p_j(t+h)} dt}{1 + b h e^{-p_j h}} \cdot e^{p_j t} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot e^{p_j t}. \quad (36)$$

Эта формула аналогична Фурье-разложению, но приводит к непрерывному решению уже для всех t . Комплексные коэффициенты $a_j \in \mathbb{C}$ ряда зависят от $x(t)$, как это видно из (36), следующим образом

$$a_j = a_j(x(t)) \frac{\varphi_0(0) + b \int_{-h}^0 \varphi_0(t) e^{-p_j(t+h)} dt}{1 + b h e^{-p_j h}} = \frac{x(0) + b \int_{-h}^0 x(t) e^{-p_j(t+h)} dt}{1 + b h e^{-p_j h}},$$

так как $x(t)|_{[-h,0]} = \varphi_0(t)$.

Симметрии задают поток на фазовом пространстве $\{a_j\}$ по формуле, аналогичной (32)

$$\frac{d}{d\tau} a_j = A_j(a_0, \dots, a_i, \dots), \quad (37)$$

где A_j — произвольные комплекснозначные функции, зависящие от конечного числа a_i ; τ — параметр потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эльсгольц Л.Э, Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971.
2. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. - 2-е изд. - М.: Наука, 1972.
3. Samokhin A. V. Full symmetry algebra for ODEs and control systems // Acta Applicandae Mathematicae, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London. – 2002. – Vol. 72. - № 1&2. – P. 87 – 99.
4. Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М., Дужин С.В., Красильщик И.С., Самохин А.В., Торхов Ю.Н., Хорькова Н.Г., Четвериков В.Н. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. -2-е изд., испр. и доп. – М.: Факториал, 2005.

ON SYMMETRIES OF ORDINARY DELAY-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Samokhin A.V.

Various processes of control, information or energy transfer are accompanied with time delays. These processes are described adequately by delay-differential equations. In this paper the structure of symmetries algebra for the simple equation $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h))$, with delay h is studied. Different concepts of solutions for such an equation lead to different symmetry algebras.

Key words: symmetry, delay-differential equations.

Сведения об авторе

Самохин Алексей Васильевич, 1947 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1971), доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики МГТУ ГА, автор 38 научных работ, область научных интересов — уравнения математической физики, симметрии, законы сохранения.

Пропустите 2 пустые страницы

Пропустите пустую страницу

УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В РЕЖИМЕ УСТАНОВЛЕНИЯ И НЕОДНОРОДНЫХ ПОТОКОВ

С.И. ТАРАСЧЕВ

Статья представлена доктором технических наук, профессором Самохиным А.В.

Разработана математическая модель процессов массового обслуживания на основе прикладного пакета Maple. Модель позволяет учитывать неоднородности в плотностях потоков событий и управлять системой, варьируя числом каналов, производительностью каналов и другими характеристиками.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, численное моделирование, управление.

1. Постановка задачи

Процессы, происходящие в системе массового обслуживания (например, в аэропорту), в первом приближении хорошо описываются при помощи схемы гибели и размножения, т.е. марковских цепей, которые приводят к уравнениям Эрланга и Колмогорова.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений Эрланга на вероятности возможных состояний системы обычно имеет большую размерность, и явное аналитическое ее решение получить теоретически несложно, но анализировать и принимать решения на его основе затруднительно. Поэтому обычно рассматривают финальные состояния, для которых вероятности состояний стабилизируются и далее не меняются. При этом переходной процесс от начала работы системы к стабильному режиму не рассматривается. Между тем, переход системы от системного сбоя (например, вызванного человеческим фактором или погодного форс-мажора) к стабильному режиму наиболее интересен с точки зрения управления: нужен прогноз по времени выхода из сбоя, предложения по задействованию дополнительных мощностей (их объём, длительность, структура распределения по каналам и др.)

Ещё более сложным делом является учет в модели неоднородностей в интенсивности потоков. Постоянство потоков, которое характерно для моделей Эрланга - Колмогорова, едва ли можно считать оправданным применительно к работе, скажем, аэропорта. Входной поток является в этом случае сложно устроенным: есть и медленный тренд, соответствующий меняющемуся спросу, есть и многочисленные периодические компоненты — сезонные, суточные и другие. Аналитическое решение уравнений Эрланга является в этих условиях невозможным, а гипотеза о существовании стабильных режимов работы не подтверждается. Ясно, что если период циклических колебаний сопоставим или превышает время релаксации в классической модели Эрланга, то эти колебания проявятся и в вероятностях состояний системы.

Все вышеизложенное является основанием для того, чтобы разработать численную модель работы системы массового обслуживания, которая могла бы:

- описывать процессы установления;
- учитывать нестационарную структуру потоков событий;
- прогнозировать установившийся режим работы системы;
- прогнозировать эффект принятия управленческих решений по количеству, интенсивности и режиму работы каналов обслуживания;

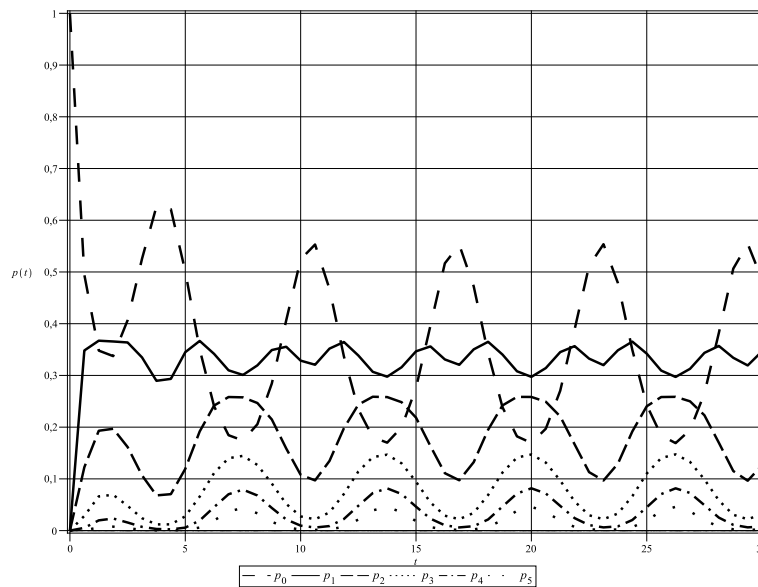


Рис. 1. Установление и стабильный режим 3-канальной СМО с 2-мя местами в очереди $\lambda = 0.7(1 + \cos(t))$, $\mu = 0.6$

- представить результаты в наглядной форме.

Численная модель была создана на платформе наиболее мощного прикладного математического пакета Maple, который сочетает возможности численного и аналитического решения с огромным потенциалом графической визуализации результатов расчетов.

2. Процесс установления и стабильные режимы

Приведем некоторые примеры моделирования при помощи созданных алгоритмов.

Система с ограничением по длине очереди

Рассматривается система с тремя каналами обслуживания и двумя местами в очереди на обслуживание. Входной поток имеет периодическую плотность $\lambda = 0.7(1 + \cos(t))$, плотность потока обслуживания $\mu = 0.6$.

Возможные состояния системы:

- (1) все каналы свободны (p_0 — вероятность этого состояния);
- (2) один канал занят (p_1);
- (3) два канала занято (p_2);
- (4) три канала занято (p_3);
- (5) три канала и одно место в очереди занято (p_4);
- (6) три канала и одно место в очереди занято (p_5).

Начало работы соответствует незанятой системе

$$p_0 = 1, \quad p_i = 0, \quad i > 0.$$

Результаты моделирования представлены на рис.1.

Можно заметить, что установление заканчивается примерно в момент $t = 7$. Позже идут стационарные периодические изменения вероятностей состояний той же частоты, что и входной поток (за исключением p_2 , которая имеет двойную частоту).

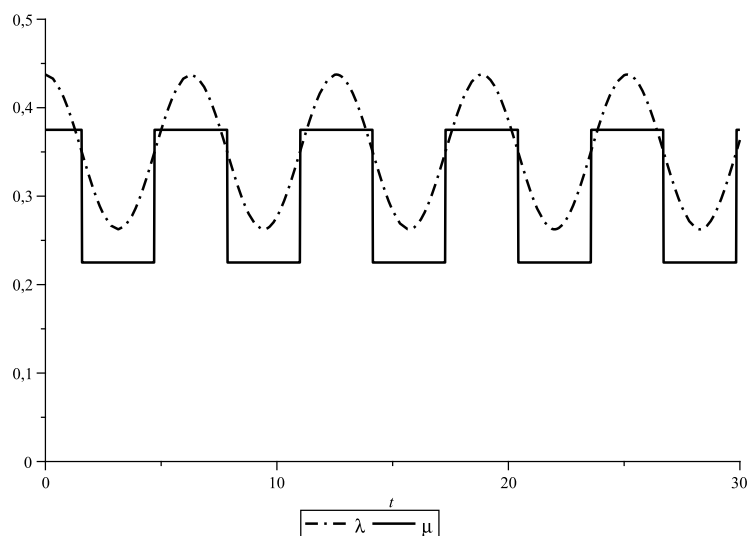


Рис. 2. Изменение плотности потока обслуживания вслед за периодическими изменениями входного потока 3-канальной СМО с 2-мя местами в очереди $\lambda = 0.7(1 + \cos(t))$, $\mu = 0.6$

Управление путем изменения пропускной способности

Как неравномерность (пусть и стационарная, как в предыдущем примере), так и чрезмерная загрузка СМО требует принятия управляющих решений. Они могут быть стратегическими: изменение структуры СМО, установка нового оборудования и тому подобное. Однако вопросы стратегического планирования здесь мы рассматривать не будем, а перейдем сразу к тактическим решениям. Среди них есть два наиболее очевидных — увеличение пропускной способности каналов за счет более интенсивной работы (подключение к работе дополнительного персонала, увеличение скорости работы и другие подобные меры) или подключение дополнительно ранее незадействованного канала (например, открытие еще одной стойки регистрации в пиковые часы). Принятие таких решений приводит к перераспределению входного потока и, значит, к процессам установления, характер которых необходимо установить. Интерес представляют такие характеристики, как длительность процесса релаксации, степень равномерности при новой схеме обслуживания и другое.

В качестве первого примера управляющего решения приведем управление путем изменения пропускной способности каналов. На рис. 2 представлена модель решения такого рода. При значительных колебаниях плотности входного потока $\lambda = 0.35(1 + 0.25 \cos(t))$ сменная работа персонала аппроксимирует эти колебания по следующему графику $\mu = 0.3(1 + k \cos(t)/|\cos(t)|)$ (здесь k — управляющий параметр, равный 0,25 на графике).

На графике (рис. 3) видно, что это управляющее решение приводит к тому, что после выхода на стационарный режим при $t > 15$ колебания в работе системы становятся незначительными (по сравнению с рис.1). Для получения графика рассмотрен случай трехканальной СМО с двумя местами в очереди.

В качестве второго примера управляющего решения приведем управление путем добавления каналов.

Рассмотрен случай двухканальной СМО с двумя местами в очереди, $\lambda = 0.7$, $\mu = 0.4$. После стабилизации при $t \approx 13$ в момент $t = 15$ добавляется третий канал (рис. 4). В этом примере интересна неустойчивость стационарного решения: добавление канала приводит

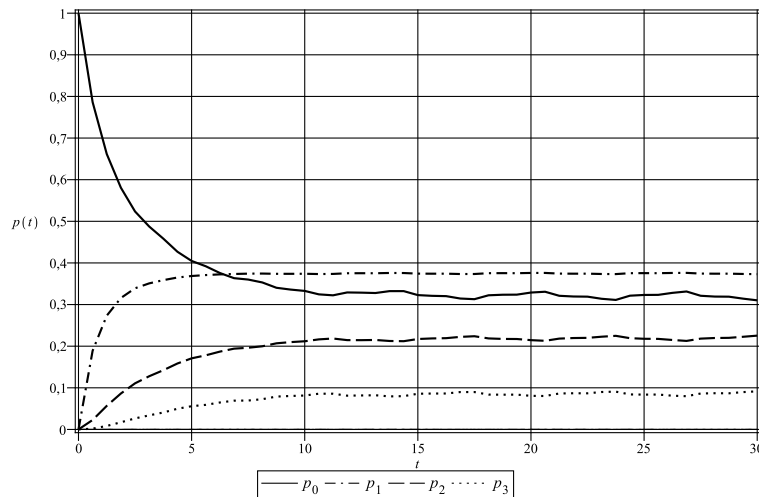


Рис. 3. Стабилизация работы СМО после управления плотностью обслуживания для 3-канальной СМО с 2-мя местами в очереди $\lambda = 0.7(1 + \cos(t))$, $\mu = 0.6$

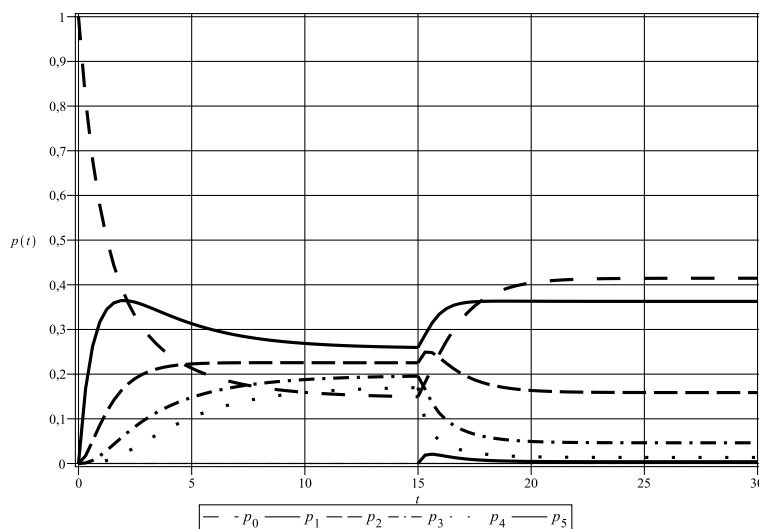


Рис. 4. Эффект открытия дополнительного канала обслуживания 2-канальной СМО с 2-мя местами в очереди $\lambda = 0.7$, $\mu = 0.4$

к значительной перестройке распределения вероятностей состояний, которое выходит на стационарный режим уже через $t \approx 5$.

3. Выводы

Разработанная модель управляющих решений в системе массового обслуживания позволяет в наглядной форме представлять результаты таких решений. Это позволяет сделать рациональным выбор решений по организации равномерной работы, оценивать время выхода системы на стационарный режим работы после системных сбоев (например, вызванных на авиапредприятии человеческим фактором или погодным форс-мажором).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вентцель Е.С.** Теория вероятностей. – М.: Наука, 1989.
2. **Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н.** Теория массового обслуживания: учеб. пособие для вузов. - 2 изд. – М.: Высшая школа, 1982.
3. **Тарасчев С.И.** Об учете рисков, вызванных человеческим фактором в организации производства на авиапредприятии //Научный Вестник МГТУ ГА. - 2009.- № 140. - С. 50-57.

**MODELLING AND CONTROL FOR QUEUING SYSTEMS
IN RELAXATION AND IN THE CASE ON NONUNIFORM FLOWS****Tarashev S.I.**

The model of queuing systems on the Maple platform is proposed. It allows to present visually the system behavior in presence of a nonuniformity of input flows and in relaxation period. The simple form of this graphic presentation helps to manage the system varying a number of channels used, intensity of output, etc.

Key words: queuing system, numeric modelling, control, management.

Сведения об авторе

Тарасчев Сергей Игоревич, 1985 г.р., окончил МГТУ ГА (2007), аспирант МГТУ ГА, автор 5 научных работ, область научных интересов — организация производства и безопасность на авиатранспорте.

Пропустите 2 пустые страницы

Пропустите пустую страницу

УДК 514.7

СТРУКТУРА \mathcal{C} -СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СИСТЕМ С УПРАВЛЕНИЕМ

В. Н. ЧЕТВЕРИКОВ¹

Вычисляется \mathcal{C} -спектральная последовательность систем с управлением. Показано, что для систем без первых интегралов в окрестности точки общего положения \mathcal{C} -спектральная последовательность однотипна и аналогична соответствующей последовательности пространства джетов.

Ключевые слова: системы с управлением, симметрии, законы сохранения, \mathcal{C} -спектральная последовательность.

\mathcal{C} -спектральная последовательность систем дифференциальных уравнений была введена А. М. Виноградовым в работе [1] (более полное изложение можно найти в [2, 3]). Наш интерес к ней вызван ее инвариантностью относительно обратимых преобразований наиболее общего вида, когда зависимые переменные одной системы выражаются через зависимые переменные и их производные до некоторого порядка другой системы. В данной статье мы даем описание структуры \mathcal{C} -спектральных последовательностей динамических систем с управлением. Этот результат может быть использован в дальнейших теоретических исследованиях, связанных с преобразованием систем, и решении на этой базе задач теории управления.

1. Диффеотопы систем с управлением

Мы рассматриваем системы с управлением вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

где t — независимая переменная, вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ — состояние, вектор $u = (u_1, \dots, u_m)$ — управление, $f = (f_1, \dots, f_n)$ — гладкая векторная функция, а $\dot{x} \equiv dx/dt$. Под гладкостью здесь и далее мы понимаем бесконечную дифференцируемость.

Систему (1) называют *регулярной*, если ранг матрицы $(\partial f_i / \partial u_j)$ равен m в каждой точке области определения системы.

С системой (1) связывают бесконечномерное пространство \mathbb{R}^∞ с координатами

$$t, x_1, \dots, x_n, u_1^{(0)}, \dots, u_m^{(0)}, u_1^{(1)}, \dots, u_m^{(1)}, u_1^{(2)}, \dots, \quad (2)$$

где координаты $u_j^{(0)}$ соответствуют переменным u_j , а координаты $u_j^{(l)}$ — производным $d^l u_j / dt^l$, $l > 0$, [3, 4, 6]. Правая часть системы (1) может быть определена не на всем пространстве переменных t, x, u , а только в некоторой области этого пространства. Кроме того, на управления и их производные до некоторого фиксированного порядка могут налагаться некоторые ограничения. Обозначим через \mathcal{E}^∞ подмножество пространства \mathbb{R}^∞ с координатами (2), в котором определена система (1) и лежат допустимые управления. Координаты (2) называют *каноническими координатами* на \mathcal{E}^∞ .

Каждое гладкое решение $s(t) = (x_*(t), u_*(t))$ системы (1) и точка t_0 , в окрестности которой это решение определено, задают точку из \mathcal{E}^∞ с координатами

$$t = t_0, \quad x_i = x_{*,i}(t_0), \quad u_j^{(l)} = \frac{d^l u_{*,j}(t_0)}{dt^l},$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НШ-4144.2010.1 ведущих научных школ и РФФИ, 10-07-00617.

где $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, l \geq 0$. Эта точка называется *бесконечным джетом* решения $s(t)$ в точке t_0 , а множество бесконечных джетов решения $s(t)$ во всех точках t_0 , в окрестности которых это решение определено, — *графиком в \mathcal{E}^∞ решения $s(t)$* . Любая точка множества \mathcal{E}^∞ является бесконечным джетом некоторого решения.

Отметим, что только на конечное число координат из набора (2) в \mathcal{E}^∞ могут налагаться ограничения, остальные координаты произвольны. Через \mathcal{U}^∞ мы будем обозначать *открытые подмножества \mathcal{E}^∞* , обладающие тем же свойством. А именно, из множества переменных (2) выделяется конечное подмножество I , а в пространстве переменных I — открытое подмножество \mathcal{U} . По определению точка $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ принадлежит \mathcal{U}^∞ в том и только том случае, когда значения переменных из набора I в точке θ есть координаты точки из \mathcal{U} , а значения остальных координат точки θ произвольны. Бесконечные объединения множеств вида \mathcal{U}^∞ также являются открытыми в \mathcal{E}^∞ по определению, хотя могут не быть вида \mathcal{U}^∞ . Как обычно, *окрестностью точки $\theta \in \mathcal{E}^\infty$* называется произвольное открытое подмножество в \mathcal{E}^∞ , содержащее эту точку.

Во всех рассуждениях этой статьи множество \mathcal{E}^∞ может быть заменено на открытое множество вида \mathcal{U}^∞ . В тех случаях, когда такая замена будет применяться, в обозначениях мы будем заменять \mathcal{E} на \mathcal{U} .

На множестве \mathcal{E}^∞ вводятся обычные дифференциально-геометрические понятия: гладкие функции, векторные поля, дифференциальные формы и т. д. А именно, *гладкой функцией на \mathcal{E}^∞* называется бесконечно дифференцируемая функция, зависящая от конечного (но произвольного) набора переменных (2). Алгебра гладких функций на \mathcal{E}^∞ обозначается через $\mathcal{F}(\mathcal{E})$. Любое дифференцирование этой алгебры представляет собой сумму (в общем случае бесконечную) вида

$$b_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^n b_l \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} b_i^{(j)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(j)}}, \quad (3)$$

где $b_l, b_i^{(j)}, l = 0, 1, \dots, n, i = 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots$, — некоторые гладкие функции на \mathcal{E}^∞ . Любое такое дифференцирование называется *векторным полем на \mathcal{E}^∞* . Множество векторных полей на \mathcal{E}^∞ является модулем над алгеброй $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ и обозначается через $\mathcal{D}(\mathcal{E}^\infty)$.

По определению, любая i -форма на \mathcal{E}^∞ зависит от конечного набора переменных (2). Через $\Lambda^i(\mathcal{E}^\infty)$ обозначим $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ -модуль i -форм на \mathcal{E}^∞ .

Алгебра $\mathcal{F}(\mathcal{E})$, модули $\mathcal{D}(\mathcal{E}^\infty)$ и $\Lambda^i(\mathcal{E}^\infty)$ связаны обычными операциями. В частности, производную Ли функции g (i -формы ω) вдоль векторного поля X будем обозначать через Xg (соответственно через $X\omega$), а подстановку векторного поля X в i -форму ω — через $X \lrcorner \omega$.

Векторное поле

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^n f_l(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} u_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(j)}},$$

определенное в точках \mathcal{E}^∞ , называют *полной производной по t на \mathcal{E}^∞* , а векторные поля вида (3), у которых отсутствует первое слагаемое, т.е. $b_0 \equiv 0$, называют *вертикальными*.

Производная Ли вдоль D функции $g \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ совпадает с производной функции g в силу системы (1). Векторное поле D порождает распределение \mathcal{C} на \mathcal{E}^∞ , которое называют *распределением Кармана на \mathcal{E}^∞* . Интегральные кривые распределения Кармана совпадают с графиками решений системы (1). Поэтому в качестве *геометрической модели системы (1)* рассматривают пару $(\mathcal{E}^\infty, \mathcal{C})$, которую называют *диффеотопом* (или *бесконечным продолжением*) системы (1).

Пусть $(\mathcal{E}^\infty, \mathcal{C})$ и $(\mathcal{S}^\infty, \mathcal{C})$ — два диффеотопа. Отображение

$$F : \mathcal{E}^\infty \longrightarrow \mathcal{S}^\infty \quad (4)$$

называют *гладким*, если соответствующее индуцированное отображение F^* отображает любую гладкую функцию на \mathcal{S}^∞ в гладкую функцию на \mathcal{E}^∞ , т.е. $F^*(\mathcal{F}(\mathcal{S})) \subset \mathcal{F}(\mathcal{E})$, где по определению $F^*(g) = g \circ F$. Отображение (4) называют *диффеоморфизмом*, если оно гладкое, взаимнооднозначное, и обратное отображение также является гладким. Диффеоморфизм (4), сохраняющий распределение Картана: $F_*(\mathcal{C}_\theta) = \mathcal{C}_{F(\theta)}$, $\theta \in \mathcal{E}^\infty$, называют *\mathcal{C} -диффеоморфизмом*.

2. Б-базисы систем с управлением

Дифференциальную форму $\omega \in \Lambda^i(\mathcal{E}^\infty)$ называют *картановской*, если она обращается в нуль при ограничении на распределение Картана. Так как графики в \mathcal{E}^∞ решений системы представляют собой интегральные кривые распределения Картана, то ограничения картановских форм на графиках решений равны нулю. Поэтому эти формы интерпретируются как формы на пространстве решений системы, и это одна из причин интереса к ним.

Пусть $g \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$. Обозначим через $d_{\mathcal{C}}g$ картановскую 1-форму $dg - D(g)dt$, через $\Lambda_0^1(\mathcal{E})$ — $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ -подмодуль модуля $\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty)$, порожденный 1-формой dt , через $\mathcal{C}\Lambda^i(\mathcal{E}^\infty)$ — подмодуль картановских i -форм. Так как в рассматриваемом случае одной независимой переменной распределение Картана одномерно, то

$$\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty) = \Lambda_0^1(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty), \quad \mathcal{C}\Lambda^i(\mathcal{E}^\infty) = \Lambda^i(\mathcal{E}^\infty) \quad \text{при } i > 1. \quad (5)$$

Обозначим через \mathcal{H}_1 $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ -подмодуль модуля $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty)$, порожденный 1-формами $d_{\mathcal{C}}x_1, \dots, d_{\mathcal{C}}x_n$. Определим \mathcal{H}_k для $k > 1$ индуктивно равенством

$$\mathcal{H}_{k+1} = \{\omega \in \mathcal{H}_k \mid D\omega \in \mathcal{H}_k\}.$$

Тогда \mathcal{H}_s есть $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ -модуль для любого s и $\mathcal{H}_j \subset \mathcal{H}_s$ при $j > s$.

Размерность пространства ковекторов $\{\omega_\theta \mid \omega \in \mathcal{H}_k\}$ конечна для любых $k > 0$ и $\theta \in \mathcal{E}^\infty$. Под размерностью какого-либо $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ -подмодуля $\mathcal{H} \subset \Lambda^1(\mathcal{E}^\infty)$ в точке $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ мы понимаем размерность пространства ковекторов $\{\omega_\theta \mid \omega \in \mathcal{H}\}$.

Точка $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ называется *регулярной в смысле Бруновского (Б-регулярной)*, если в некоторой окрестности этой точки система (1) регулярна и для любого $k > 1$ модули \mathcal{H}_k и $\mathcal{H}_k + D(\mathcal{H}_k)$ имеют постоянную размерность.

Покажем, что хотя над алгеброй функций модуль $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty)$ бесконечномерен, но в окрестности Б-регулярной точки его образующие получаются из конечного набора 1-форм дифференцированием в силу системы.

Так как для всех s мы имеем вложение $\mathcal{H}_{s+1} \subset \mathcal{H}_s$, то в каждой точке $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ размерность модуля \mathcal{H}_s может только убывать с ростом s . В окрестности Б-регулярной точки модуль \mathcal{H}_s имеет постоянную размерность. Поэтому для любой Б-регулярной точки существует такое положительное целое число s^* , что $\mathcal{H}_{s^*+1} = \mathcal{H}_{s^*}$ в окрестности этой точки. Тогда $\mathcal{H}_{s+1} = \mathcal{H}_{s^*}$ при $s \geq s^*$. Из равенства $\mathcal{H}_{s^*+1} = \mathcal{H}_{s^*}$ также следует, что $D(\mathcal{H}_{s^*}) \subset \mathcal{H}_{s^*}$, т.е. модуль \mathcal{H}_{s^*} инвариантен относительно производной Ли вдоль D . По построению \mathcal{H}_{s^*} есть максимальный $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ -подмодуль модуля \mathcal{H}_1 , удовлетворяющий этому свойству. Обозначим $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}_{s^*}$, а через ρ размерность этого модуля в окрестности рассматриваемой Б-регулярной точки.

Функцию $g \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ называют *первым интегралом системы* (1), если производная этой функции в силу системы (1) тождественно равна нулю.

Из теоремы 1 в [6] и теоремы о выпрямлении векторного поля теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует

Теорема 1. Пусть $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ — Б-регулярная точка системы (1), а g_1, \dots, g_ρ — такой набор функционально независимых первых интегралов системы (1) в окрестности точки θ , что любой другой первый интеграл системы (1) в окрестности θ есть функция от g_1, \dots, g_ρ .

Тогда существует такая окрестность вида \mathcal{U}^∞ точки θ и 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_m$ из \mathcal{H}_1 , что:

- 1) $\mathcal{H}_\infty = \text{span}_{\mathcal{F}(\mathcal{U})} \{d_{\mathcal{C}}g_i \mid i = 1, \dots, \rho\}$;
- 2) $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{U}^\infty) = \text{span}_{\mathcal{F}(\mathcal{U})} \{d_{\mathcal{C}}g_i, D^j(\omega_k) \mid i = 1, \dots, \rho, k = 1, \dots, m, j \geq 0\}$.

Доказательство теоремы 1 дает следующий алгоритм нахождения функций g_1, \dots, g_ρ и 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_m$, [5, 6]. Сначала, используя определение модулей \mathcal{H}_k , находим их образующие последовательно, начиная с \mathcal{H}_1 и кончая \mathcal{H}_{s^*} . По теореме 1 в качестве образующих модуля $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}_{s^*}$ можно взять 1-формы $d_{\mathcal{C}}g_1, \dots, d_{\mathcal{C}}g_\rho$. Так как $\mathcal{H}_{s^*} \subset \mathcal{H}_{s^*-1}$, то эти формы лежат в \mathcal{H}_{s^*-1} . Дополним их 1-формами $\omega_1, \dots, \omega_{m_1}$ ($m_1 \leq m$) до базиса модуля \mathcal{H}_{s^*-1} . По построению модуля \mathcal{H}_{s^*-1} 1-формы

$$d_{\mathcal{C}}g_1, \dots, d_{\mathcal{C}}g_\rho, \omega_1, \dots, \omega_{m_1}, D\omega_1, \dots, D\omega_{m_1}$$

$\mathcal{F}(\mathcal{U})$ -линейно независимы и лежат в \mathcal{H}_{s^*-2} . Дополним их 1-формами $\omega_{m_1+1}, \dots, \omega_{m_2}$ ($m_1 \leq m_2 \leq m$) до базиса модуля \mathcal{H}_{s^*-2} . Повторяя эту процедуру последовательно для модулей $\mathcal{H}_{s^*-3}, \dots, \mathcal{H}_1$, находим 1-формы $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$.

Следствие 1. Для существования первых интегралов системы с управлением в окрестности Б-регулярной точки необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{H}_\infty \neq \{0\}$. При этом количество функционально независимых первых интегралов равно размерности ρ модуля \mathcal{H}_∞ .

В теории управления особый интерес представляют системы без первых интегралов, так как только такие системы могут удовлетворять условиям управляемости, [7].

Набор 1-форм $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ будем называть *Б-базисом* системы, если 1-формы $D^j(\omega_k)$ для $k = 1, \dots, m$ и $j \geq 0$ образуют базис модуля $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{U}^\infty)$, т.е. если:

- 1) любая 1-форма из $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{U}^\infty)$ представляется в виде конечной линейной комбинации 1-форм $D^j(\omega_k)$ с коэффициентами в $\mathcal{F}(\mathcal{U})$;
- 2) любой конечный набор 1-форм $D^j(\omega_k)$ $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ -линейно независим.

Из теоремы 1 следует, что в окрестности Б-регулярной точки система обладает Б-базисом тогда и только тогда, когда $\rho = 0$. Алгоритм, приведенный выше, позволяет находить Б-базис.

3. Высшие симметрии систем с управлением

Полученное описание модуля $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty)$ дает простой и эффективный метод вычисления высших симметрий систем с управлением.

Высшей (инфинитезимальной) симметрией системы (1) называется вертикальное поле X на \mathcal{E}^∞ , удовлетворяющее условию $[X, D] = 0$. Мотивировку этого определения можно найти в [3, 6].

Для описания высших симметрий систем с управлением введем следующие понятия. Дифференциальный оператор вида

$$\Delta = g_0 + g_1 D + g_2 D^2 + \dots + g_k D^k, \quad g_0, g_1, \dots, g_k \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$$

называется *\mathcal{C} -дифференциальным оператором порядка k* . Каждый \mathcal{C} -дифференциальный оператор отображает модуль $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty)$ в себя.

Сумма и композиция \mathcal{C} -дифференциальных операторов есть \mathcal{C} -дифференциальные операторы, а умножение на константу можно понимать как \mathcal{C} -дифференциальный оператор нулевого порядка. Поэтому множество \mathcal{C} -дифференциальных операторов на \mathcal{E}^∞ является некоммутативной \mathbb{R} -алгеброй относительно указанных операций. Множество $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty)$ есть левый модуль над этой алгеброй. Из теоремы 1 следует, что формы $d_{\mathcal{C}}g_1, \dots, d_{\mathcal{C}}g_\rho, \omega_1, \dots, \omega_m$

являются образующими этого модуля, подмодуль \mathcal{H}_∞ — его кручением, а Б–базис — его базисом в случае $\rho = 0$.

Матрица, элементы которой являются \mathcal{C} –дифференциальными операторами, определяет обычным образом оператор на множестве столбцов функций или дифференциальных форм. Такой оператор будем называть *матричным \mathcal{C} –дифференциальным оператором*. Его *порядок* определяется как максимальный порядок его компонент.

Результаты данной статьи локальны, справедливы в некоторой окрестности вида \mathcal{U}^∞ точки θ из \mathcal{E}^∞ . Поэтому далее мы будем рассматривать только свободные конечно порожденные $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ –модули. Их элементы удобно представлять в виде конечных столбцов функций. Под \mathcal{C} –дифференциальным оператором из одного такого модуля в другой мы будем понимать матричный \mathcal{C} –дифференциальный оператор. Через $\mathcal{C}\text{Diff}(M, N)$ будем обозначать множество \mathcal{C} –дифференциальных операторов из модуля M в модуль N . Формула

$$(f\Delta)(\Omega) = f\Delta(\Omega), \quad f \in \mathcal{F}(\mathcal{U}), \quad \Delta \in \mathcal{C}\text{Diff}(M, N), \quad \Omega \in M$$

определяет модульную структуру над $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ на $\mathcal{C}\text{Diff}(M, N)$.

Из теоремы 1 следует, что в случае $\rho = 0$ в окрестности Б–регулярной точки существует такой \mathcal{C} –дифференциальный оператор P , что $d_C \bar{x} = P\bar{\omega}$, где

$$d_C \bar{x} = (d_C x_1, \dots, d_C x_n, d_C u_1, \dots, d_C u_m)^T, \quad \text{а} \quad \bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_m)^T$$

— столбец 1–форм какого–либо Б–базиса.

Следующая теорема есть частный случай теоремы, доказанной в [6] (там рассмотрен случай произвольного ρ).

Теорема 2. Пусть $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ — Б–регулярная точка, $\rho = 0$, $\bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_m)^T$ — Б–базис в окрестности θ , а P — \mathcal{C} –дифференциальный оператор, введенный выше. Тогда в некоторой окрестности вида \mathcal{U}^∞ точки θ любая высшая симметрия системы (1) имеет вид

$$\Theta_\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} D^j \varphi_{i+n} \frac{\partial}{\partial u_i^{(j)}}, \quad (6)$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n+m})^T = P\psi$, а $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)^T$ — столбец произвольных функций на \mathcal{E}^∞ . При этом $\Theta_\varphi \omega_i = \psi_i$, $i = 1, \dots, m$.

Векторную функцию $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$ будем называть *производящей функцией* симметрии (6).

Следствие 2. В предположениях теоремы 2 в окрестности точки θ коммутатор высших симметрий с производящими функциями χ и ψ представляет собой симметрию с производящей функцией

$$\{\chi, \psi\} = -d\bar{\omega}(\Theta_{P\chi}, \Theta_{P\psi}) + \Theta_{P\chi}(\psi) - \Theta_{P\psi}(\chi).$$

Доказательство следует из теоремы 2 и инфинитезимальной формулы Стокса.

4. Определение и член E_0 \mathcal{C} –спектральной последовательности Виноградова

В окрестности \mathcal{U}^∞ Б–регулярной точки системы (1) рассмотрим внешнюю алгебру $\Lambda^* = \Lambda^*(\mathcal{U}^\infty)$ дифференциальных форм и идеал $\mathcal{C}\Lambda^* = \mathcal{C}\Lambda^*(\mathcal{U}^\infty)$ картановских форм: $\mathcal{C}\Lambda^* = \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{U}^\infty) \wedge \Lambda^*(\mathcal{U}^\infty)$. Этот идеал и все его степени $(\mathcal{C}\Lambda^*)^{\wedge s} = \mathcal{C}\Lambda^s(\mathcal{U}^\infty) \wedge \Lambda^*$ устойчивы относительно действия оператора d , т.е. $d((\mathcal{C}\Lambda^*)^{\wedge s}) \subset (\mathcal{C}\Lambda^*)^{\wedge s}$, так что мы получаем фильтрацию

$$\Lambda^* \supset (\mathcal{C}\Lambda^*)^{\wedge 1} \supset (\mathcal{C}\Lambda^*)^{\wedge 2} \supset \dots \supset (\mathcal{C}\Lambda^*)^{\wedge k} \supset \dots$$

комплекса де Рама на \mathcal{U}^∞ его подкомплексами $((\mathcal{C}\Lambda^*)^{\wedge k}, d)$. Возникающая в результате спектральная последовательность $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$ называется \mathcal{C} -спектральной последовательностью системы (1) в окрестности \mathcal{U}^∞ (о теории спектральных последовательностей [8]). Как обычно, число p называется фильтрационной степенью, а $p + q$ полной степенью.

Так как любой \mathcal{C} -диффеоморфизм $F : \mathcal{E}^\infty \rightarrow \mathcal{S}^\infty$ сохраняет идеал картановских форм $F^*(\mathcal{C}\Lambda^*(\mathcal{S}^\infty)) = \mathcal{C}\Lambda^*(\mathcal{E}^\infty)$, он порождает изоморфизм \mathcal{C} -спектральных последовательностей на \mathcal{S}^∞ и \mathcal{E}^∞ . Аналогично производная Ли вдоль любой высшей симметрии сохраняет идеал $\mathcal{C}\Lambda^*(\mathcal{U}^\infty)$, поэтому действия симметрий переносятся на все члены $\{E_r^{p,q}\}$ \mathcal{C} -спектральной последовательности.

Из определения спектральной последовательности следует, что

$$E_0^{p,q} = \mathcal{C}^p \Lambda^{p+q} / \mathcal{C}^{p+1} \Lambda^{p+q},$$

где $\mathcal{C}^s \Lambda^k = (\mathcal{C}\Lambda^*)^{\wedge s} \cap \Lambda^k$. При этом дифференциал $d_0^{p,q} : E_0^{p,q} \rightarrow E_0^{p,q+1}$ индуцирован внешним дифференциалом d . Так как $\mathcal{C}^s \Lambda^k = 0$ при $s > k$ и при $s < 0$, то $E_0^{p,q} = 0$ и при $q < 0$, и при $p < 0$, а $E_0^{p,0}$ отождествляется с $\mathcal{C}^p \Lambda^p$ при $p \geq 0$.

Из разложения (5) и одномерности модуля $\Lambda_0^1 = \Lambda_0^1(\mathcal{U})$ следует разложение

$$\Lambda^i = \mathcal{C}^i \Lambda^i \oplus (\Lambda_0^1 \otimes_{\mathcal{F}(\mathcal{U})} \mathcal{C}^{i-1} \Lambda^{i-1}),$$

из которого получаем $\Lambda^i = \mathcal{C}^{i-1} \Lambda^i$ и $\mathcal{C}^s \Lambda^i = \mathcal{C}^{i-1} \Lambda^i$ при $s < i - 1$. А значит, $E_0^{p,q} = 0$ при $q > 1$ и $E_0^{p,1}$ отождествляется с $\Lambda_0^1 \otimes \mathcal{C}^p \Lambda^p$. Таким образом, все ненулевые члены $E_0^{p,q}$ расположены в полосе $0 \leq q \leq 1$, $p \geq 0$, а дифференциал $d_0^{p,0}$ совпадает с композицией

$$\mathcal{C}^p \Lambda^p \xrightarrow{d} \Lambda^{p+1} = \mathcal{C}^{p+1} \Lambda^{p+1} \oplus (\Lambda_0^1 \otimes \mathcal{C}^p \Lambda^p) \xrightarrow{\iota} \Lambda_0^1 \otimes \mathcal{C}^p \Lambda^p, \quad (7)$$

где ι проекция на второе слагаемое.

Данная спектральная последовательность сходится к когомологиям де Рама $H^*(\mathcal{U}^\infty)$ окрестности \mathcal{U}^∞ , поскольку исходная фильтрация конечна в каждой размерности

$$\Lambda^i = \mathcal{C}^{i-1} \Lambda^i \supset \mathcal{C}^i \Lambda^i \supset \mathcal{C}^{i+1} \Lambda^i = 0.$$

Столбец $p = 0$

$$0 \longrightarrow E_0^{0,0} = \mathcal{F}(\mathcal{U}) \xrightarrow{d_0^{0,0}} E_0^{0,1} = \Lambda_0^1 \longrightarrow 0$$

называют *горизонтальным комплексом де Рама*, а когомологии этого комплекса в члене $E_0^{0,0}$ — *законами сохранения системы* (1), [1, 2, 3]. Учитывая представление (7) дифференциала $d_0^{0,0}$ и равенство $df = d_c f + D(f)dt$ для произвольной функции $f \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$, где $d_c f \in \mathcal{C}^1 \Lambda^1$, а $D(f)dt \in \Lambda_0^1$, получаем $d_0^{0,0}(f) = D(f)dt$. Таким образом, законами сохранения системы с управлением являются константы и первые интегралы системы.

5. Член E_1

Первый член E_1 спектральной последовательности это, по определению, когомология ее нулевого члена. Таким образом, нулевой столбец состоит из групп горизонтальных когомологий. В частности, $E_1^{0,0} = \mathbb{R}$ для системы без первых интегралов. Чтобы описать члены $E_1^{p,q}$ при $p > 0$ мы должны вычислить когомологии комплексов

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^p \Lambda^p \xrightarrow{d_0^{p,0}} \Lambda_0^1 \otimes \mathcal{C}^p \Lambda^p \longrightarrow 0. \quad (8)$$

Используя представление (7) дифференциала $d_0^{p,0}$, докажем равенство

$$d_0^{p,0}(\alpha) = dt \otimes D(\alpha) = D(dt \otimes \alpha), \quad \alpha \in \mathcal{C}^p \Lambda^p. \quad (9)$$

Действительно, любой элемент модуля $\mathcal{C}^p\Lambda^p$ есть конечная сумма p -форм вида $f d_{\mathcal{C}}g_1 \wedge \dots \wedge d_{\mathcal{C}}g_p$. Имеем $d(d_{\mathcal{C}}g) = dt \wedge D(dg) = dt \wedge D(d_{\mathcal{C}}g)$ и поэтому

$$\begin{aligned} d_0^{p,0}(f d_{\mathcal{C}}g_1 \wedge \dots \wedge d_{\mathcal{C}}g_p) &= \iota \left(df \wedge d_{\mathcal{C}}g_1 \wedge \dots \wedge d_{\mathcal{C}}g_p + f d(d_{\mathcal{C}}g_1) \wedge \dots \wedge d_{\mathcal{C}}g_p + \dots + \right. \\ &+ \left. (-1)^p f d_{\mathcal{C}}g_1 \wedge \dots \wedge d(d_{\mathcal{C}}g_p) \right) = D(f)dt \wedge d_{\mathcal{C}}g_1 \wedge \dots \wedge d_{\mathcal{C}}g_p + f dt \wedge D(d_{\mathcal{C}}g_1) \wedge \dots \wedge d_{\mathcal{C}}g_p + \dots \\ &\dots + f dt \wedge d_{\mathcal{C}}g_1 \wedge \dots \wedge D(d_{\mathcal{C}}g_p) = dt \wedge D(f d_{\mathcal{C}}g_1 \wedge \dots \wedge d_{\mathcal{C}}g_p) = D(dt \wedge f d_{\mathcal{C}}g_1 \wedge \dots \wedge d_{\mathcal{C}}g_p). \end{aligned}$$

Это доказывает (9).

Из формулы (9) и теоремы 1 следует, что дифференциал $d_0^{p,0}$ не имеет ядра при $\rho = 0$ и $p > 0$, а его коядро есть фактор

$$E_1^{p,1} = \Lambda_0^1 \otimes \mathcal{C}^p\Lambda^p / D(\Lambda_0^1 \otimes \mathcal{C}^p\Lambda^p). \quad (10)$$

Обозначим через $[\alpha]$ класс элемента $\alpha \in \Lambda_0^1 \otimes \mathcal{C}^p\Lambda^p$ в факторе (10). Таким образом, из формулы (9) получаем следующее описание члена E_1 .

Теорема 3. Пусть $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ — Б-регулярная точка, $\rho = 0$, а $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ — Б-базис в окрестности точки θ . Тогда в некоторой окрестности \mathcal{U}^∞ точки θ имеем :

- 1) $E_1^{0,0} = \mathbb{R}$, а $E_1^{p,0} = 0$ при $p > 0$;
- 2) $E_1^{1,1}$ есть свободный $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ -модуль с базисом $[dt \otimes \omega_i]$, $i = 1, \dots, m$, т.е.

$$E_1^{1,1} = \left\{ \left[dt \otimes \sum_{i=1}^m f_i \omega_i \right] : f_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}) \right\};$$

- 3) $E_1^{2,1}$ есть свободный $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ -модуль с базисом

$$\left[dt \otimes \left(D^k \omega_j \wedge \omega_i + (-1)^k D^k \omega_i \wedge \omega_j \right) \right],$$

где $k \geq 0$, $i, j = 1, \dots, m$, $i < j$, если k — четное, и $i \leq j$, если k — нечетное, т.е.

$$E_1^{2,1} = \left\{ \left[dt \otimes \sum_{i,j=1}^m \sum_{k=0}^{k_0} a_{i,j}^k D^k \omega_i \wedge \omega_j \right] : a_{i,j}^k \in \mathcal{F}(\mathcal{U}), a_{j,i}^k = (-1)^{k+1} a_{i,j}^k \right\};$$

- 4) $E_1^{p,1}$, $p \geq 2$ есть свободный $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ -модуль, базис которого может быть выбран из элементов вида

$$\left[dt \otimes \sum_{i=1}^m \Omega_i \wedge \omega_i \right],$$

где Ω_i — некоторые формы из $\mathcal{C}^{p-1}\Lambda^{p-1}$.

6. Операторное представление члена E_1

Покажем теперь, что член E_1 \mathcal{C} -спектральной последовательности для системы с управлением без первых интегралов имеет такое же операторное представление, как для пространства джетов, [2, 3]. Отличие состоит только в том, что вместо модуля эволюционных дифференцирований $\varkappa(\pi)$ следует рассматривать модуль производящих функций высших симметрий системы.

Пусть θ — Б-регулярная точка системы (1), а $\rho = 0$. По теореме 1 в некоторой окрестности \mathcal{U}^∞ точки θ существует Б-базис $\bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_m)^T$ системы (1). По теореме 2 выбор Б-базиса определяет $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ -модульную структуру на множестве высших симметрий. А именно, умножение на скалярную функцию $f \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ симметрии $\mathcal{E}_{P\psi}$ с производящей векторной функцией ψ дает симметрию $\mathcal{E}_{Pf\psi}$ с производящей векторной функцией $f\psi$. Обозначим

$\mathcal{F}(\mathcal{U})$ -модуль высших симметрий системы (1) (точнее их производящих векторных функций) через $\mathcal{S}(\mathcal{U})$.

Выбор Б-базиса определяет также изоморфизм $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ -модулей $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{U}^\infty)$ и $\mathcal{C}\text{Diff}(\mathcal{S}(\mathcal{U}), \mathcal{F}(\mathcal{U}))$, отображающий 1-форму $\alpha \in \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{U}^\infty)$ в \mathcal{C} -дифференциальный оператор

$$\nabla_\alpha \in \mathcal{C}\text{Diff}(\mathcal{S}(\mathcal{U}), \mathcal{F}(\mathcal{U})), \quad \nabla_\alpha(\psi) = \mathcal{E}_{P\psi} \lrcorner \alpha, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathcal{U}).$$

В координатах этот изоморфизм ставит в соответствие форме $\omega_j^{(k)}$ оператор $(0, \dots, 0, D^k, 0, \dots, 0)$, где D^k стоит на j -м месте.

Пусть M — $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ -модуль. Элемент ∇ модуля

$$\mathcal{C}\text{Diff}_{(p)}(\mathcal{S}(\mathcal{U}); M) = \mathcal{C}\text{Diff}\left(\mathcal{S}(\mathcal{U}), \mathcal{C}\text{Diff}(\mathcal{S}(\mathcal{U}), \dots, \mathcal{C}\text{Diff}(\mathcal{S}(\mathcal{U}), M) \dots)\right),$$

в котором $\mathcal{C}\text{Diff}(\mathcal{S}(\mathcal{U}))$, повторяется p раз, называют *кососимметрическим оператором*, если для любых элементов $\chi_1, \dots, \chi_p \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$ и $i = 1, \dots, p-1$ имеем

$$\nabla(\chi_1) \dots (\chi_i)(\chi_{i+1}) \dots (\chi_p) = -\nabla(\chi_1) \dots (\chi_{i+1})(\chi_i) \dots (\chi_p).$$

Обозначим через $\mathcal{C}\text{Diff}_{(p)}^{\text{alt}}(\mathcal{S}(\mathcal{U}); M)$ подмодуль кососимметрических операторов из модуля $\mathcal{C}\text{Diff}_{(p)}(\mathcal{S}(\mathcal{U}); M)$. Сопоставим каждой форме $\alpha \in \mathcal{C}^p \Lambda^p$ оператор $\nabla_\alpha \in \mathcal{C}\text{Diff}_{(p)}^{\text{alt}}(\mathcal{S}(\mathcal{U}); \mathcal{F}(\mathcal{U}))$, полагая

$$\nabla_\alpha(\chi_1) \dots (\chi_p) = \mathcal{E}_{P\chi_1} \lrcorner (\dots (\mathcal{E}_{P\chi_p} \lrcorner \alpha) \dots), \quad \chi_1, \dots, \chi_p \in \mathcal{S}(\mathcal{U}). \quad (11)$$

Так как $\mathcal{E}_{P\chi}$ — вертикальное поле, то $\mathcal{E}_{P\chi} \lrcorner dt = 0$ и формула (11) сопоставляет также форме $\alpha \in \Lambda_0^1 \otimes \mathcal{C}^p \Lambda^p$ оператор $\nabla_\alpha \in \mathcal{C}\text{Diff}_{(p)}^{\text{alt}}(\mathcal{S}(\mathcal{U}), \Lambda_0^1(\mathcal{U}))$.

Лемма 1. В окрестности \mathcal{U}^∞ Б-регулярной точки формула (11) задает изоморфизм $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ -модулей $\mathcal{C}^p \Lambda^p$ и $\mathcal{C}\text{Diff}_{(p)}^{\text{alt}}(\mathcal{S}(\mathcal{U}); \mathcal{F}(\mathcal{U}))$, а также изоморфизм $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ -модулей $\Lambda_0^1 \otimes \mathcal{C}^p \Lambda^p$ и $\mathcal{C}\text{Diff}_{(p)}^{\text{alt}}(\mathcal{S}(\mathcal{U}); \Lambda_0^1(\mathcal{U}))$. При этом комплекс (8) переписывается в виде

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}\text{Diff}_{(p)}^{\text{alt}}(\mathcal{S}(\mathcal{U}), \mathcal{F}(\mathcal{U})) \xrightarrow{w} \mathcal{C}\text{Diff}_{(p)}^{\text{alt}}(\mathcal{S}(\mathcal{U}), \Lambda_0^1(\mathcal{U})) \longrightarrow 0, \quad (12)$$

где $w(\nabla) = (-1)^p d_0^{0,0} \circ \nabla$.

Доказательство. Построим отображение, обратное к заданному отображению $\alpha \mapsto \nabla_\alpha$ в двух случаях: $\alpha \in \mathcal{C}^p \Lambda^p$ и $\alpha \in \Lambda_0^1 \otimes \mathcal{C}^p \Lambda^p$. Пусть $\nabla \in \mathcal{C}\text{Diff}_{(p)}^{\text{alt}}(\mathcal{S}(\mathcal{U}); \mathcal{F}(\mathcal{U}))$. Каждый вертикальный вектор ξ в произвольной точке $\theta \in \mathcal{U}^\infty$ можно представить в виде $\mathcal{E}_{P\chi} \lrcorner \theta$ для некоторого $\chi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$ (это следует, например, из координатного выражения (6) для $\mathcal{E}_{P\chi}$). Зададим форму $\alpha_\nabla \in \mathcal{C}^p \Lambda^p$ условием

$$\alpha_\nabla \lrcorner \theta (\xi_1, \dots, \xi_p) = \nabla(\chi_1) \dots (\chi_p)(\theta),$$

где $\xi_i = \mathcal{E}_{P\chi_i} \lrcorner \theta$. Тогда $\nabla \mapsto \alpha_\nabla$ есть требуемое обратное отображение.

В случае $\nabla \in \mathcal{C}\text{Diff}_{(p)}^{\text{alt}}(\mathcal{S}(\mathcal{U}); \Lambda_0^1(\mathcal{U}))$ обозначим $\xi_0 = D \lrcorner \theta$ и положим

$$\alpha_\nabla \lrcorner \theta (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_p) = (\nabla(\chi_1) \dots (\chi_p)) \lrcorner \theta (\xi_0).$$

Так как $\xi_0 \lrcorner \Omega \lrcorner \theta = 0$ для $\Omega \in \mathcal{C}^p \Lambda^p$, то $\alpha_\nabla \in \Lambda_0^1 \otimes \mathcal{C}^p \Lambda^p$.

Наконец, для $\alpha \in \mathcal{C}^p \Lambda^p$ и $\chi_1, \dots, \chi_p \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$ из формулы (9) следует, что

$$\begin{aligned} \nabla_{d_0^{p,0}(\alpha)}(\chi_1) \dots (\chi_p) &= \mathcal{E}_{P\chi_1} \lrcorner \left(\dots (\mathcal{E}_{P\chi_p} \lrcorner (dt \otimes D\alpha)) \dots \right) = \\ &= (-1)^p dt \otimes D \left(\mathcal{E}_{P\chi_1} \lrcorner (\dots (\mathcal{E}_{P\chi_p} \lrcorner \alpha) \dots) \right) = (-1)^p d_0^{0,0} (\nabla_\alpha(\chi_1) \dots (\chi_p)). \end{aligned}$$

Поэтому $\nabla_{d_0^{p,0}(\alpha)} = w(\nabla_\alpha)$ и это доказывает последнее утверждение леммы.

Для описания гомологий комплексов (12) обозначим модуль $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ -гомоморфизмов из некоторого $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ -модуля M в $\Lambda_0^1(\mathcal{U})$ через \widehat{M} . А для оператора $\Delta \in \mathcal{C}\text{Diff}(M, N)$ через Δ^* обозначим сопряженный к нему оператор, [2, 3]. Оператор Δ^* действует из \widehat{N} в \widehat{M} и определяется условиями:

- 1) если $\Delta = \sum_{j=1}^k g_j D^j$ — скалярный оператор, то $\Delta^* = \sum_{j=1}^k (-1)^j D^j \circ g_j$;
- 2) если $\Delta = \|\Delta_{il}\|$ — матричный оператор, то $\Delta^* = \|\Delta_{li}^*\|$.

Следующая теорема доказана в [2, 3].

Теорема 4. Для свободного конечно порожденного $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ -модуля M комплекс

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}\text{Diff}_{(s)}^{\text{alt}}(M, \mathcal{F}(\mathcal{U})) \xrightarrow{w} \mathcal{C}\text{Diff}_{(s)}^{\text{alt}}(M, \Lambda_0^1(\mathcal{U})) \longrightarrow 0, \quad w(\Delta) = (-1)^p d_0^{0,0} \circ \Delta,$$

ацикличесен в первом члене и имеет гомологии $\mathcal{K}_s(M)$ во втором члене, причем

$$\mathcal{K}_s(M) = \left\{ \nabla \in \mathcal{C}\text{Diff}_{(s-1)}^{\text{alt}}(M, \widehat{M}) \mid (\nabla(p_1) \dots (p_{s-2}))^* = -\nabla(p_1) \dots (p_{s-2}) \right\}$$

при $s > 1$ и $\mathcal{K}_1(M) = \widehat{M}$.

Таким образом, мы приходим к следующему описанию члена E_1 для системы с управлением без первых интегралов.

Теорема 5. Пусть $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ — Б-регулярная точка, $\rho = 0$. Тогда в некоторой окрестности вида \mathcal{U}^∞ точки θ имеем :

1. $E_1^{0,q} = 0$ для всех $q \geq 0$;
2. $E_1^{p,q} = 0$ для $p > 0, q \neq 1$;
3. $E_1^{p,1} = \mathcal{K}_p(\mathcal{S}(\mathcal{U}))$, $p > 0$,

где $\mathcal{K}_p(\mathcal{S}(\mathcal{U}))$ было определено в теореме 4.

Поскольку в рассматриваемом случае \mathcal{C} -спектральная последовательность сходится к когомологиям де Рама окрестности \mathcal{U}^∞ , эта теорема имеет следующее

Следствие 3. Пусть $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ — Б-регулярная точка, $\rho = 0$. Тогда в некоторой окрестности \mathcal{U}^∞ точки θ имеем :

1. $E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q} = 0$ в случае $q > 1, p \geq 0$ и в случае $q = 0, p > 0$;
2. $E_2^{p,1} = E_\infty^{p,1} = 0$ при $p \geq 0$;
3. $E_1^{0,0} = E_\infty^{0,0} = \mathbb{R}$.

Аналогично случаю пространства джетов, [2, 3], можно вычислить операторы $d_1^{p,1}$, $p > 0$, для системы (1) в случае $\rho = 0$. Для этого необходимо ввести оператор линеаризации следующим образом. Пусть $g \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$. Тогда формула $\ell_g(\psi) = \mathcal{E}_{P\psi}(g)$ определяет \mathcal{C} -дифференциальный оператор ℓ_g из $\mathcal{S}(\mathcal{U})$ в $\mathcal{F}(\mathcal{U})$, который называют *оператором универсальной линеаризации* функции g . Данное определение обобщается на случай векторной функции g , тогда ℓ_g отображает элемент $\psi \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$ в векторную функцию $\mathcal{E}_{P\psi}(g)$. В частности, если $f \in \mathcal{K}_1(\mathcal{S}(\mathcal{U})) = \widehat{\mathcal{S}(\mathcal{U})}$, то ℓ_f есть \mathcal{C} -дифференциальный оператор из $\mathcal{S}(\mathcal{U})$ в $\widehat{\mathcal{S}(\mathcal{U})}$, а оператор $d_1^{1,1} : \widehat{\mathcal{S}(\mathcal{U})} \longrightarrow \mathcal{K}_2(\mathcal{S}(\mathcal{U}))$ имеет вид $d_1^{1,1}(f) = \ell_f - \ell_f^*$.

В заключение опишем действие высших симметрий на член $E_1^{1,1}$. Для этого заметим, что в случае $\rho = 0$ из построения Б-базиса следует существование такой матрицы Q функций (\mathcal{C} -дифференциального оператора нулевого порядка), что $\bar{\omega} = Q d_{\mathcal{C}}\bar{x}$.

Теорема 6. Пусть $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ — Б-регулярная точка, $\rho = 0$, P и Q — \mathcal{C} -дифференциальные операторы, введенные выше. Тогда в некоторой окрестности \mathcal{U}^∞ точки θ симметрия $\mathcal{E}_{P\psi}$

действует на элементы $E_1^{1,1} = \widehat{\mathcal{S}(\mathcal{U})}$ следующим образом:

$$f \in \widehat{\mathcal{S}(\mathcal{U})} \longmapsto \mathfrak{D}_{P\psi}(f) + ([\mathfrak{D}_{P\psi}, Q] \circ P + Q \circ \ell_{P\psi})^*(f) \in \widehat{\mathcal{S}(\mathcal{U})},$$

где $[\mathfrak{D}_{P\psi}, Q]$ — коммутатор операторов.

Для доказательства достаточно заметить, что $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ -гомоморфизму $f = (f_1, \dots, f_m)^T \in \widehat{\mathcal{S}(\mathcal{U})}$ соответствует элемент $[dt \otimes \sum f_i \omega_i] \in E_1^{1,1}$ в факторе (10) (теорема 3). Производная Ли вдоль $\mathfrak{D}_{P\psi}$ действует на этот элемент как

$$\mathfrak{D}_{P\psi} \left[dt \otimes \sum f_i \omega_i \right] = \left[dt \otimes \sum (\mathfrak{D}_{P\psi}(f_i) \omega_i + f_i \mathfrak{D}_{P\psi}(\omega_i)) \right]. \quad (13)$$

С другой стороны, так как высшие симметрии коммутируют с D и $\mathfrak{D}_{P\psi}]dt = 0$, то

$$\mathfrak{D}_{P\psi}] \ell_g(\bar{\omega}) = \ell_g(\mathfrak{D}_{P\psi}]\bar{\omega}) = \ell_g(\psi) = \mathfrak{D}_{P\psi}(g) = \mathfrak{D}_{P\psi}]dg = \mathfrak{D}_{P\psi}]d_c g,$$

а значит, $d_c g = \ell_g(\bar{\omega})$. В совокупности с определением P и Q и равенством (6) это дает

$$\mathfrak{D}_{P\psi}(\bar{\omega}) = \mathfrak{D}_{P\psi}(Q d_c \bar{x}) = [\mathfrak{D}_{P\psi}, Q](d_c \bar{x}) + Q d_c(P\psi) = [\mathfrak{D}_{P\psi}, Q](P\bar{\omega}) + Q(\ell_{P\psi}(\bar{\omega})). \quad (14)$$

Используя равенство $[dt \otimes \sum_{il} f_i \Delta_{il}(\omega_l)] = [dt \otimes \sum_{il} \Delta_{il}^*(f_i) \omega_l]$, верное в $E_1^{1,1}$, из (13) и (14), получаем утверждение теоремы 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Виноградов А.М.** Одна спектральная последовательность, связанная с нелинейным дифференциальным уравнением, и алгебро-геометрические основания лагранжовой теории поля со связями // ДАН СССР - 1978. - Т. 238. - № 5. - С. 1028–1031.
2. **Vinogradov A.M.** The \mathcal{C} -spectral sequence, Lagrangian formalism, and conservation laws. I. The linear theory. II. The nonlinear theory // J. Math. Anal. Appl. -100 (1984). -P. 1–129.
3. **Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М., Дужин С.В., Красильщик И.С., Самохин А.В., Торхов Ю.Н., Хорькова Н.Г., Четвериков В.Н.** Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Факториал, 2005.
4. **Четвериков В.Н.** Геометрическая интерпретация систем с управлением // Научный Вестник МГТУ ГА. - 1999. - № 16. - С. 69–75.
5. **Четвериков В.Н.** Высшие симметрии и инфинитезимальная форма Бруновского систем с управлением // Научный Вестник МГТУ ГА. - 1999. - № 16. - С. 77–83.
6. **Четвериков В.Н.** Высшие симметрии и инфинитезимальная форма Бруновского систем с управлением // Дифференциальные уравнения. - 2002. - Т. 38. - № 11. - С. 1525–1532.
7. **Четвериков В.Н.** Управляемость плоских систем // Дифференциальные уравнения. - 2007. - Т. 43. - № 11. - С. 1518–1527.
8. **Маклейн С.** Гомология /пер. с англ. - М.: Мир, 1966.

THE STRUCTURE OF THE \mathcal{C} -SPECTRAL SEQUENCES FOR CONTROL SYSTEMS

Chetverikov V.N.

The \mathcal{C} -spectral sequence of control systems is calculated. It is shown that for systems without the first integrals in a neighborhood of a general point the \mathcal{C} -spectral sequence is of the same type (and is similar to) as the corresponding sequence of jet space.

Key words: control systems, symmetries, conservation laws, \mathcal{C} -spectral sequence.

Сведения об авторе

Четвериков Владимир Николаевич, 1958 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1980), доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования МГТУ им. Н.Э. Баумана, автор 41 научной работы, область научных интересов — функционально-дифференциальные уравнения, симметрии, законы сохранения, нелинейные динамические системы с управлением, динамическая обратная связь, плоские системы.

УДК 519.876

ОБ ОБОБЩЕННОМ ПОКАЗАТЕЛЕ ЗАДЕРЖКИ РЕЙСОВ КАК ИНДИКАТОРЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ АВИАКОМПАНИИ. АНАЛИЗ ЗАДЕРЖЕК ЧАРТЕРОВ

Т.М. ИЛЛАРИОНОВА

Статья представлена доктором технических наук, профессором Самохиным А.В.

Проведен качественный и количественный анализ статистики задержек чартерных рейсов российских авиакомпаний. Предложены простые эффективные методические рекомендации анализа данных о задержках авиарейсов для принятия рациональных решений по управлению и стратегическому планированию.

Ключевые слова: задержки чартерных рейсов, управление авиапредприятием, математическое моделирование.

Введение

В работе [1] мы предложили систему поддержки принятия решения, сочетающую строгие математические методы оптимизации с интуицией и рациональными соображениями лица, принимающего решения (ЛПР). Описанные подходы дают возможность менеджерам принимать рациональные решения в условиях неполной и неточной информации.

В качестве примера можно рассмотреть деятельность Комиссии Федерального агентства воздушного транспорта по допуску к регулярным и чартерным воздушным перевозкам. При оценке авиакомпаний, подающих заявки на допуск к рейсам, используются шесть дискретных критериев, два из которых регламентируются требованиями Приказа Минтранса России от 28.06.2007 г. № 82, два других характеризуют финансовое положение компании и еще два основаны на данных о задержках выполненных авиарейсов каждой авиакомпанией, подающей заявку.

По понятным причинам, с точки зрения авиапассажира, вопрос о задержках является принципиальным, как это особенно ярко продемонстрировал предновогодний коллапс 2010 года в московском авиаузле. Вопрос о задержках имеет серьезный общественный резонанс: журнал «Forbes» составил рейтинг 35 наиболее крупных Российских авиакомпаний по задержкам регулярных и чартерных рейсов свыше 2 часов по вине авиакомпаний за январь-апрель 2010 года. Для подготовки этого рейтинга «Forbes» использовал данные Федерального агентства воздушного транспорта. Мнения экспертов о данном рейтинге, в частности, размещенные на сайте содружества авиационных экспертов «Aviation explorer», не очень лестные. Среди прочего звучала мысль о том, что методика, использованная при составлении данного рейтинга, является спорной, не дает ни анализа, ни прогнозов задержек, и не позволяет в принципе это сделать.

Вице-премьер С.Б.Иванов на заседании правительственной комиссии по транспорту и связи в ноябре 2010 года сообщил, что в настоящий момент в России очень большое количество авиакомпаний. Основной объем перевозок приходится всего на три десятка авиаперевозчиков, которыми в 2009 году было выполнено 95% пассажирских рейсов, причем на долю трех лидеров («Аэрофлот», «ЮТэйр» и «Трансаэро») и пришлось почти 44% всех перевезенных пассажиров. Конкуренция на рынке чартеров обостряется и заметна тенденция к укрупнению авиакомпаний. Глава Росавиации А.В.Нерадько ожидает в 2011 году новые объединения авиакомпаний.

Таким образом, задача анализа данных о задержках становится все более актуальной и для повышения эффективности работы авиакомпаний и даже их выживания в условиях рыночной экономики.

В настоящей статье мы предлагаем простые эффективные методические рекомендации анализа данных о задержках авиарейсов для принятия наиболее правильного решения лицом, принимающим решение (ЛПР) по двум из указанных выше дискретных критериев. Анализ и прогнозы задержек авиарейсов имеют большое практическое значение, особенно для региональных авиаперевозчиков, так как официальные статистические данные (Ф.АК-задержки) показывают, что общий процент задержек для региональных авиаперевозчиков в среднем в три-пять раз выше, чем для крупных федеральных авиаперевозчиков.

Постановка задачи

Найти функцию, позволяющую по имеющимся статистическим данным:

- анализировать динамику задержек авиарейсов:
 - во времени (ежемесячно, ежегодно);
 - в сравнении со средними показателями по всей отрасли;
- с определенной достоверностью делать прогнозы для конкретной авиакомпании:
 - на ближайший календарный год относительно улучшения (ухудшения) своего текущего состояния по задержкам;
 - относительно среднего показателя по отрасли.

В качестве такой функции ниже предложен обобщенный показатель задержки.

Исходные данные

Основным источником для принятия членами Комиссии ФАВТ решения по последним двум критериям являются данные о задержках авиарейсов, сформированные в виде статистических таблиц (Ф.АК-задержки) по форме, утвержденной Министерством транспорта России.

В табл. 1 приведен пример исходных статистических данных - фрагмент официальных данных Федерального агентства воздушного транспорта за период с 01.01.2009 по 31.12.2009гг.

Отметим, что в данных за 2009 год собрана информация по всем 195 авиакомпаниям, работавших на рынке авиаперевозок в 2009 году и имеющих сертификат эксплуатанта. По числу выполненных рейсов авиакомпании можно условно разделить на три типа: мелкие - число рейсов за год менее 1 тыс., средние - число рейсов от 1 тыс. до 10 тыс. и крупные - число рейсов более 10 тыс. В табл. 1 представлены авиакомпании всех указанных выше трех типов.

ФАВТ формирует ежемесячные статистические формы Ф.АК-задержки, которые агрегируются в ежеквартальные и ежегодные. В настоящей работе проведена статистическая обработка данных за 2007-2010 гг.

Описание метода построения обобщенного показателя

Построение обобщенного показателя основано на следующих соображениях:

- Исходные статистические таблицы (Ф.АК - задержки) позволяют рассматривать данные о задержках чартерных рейсов конкретной авиакомпании как пятимерный векторный случайный процесс, координаты которого, в свою очередь, сами являются дискретными случайными величинами.
- Соответствующие случайные величины (реализации случайных процессов при фиксированном времени) можно аппроксимировать показательным (экспоненциальным) распределением.

Таблица 1

ФОРМА Ф.АК-задержки

Количество регулярных и чартерных рейсов российских авиакомпаний, выполненных с задержками отправления за период с 01.01.2009 по 31.12.2009гг. (Задержки отправления учитываются по всем транспортным полетам, выполняемым по расписанию и вне расписания)																	ФОРМА Ф.АК-задержки		
Авиакомпания	Общее кол-во выполн. рейсов	Общее кол-во задерж. рейсов		Количество задержанных рейсов															
		ВСЕГО	Итого	%	>=2ч			>=3ч			>=4ч			>=5ч			>=6ч		
					Всего	Пер	Чарт	Всего	Пер	Чарт	Всего	Пер	Чарт	Всего	Пер	Чарт	Всего	Пер	Чарт
АЭРОФЛОТ-РОССИЙСКИЕ АВИАЛИНИИ	86748	1763	2	621	587	34	304	294	10	161	152	9	129	123	6	548	506	42	
БАРКОЛ авиакомпания	289	163	56	49	0	49	28	0	28	26	0	26	24	0	24	36	0	36	
БИЗНЕС АЭРО авиапредприятие	183	56	31	26	0	26	15	0	15	11	0	11	1	0	1	3	0	3	
КРАСАВИА гос. предп. Красноярского края	2769	255	9	86	51	35	57	27	30	38	23	15	20	7	13	54	33	21	
СИБИРЬ авиакомпания	44716	1771	4	775	753	22	344	331	13	198	196	2	131	126	5	323	313	10	
...	
ИТОГО:	580633	34473		13231	6645	6586	6804	3156	3648	3861	1916	1945	2385	1154	1231	8192	4161	4031	

• Параметры соответствующих распределений являются функциями дискретного времени t с интервалом 1 месяц (1 квартал или 1 год).

• Параметры каждого распределения целесообразно сравнивать между собой в динамике по времени и сравнивать со средними параметрами по отрасли также в динамике по времени.

Более подробно метод построения обобщенного показателя опишем на примере статистики за 2009 год.

Для каждой из 195 авиакомпаний (ежегодно их количество меняется) формируем вектор-функцию с координатами $(n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$, где n_k - число задержанных чартерных рейсов в интервале $[k, k+1)$ часов при $k=2, 3, 4, 5$, а n_6 - число задержанных рейсов на 6 и более часов. Отметим, что n_6 - особая координата, так как в исходных таблицах данные по задержкам на 6 и более часов агрегированы вместе.

Причинами агрегации данных именно после 6 часов являются, в частности, ограничения длительности летной смены экипажа, которые регламентируются «Положением об особенностях режима рабочего времени и времени отдыха членов экипажей воздушных судов ГА РФ», утвержденным Приказом Минтранса России от 21.11.2005 г. №139, и требования Приказа Минтранса России от 28.06.2007 г. № 82, согласно которому при задержке более 6 часов авиакомпания обязана предоставлять пассажирам питание и размещение. Все это приводит к еще большим задержкам времени вылета и, естественно, к дополнительным затратам со стороны авиакомпании. Таким образом, 6 часов соответствуют точке разрыва функций управления и являются естественной границей.

Рассмотрим случайную величину X_i - время задержки чартерного рейса i -й авиакомпании в 2009 году, где i - номер авиакомпании в списке. Тогда координаты $(n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ вектор-функции являются частотами выборки

Таблица 2

Частичный интервал	2-3	3-4	4-5	5-6	6 и более
Частоты	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6

Для применения математических методов обработки статистических данных введем дополнительную координату n_1 - количество задержек рейсов конкретной авиакомпании менее 2 часов. Эта величина не учитывается в официальной статистике, т.к. задержка на время менее 2 часов не считается задержкой, однако для статистического моделирования координата n_1 важна. Эта координата обобщенно содержит информацию о «незадержках» - важнейший показатель работы авиакомпаний и о «незначительных задержках». По экспертным оценкам на основе опроса летного персонала получена формула $n_1 = 1,3 * (n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6)$, в которой коэффициент 1,3 является расплывчатым числом.

Как показывает наш дальнейший анализ, эта формула приводит к удовлетворительным результатам для 85,7% авиакомпаний; 14,3% отклонение связано, по-видимому, с другой схемой организации менеджмента компаний. Эта ситуация подлежит дальнейшему исследованию.

Для двух компаний построим гистограммы (рис. 1, 2) относительных частот по выборке, указанной в табл. 1 с учетом координаты n_1 .

По горизонтальной оси указаны номера интервалов, которые соответствуют часовым интервалам задержек, по вертикальной оси отмечены соответствующие относительные частоты $w_k = n_k/n$, где $k \neq 1$; интервал от 0 до 2 представлен в виде двух интервалов единичной ширины и высота каждого из первых двух столбцов равна $w_1/2$.

Если $n_6 > n_2 + n_3 + n_4 + n_5$, то считаем, что распределение случайной величины X_i имеет так называемый «тяжелый хвост». Приведенные выше гистограммы показывают, что для авиакомпании «Красавиа» X_i не имеет тяжелого хвоста, а для авиакомпании «Аэрофлот» имеет. Из вычислений следует, что в 2009 году 9,2 % авиакомпаний имели тяжелый хвост распределения задержек их чартерных рейсов.

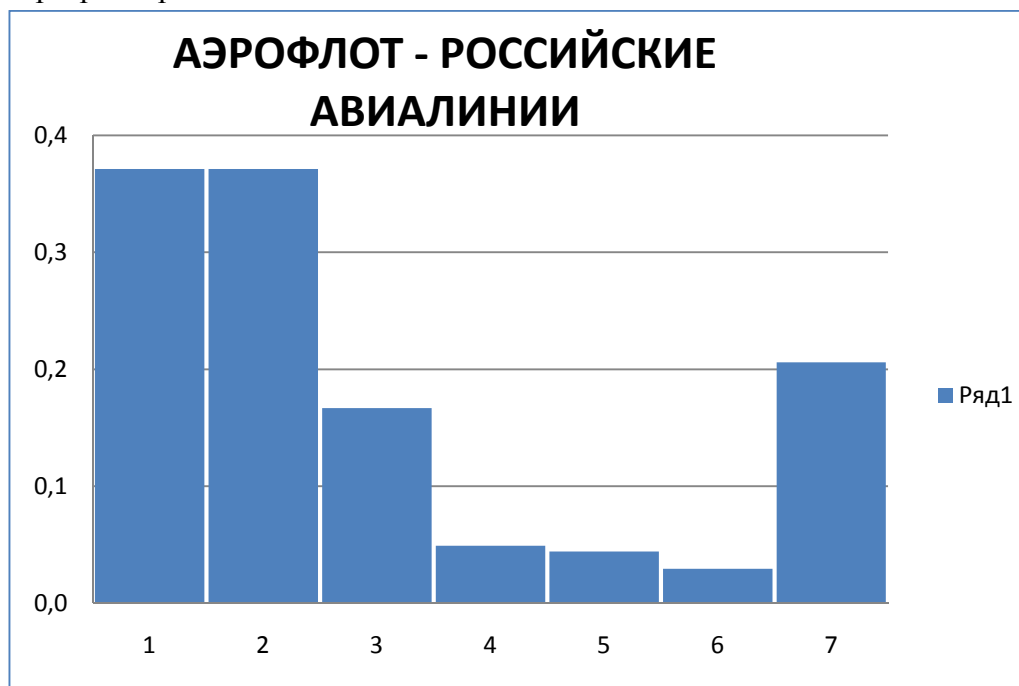


Рис. 1

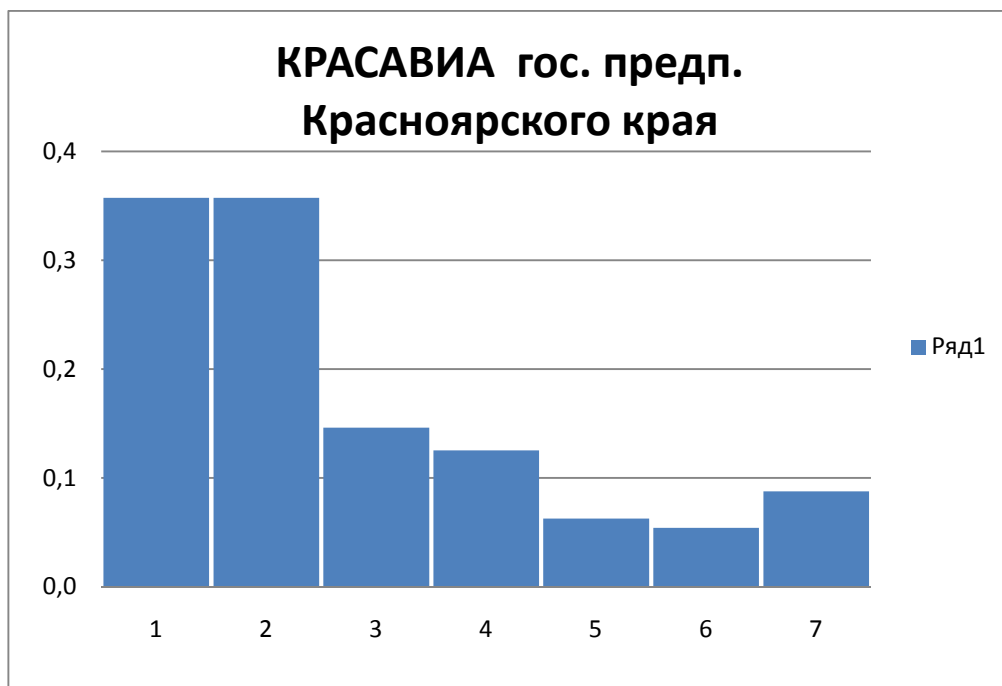


Рис. 2

В случае отсутствия тяжелого хвоста распределения случайную величину целесообразно аппроксимировать **показательным (экспоненциальным) распределением** с параметром λ , плотность вероятности $f(x)$ которой имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

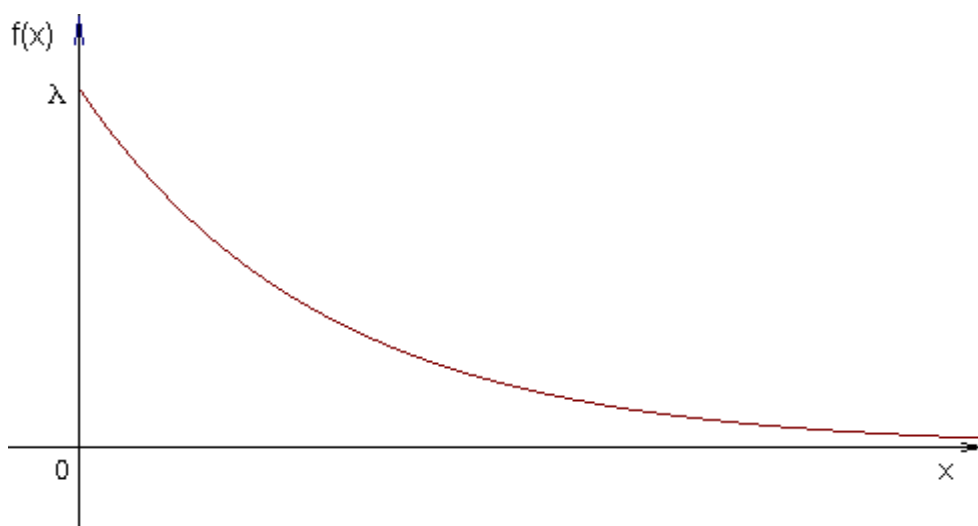


Рис. 3. График функции плотности показательного распределения

Оценка параметра λ варьируется в зависимости от метода обработки статистических данных, что дает нам основание считать оценку нечетким числом. Методом моментов получаем точечную оценку параметра λ :

$$\lambda = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^{-1} = \left(\frac{2,5 + 4,5 + 5,5 + 8 * 4}{17} \right)^{-1},$$

где

n - общее число чартерных рейсов данной авиакомпании.

Аналогично вычисляется среднее время задержки по всей отрасли и параметр Λ за данный временной интервал.

Для фиксированной авиакомпании число $\mu = \ln(\Lambda/\lambda) * 100$ назовем **обобщенным показателем задержки** за 2009 год.

Показатель μ можно вычислить за любой временной период (например, за 2007, 2008, 2009, 2010 гг.), то есть его можно рассматривать как функцию $\mu(t)$ дискретного времени.

Очевидны следующие утверждения:

1. Если $\mu(t) > 0$ в какой-либо момент времени (год), то среднее время задержки соответствующей авиакомпании в истекшем году меньше среднего времени задержки по отрасли.

2. Если $\mu(t) = 0$, то среднее время задержки соответствующей авиакомпании в истекшем году равно среднему времени задержки по отрасли.

3. Если $\mu(t)$ монотонно возрастает по времени, то имеет место уменьшение среднего времени задержки данной компании по сравнению с отраслью.

Результаты вычислений

Применяя критерий Пирсона «хи-квадрат» для проверки гипотезы о показательном распределении случайной величины X_i при уровне значимости 0,01, получаем, что эту гипотезу можно принять для 85,6 % авиакомпаний из всех 195. Критическое значение критерия «хи-квадрат» при уровне значимости 0,01 и числе степеней свободы 4 равно 13,3. Если эмпирические значения критерия (табл. 2) меньше указанного критического значения, то для данной компании гипотеза о показательном типе распределения времени задержки принимается. В табл. 2 приведены результаты расчетов данных по задержкам чартерных рейсов за 2009 год для пяти авиакомпаний.

Таблица 2

Анализ распределения задержек

Авиакомпания	Среднее время задержки	Среднее кв. отклонение	Значение «хи-квадрат»	Применимость метода
АЭРОФЛОТ-РОССИЙСКИЕ АВИАЛИНИИ	2,84	2,66	23,18	неприменим
БАРКОЛ авиакомпания	2,59	2,26	6,28	применим
БИЗНЕС АЭРО авиапредприятие	2,09	2,34	11,45	применим
КРАСАВИА гос. предп. Красноярского края	2,47	2,11	1,76	применим
СИБИРЬ авиакомпания	2,39	2,08	4,38	применим
По отрасли	2,48			

Для большинства крупных авиакомпаний гипотеза о показательном типе распределения не состоятельна, хотя эмпирические значения критерия у таких компаний, как «Аэрофлот», «Трансаэро», «ЮТэйр» сопоставимо с критическим значением «хи-квадрата». Это связано с тем, что крупные авиакомпании более точно соблюдают «Положение об особенностях режима рабочего времени и времени отдыха членов экипажей воздушных судов ГА РФ».

Несомненный выброс в статистике задержек именно крупных компаний указывает на качественную разницу в организации менеджмента перевозок: во-первых, уже упомянутое выше соблюдение нормативных документов; во-вторых, тот факт, что при общем малом проценте

задержек доля задержек выше 6 часов относительно велика; это позволяет заключить, что причинами задержек являются, в основном, экзогенные факторы типа метеоусловий, форс-мажоров и т.п., а не действия персонала компании.

Анализ 14,4% (а это 28 из 195) авиакомпаний, для которых критерий Пирсона «хи-квадрат» дает отрицательный результат за 2009 год, показывает следующее: для 22 из 28 компаний модель приближения статистических данных о задержках их чартерных рейсов показательным распределением становится удовлетворительной, если в качестве середины последнего интервала взять не 8, а 12 часов.

Отметим, что для 167 авиакомпаний, для которых вышеуказанная методика работает, принимаем среднее время задержек на 6 и более часов равным 8. Для 6 авиакомпаний - это «Аэрофлот», «Управление авиации ФСБ РФ», «Ираэро», «Оренбургские авиалинии», «Петропавловск-Камчатское авиапредприятие» и «Якутия» - никакое приближение показательным распределением не дает удовлетворительных результатов. Причина - наличие тяжелого хвоста распределения.

Многие эксперты основной причиной задержки авиарейсов по вине авиакомпаний считают недостаточное количество и плохое техническое состояние самолетов, имеющих в распоряжении авиакомпаний. Однако наши исследования не подтверждают эту точку зрения применительно к большим авиакомпаниям.

Анализ задержек с использованием обобщенного показателя задержки применим только к четырем из пяти указанных в табл. 2 авиакомпаний. В табл. 3 приведены значения обобщенного показателя задержки μ по годам для этих четырех авиакомпаний.

Таблица 3

Значения обобщенного показателя задержки μ по годам для четырех авиакомпаний

Авиакомпания	2007 г.	2008 г.	2009 г.	2010 г. (8мес.)
БАРКОЛ авиакомпания	0,07	-2,02	-3,98	-7,87
БИЗНЕС АЭРО авиапредприятие	15,22	10,49	17,26	12,32
КРАСАВИА гос. предп. Красноярского края	6,36	-1,19	0,59	-6,54
СИБИРЬ авиакомпания	6,40	-1,36	4,32	-11,87

Из табл. 3 видно, например, что у авиакомпании БАРКОЛ нарастает тенденция ухудшения работы.

Статистические критерии проверки гипотез показывают, что аппроксимация показательным распределением случайных величин - времени задержек чартерных авиарейсов - возможна для большинства авиакомпаний, однако не для всех.

При наличии тяжелого хвоста распределения случайной величины X_i рассмотрим две альтернативных гипотезы. Первая гипотеза - X_i имеет *распределение Парето* с параметрами ρ и $x_0 > 0$. Тогда плотность вероятности $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < x_0 \\ \rho \frac{x_0^\rho}{x^{\rho+1}}, & \text{если } x \geq x_0 \end{cases}$$

Случайная величина X , распределенная по закону Парето, принимает значения только в области $x \geq x_0$, где $x_0 > 0$ имеет математическое ожидание только при $\rho > 1$, а дисперсию - только при $\rho > 2$.

$$MX_i = \frac{\rho}{\rho - 1} x_0, \quad DX_i = \frac{\rho}{(\rho - 1)^2 (\rho - 2)} x_0^2.$$

В наших моделях считаем $x_0 = 1$.

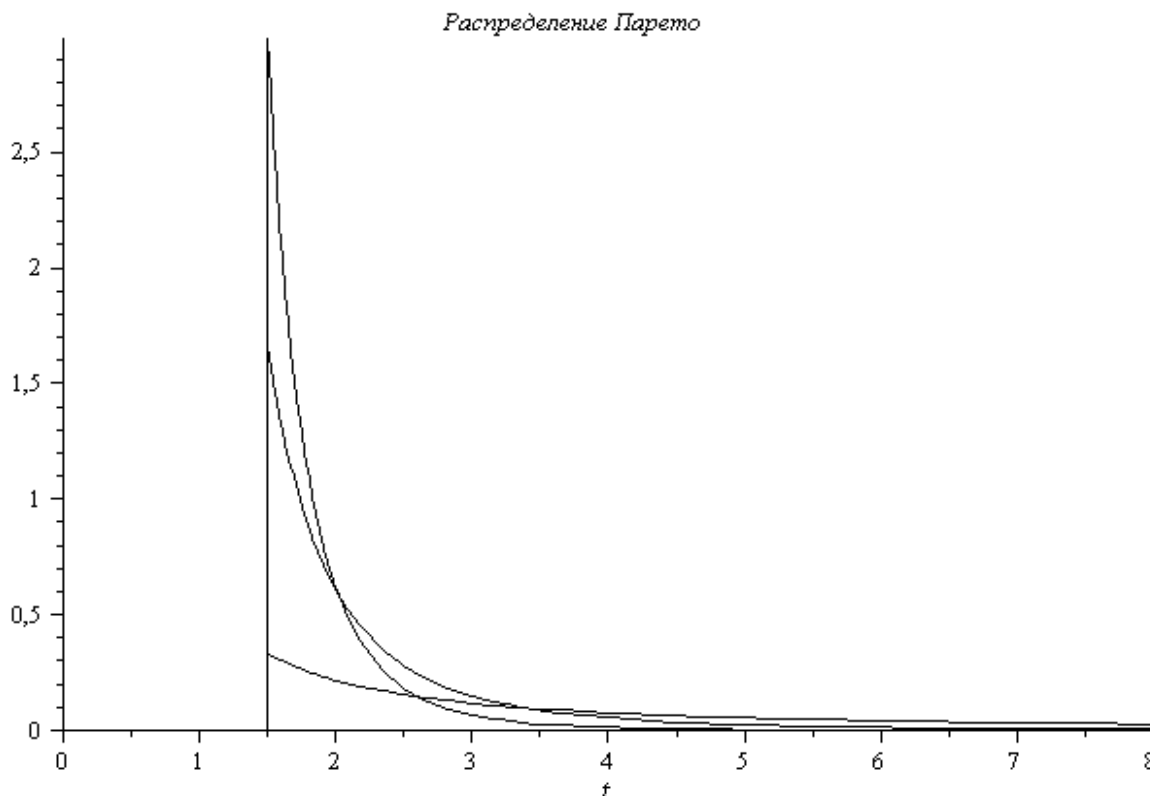


Рис. 4. Графики функции плотности распределения Парето при $x_0 = 1, \rho = 0.5; 2.5; 4.5$ (снизу вверх)

При фиксированном значении $x_0 = 1$ распределение Парето является однопараметрическим, причем логарифм случайной величины, распределенной по закону Парето, имеет показательное распределение с параметром $\lambda = \rho$.

Оценка параметра ρ методом максимального правдоподобия имеет вид

$$\hat{\rho} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} + \dots + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^k} \right)^{-1} \quad (8),$$

где

Есть обоснованные предположения, что в случае аппроксимации распределения с тяжелым хвостом распределением Парето, которое в настоящее время используется при анализе и прогнозировании различных катастроф (2), можно ввести показатель, аналогичный показателю $\mu(t)$ и на его основе проводить аналогичный вышеизложенному анализ.

Альтернативная гипотеза состоит в том, что X имеет бимодальное распределение с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ \alpha \cdot \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & \text{если } x < 6 \\ (1 - \alpha) \cdot \mu e^{-\mu(x-6)}, & \text{если } x \geq 6 \end{cases}.$$

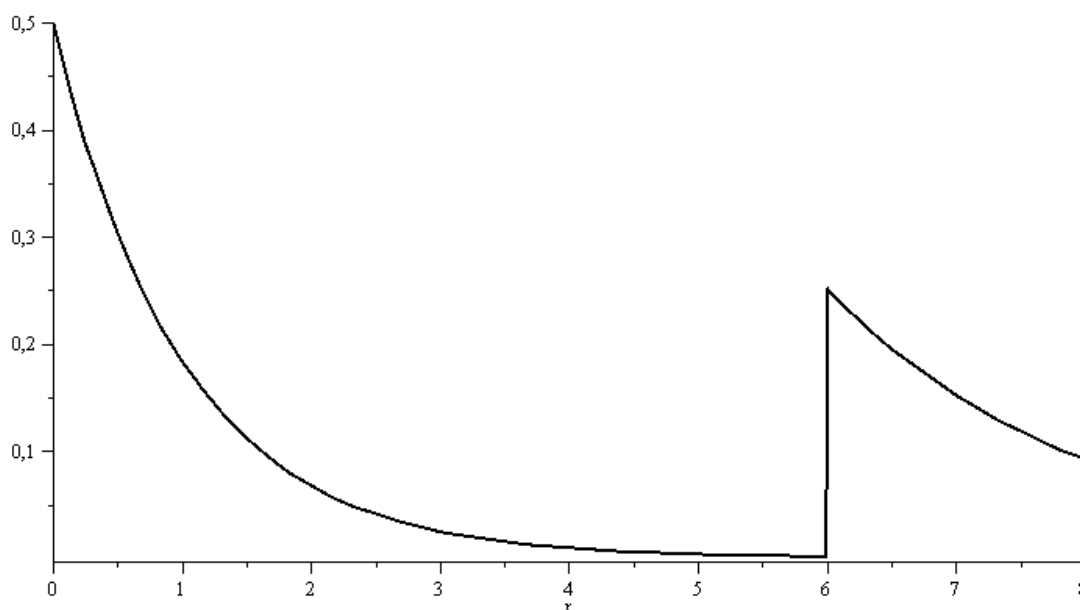


Рис. 5. График функции плотности бимодального распределения при $\alpha = 0.5$; $\lambda = 1$; $\mu = 0.5$

Выводы

1. Имеющаяся статистика задержек является агрегированной на первом и последнем интервале, вследствие чего большое значение имеет метод обработки статистики. Осуществлен подбор математической модели распределения времени задержки, предложена методика обработки статистики с учетом особенностей исследуемого распределения.

2. Для случайного процесса - времени задержки чартерного рейса введена новая характеристика - обобщенный показатель задержки, который применяется для обработки статистических данных по задержкам чартерных авиарейсов. Значение обобщенного показателя вместе с общепринятыми числовыми характеристиками случайного процесса позволяет проанализировать структуру задержек, их динамику во времени и делать прогнозы с оценкой их достоверности.

3. Обработаны данные за 2007-2009 гг. и частично за 2010 г. Проверена гипотеза о показательном распределении времени задержки. Эта гипотеза верна примерно для 85% авиакомпаний (в 2009 г. достоверность составила 85,6%). Вычислены обобщенные показатели задержки и для некоторых авиакомпаний рассмотрена динамика их во времени. Для остальных 15% выдвинуты альтернативные гипотезы о типе распределения, которое может являться либо распределением Парето, либо бимодальным. Эти гипотезы в настоящее время проверяются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Илларионова Т.М. Процесс нечеткого оценивания в многокритериальных оценках // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2009. - № 140. - С. 100-102.
2. Владимиров В.А., Воробьев Ю.Л., Салов С.С. и др. Управление риском. - М.: Наука, 2000.
3. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий Ф.Ф. Эконометрика. - М.: Дело, 2007.
4. Verbeek M. A guide to modern econometrics. - Chichester: Wiley, 2000.

**ON A GENERALIZED DELAY INDEX OF THE AIR COMPANY EFFICIENCY.
ANALYSIS OF CHARTER FLIGHT DELAYS**

Иларионова Т.М.

Qualitative and quantitative analysis of statistical data of charter flight delays is given. Simple and efficient recommendations of analysis of the delay data are suggested for the air company rational management and strategic planning.

Key words: charter flights delays, air company management, mathematical modeling.

Сведения об авторе

Иларионова Татьяна Михайловна, окончила МГУ им. М.В. Ломоносова (2006), аспирантка кафедры высшей математики МГТУ ГА, автор 2 научных работ, область научных интересов - менеджмент на производстве и эконометрика.

УДК 515.168

СЛОЕНИЯ МАЛОЙ ГЛАДКОСТИ

В.В. СОЛОДОВ

Статья представлена доктором технических наук, профессором Самохиным А.В.

Слоения малой гладкости (C^2 и менее) имеют свою специфику. В работе показано, что есть примеры локально-индикабельных групп гомеоморфизмов интервала, которые даже не сопряжены подгруппам C^1 - диффеоморфизмов.

Ключевые слова: диффеоморфизмы интервала, слоения, локально индикабельные группы.

Слоения малой гладкости (C^2 и менее) имеют свою специфику; мы рассмотрели это в первой части работы [7]. Приведены примеры локально-индикабельных групп гомеоморфизмов интервала, которые даже не сопряжены подгруппам C^1 - диффеоморфизмов.

1. Действия, не допускающие сглаживания

Простой, но важный случай теоремы стабильности Терстена приведен в работе [7,5].

Теорема 1. Пусть G - группа сохраняющих ориентацию C^1 - диффеоморфизмов замкнутого интервала I . Тогда группа G - локально индикабельная, то есть любая нетривиальная конечно определенная подгруппа H в ней допускает сюръективный гомоморфизм на \mathbb{Z} .

Доказательство теоремы не конструктивно и использует аксиому выбора. Идея состоит в том, чтобы раздуть окрестность одного из концов интервала I так, чтобы действие группы превращалось в сдвиг на конечное расстояние. Последовательность таких сдвигов будет иметь точку накопления, которая и будет представлять искомые параллельные переносы.

Заметим, что в доказательстве используется конечная определенность группы H , как показывает следующий пример, принадлежащий Серджеру [7].

Пример 1.1. Пусть G - группа всех C^∞ - диффеоморфизмов отрезка $[0,1]$, которые на концах имеют все нулевые производные. Тогда эта группа совершенна и, следовательно, не имеет эпиморфизма на \mathbb{Z} .

Другой пример возникает при изучении группы Томпсона.

Пример 1.2. Известно, что группа F -диадических, кусочно - линейных гомеоморфизмов отрезка $[0,1]$ сопряжена группе C^∞ диффеоморфизмов. Известно, что коммутатор $[F,F]$ является простой группой, так как она не абелева, значит простая.

Для группы $G \subset \text{Homeo}_+[0,1]$ теорема 1 доставляет критерий, при помощи которого можно показать, что группа G не сопряжена никакой подгруппе $\text{Diff}^1[0,1]$. Поэтому естественно спросить, будет ли критерий Терстона строгим?

То есть допустим, что группа G является локально индикабельной; верно ли, что любой гомоморфизм G в $\text{Homeo}_+[0,1]$ сопряжен с гомоморфизмом G в $\text{Diff}^1[0,1]$? Оказывается, что ответ - нет, неверно.

Кроме критерия Терстона существует мало препятствий для сопряженности подгруппы $G \subset \text{Homeo}_+[0,1]$ подгруппе $\text{Diff}^1[0,1]$. Наиболее существенными из этих препятствий являются динамические препятствия, связанные с существованием элементов с гиперболическими неподвижными точками, в тех случаях, когда действие имеет положительную топологическую энтропию [4], и не существует инвариантной вероятностной меры [1, 2].

Ниже мы приведем еще несколько примеров действия локально индикабельных групп на отрезке $[0,1]$, которые не сопряжены C^1 -действиям.

Пример 1.3 ($\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$) Пусть $T : [0,1] \rightarrow [0,1]$ - свободно действует внутри отрезка так, что внутри оно сопряжено сдвигу. Пусть I_0 - замкнутая область, фундаментальная для T , и пусть $S : I_0 \rightarrow I_0$ свободно действует внутри отрезка. Продолжим S тождественно вне I_0 до элемента $\text{Homeo}_+[0,1]$.

При каждом $i \in \mathbb{Z}$ пусть $I_i = T^i(I_0)$ и $S_i : I_i \rightarrow I_i$ сопряженное $T^i S T^{-i}$. Для любого $f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ определим \mathbb{Z}_f как произведение

$$\mathbb{Z}_f = \prod S_i^{f(i)}.$$

Пусть G - группа, состоящая из всех элементов вида \mathbb{Z}_f . Тогда G изоморфна $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ и потому абелева.

Тем не менее, G не сопряжена подгруппе в $\text{Diff}_+^1[0,1]$. Действительно, предположим обратное, что есть гомеоморфизм $\varphi : [0,1] \rightarrow [0,1]$ такой, что сопряжение $G^\varphi \subset \text{Diff}_+^1$.

Мы предположим, что S_i обозначает сопряжение к S_i^φ . При всех i пусть p_i - середина I_i . Поскольку при каждом фиксированном i последовательность

$$\{S_i^n(p_i)\}$$

сходится к концевой точке I_i , когда $n \rightarrow \infty$, следует, что для всякого i найдется такое n_i , что

$$dS_i^{n_i}(p_i) < \frac{1}{2}.$$

Пусть $F \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ такое, что $F(i) = n_i$. Тогда $d\mathbb{Z}_F(p_i) < \frac{1}{2}$ при всех i . Но \mathbb{Z}_F оставляет неподвижными концевые точки интервалов I_i при всех i . Поэтому \mathbb{Z}_F содержит последовательность точек, сходящуюся к 1. Отсюда следует, что $d\mathbb{Z}_F(1) = 1$. Но $p_i \rightarrow 1$, поэтому если $\mathbb{Z}_F \in C^1$, то должно быть $d\mathbb{Z}_F(1) < \frac{1}{2}$. Полученное противоречие показывает, что сопряжения быть не может.

Замечание. Группа $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ является локально индикабельной, но не счетной. Заметим, что указанное действие этой группы даже не сопряжено *би-Липшицеву*. С другой стороны, по теореме D в [2] для любой счетной группы гомеоморфизмов окружности или отрезка есть сопряжение с *би-Липшицевой* подгруппой гомеоморфизмов.

2. Порядок на множестве орбит

Мы приведем критерий несглаживаемости действия группы, основанный на локальном порядке на множестве орбит.

Определение. Пусть группа G действует на $[0,1]$ при помощи представления

$$\rho : G \rightarrow \text{Homeo}[0,1].$$

Точка $p \in [0,1]$ определяет порядок $<_p$ на множестве G следующим образом

$$a <_p b,$$

если $a(p) < b(p)$ на отрезке $[0,1]$.

Заметим, что является порядком на левом G -пространстве G/G_p , где G_p обозначает стабилизатор p .

Лемма 2.1 Пусть $\rho: G \rightarrow \text{Diff}_+^1[0,1]$ инъективно. Пусть H – является конечно порожденной подгруппой G с системой образующих $S = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$. Пусть точка $p \in [0,1]$ лежит на границе $\text{Fix}(H)$ – множества общих неподвижных точек всех элементов из H и пусть $p_i \rightarrow p$ последовательность, содержащаяся в $[0,1] \setminus \text{Fix}(H)$. Тогда существует последовательность индексов $k_m \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $e_m \in \{\pm 1\}$ такая, что для любого h из коммутатора, $h \in [H, H]$, и для всех достаточно больших t (зависящих от h) выполнено неравенство

$$h <_{p_m} h_{k_m}^{e_m}.$$

Доказательство. Имеется гомоморфизм $\rho: H \rightarrow \mathbb{R}$, определенный формулой

$$\rho(h) = \log(h'(p)).$$

Этот гомоморфизм обращается в нуль на $[H, H]$, а если h_i таково, что $\rho(h_i) \neq 0$, то (возможно после замены h_i на h_i^{-1} , если это нужно) ясно, что для любого $h \in [H, H]$ имеется неравенство

$$h <_{p_m} h_i$$

для всех p_m достаточно близких к p . Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать представление ρ тривиальным.

При всех i пусть U_i – наименьший замкнутый интервал, содержащий $p_i \cup Sp_i$. Если имеется больший интервал V_i , содержащий U_i , мы можем перенормировать V_i линейно, с коэффициентом $\frac{1}{\text{длина}(U_i)}$, и подвинуть в начало так, чтобы получить интервал \bar{V}_i , на котором H частично действует как псевдогруппа.

Тогда аргументы, приведенные Терстоном в доказательстве теоремы стабильности, показывают, что последовательность V_i может быть выбрана так, что для любой последовательности индексов $\rightarrow \infty$ есть подпоследовательность, для которой отображения $\bar{V}_i \rightarrow \mathbb{R}$ и действия псевдогруппы сходятся в компактно открытой топологии к действию H на \mathbb{R} сдвигами.

При этом действия некоторые образующие или обратные к ним переносят 0 в положительном направлении. Это положительные элементы, но любой элемент из H действует тривиально. Наличие такого гомоморфизма и заканчивает доказательство.

Пример 2.1. Обозначим через T проколотый тор с гиперболической метрикой. Эта метрика определяет с точностью до сопряжения гомоморфизм

$$\rho: \pi_1 \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}).$$

Группа $PSL(2, \mathbb{R})$ действует вещественно-аналитическими гомеоморфизмами на $\mathbb{R}P^1 = S^1$. Группа $\pi_1(T)$ – свободная с двумя образующими; назовем их a и b .

Гомоморфизм ρ можно поднять до действия $\tilde{\rho}$ на универсальной накрывающей $\mathbb{R} \rightarrow S^1$. Мы выберем поднятия элементов a и b так, чтобы они имели неподвижные точки.

Если мы выбрали координату на \mathbb{R} так, чтобы a оставляло бы на месте точку x , то a оставляет неподвижной и $x+n$ при любом целом n .

Аналогично, если b оставляет неподвижной y , то b оставляет неподвижным и $y+n$ при любом целом n .

С другой стороны, если $P \in S^1$ – параболическая неподвижная точка коммутатора $[a, b]$ и \tilde{P} – поднятие P в \mathbb{R} , то коммутатор $[a, b]$ переводит \tilde{P} в $\tilde{P}+1$. Поскольку действие любого элемента на \mathbb{R} коммутирует с образующей сдвига $x \rightarrow x+1$, элемент $[a, b]$ действует на \mathbb{R} без неподвижных и сдвигает каждую точку в положительном направлении на расстояние

$$[a, b]^n(z) > z + n - 1$$

для любого $z \in \mathbb{R}$ и любого положительного n .

Это действие на \mathbb{R} может быть переведено гомеоморфизмами на вложенный в \mathbb{R} отрезок $[0, 1]$. Тогда

$$\tilde{P} + n \rightarrow \infty \subset \mathbb{R}$$

отображаются в точки

$$p_n \rightarrow 1 \subset [0, 1].$$

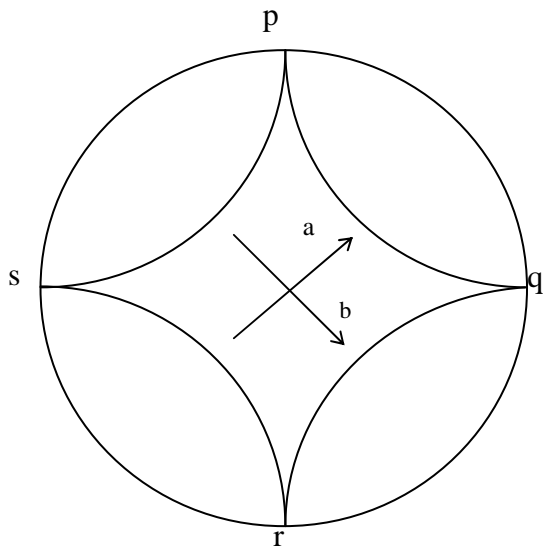


Рис. 1

Заметим, что при любом n элементы a и b имеют неподвижные точки q_n и r_n , удовлетворяющие неравенствам

$$p_n < q_n < p_{n+1}, \forall p_n < r_n < p_{n+1}.$$

Более того,

$$[a, b](p_n) = p_{n+1}$$

при любом n .

Из этого следует, что

$$a, a^{-1} <_{p_n} [a, b]^2 \vee b, b^{-1} <_{p_n} [a, b]^2$$

для любого n .

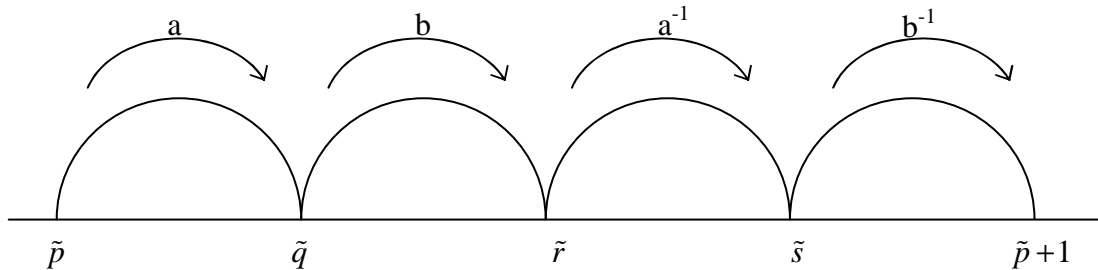


Рис. 2

Поэтому по лемме 2.1 это действие топологически не сопряжено подгруппе в группе диффеоморфизмов

$$Diff_+^1([0,1]).$$

С другой стороны, это точное представление свободной группы с двумя образующими $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Эта группа локально индикабельная, так как любая подгруппа свободной группы свободна.

3. Модификация примера Данжуа

Рассмотрим действие группы на окружности S^1 . Пусть орбита точки P бесконечна, $G(P) = \{P_n\}$.

Для любого $k \in \mathbb{Z}$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\delta_k > \text{Max}\{dist(P_k, P_l), \frac{1}{2}\}, l < k.$$

Выбросим из S^1 объединение $\{\frac{\delta_i}{2} - \text{окрестностей точек } P_k\} = \cup$.

Действие G продолжим на $S^1 \setminus \cup$ как и раньше, а на \cup , продолжив аффинно с границ интервалов \cup .

Мы получаем еще один пример гомеоморфизма, не допускающего сглаживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cantwell J., Conlon L. An interesting class of C^1 foliations // Topology Appl. - 2002 (126). - № 1-2. - P. 281-297.
2. Deroin B. Sur la dynamique unidimensionnelle // Acta Math. - 2007 (199). - № 2. - P. 199-262.
3. Plante J.F. Stability of codimension one foliations by compact leaves // Topology. - 1983 (22). - № 2. - P. 119-132.
4. Hurder S. Entropy and dynamics of C^1 foliations. // Topology Appl. - 2000 (123). - № 1-2. - P. 181-200.
5. Reeb G. Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées // Actuelle Sci. Indust. - Paris: Hermann. - 1952.
6. Солодов В.В. Гомеоморфизмы прямой и слоения // Известия АН СССР. - 1982. - Т.46. - Вып. 5. - С. 1047 - 1061.
7. Солодов В.В. Теоремы стабильности слоений // Научный Вестник МГТУ ГА. - 1999. - № 16. - С. 24 - 30.
8. Солодов В.В. Топологические вопросы теории динамических систем // Успехи математических наук. - 1991 (46). - № 4. - С. 56-78.
9. Thurston W.P. A generalization of the Reeb stability theorem // Topology. - 1982 (13). - № 4. - P. 1-14.
10. Тамура И. Топология слоений. - М.: Мир, 1979.

FOLIATIONS OF LOW DEGREE

Solodov V.V.

Foliations of low degree of smoothness (C^2 or less) are demonstrated to have a distinctly specific characteristics. Examples of locally indicable groups of diffeomorphisms of interval are given, such that they are not even conjugated with subgroups of C^1 -diffeomorphisms.

Key words: foliations, diffeomorphism group of interval, locally indicable groups.

Сведения об авторе

Солодов Виктор Владимирович, 1952 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1974), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МГТУ ГА, автор 22 научных работ, область научных интересов - дифференциальная топология, слоения, динамические системы.

УДК 519.6

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМИЧЕСКОГО И ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ МЕТОДА ГРАВИТАЦИОННОЙ КИНЕМАТИКИ

А.В. ПАНТЕЛЕЕВ, Е.А. АЛЁШИНА

Рассмотрена задача поиска условного глобального минимума функций многих переменных с помощью метода гравитационной кинематики. Сформирован детальный алгоритм решения поставленной задачи и на его основе создано программное обеспечение, которое может быть использовано для минимизации функций сложной структуры, а также для исследования принципов «роевого интеллекта». Эффективность метода продемонстрирована на тестовых примерах.

Ключевые слова: условный глобальный минимум функций многих переменных, метод гравитационной кинематики.

Введение

В данной работе рассматривается новый метаэвристический метод оптимизации - метод гравитационной кинематики (Central Force Optimization, CFO), предложенный в [1]. Основная расчетная формула метода представляет собой модификацию формулы, выражающей закон всемирного тяготения. Главной особенностью метода является использование значения целевой функции в качестве массы частицы, участвующей в гравитационном взаимодействии, что отражает его суть.

Метод гравитационной кинематики принципиально отличается от рассматриваемых ранее метаэвристик [2,3] тем, что является полностью детерминированным. Поиск решения осуществляется только за счет «роевого интеллекта».

Авторами статьи разработано программное обеспечение, позволяющее изучить возможности метода. Решение тестовых примеров показывает, что метод гравитационной кинематики является как удобным средством для изучения процесса поиска решения множеством агентов, так и эффективным инструментом для решения задач оптимизации, с которыми не справляются традиционные методы [4]. Сформированное алгоритмическое и программное обеспечение позволит решать задачи оптимального управления непрерывными и дискретными динамическими системами, не пользуясь соответствующими необходимыми и достаточными условиями оптимальности.

1. Постановка задачи

Дана непрерывная функция $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенная на множестве допустимых решений $D \subseteq R^n$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $D = \{x \mid x_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, \dots, n\}$.

Требуется найти условный глобальный минимум функции $f(x)$ на множестве D , т.е. такую точку $x^* \in D$, что $f(x^*) = \min_{x \in D} f(x)$.

2. Стратегия поиска решения

Рассматривается эволюция популяции, содержащей m точек (частиц): x^1, \dots, x^m . Метод использует аналогию с законом всемирного тяготения, который определяет величину силы гравитационного притяжения тел с массами m_1 и m_2

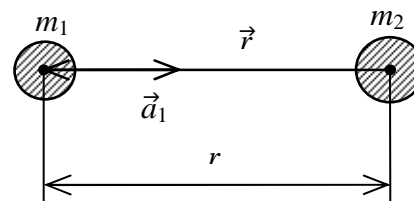


Рис. 1. Гравитационное взаимодействие двух тел

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1)$$

где γ - гравитационная постоянная; r - расстояние (рис. 1).

Тогда ускорение тела массой m_1 в силу притяжения (влияния тела массой m_2) определяется следующей формулой

$$\vec{a}_1 = -\gamma \frac{m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad (2)$$

где \vec{r} - вектор с началом в центре тяжести тела массой m_2 и концом в центре тяжести тела массой m_1 ; $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ - единичный вектор, сонаправленный вектору \vec{r} .

Предполагая, что ускорение частицы остается постоянным на отрезке $[t; t + \Delta t]$, можно определить положение частицы $\vec{x}(t + \Delta t)$ в момент времени $t + \Delta t$, характеризуемое радиус-вектором

$$\vec{x}^j(t + \Delta t) = \vec{x}^j(t) + \vec{v}^j(t)\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}^j(t)\Delta t^2, \quad (3)$$

где $\vec{x}^j(t)$, $\vec{v}^j(t)$, $\vec{a}^j(t)$ - положение, скорость, ускорение j -й частицы в момент t ; $j = 1, \dots, m$.

Считается, что каждая частица популяции движется в множестве допустимых решений D под действием гравитационных сил. Аналогом массы является величина целевой функции.

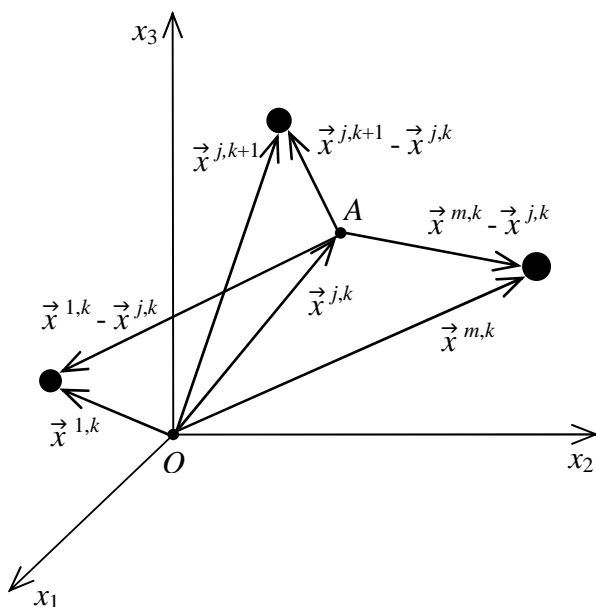


Рис. 2. Процесс поиска нового решения j -й частицей, находящейся в точке A

На рис. 2 изображены частицы x^1 , x^j , x^m текущей k -й популяции при $n = 3$, положение которых описывается векторами $\vec{x}^{1,k}$, $\vec{x}^{j,k}$, $\vec{x}^{m,k}$, и новое положение частицы x^j , характеризуемое вектором $\vec{x}^{j,k+1}$. Популяция с номером k соответствует моменту времени t . Для каждой частицы подсчитывается значение целевой функции $f(x^1), \dots, f(x^m)$. Чем оно больше, тем больше значение «массы». На рис. 2 частице с наибольшим значением целевой функции соответствует круг с наибольшим радиусом (частица с наибольшей массой, которая играет роль «планеты» с наибольшей силой гравитации, притягивающей остальные частицы).

Частица с номером j из положения $\vec{x}^{j,k}$ переходит в новое положение $\vec{x}^{j,k+1}$ по траектории, определяемой начальным положением, скоростью и ускорением, порождаемым силой взаимодействия с остальными частицами.

В данном методе ускорение j -й частицы в силу взаимодействия с l -й частицей находится по формуле

$$\bar{a}^{j,l,k} = G \cdot \mathbf{1} \left[f(x^{l,k}) - f(x^{j,k}) \right] \cdot \left[f(x^{l,k}) - f(x^{j,k}) \right]^\alpha \cdot \frac{\bar{x}^{l,k} - \bar{x}^{j,k}}{\left| \bar{x}^{l,k} - \bar{x}^{j,k} \right|^\beta}, \quad (4)$$

где G - аналог гравитационной постоянной γ , множитель $\left[f(x^{l,k}) - f(x^{j,k}) \right]^\alpha$ (приращение значения целевой функции) - аналог массы; множитель $(\bar{x}^{l,k} - \bar{x}^{j,k})$ - аналог вектора \vec{r} ; выражение $\left| \bar{x}^{l,k} - \bar{x}^{j,k} \right|^\beta$ - аналог величины r^3 ; α, β - параметры, гарантирующие гибкость поиска; $\mathbf{1}$ - единичная ступенчатая функция $\left(\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \right)$; выражение $\mathbf{1} \left[f(x^{l,k}) - f(x^{j,k}) \right]$ введено с целью не допустить появления отрицательных масс.

Интуитивно кажется, что приращение целевой функции более подходит в качестве аналога массы, чем значение целевой функции, так как содержит больше информации и должно оказывать большее влияние на процесс поиска. Так как j -я частица движется под действием частиц с номерами $1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m$, то итоговое ускорение находится по формуле

$$\bar{a}^{j,k} = G \cdot \sum_{l \neq j} \mathbf{1} \left[f(x^{l,k}) - f(x^{j,k}) \right] \cdot \left[f(x^{l,k}) - f(x^{j,k}) \right]^\alpha \cdot \frac{\bar{x}^{l,k} - \bar{x}^{j,k}}{\left| \bar{x}^{l,k} - \bar{x}^{j,k} \right|^\beta}. \quad (5)$$

Скорость частицы можно получить, используя формулу численного дифференцирования

$$\bar{v}^{j,k} = \frac{\bar{x}^{j,k} - \bar{x}^{j,k-1}}{\Delta t}, \quad k \geq 1; \quad \bar{v}^{j,0} = 0. \quad (6)$$

Для упрощения расчетов можно вообще положить $\bar{v}^{j,k} = 0 \quad \forall k$, считая частицы в каждый момент времени (на k -й итерации) неподвижными, а $\Delta t = 1$.

После нахождения новых пробных точек (для каждой точки популяции находится ее новое положение) производится проверка их принадлежности множеству (если точка не принадлежит множеству, необходимо принять меры по пересчету положения). Далее либо среди всех точек $\{x^{1,k}, \dots, x^{m,k}, x^{1,k+1}, \dots, x^{m,k+1}\}$ выбирается m наилучших по величине функции, либо в качестве новой популяции используется множество $\{x^{1,k+1}, \dots, x^{m,k+1}\}$.

Процедура перехода от одной популяции к другой заканчивается по достижении заданного их числа K .

Метод гравитационной кинематики, в отличие от других метаэвристических методов (метода муравьиных колоний, метода частиц в стае, генетических алгоритмов и т.д.), ни в одной из расчетных формул не использует случайных величин, т.е. является полностью детерминированным. В этом смысле метод похож на традиционные методы оптимизации. Метаэвристический характер метода выражается в «роевом интеллекте», т.е. в использовании одновременно множества «агентов» для поиска решений, между которыми происходит постоянный обмен информацией о найденных в процессе поиска решениях, а также в использовании памяти для сохранения «хороших» решений.

В [1] о детерминированности метода говорится как об одном из преимуществ, так как это свойство позволяет точно воспроизводить приводимые в литературе опыты. Другое преимущество состоит в том, что полностью детерминированный метод может быть использован для изучения процесса взаимодействия частиц в метаэвристических методах в чистом виде (без флуктуаций).

Если сравнивать метод гравитационной кинематики с ранее рассмотренными авторами метаэвристическими методами [2,3], то можно заметить, что данный метод похож и на метод муравьиных колоний, и на метод частиц в стае. Так же, как и в методе частиц в стае, в методе гравитационной кинематики новая позиция частицы находится в виде суммы векторов, представляющих текущее положение частицы и положение других частиц, с весовыми коэффициентами. В расчетной формуле метода частиц в стае имеется третий вектор, отражающий влияние наилучшего решения, найденного частицей в процессе поиска. В методе гравитационной кинематики опыт прошлого учитывается в менее явном виде. На каждой итерации происходит сравнение новых решений с найденными на предыдущем шаге, из которых выбираются наилучшие. Фактически при этом формируется архив решений, аналогичный тому, что используется в непрерывной модификации метода муравьиных колоний [5].

Случайный характер методов муравьиных колоний и частиц в стае дает преимущество перед методом гравитационной кинематики, но последний не уступает по эффективности поиска экстремума функций сложной структуры за счет использования информации о целевой функции непосредственно в расчетных формулах, а не только по окончании итерации.

3. Алгоритм

При изложении алгоритма используется покомпонентная форма записи.

Шаг 1. Задать K - максимальное число итераций; m - число пробных точек в текущем поколении; параметры метода G , α , β , Δt .

Шаг 2. Положить $k = 0$. Генерировать m точек в множестве $D: \{x^{1,0}, \dots, x^{m,0}\}$. Подсчитать значения целевой функции $f(x^{1,0}), \dots, f(x^{m,0})$.

Шаг 3. Генерирование новых пробных точек.

Шаг 3.1. Положить $j = 1$.

Шаг 3.2. Пересчитать значения компонент ускорения для j -й точки популяции (ниже приведена покомпонентная запись формулы (5))

$$a_i^{j,k} = G \cdot \sum_{l \neq j} \mathbf{1} [f(x^{l,k}) - f(x^{j,k})] \cdot [f(x^{l,k}) - f(x^{j,k})]^\alpha \cdot \frac{x_i^{l,k} - x_i^{j,k}}{\left[\sqrt{\sum_{s=1}^n (x_s^{l,k} - x_s^{j,k})^2} \right]^\beta}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Шаг 3.3. Найти скорость j -й точки популяции в соответствии с формулой (6)

$$v_i^{j,k} = \frac{x_i^{j,k} - x_i^{j,k-1}}{\Delta t}, \quad k \geq 1; \quad v_i^{j,0} = 0. \quad (7)$$

Шаг 3.4. Найти новое положение j -й точки популяции, используя формулу (7)

$$x_i^{j,k+1} = x_i^{j,k} + v_i^{j,k} \Delta t + \frac{1}{2} a_i^{j,k} \Delta t^2. \quad (8)$$

Если $x_i^{j,k+1} \notin [a_i, b_i]$, то величина Δt в (3) уменьшается до тех пор, пока не выполнится условие $x_i^{j,k+1} \in [a_i, b_i]$.

Шаг 3.5. Если $j = m$, процесс завершить и перейти к шагу 4. Если $j < m$, то положить $j = j + 1$ и перейти к **Шагу 3.2**.

Шаг 4. Формирование новой популяции.

Шаг 4.1. Сформировать множество $\{x^{1,k}, \dots, x^{m,k}, x^{1,k+1}, \dots, x^{m,k+1}\}$; подсчитать значения функции в пробных точках $f(x^{1,k+1}), \dots, f(x^{m,k+1})$.

Шаг 4.2. Отобрать t наилучших решений, а остальные отбросить.

Шаг 5. Если $k = K$, процесс закончить, в качестве приближенного решения выбрать наилучшую точку из последней популяции. Если $k < K$, положить $k = k + 1$ и перейти к **Шагу 3**.

4. Программное обеспечение

На основе разработанного алгоритма сформировано программное обеспечение на языке C# в среде Microsoft Visual Studio 2005. Пользовательский интерфейс аналогичен интерфейсу программы, разработанной для изучения методов муравьиных колоний и частиц в стае и рассмотренной в [2]. С помощью программного обеспечения пользователь может выполнять следующие действия:

- вводить параметры постановки задачи;
- задавать параметры метода;
- использовать модификации алгоритма;
- анализировать полученный результат;
- сохранять результат в памяти компьютера для последующего анализа.

5. Решение тестовых примеров

Рассмотрим задачу минимизации функции Розенброка. Данная функция по своей структуре является «овражной» и задается следующей формулой

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Точка минимума функции $x^* = (0, 0)$.

Рассмотрим еще одну «овражную» функцию (Three Humps Camel Back function)

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 1,05x_1^4 + \frac{x_1^6}{6} + x_1x_2 + x_2^2, \quad f_{\min}(0; 0) = 0.$$

Графики функций в окрестности точек минимума представлены на рис. 3 (а - график функции Розенброка, б - график функции Three Humps Camel Back).

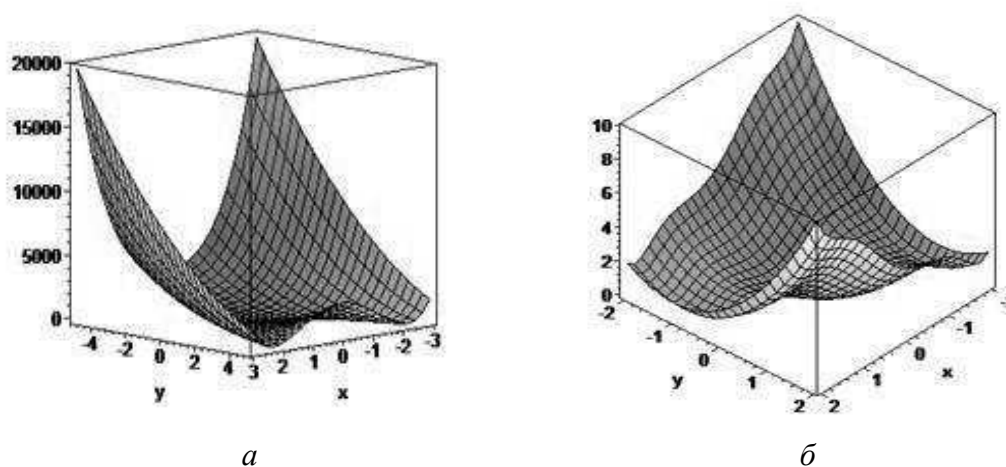


Рис. 3. Графики в окрестности точек минимума функций:
а - Розенброка; б - Three Humps Camel Back

Решение задачи производилось со следующими значениями параметров метода: $m = 100$; $G = 2,5$; $\alpha = 5$; $\beta = 2$; $K = 100$; $\Delta t = 0,1$.

На рис. 4 показаны результаты решения задачи минимизации методом гравитационной кинематики для функции Розенброка (рис. 4, а) и для Three Humps Camel Back (рис. 4, б).

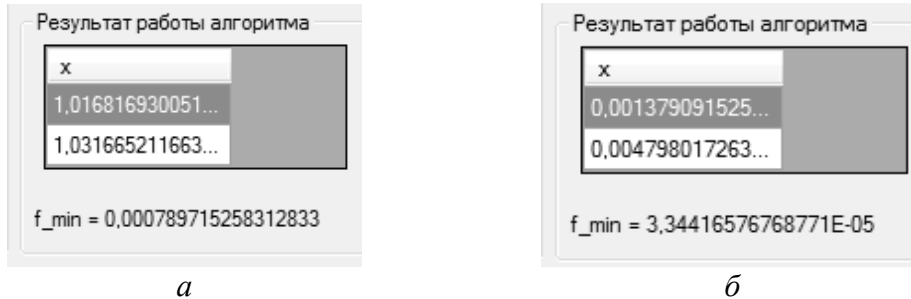


Рис. 4. Результат работы программы для функций:
а - Розенброка; б - Three Humps Camel Back

При сравнении результатов работы метода гравитационной кинематики с результатами работы метода частиц в стае [2] получаем, что метод частиц в стае находит решения, гораздо более близкие к оптимальным, чем решения, найденные с помощью метода гравитационной кинематики. Возможно, дело в плохом подборе параметров, включая стартовые точки, для метода гравитационной кинематики. Для корректного сравнения метаэвристических методов необходимо разработать процедуру, которая будет автоматически подбирать значения параметров для конкретной задачи. Но, с другой стороны, метод приближается к точкам минимума «овражных» функций именно за счет наличия большого количества частиц, производящих поиск решения.

Следующие два примера также показывают, что значения параметров метода гравитационной кинематики следует тщательно подбирать.

Рассмотрим задачу минимизации функции с несколькими локальными минимумами (Bird Function)

$$f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \exp\left((1 - \cos(x_2))^2\right) + \cos(x_2) \exp\left((1 - \sin(x_1))^2\right) + (x_1 - x_2)^2,$$

где $x_i \in [-2\pi; 2\pi]$, $i = 1, 2$; $f(x^*) \approx -106,764537$.

Результаты работы программы (рис. 5) показывают, что метод справляется с нахождением минимума подобных функций, т.е. в процессе поиска решения процедура поиска не останавливается в локальных минимумах, а находит глобальный. Но в заданной области у функции две точки минимума (рис. 6, а). Таким образом, необходимо дополнить метод возможностью поиска сразу нескольких точек экстремума.



Рис. 5. Точки минимума Bird function

Другой пример, показывающий, что описанный алгоритм необходимо модифицировать, минимизация функции (Bukin # 6 function (рис. 6,б)), которая задается формулой

$$f(x_1, x_2) = 100\sqrt{-x_2 + 0,01x_1^2} + 0,01|x_1| + 10, \quad f_{\min}(-10;1) = 0.$$

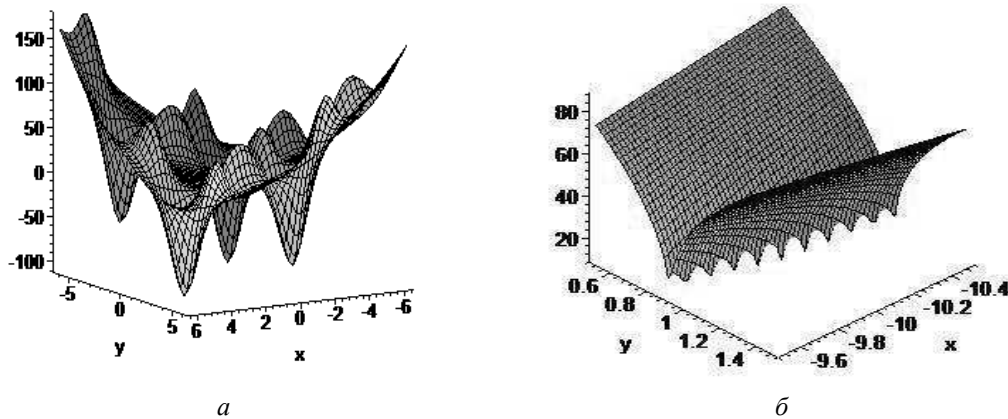


Рис. 6. Графики функций: а - Bird function; б - Bukin #6 function в окрестности точки минимума

Сложность для решения заключается в том, что функция в окрестности глобального минимума похожа на фрактал, т.е. задача осложнена наличием множества локальных минимумов. График функции в окрестности точки минимума приведен на рис. 6, б. В процессе работы программы минимальное значение $f_{\min} = 0$ так и не было получено; ближе, чем на 0,2, к этому результату приблизиться не удалось. Возможно, при более удачном подборе параметров алгоритма результат может оказаться лучше.

Следует заметить, что решение задачи сильно зависит от начальных значений $\{x^{1,0}, \dots, x^{m,0}\}$, так как они являются единственными случайными величинами в методе. Эта зависимость нехарактерна для рассматриваемых в [2, 3] методах, в которых большинство параметров являются случайными, и поэтому неудачный выбор стартовых точек нивелируется при генерации новых решений в процессе поиска. Процесс минимизации овражных функций показывает, что в метод гравитационной кинематики все-таки не помешало бы добавить некоторые случайные параметры. Это дополнение позволило бы не застревать в локальных минимумах, а также не осуществлять долгий спуск к минимуму в овраге, характерный для метода градиентного спуска и овражного метода [4].

Заключение

Предложен детальный алгоритм решения задачи поиска условного глобального минимума функции многих переменных методом гравитационной кинематики. Разработано программное обеспечение, позволяющее изучить возможности метода. Показано, что метод гравитационной кинематики достаточно эффективен при поиске минимума функций со сложной конфигурацией линий уровня. Кроме того, структура метода (а именно, детерминированный характер) позволяет изучать принципы функционирования «роевого интеллекта».

ЛИТЕРАТУРА

1. **Formato R.A.** Central Force Optimization: a new metaheuristic with applications in applied electromagnetic // Progress In Electromagnetics Research, PIER 77. - 2007. - P. 425-491.
2. **Пантелеев А.В., Алёшина Е.А.** Разработка алгоритмического и программного обеспечения метода муравьиных колоний // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2008. - № 132. - С. 38-48.

3. **Пантелеев А.В., Алёшина Е.А.** Метод частиц в стае. В кн.: Метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума. - М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. - Гл. 4. - С. 85-106.
4. **Пантелеев А.В., Легова Т.А.** Методы оптимизации в примерах и задачах. - М.: Высшая школа, 2008.
5. **Dorigo, M., Socha, K.** Ant colony optimization for continuous domains // European Journal of Operational Research 185. - 2008. - P. 1155-1173.

ALGORITHMIC AND PROGRAM SUPPORT OF CENTRAL FORCE OPTIMIZATION

Panteleyev A.V., Alyoshina E.A.

We consider a process of searching the conditional global extrema of multivariable function. The solution is searched for using Central Force Optimization (CFO). This metaheuristic was originally developed by R.A. Formato. We created software based on CFO that can be used in optimization of sophisticated functions and will also help in understanding how the pure swarm intelligence works. The efficiency of CFO is demonstrated by test examples.

Key words: conditional global extrema of multivariable function, Central Force Optimization.

Сведения об авторах

Пантелеев Андрей Владимирович, 1955 г.р., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана (1978), доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики МАИ, автор более 132 научных работ, область научных интересов - методы синтеза оптимальных нелинейных систем управления, методы оптимизации.

Алёшина Екатерина Александровна, окончила МАИ (2008), аспирантка факультета прикладной математики и физики МАИ, область научных интересов - методы оптимизации, численные методы.

УДК 517.97

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАПРАВЛЕННОГО ТАБУ-ПОИСКА К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ

А.В. ПАНТЕЛЕЕВ, О.В. РЯЗАНЦЕВА

Предложен алгоритм решения задачи поиска оптимального управления нелинейными детерминированными дискретными системами с помощью метода направленного табу-поиска условного глобального экстремума функций. На основе сформированного алгоритма создано соответствующее программное обеспечение. Приведены примеры решения задач поиска оптимального управления дискретными системами, подтверждающие эффективность разработанного алгоритмического и программного обеспечения.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, табу-поиск, метод Нелдера-Мида, оптимальное управление.

Введение

В данной работе рассмотрено применение метода направленного табу-поиска глобального экстремума [1] к задачам нахождения оптимального управления дискретными детерминированными системами [2-4]. Предложен алгоритм решения, на основе которого создано программное обеспечение, позволяющее находить оптимальное управление. Оно имеет удобный понятный интерфейс, позволяющий легко изменять параметры постановки задачи и применяемого метода. Решено несколько тестовых примеров, в которых численные результаты сравниваются с точными решениями и делаются выводы о применимости метода к рассматриваемому классу задач.

1. Постановка задачи

Поведение модели объекта управления описывается разностным уравнением $x(t+1) = f(t, x(t), u(t))$, $t = 0, 1, \dots, N-1$, где x – вектор состояния системы, $x \in R^n$; u – вектор управления, $u \in U(t) \subseteq R^q$; $U(t)$ – некоторое замкнутое выпуклое множество допустимых значений управления вида $[a_{t,1}, b_{t,1}] \times \dots \times [a_{t,q}, b_{t,q}]$; t – дискретное время, $t \in T = [0, 1, \dots, N-1]$, число шагов N задано; $f(t, x, u)$ – непрерывная вектор-функция, $f(t, x, u) = (f_1(t, x, u), \dots, f_n(t, x, u))^T$. Начальное состояние системы задано: $x(0) = x_0$. Правый конец траектории свободен. При управлении используется информация только о дискретном времени t , т.е. применяется так называемое программное управление.

Множество допустимых процессов $D(0, x_0)$ – это множество пар $d = (x(\cdot), u(\cdot))$, включающих траекторию $x(\cdot) = \{x_0, x(1), \dots, x(N)\}$ и управление $u(\cdot) = \{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$, $u(t) \in U(t)$, удовлетворяющих уравнению состояния с заданным начальным условием.

На множестве допустимых процессов $D(0, x_0)$ определен функционал качества управления

$$I(d) = \sum_{t=0}^{N-1} f^0(t, x(t), u(t)) + F(x(N)), \text{ где } f^0(t, x, u), F(x) \text{ – заданные непрерывные функции.}$$

Требуется найти такую пару $d^* = (x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in D(0, x_0)$, что $I(d^*) = \min_{d \in D(0, x_0)} I(d)$.

2. Стратегия поиска

Метод направленного табу-поиска включает три фазы: исследовательскую, перераспределительную и интенсивно-уточняющую. На исследовательской фазе происходит генерация новых точек вблизи текущего решения. Один из инструментов памяти - лист посещенных областей - является элементом перераспределительной фазы, служащей для организации поиска в непосещенных областях исследуемого пространства. На фазе интенсивного уточнения найденные «хорошие» точки улучшаются с целью получения результата с заданной точностью.

Концепция памяти играет важную роль в табу-поиске. Она представлена несколькими элементами: табу-листом, табу-областями, полутабу-областями, листом посещенных областей.

Табу-лист (*Tabu-List, TL*) содержит некоторые из получаемых в процессе поиска решений $TL = \{t_i\}_{i=1}^L$. Элементы в табу-листе ранжированы: самому недавно записанному элементу t_k

присваивается индекс $I_k^r = 1$, а самому «старому» элементу $t_{k'}$ - индекс $I_{k'}^r = L$. Элементы табу-листа также ранжированы в соответствии с величиной целевой функции так, чтобы наилучший элемент t_j имел индекс $I_j^f = 1$, а наихудший элемент $t_{j'}$ - индекс $I_{j'}^f = L$. Табу-лист $TL = \{t_i\}_{i=1}^L$

можно считать нечетким множеством и каждому его элементу t_i присвоить соответствующее значение функции принадлежности $m_i = \max\{m_i^r, m_i^f\}$, $i = 1, \dots, L$, где

$m_i^r = \eta_{\min} + [\eta_{\max} - \eta_{\min}] \cdot \frac{L - I_i^r}{L - 1}$, $i = 1, \dots, L$, $0 \leq \eta_{\min} < \eta_{\max} \leq 1$, при этом самому «старому» элементу соответствует значение $m_L = \eta_{\min}$, а самому «новому» - $m_1 = \eta_{\max}$;

$$m_i^f = \begin{cases} \mu_{\min} + [\mu_{\max} - \mu_{\min}] \cdot \frac{\bar{L} - I_i^f}{\bar{L} - 1}, & \text{если } I_i^f = 1, \dots, \bar{L}, \\ \mu_{\min}, & \text{если } I_i^f = \bar{L} + 1, \dots, L, \end{cases}$$

$0 \leq \mu_{\min} < \mu_{\max} \leq 1$. При этом ранжируются только \bar{L} ($1 \leq \bar{L} \leq L$) лучших элементов так, чтобы лучшему элементу с наименьшим значением функции соответствовало значение μ_{\max} , а элементам с номерами $\bar{L}, \bar{L} + 1, \dots, L$ - значение μ_{\min} . Это делается для того, чтобы дать некоторый приоритет времени записи в табу-лист для «оживления» процесса поиска.

Вокруг каждого решения, сохраняемого в табу-листе, определяются два типа областей: табу-области и полутабу-области.

Еще один элемент памяти - *лист посещенных областей* (*Visited Region List, VRL*). Цель организации такого листа - направить перераспределительный поиск на исследование областей, которые еще не посещались в процессе решения задачи. Таким образом, лист посещенных областей можно представить как $VRL = \{(\xi_i, \rho_i, \varphi_i)\}_{i=1}^K$, где ξ_i - центр посещенной области; ρ_i - радиус этой области; φ_i - частота посещения (сколько раз); K - общее число посещенных областей. Для того чтобы отличать более или менее часто посещаемые области, вводится функция $\Phi(\varphi) = \gamma \cdot (1 - e^{-\gamma(\varphi-1)})$, где $\gamma \in (0; 1]$ - заданная постоянная.

Для решения поставленной задачи необходимо найти оптимальное управление $u^*(\cdot)$ и, следовательно, оптимальную траекторию $x^*(\cdot)$. Пусть v - блочный столбец, состоящий из значений координат вектора управления на каждом шаге $v = (v_0, \dots, v_{N-1})^T =$

$$= \left(\underbrace{u_1(0), \dots, u_q(0)}_{v_0}, \dots, \underbrace{u_1(N-1), \dots, u_q(N-1)}_{v_{N-1}} \right)^T . \text{ При этом } v \in U = U(0) \times U(1) \times \dots \times U(N-1) . \text{ Через}$$

$I(v)$ обозначим значение критерия, соответствующее v . Для его вычисления сначала ищется траектория системы $x(\cdot) = \{x(0), x(1), \dots, x(N)\}$ из уравнения состояния с известными значениями управления, содержащимися в v , и заданным начальным условием. Далее вычисляется значение критерия. Таким образом, вектор v аналогичен точке в множестве допустимых решений, а $I(v)$ - целевой функции, минимум которой ищется методом направленного табу-поиска.

При реализации метода используются четыре вида поиска: исследовательский поиск в окрестности текущей точки; локальный поиск; перераспределительный поиск; интенсивно-уточняющий поиск.

Исследовательский поиск. Данный вид поиска применяется для исследования окрестности текущей точки v с целью выявления лучшего решения. Основными этапами поиска являются:

- 1) выбор направления поиска;
- 2) выбор шага Δ_i поиска вдоль направления d_i ;
- 3) генерация $q_N = N \cdot q$ пробных точек $y^i = v + \Delta_i \cdot d_i, i = 1, \dots, q_N$;
- 4) выбор лучшей точки среди пробных и сравнение значения функции в этой точке со значением $I(v)$.

Локальный поиск. Для локального поиска может быть использована одна из двух стратегий:

- 1) метод Нелдера-Мида (деформируемого многогранника) [5];
- 2) адаптивный метод поиска по образцу.

Перераспределительный поиск. Цель его – сгенерировать пробную точку в новой области и из нее снова начать исследовательский и локальный поиск.

Интенсивно-уточняющий поиск. Наилучшие точки табу-листа последовательно берутся в качестве начальных для завершающей фазы табу-поиска - интенсивного уточняющего поиска. Здесь может быть применен: метод Хука-Дживса; метод случайного поиска [5]. Наилучшая из полученных на данном этапе точек считается приближенной точкой глобального минимума.

3. Алгоритм

Шаг 1. Задать параметры: M - максимальное количество попыток исследовательского поиска; N_k - максимальное количество попыток исследовательско-перераспределительного поиска; L - количество записей в табу-листе; \bar{L} - количество записей в табу-листе; ранжируемых по величине функции; r_{TR} - радиус табу-областей; r_{STR} - радиус полутабу-областей; γ - константа; $\eta_{\max}, \eta_{\min}, \mu_{\max}, \mu_{\min}$ - параметры ранжирования в табу-листе, N_{NM} - максимальное количество итераций при использовании метода Нелдера-Мида; N - количество интервалов времени; q - размерность вектора управления; n - размерность вектора состояния. Выбрать начальную точку $v_0^{(0)} \in U$. Положить $TL = \emptyset$ (Tabu List), $VRL = \emptyset$ (Visited Region List).

Шаг 2. Исследовательско-перераспределительный поиск. Положить $j = 0$.

Шаг 2.1. Исследовательский поиск. Положить $k = 0$.

Шаг 2.1.1. Выбор направлений поиска. Если текущая точка $v_k^{(j)}$ не принадлежит ни одной из полутабу-областей, то генерируется q_N направлений, параллельных координатным осям, т.е.

$d_i = e_i$ или $d_i = -e_i$, $i = 1, \dots, q_N$ (знак выбирается случайным образом), где $e_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & & \vdots & & q_N \end{pmatrix}^T$ – i -й

орт в пространстве R^{q_N} . Если текущая точка $v_k^{(j)}$ лежит в v полу-табу областях с центрами t_1, \dots, t_v и радиусом r_{STR} , тогда:

- найти центр полутабу-областей $\bar{t} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v t_i$;

- определить максимальное расстояние между точкой $v_k^{(j)}$ и этими центрами

$$d_{\max} = \max \left\{ \left\| v_k^{(j)} - t_1 \right\|, \dots, \left\| v_k^{(j)} - t_v \right\| \right\};$$

- найти направления поиска d_i , параллельные координатным осям и определяемые соответствующими проекциями вектора $v_k^{(j)} - \bar{t}$: $d_i = \text{sign} \left[(v_k^{(j)})_i - (\bar{t})_i \right] \cdot e_i$, $i = 1, \dots, q_N$, где $e_i \in R^{q_N}$ – i -й орт в пространстве R^{q_N} .

Шаг 2.1.2. Выбор шага поиска. Выбрать шаг $\Delta_i > d_{\max} + r_{TR}$, $i = 1, \dots, q_N$, где r_{TR} – радиус табу-области, чтобы избежать генерации пробной точки внутри табу-области.

Шаг 2.1.3. Поиск в окрестности текущей точки. Генерировать n пробных точек, принадлежащих множеству U : $y^i = v_k^{(j)} + \Delta_i \cdot d_i$, $i = 1, \dots, q_N$. Подсчитать соответствующие им x^i , $i = 1, \dots, n \cdot N$ и значения критерия. Лучшую точку области обозначить $v_{k+1}^{(j)}$ и подсчитать значение $I(v_{k+1}^{(j)})$. Если $I(v_{k+1}^{(j)}) < I(v_k^{(j)})$, то перейти к шагу 2.1.5, иначе перейти к шагу 2.1.4.

Шаг 2.1.4. Локальный поиск. Выполнить N_{NM} итераций метода Нелдера-Мида, используя начальный многогранник с вершинами $\{v_k^{(j)}, y^1, \dots, y^{q_N}\}$. Полученную в результате точку обозначить y^{q_N+1} . Если $I(y^{q_N+1}) < I(v_k^{(j)})$ и $y^{q_N+1} \in U$, то положить $q_p = 1$. Если $I(y^{q_N+1}) \geq I(v_k^{(j)})$ или $y^{q_N+1} \notin U$, то положить $q_p = 0$. Найти $v_{k+1}^{(j)} = \arg \min_{i=1, \dots, q_N+q_p} \{I(y^i)\}$.

Шаг 2.1.5. Заменить элементом $v_{k+1}^{(j)}$ элемент с наименьшим значением критерия в табу-листе TL . Пересортировать элементы в TL в соответствии со значением критерия. Обновить VRL . Положить $k = k + 1$. Если $k < M$, то перейти к шагу 2.1.1, иначе – к шагу 2.2.

Шаг 2.2. Перераспределительный поиск.

Шаг 2.2.1. Генерировать пробную точку v случайным образом в множестве допустимых значений управления U .

Шаг 2.2.2. Подсчитать величины $s_i = [1 + \Phi(\varphi_i)] \cdot \|v - \xi_i\|$, $i = 1, \dots, K$, где $\Phi(\varphi) = \gamma \cdot (1 - e^{-\gamma(\varphi-1)})$. Если $\min_{1 \leq i \leq K} \frac{s_i}{\rho_i} \geq 1$, положить $z = v$. Иначе перейти к шагу 2.2.1.

Шаг 2.2.3. Положить $v_0^{(j+1)} = z$, $j = j + 1$.

Шаг 2.2.4. Если $j < N$, то перейти к шагу 2.1.1. Иначе перейти к шагу 3.

Шаг 3. Интенсивно-уточняющий поиск. Из \bar{L} наилучших точек в табу-листе осуществить локальный поиск до получения решения с заданной точностью.

Замечания

Рекомендуемые параметры:

- начальные точки $v_0^{(j)}$ выбираются случайным образом с помощью равномерного распределения из множества $U = U(0) \times \dots \times U(N-1)$, где $U(t) = \{u \mid u \in R^q; a_{t,i} \leq u_i \leq b_{t,i}, i=1, \dots, q\}$;

- $\delta = \max_{i=1, \dots, n} (b_i - a_i)$; $r_{TR} = \frac{\delta}{100}$; $r_{STR} = 2r_{TR} = \frac{\delta}{50}$; $\gamma = 0,25$;

- $L = 5n$; $\bar{L} = 2n$; $N = 10n$; $M = 3n$;

- $\eta_{\max} = 1$; $\eta_{\min} = \frac{1}{L}$; $\mu_{\max} = 1$; $\mu_{\min} = \frac{1}{L}$;

- $\rho_i = \frac{\delta}{5}, i=1, \dots, K$; $\Delta_i = \frac{\delta(1+\chi_i)}{10}, i=1, \dots, n$, где $\chi_i \in (0,1)$ - случайная величина.

4. Программное обеспечение

Для реализации описанного метода была разработана программа на языке C++ в Builder C++, в которой реализованы следующие возможности: ввод параметров задачи, ввод параметров метода, решение поставленной задачи, табличное и графическое представление результатов решения, просмотр протокола решения и справочной информации.

Уравнение состояния полагалось линейным: $x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$, $t = 0, 1, \dots, N-1$, где A - матрица размеров $n \times n$; B - матрица размеров $n \times q$. Функционал качества управления считался квадратичным или линейно-квадратичным (для случая $n = 1$).

$$I_1(d) = \sum_{t=0}^{N-1} (x^T(t)S(t)x(t) + u^T(t)Q(t)u(t)) + Lx(N), \quad (n = 1);$$

$$I_2(d) = \sum_{t=0}^{N-1} (x^T(t)S(t)x(t) + u^T(t)Q(t)u(t)) + x^T(N)Lx(N),$$

где $S(t)$ - неотрицательно определенная матрица размеров $n \times n$; $Q(t)$ - положительно определенная матрица размеров $q \times q$; L - неотрицательно определенная матрица размеров $n \times n$ (L - число при $n = 1$).

Программа обладает дружественным интерфейсом, который представлен главным окном (рис. 1) и панелью вкладок.

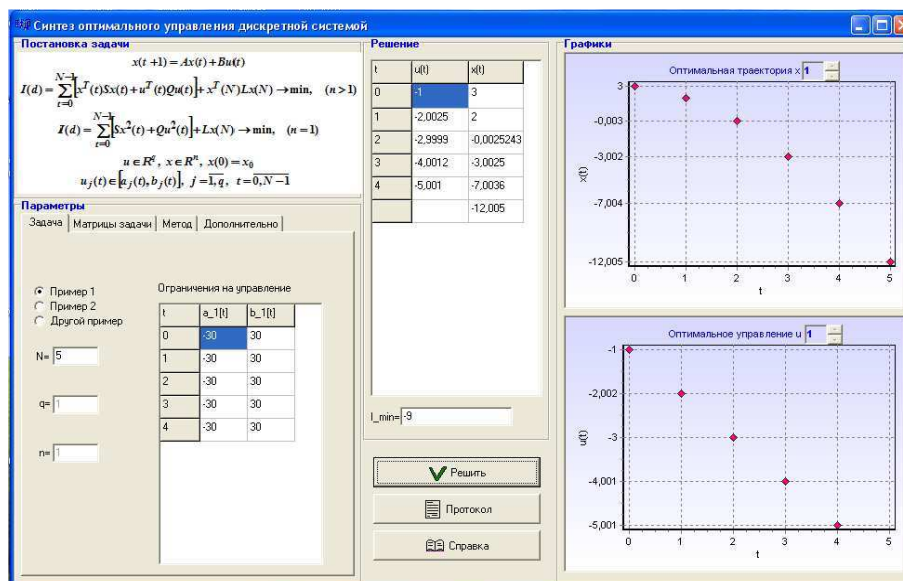


Рис. 1. Главное окно программы

На вкладке «Задача» панели «Параметры» пользователю предоставляется выбрать один из двух примеров для решения или задать свой пример. В последнем случае, помимо количества интервалов времени, необходимо ввести размеры векторов состояния и управления и задать матрицы на вкладке «Матрицы задачи». На вкладках «Метод» и «Дополнительно» пользователю необходимо задать параметры метода табу-поиска, а также дополнительных методов, применяемых при вычислениях.

На панели «Решение» приведено решение задачи в табличном виде, а на панели «Графики» - в графическом. Для просмотра протокола решения необходимо нажать кнопку «Протокол». Он представляет собой текстовый документ с постановкой задачи, заданными параметрами и решением. Для просмотра справочной информации необходимо выбрать кнопку «Справка». Справка содержит два раздела: теоретическую часть с постановкой задачи и описанием метода, а также руководство по работе с программой.

5. Примеры

Решим с помощью рассмотренного алгоритма несколько примеров, для которых известно точное решение.

Пример 1. Заданы модель объекта управления $x(t+1) = x(t) + u(t)$, где $x \in \mathbb{R}$, $|u| < 30$, $t = 0, 1, \dots, N-1$, $N = 4$; начальное состояние $x(0) = 3$ и функционал $I = \sum_{t=0}^{N-1} \frac{1}{t+1} u^2(t) + 2x(N)$.

Требуется найти минимальное значение функционала и оптимальный процесс $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, на котором это значение достигается.

Точное решение задачи имеет вид: $u^*(t) = -t - 1$, $x^*(t) = x_0 - \frac{1}{2}t(t+1)$, $\min I = 2x_0 - \frac{1}{2}N(N+1)$. Полученное решение при $n = 1$, $q = 1$, $A = 1$, $B = 1$, $S(t) = 0$, $Q(t) = \frac{1}{t+1}$, $L = 2$, $N = 4$, $x_0 = 3$ приведено в табл. 1, ему соответствует $\min I = -4$.

Таблица 1

t	0	1	2	3	4
$u^*(t)$	-1,0026	-1,9997	-2,9989	-3,9986	-
$x^*(t)$	3	1,9974	-0,0023	-3,0012	-6,9997

Пример 2. Даны модель объекта управления $x_1(t+1) = x_2(t)$, $x_2(t+1) = x_1(t) - u(t)$, где $x \in \mathbb{R}^2$, $|u| \leq 1$, $t = 0, 1$; $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -3$ и функционал $I = x_1^2(2) + x_2^2(2)$. Требуется найти минимальное значение функционала и оптимальный процесс $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, на котором это значение достигается.

Точное решение задачи для $N = 2$, $x_1(0) = 2, x_2(0) = -3$ имеет вид: $u^*(0) = 1, u^*(1) = -1$; $x_1^*(0) = 2, x_1^*(1) = -3, x_1^*(2) = 1$; $x_2^*(0) = -3, x_2^*(1) = 1, x_2^*(2) = -2$. Минимальное значение функционала $\min I = 5$.

Параметры задачи: $N = 2$, $n = 2$, $q = 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = 0$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Полученное численное решение полностью совпадает с точным (рис. 2).

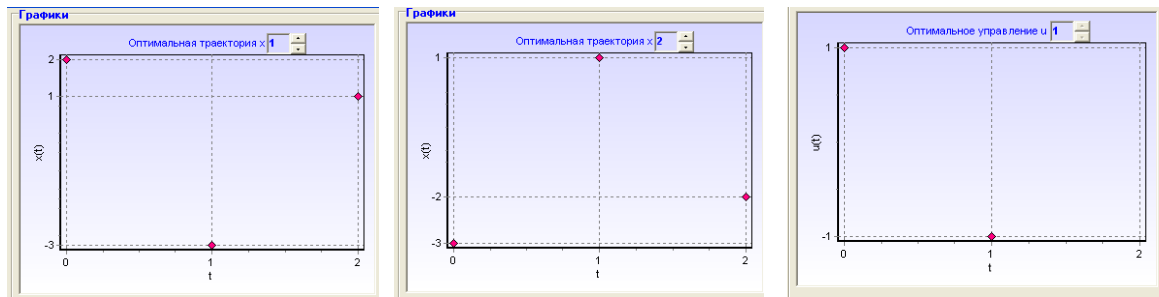


Рис. 2. Решение примера 2

Пример 3. Решим пример 1 при $N = 20$. Точное минимальное значение критерия для $N = 20$ и $x_0 = 3$ равно -204 . Численное решение приведено в табл. 2 и изображено на рис. 3. Минимальное значение функционала $\min I = -203,99$.

Таблица 2

t	0	1	2	3	4	5	6
$u^*(t)$	-1,0254	-1,9972	-3,0091	-4,0251	-4,9874	-6,0267	-6,974
$x^*(t)$	3	1,9746	-0,02268	-3,0318	-7,0569	-12,044	-18,071
t	7	8	9	10	11	12	13
$u^*(t)$	-8,0849	-8,9894	-9,7765	-10,891	-12,022	-12,964	-13,839
$x^*(t)$	-25,045	-33,13	-42,119	-51,896	-62,787	-74,809	-87,773
t	14	15	16	17	18	19	20
$u^*(t)$	-15,095	-16,092	-17,027	-17,897	-18,928	-20,02	-
$x^*(t)$	-101,61	-116,71	-132,8	-149,83	-167,72	-186,65	-206,67

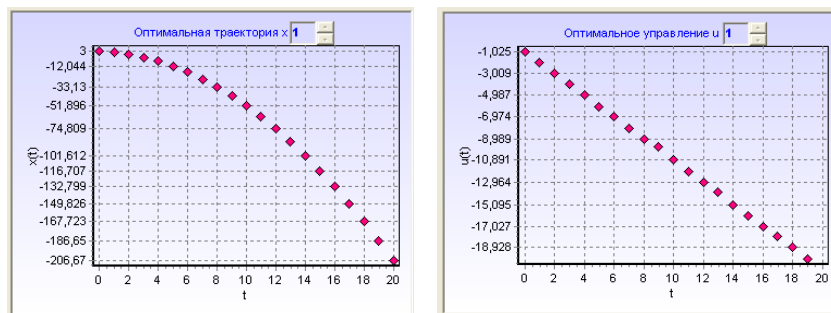


Рис. 3. Иллюстрация решения примера 3

Заключение

В работе описан метод табу-поиска глобального экстремума и сформирован алгоритм его применения к задачам нахождения оптимального управления нелинейными детерминированными дискретными системами. Созданное на основе алгоритма программное обеспечение позволяет решать модельные задачи оптимального управления, заданные пользователем. Приведенные результаты решения примеров показывают эффективность применения метода табу-поиска.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Abdel-Rahman Hedar, Masao Fukushima** Tabu Search directed by direct search methods for nonlinear global optimization, Department of Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics. –Kyoto: Kyoto University. -2003. –Pp. 606-8501.
2. **Пантелеев А.В.** Метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума. - М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. - С. 17.
3. **Пантелеев А.В., Алешина Е.А.** Применение метода частиц в стае к задаче поиска оптимального управления дискретной системой // Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения: межвуз. сб. науч. тр. - М.: МИРЭА, 2010. - С. 144 -149.
4. **Пантелеев А.В., Метлицкая Д.В.** Применение генетического алгоритма с бинарным кодированием к задаче оптимального управления дискретными системами // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2010. - № 157. - С. 34-41.
5. **Пантелеев А.В., Легова Т.А.** Методы оптимизации в примерах и задачах. - М.: Высшая школа, 2008.

**APPLICATION OF TABU SEARCH DIRECTED BY DIRECT SEARCH METHODS
FOR THE OPTIMAL CONTROL OF DISCRETE-TIME SYSTEMS****Panteleyev A.V., Ryazantseva O.V.**

In this paper we introduce an application of a continuous Tabu search (Direct Tabu Search, DTS) method to the optimal control of discrete-time nonlinear systems. In the DTS method, the direct-search-based strategies are used to direct a tabu search. These strategies are based on the well-known Nelder-Mead method and on a new pattern search procedure, so called 'adaptive pattern search'. The corresponding algorithm is developed and its efficiency is illustrated by examples.

Key words: global optimization, Tabu search, Nelder-Mead method, optimal control.

Сведения об авторах

Пантелеев Андрей Владимирович, 1955 г.р., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана (1978), доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики МАИ, автор более 132 научных работ, область научных интересов - методы синтеза оптимальных нелинейных систем управления, методы оптимизации.

Рязанцева Ольга Вячеславовна, студентка факультета прикладной математики и физики МАИ, область научных интересов - методы оптимизации, теория принятия решений.

УДК 519.217.4

АНАЛИЗ ЧАНДЛЕРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛЮСА ЗЕМЛИ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

К.А. РЫБАКОВ

Статья представлена доктором физико-математических наук, профессором Козловым А.И.

В статье рассматривается упрощенная стохастическая модель чандлеровских колебаний полюса Земли. Решается задача нахождения вероятностных характеристик положения полюса: плотности вероятности координат и их средних значений. Основной целью работы является апробация спектрального метода анализа стохастических систем.

Ключевые слова: чандлеровские колебания, спектральный метод, анализ стохастических систем.

Введение

Описание, моделирование и анализ движения полюса Земли является довольно сложной задачей [1, 2]. В этой работе рассматривается математическая модель чандлеровских колебаний [3], которые представляют собой одну из составляющих движения полюса.

Цель работы состоит в апробации спектрального метода [4] анализа стохастических систем - моделей явлений, возникающих в самых разных областях: физике, технике, биологии, экономике, и позволяющих учитывать случайные возмущения (предполагается, что модель описывается системой стохастических дифференциальных уравнений Ито [5]).

Методика анализа стохастических систем спектральным методом не зависит от таких свойств коэффициентов уравнений модели, как стационарность, линейность, непрерывность, периодичность и т.п., поэтому такой упрощенный взгляд на сложное физическое явление представляется допустимым.

1. Постановка задачи

Модель чандлеровского движения полюса Земли описывается системой уравнений [3, 6]:

$$\dot{X}(t) = -\lambda X(t) - \omega Y(t) + \dot{\Phi}(t), \quad X(0) = X_0,$$

$$\dot{Y}(t) = \omega X(t) - \lambda Y(t) + \dot{\Psi}(t), \quad Y(0) = Y_0,$$

где t - время; $X(t)$ и $Y(t)$ - случайные процессы, характеризующие колебания полюса; λ - коэффициент затухания; ω - частота чандлеровского колебания; $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ - процессы возбуждения. Начальные состояния X_0 и Y_0 - случайные величины, имеющие заданные распределения.

Обозначая $X_1(t) = 10X(t)$, $X_2(t) = 10Y(t)$ и полагая, что $\dot{\Phi}(t)$ и $\dot{\Psi}(t)$ - гауссовские независимые белые шумы [5, 6], перепишем исходные уравнения в виде

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= (-\lambda X_1(t) - \omega X_2(t))dt + a dW_1(t), \\ dX_2(t) &= (\omega X_1(t) - \lambda X_2(t))dt + a dW_2(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $W_1(t)$ и $W_2(t)$ - стандартные винеровские процессы, не зависящие от X_0 и Y_0 ; a - числовой параметр, характеризующий интенсивность процессов возбуждения.

Формальных ограничений на реализации процессов $X(t)$ и $Y(t)$ нет, поэтому будем предполагать, что $X_1, X_2 \in R = (-\infty, +\infty)$. Следуя [3, 6], положим $\lambda = 0.06$, $\omega = 5.274$, $a = 0.35$. Начальные условия определяются соотношениями

$$X_1(0) = 10X_0, \quad X_2(0) = 10Y_0.$$

Пусть, например, X_0 и Y_0 имеют нормальные распределения: для X_0 - с математическим ожиданием -0.03 и дисперсией 0.01 , а для Y_0 - с математическим ожиданием -0.27 и дисперсией 0.01 . Таким образом, плотность вероятности $\phi_0(x_1, x_2)$ начального состояния $[X_1(0) X_2(0)]^T$ имеет вид

$$\phi_0(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x_1+0.3)^2 + (x_2+2.7)^2}{2}}.$$

Задача состоит в нахождении плотности вероятности $\varphi(t, x, y)$, описывающей распределение координат X и Y и их средних значений.

Заметим, что предположение $X_1, X_2 \in R$ нужно исключительно для удобства последующих расчетов, а именно для аппроксимации плотности вероятности координат X_1 и X_2 функциями Эрмита [4, 7]. Линейная замена переменных ($X_1(t) = 10X(t)$, $X_2(t) = 10Y(t)$) требуется для использования функций Эрмита со стандартными параметрами: $m = 0$, $D = 1$. Разумеется, на практике координаты X_1 и X_2 могут изменяться только в определенных пределах, а начальные условия следовало бы задавать соответствующими усеченными законами распределения или вообще зафиксировать, считая детерминированными (здесь средние значения -0.03 и -0.27 – это данные, зарегистрированные Международной службой широты (Международной службой вращения Земли) на начало 1968 г. [6]). Однако все эти допущения для апробации спектрального метода не играют существенной роли.

2. Соотношения для нахождения плотности вероятности и средних значений

В соответствии с системой (1) запишем вектор сноса и матрицу диффузии [4]

$$f(t, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -\lambda x_1 - \omega x_2 \\ \omega x_1 - \lambda x_2 \end{bmatrix}, \quad g(t, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix},$$

следовательно, уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, которому удовлетворяет плотность вероятности $\phi(t, x_1, x_2)$ координат X_1 и X_2 , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(t, x_1, x_2)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x_1} [(-\lambda x_1 - \omega x_2) \phi(t, x_1, x_2)] - \frac{\partial}{\partial x_2} [(\omega x_1 - \lambda x_2) \phi(t, x_1, x_2)] + \\ & + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2}, \quad t \geq 0, \quad x_1, x_2 \in R. \end{aligned} \quad (2)$$

Начальное условие задается функцией $\phi_0(x_1, x_2)$, т. е. $\phi(0, x_1, x_2) = \phi_0(x_1, x_2)$.

Искомая плотность вероятности $\varphi(t, x, y)$ связана с $\phi(t, x_1, x_2)$ следующим соотношением

$$\varphi(t, x, y) = 100 \phi(t, 10x, 10y), \quad (3)$$

а средние значения координат X и Y можно найти по формулам

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(t, x, y) dx dy, \quad m_y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi(t, x, y) dx dy. \quad (4)$$

3. Применение спектрального метода

Применим методику расчета плотности вероятности спектральным методом (здесь и далее используются терминология, система обозначений и алгоритмы из [4]). Будем искать решение уравнения (2) при условии $0 \leq t \leq 1.2$, что примерно соответствует одному периоду колебаний $\frac{2\pi}{\omega}$. Задание времени окончания процесса $t_1 = 1.2$ обусловлено необходимостью выбора базисной системы для аппроксимации плотности вероятности как функции времени.

Выберем в качестве базисной системы (полной ортонормированной системы функций) пространства $L_2([0, t_1] \times R^2)$ систему $\{\hat{P}(i_0, t) \hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_0, i_1, i_2=0}^{\infty}$, где $\{\hat{P}(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ - система полиномов Лежандра [4, 8], определенная на отрезке $[0, t_1]$ и представляющая собой базис пространства $L_2([0, t_1])$; $\{\hat{\Phi}(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{\hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ - системы функций Эрмита с параметрами $m = 0, D = 1$ [7], образующие базис пространства $L_2(R)$.

Отметим, что при выборе вместо полиномов Лежандра системы функций, ортонормированной на полубесконечном интервале $[0, +\infty)$ [9], необходимость задавать время окончания процесса отпадает, но в таком случае обычно бывает невелика точность расчетов. Системы функций $\{\hat{\Phi}(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{\hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ совпадают, хотя в общем случае для представления функций различных координат можно выбирать разные базисные системы.

Вычислим спектральные характеристики операторов дифференцирования по времени и координатам x_1 и x_2 , а также операторов умножения на коэффициенты сноса и диффузии относительно выбранной базисной системы $\{\hat{P}(i_0, t) \hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_0, i_1, i_2=0}^{\infty}$.

Спектральная характеристика $P(3,3)$ оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент представляется в виде тензорного произведения спектральной характеристики $P^t(1,1)$ оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенной относительно системы полиномов Лежандра, и четырехмерной единичной матрицы $E(2,2) = E(1,1) \otimes E(1,1)$

$$P(3,3) = P^t(1,1) \otimes E(2,2).$$

Напомним, что $P^t(1,1)$ - бесконечная матрица ($P^t(1,1) = (P_{ij}^t)_{i,j=0}^{\infty}$), для элементов которой справедливо соотношение

$$P_{ij}^t = \hat{P}(i,0) \hat{P}(j,0) + \int_0^{t_1} \hat{P}(i,t) \frac{d\hat{P}(j,t)}{dt} dt, \quad (5)$$

а $E(1,1)$ - двумерная единичная матрица

$$E(1,1) = (E_{ij})_{i,j=0}^{\infty}, \quad E_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Согласно свойствам спектральных характеристик $P_1(3,3)$ и $P_2(3,3)$ операторов дифференцирования первого порядка по координатам x_1 и x_2 соответственно, получаем

$$P_1(3,3) = E(1,1) \otimes P^x(1,1) \otimes E(1,1),$$

$$P_2(3,3) = E(1,1) \otimes E(1,1) \otimes P^x(1,1),$$

где $P^x(1,1)$ - спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно системы функций Эрмита

$$P^x(1,1) = (P_{ij}^x)_{i,j=0}^{\infty}, \quad P_{ij}^x = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(i,x) \frac{d\hat{\Phi}(j,x)}{dx} dx. \quad (6)$$

Для спектральных характеристик $P_{11}(3,3)$ и $P_{22}(3,3)$ операторов дифференцирования второго порядка по координатам x_1 и x_2 справедливо соотношение

$$P_{11}(3,3) = (P_1(3,3))^2 = E(1,1) \otimes (P^x(1,1))^2 \otimes E(1,1),$$

$$P_{22}(3,3) = (P_2(3,3))^2 = E(1,1) \otimes E(1,1) \otimes (P^x(1,1))^2.$$

Перейдем к вычислению спектральных характеристик операторов умножения на коэффициенты сноса $f_1(t, x_1, x_2)$ и $f_2(t, x_1, x_2)$ (координаты вектора сноса $f(t, x_1, x_2)$). Принимая во внимание свойство линейности спектрального преобразования и свойства спектрального преобразования операторов умножения [4], получаем выражение для спектральной характеристики $F_1(3,3)$ оператора умножения на функцию $f_1(t, x_1, x_2) = -\lambda x_1 - \omega x_2$:

$$F_1(3,3) = -\lambda \cdot (E(1,1) \otimes A(1,1) \otimes E(1,1)) - \omega \cdot (E(1,1) \otimes E(1,1) \otimes A(1,1)),$$

в котором $A(1,1)$ - спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a(x) = x$, вычисленная относительно системы функций Эрмита, т. е.

$$A(1,1) = (A_{ij})_{i,j=0}^{\infty}, \quad A_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \hat{\Phi}(i, x) \hat{\Phi}(j, x) dx,$$

причем для элементов A_{ij} , как и для P_{ij}^t , P_{ij}^x (5), (6), получены аналитические выражения [4, 7-9].

Аналогично, спектральная характеристика $F_2(3,3)$ оператора умножения на функцию $f_2(t, x_1, x_2) = \omega x_1 - \lambda x_2$ представляется выражением

$$F_2(3,3) = \omega \cdot (E(1,1) \otimes A(1,1) \otimes E(1,1)) - \lambda \cdot (E(1,1) \otimes E(1,1) \otimes A(1,1)).$$

Так как матричная функция $g(t, x_1, x_2)$ является диагональной, необходимо вычислить только спектральные характеристики операторов умножения на коэффициенты диффузии $g_{11}(t, x_1, x_2)$ и $g_{22}(t, x_1, x_2)$ ($g_{11}(t, x_1, x_2) = g_{22}(t, x_1, x_2) = a^2$). Применяя свойства спектрального преобразования операторов умножения, получаем

$$G_{11}(3,3) = G_{22}(3,3) = a^2 \cdot E(3,3),$$

где $E(3,3)$ – шестимерная единичная матрица ($E(3,3) = E(1,1) \otimes E(1,1) \otimes E(1,1)$).

Сформируем базисную систему пространства $L_2(R^2)$ для представления функции $\phi_0(x_1, x_2)$: $\{\hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_1, i_2=0}^{\infty}$. Спектральная характеристика $\Phi_0(2,0)$ плотности вероятности $\phi_0(x_1, x_2)$ начального состояния $[X_1(0) X_2(0)]^T$, определенная относительно базисной системы $\{\hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_1, i_2=0}^{\infty}$, задается соотношением [4]

$$\Phi_0(2,0) = (\phi_{0i_1i_2})_{i_1, i_2=0}^{\infty},$$

где

$$\phi_{0i_1i_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(x_1, x_2) \hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1+0.3)^2}{2}} \hat{\Phi}(i_1, x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_2+2.7)^2}{2}} \hat{\Phi}(i_2, x_2) dx_2.$$

Матрица-столбец $q(1,0;0)$ значений функций $\hat{P}(i_0, t)$ в точке $t=0$ имеет вид

$$q(1,0;0) = \left[\hat{P}(0,0) \quad \hat{P}(1,0) \quad \hat{P}(2,0) \quad \dots \right]^T.$$

Составим уравнение обобщенной характеристической функции [4]

$$P(3,3) \cdot \Phi(3,0) - q(1,0;0) \otimes \Phi_0(2,0) = -P_1(3,3) \cdot F_1(3,3) \cdot \Phi(3,0) - P_2(3,3) \cdot F_2(3,3) \cdot \Phi(3,0) + \\ + \frac{1}{2} \cdot P_{11}(3,3) \cdot G_{11}(3,3) \cdot \Phi(3,0) + \frac{1}{2} \cdot P_{22}(3,3) \cdot G_{22}(3,3) \cdot \Phi(3,0), \quad (7)$$

где $\Phi(3,0)$ - обобщенная характеристическая функция, т.е. спектральная характеристика плотности вероятности $\phi(t, x_1, x_2)$, определенная относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0, t) \hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_0, i_1, i_2=0}^{\infty}$

$$\Phi(3,0) = (\phi_{i_0 i_1 i_2})_{i_0, i_1, i_2=0}^{\infty}, \quad \phi_{i_0 i_1 i_2} = \int_0^{t_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t, x_1, x_2) \hat{P}(i_0, t) \hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2) dt dx_1 dx_2.$$

Нетрудно видеть, что уравнение обобщенной характеристической функции (7) линейно по $\Phi(3,0)$. Фактически, это система линейных уравнений для коэффициентов $\phi_{i_0 i_1 i_2}$ разложения плотности вероятности $\phi(t, x_1, x_2)$ в ряд по функциям базисной системы $\{\hat{P}(i_0, t) \hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_0, i_1, i_2=0}^{\infty}$, записанная в матричной форме. Решение уравнения (7) записывается в виде

$$\Phi(3,0) = \left[P(3,3) + P_1(3,3) \cdot F_1(3,3) + P_2(3,3) \cdot F_2(3,3) - \frac{a^2}{2} \cdot (P_{11}(3,3) + P_{22}(3,3)) \right]^{-1} \cdot (q(1,0;0) \otimes \Phi_0(2,0)),$$

а плотность вероятности $\phi(t, x_1, x_2)$ определяется по формуле

$$\phi(t, x_1, x_2) = \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \phi_{i_0 i_1 i_2} \hat{P}(i_0, t) \hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2), \quad t \in [0, t_1], \quad x_1, x_2 \in R.$$

При вычислениях ограничимся конечным числом базисных функций, т. е. зададим порядки усечения спектральных характеристик (таким образом, все определенные выше спектральные характеристики будут представляться матрицами с конечным числом элементов): $L_0 = L_1 = L_2 = 16$. Тогда приближенное решение уравнения (2) можно представить так:

$$\phi(t, x_1, x_2) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \sum_{i_2=0}^{L_2-1} \phi_{i_0 i_1 i_2} \hat{P}(i_0, t) \hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2), \quad t \in [0, t_1], \quad x_1, x_2 \in R,$$

а для получения искомым характеристик применяются соотношения (3) и (4).

Графики функции $\varphi(t, x, y)$ в различные моменты времени t изображены на рис. 1, а графики математических ожиданий $m_x(t)$ и $m_y(t)$ – на рис. 2.

По плотности вероятности $\varphi(t, x, y)$ могут быть найдены начальные и центральные моменты любого порядка. Для найденных математических ожиданий $m_x(t)$ и $m_y(t)$ нормы разности между точным решением и приближенным, полученным спектральным методом, в пространстве квадратично интегрируемых функций не превосходят значения $4.8 \cdot 10^{-5}$, а для пространства непрерывных функций - значения $8.3 \cdot 10^{-5}$ (максимальное отклонение).

Заключение

В статье рассмотрена упрощенная линейная стационарная модель колебаний полюса Земли, на ее примере продемонстрировано применение спектрального метода анализа стохастических систем. При усложнении модели (например, [10]) методика решения останется без изменений и в этом состоит одно из важнейших преимуществ спектрального метода. В частности, могут измениться соотношения для расчета спектральных характеристик операторов умножения на коэффициенты сноса и диффузии или увеличиться размерности матриц, формирующих уравнение обобщенной характеристической функции, в случае введения дополнительных координат. Другим преимуществом спектрального метода является развитое алгоритмическое и программное обеспечение [11].

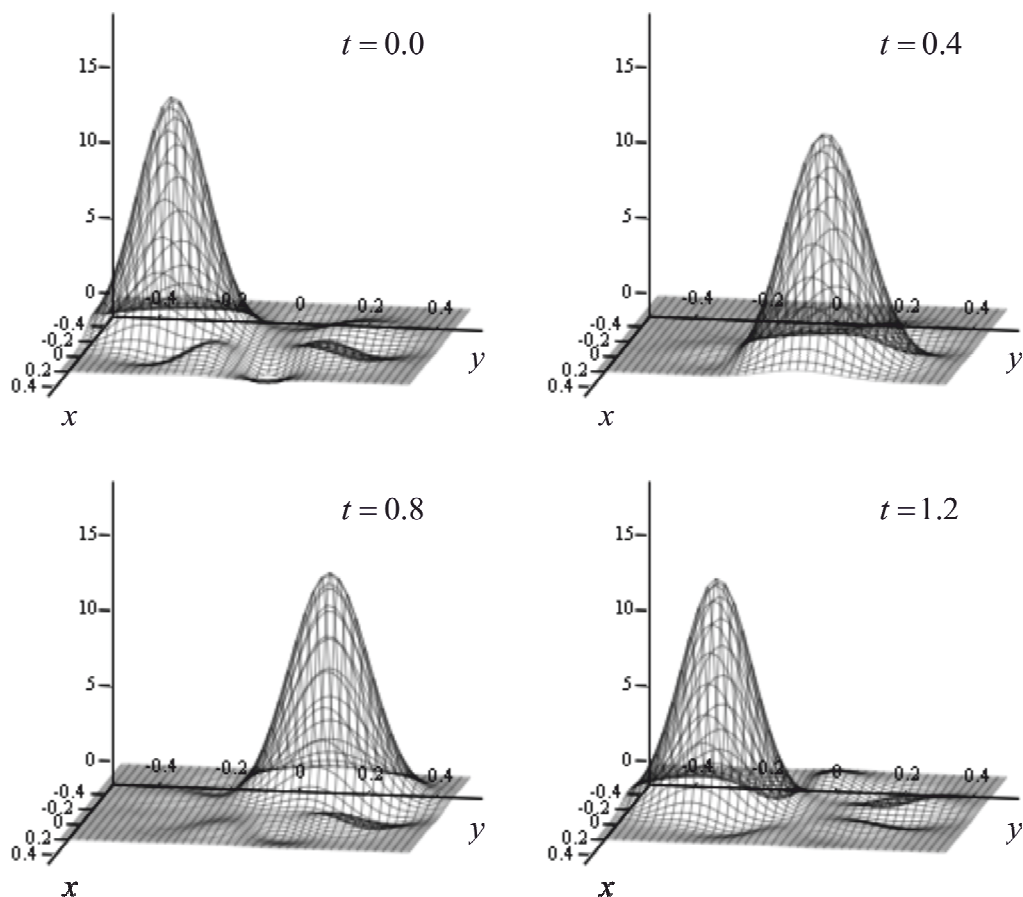


Рис. 1. Графики плотности вероятности $\varphi(t, x, y)$

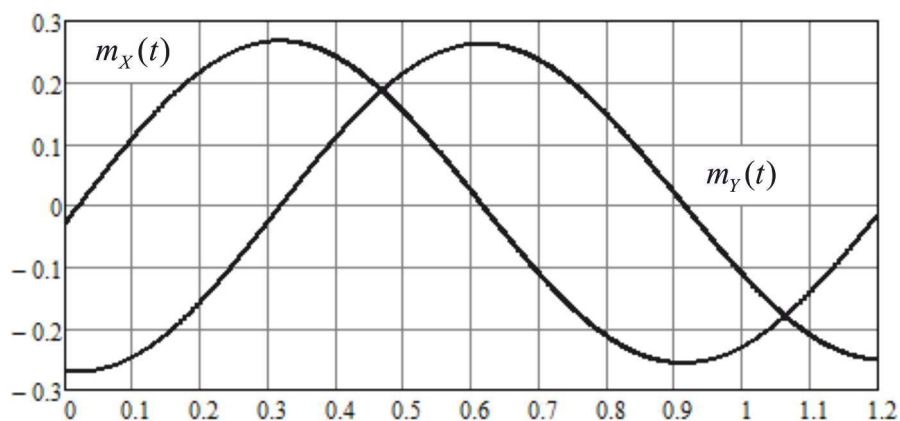


Рис. 2. Графики математических ожиданий $m_x(t)$ и $m_y(t)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Манк У., Макдональд Г. Вращение Земли. - М.: Мир, 1964.
2. Воротков М.В., Горшков В.Л., Миллер Н.О., Прудникова Е.Я. Исследование основных составляющих в движении полюса Земли // Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове. - 2002. - № 216. - С. 406-414.

3. **Арато М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г.** Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса. В кн.: Теория вероятностей и математическая статистика (избранные труды А.Н. Колмогорова). - М.: Наука, 1986. - С. 436-440. (ДАН СССР. - 1962. - Т. 146. - № 4. - С. 747-750.)
4. **Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.** Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. - М.: Вузовская книга, 2006.
5. **Пугачев В.С., Сеницын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. - М.: Наука, 1990.
6. **Кузнецов Д.Ф.** Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. – СПб.: Политехнический ун-т, 2009.
7. **Романов В.А., Рыбаков К.А.** Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Электронный журнал «Труды МАИ». - 2010. - № 39. - <http://www.mai.ru>.
8. **Солодовников В.В., Семенов В.В.** Спектральная теория нестационарных систем управления. - М.: Наука, 1974.
9. **Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.** Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал «Труды МАИ». - 2004. - № 16. - <http://www.mai.ru>.
10. **Сеницын И.Н.** Корреляционные методы построения аналитических информационных моделей флуктуаций полюса Земли по априорным данным // Информатика и ее применения. - 2007. - Т. 1. - Вып. 2. - С. 2-14.
11. **Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.** Анализ стохастических систем на основе решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова. В кн.: Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез и оптимизация / под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. - С. 312-338.

CHANDLER WOBBLE ANALYSIS BY THE SPECTRAL METHOD

Rybakov K.A.

The paper deals with a simplified stochastic model of Chandler wobble. We study the problem of finding the pole coordinates: of the probability density function characteristics and their mean values. The main aim of this work is a testing of the spectral method analysis for stochastic systems.

Key words: Chandler wobble, spectral method, stochastic system analysis.

Сведения об авторе

Рыбаков Константин Александрович, 1979 г.р., окончил МАИ (2002), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики МАИ, автор 60 научных работ, область научных интересов - анализ и синтез стохастических систем управления, спектральная форма математического описания систем управления.

УДК 533.9:51-7

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА С УЧЕТОМ КУЛОНОВСКИХ СТОЛКНОВЕНИЙ ВБЛИЗИ ЗАРЯЖЕННОЙ ПЛАСТИНЫ В ПОТОКЕ ПЛАЗМЫ

И.А. КУДРЯВЦЕВА, А.В. ПАНТЕЛЕЕВ

В данной работе рассматривается задача диагностики пристеночной области плазмы для случая бесконечно большой заряженной пластины, расположенной перпендикулярно набегающему потоку плазмы. Согласно математической модели [1] сформирована вычислительная модель задачи для случая кулоновских столкновений и отличной от нуля исходной скорости потока плазмы, основанная на методе статистических испытаний Монте-Карло. Проведены и проанализированы результаты численного моделирования.

Ключевые слова: метод Монте-Карло, уравнение Фоккера-Планка, плазма, кулоновские столкновения, зонд.

Введение

Полноценное применение плазмы невозможно без ее всестороннего исследования. Проводятся исследования свойств сильноионизованной низкотемпературной плазмы вблизи электродов в различных средах (в вакууме, ртутных парах и газах). На основе данных исследований осуществляется ряд разработок, в частности, создаются источники бесперебойного питания на базе плазменных элементов и предлагаются конструкции высокоточных коммутирующих приборов. Значительное внимание уделяется разработке методов диагностики плазмы. Так, стоит задача диагностики сильноионизованной низкотемпературной плазмы вблизи стенок в низкотемпературных узлах термоядерных устройств.

В случае сильноионизованной плазмы существенную роль играют столкновения типа «ион-ион» и «ион-электрон». Поведение частиц в плазме в этом случае описывается уравнением Фоккера-Планка, впервые предложенным в [2, 3]. В настоящей работе на основе математической модели [1], включающей уравнение Фоккера-Планка и уравнение Пуассона, сформирована вычислительная модель, описывающая процессы переноса в плазме с учетом кулоновских столкновений вблизи заряженной плоской пластины, помещенной перпендикулярно набегающему потоку.

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая физическая постановка задачи. Перпендикулярно набегающему со скоростью \vec{v}_∞ потоку двухкомпонентной плазмы внесена заряженная до потенциала Φ_p пластина бесконечной длины и ширины. Предполагается, что на поверхности пластины выполнено условие идеального поглощения, согласно которому электрон, попавший на плоскость пропадает, а однозарядный ион при ударе о нее нейтрализуется. При этом отсутствуют потоки заряженных частиц от стенки в плазму. Влияние магнитного поля не учитывается. Начальные распределения ионов и электронов максвелловские.

С учетом столкновений между заряженными частицами следует найти напряженность самосогласованного электрического поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$, плотности токов заряженных частиц

$$\vec{J}_\alpha(\vec{r}, t) = q_\alpha \cdot \int f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} d\vec{v}, \quad \alpha = e, i, \quad \text{где } q_\alpha = \begin{cases} -e, & \alpha = e, \\ e, & \alpha = i, \end{cases}; \text{ концентрации заряженных частиц}$$

$n_\alpha(\vec{r}, t) = \int f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$, $\alpha = e, i$ в возмущенной области вблизи пластины. Поведение частиц во времени t характеризуется радиус-вектором \vec{r} и вектором скорости \vec{v} .

Математическая модель, соответствующая данной физической постановке задачи, имеет вид [4, 5]

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}_\alpha(\vec{r}, t)}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_c, \quad (1)$$

$$\Delta\varphi(\vec{r}, t) = -\frac{e}{\varepsilon_0}(n_i(\vec{r}, t) - n_e(\vec{r}, t)), \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\varphi(\vec{r}, t),$$

где первое уравнение - уравнение Фоккера-Планка для частиц сорта α ($\alpha = i, e$) с оператором столкновений $\left(\frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_c$ вида [3-5]

$$\frac{1}{\Gamma_\alpha} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_c = \frac{1}{2} \nabla_v \nabla_v : (f_\alpha \nabla_v \nabla_v g_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)) - \nabla_v \cdot (f_\alpha \nabla_v h_\alpha),$$

второе уравнение - уравнение Пуассона для самосогласованного электрического поля; $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ - функция распределения частиц сорта α ; $\vec{F}_\alpha(\vec{r}, t) = q_\alpha \vec{E}(\vec{r}, t)$; $\varphi(\vec{r}, t)$ - потенциал самосогласованного электрического поля; $n_\alpha(\vec{r}, t)$, $\alpha = i, e$ - концентрация частиц сорта α ; $\nabla_v \nabla_v g_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ - ковариантная тензорная производная второго ранга, символ двоеточия ($:$) обозначает операцию двойного суммирования,

$$\Gamma_\alpha = \frac{Z_\alpha^4 e^4}{4\pi\varepsilon_0^2 m_\alpha^2} \ln D_\alpha, \quad D_\alpha = \frac{12\pi\varepsilon_0 k T_{\alpha\infty}}{Z_\alpha^2 e^2} \left(\frac{\varepsilon_0 k T_{\alpha\infty}}{n_{\alpha\infty} e^2} \right)^{1/2}, \quad g_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = \sum_{b=i,e} \left(\frac{Z_b}{Z_\alpha} \right) \int f_b(\vec{r}, \vec{v}', t) |\vec{v} - \vec{v}'| d\vec{v}',$$

$$h_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = \sum_{b=i,e} \frac{m_\alpha + m_b}{m_b} \cdot \left(\frac{Z_b}{Z_\alpha} \right) \int \frac{f_b(\vec{r}, \vec{v}', t)}{|\vec{v} - \vec{v}'|} d\vec{v}', \quad Z_\alpha = 1, \alpha = i, e;$$

m_α - масса частицы сорта α ; ε_0 - электрическая постоянная; $n_{\alpha\infty}, T_{\alpha\infty}$ - концентрации и температуры частиц в невозмущенной плазме.

К системе уравнений (1) необходимо добавить начальные и краевые условия:

$$\begin{aligned} t = 0: \quad f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, 0) &= f_\alpha^{maksv}, \quad \alpha = i, e, \\ \vec{r} \in \Omega_p: \quad f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) \Big|_{\vec{r} \in \Omega_p, (\vec{v}, \vec{n}) > 0} &= 0, \quad \alpha = i, e, \\ \varphi(\vec{r}, t) \Big|_{\vec{r} \in \Omega_p} &= \varphi_p, \\ \vec{r} \in \Omega_\infty: \quad f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) \Big|_{\vec{r} \in \Omega_\infty} &= f_\alpha^{maksv}, \quad \alpha = i, e, \\ \varphi(\vec{r}, t) \Big|_{\vec{r} \in \Omega_\infty} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $f_{\alpha}^{maksv} = n_{\alpha\infty} \left(\frac{m_{\alpha}}{2kT_{\alpha\infty}} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_{\alpha}}{2kT_{\alpha\infty}} |\vec{v} - \vec{v}_{\infty}|^2 \right)$, $\alpha = i, e$; \vec{n} - внешняя нормаль к плоскости зонда; Ω_p , Ω_{∞} - множество радиус-векторов частиц, концы которых принадлежат плоскости зонда и границе возмущенной зоны соответственно.

Для решения поставленной задачи вводится декартова система координат так, как показано на рис. 1, при этом внешняя скорость \vec{v}_{∞} становится направленной вдоль оси OY .

Тогда положение частицы в пространстве будет определяться координатами x, y, z , а скорость - координатами v_x, v_y, v_z . В силу того, что пластина является бесконечно большой, функции распределения частиц в этом случае будут зависеть только от переменных y, v_y, t .

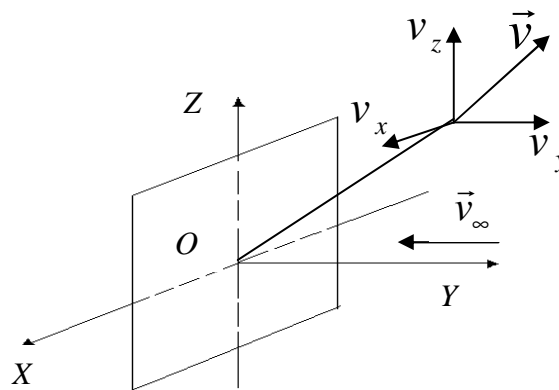


Рис. 1. Расположение заряженной плоскости в декартовой системе координат

Поставленную задачу предлагается решать методом, который основывается на методе статистических испытаний Монте-Карло.

2. Вычислительная модель задачи с применением метода статистических испытаний Монте-Карло

Запишем самосогласованную систему уравнений (1) - (2) в декартовой системе координат с учетом сделанных предположений [6, 7]

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + v_y \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y} + \frac{F_y^{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v_y} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_y^2} \left(f_{\alpha} \frac{\partial^2 g_{\alpha}}{\partial v_y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial v_y} \left(f_{\alpha} \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial v_y} \right), \quad \alpha = i, e, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e), \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (4)$$

$$t = 0: f_{\alpha}(y, v_y, 0) = f_{\alpha}^{maksv}, \quad \alpha = i, e,$$

$$\begin{aligned}
 y = 0: \quad \hat{f}_\alpha(0, \hat{v}_y, \hat{t}) \Big|_{\hat{v}_y > 0} &= 0, \quad \alpha = i, e, \\
 \varphi(0, t) &= \varphi_p, \\
 y = y_\infty: \quad f_\alpha(y_\infty, v_y, t) &= f_\alpha^{maksv}, \quad \alpha = i, e, \\
 \varphi(y_\infty, t) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

В полученной системе уравнений (3) - (5) перейдем к безразмерным величинам, применив соотношение $X = M_x \cdot \hat{X}$, где M_x – масштаб размерной величины X ; \hat{X} – безразмерная величина X . Используемая система масштабов выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 M_L = r_D = \frac{(k\varepsilon_0 T_{i\infty})^{1/2}}{en_{i\infty}^{1/2}}, \quad M_v^\alpha &= \left(\frac{2kT_{\alpha\infty}}{m_\alpha} \right)^{1/2}, \quad M_n = n_{i\infty}, \quad M_E = \frac{M_\varphi}{M_L}, \quad M_j = en_n M_v^i, \\
 M_\varphi = \frac{kT_{i\infty}}{e}, \quad M_t = \frac{M_L}{M_v^i}, \quad M_f^\alpha &= \frac{M_n}{(M_v^\alpha)^3}, \quad \alpha = i, e.
 \end{aligned} \tag{6}$$

В качестве масштабов были взяты следующие: радиус Дебая, скорость теплового движения частиц, концентрация частиц в невозмущенной плазме, потенциал, возникающий при разделении зарядов в дебаевской сфере и производные от них величины.

В результате система безразмерных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{t}} + \sqrt{\delta_\alpha} \left\{ \hat{v}_y \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{y}} + \frac{Z_\alpha}{2\varepsilon_\alpha} \hat{E}_y \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial \hat{v}_y} \right\} &= \\
 = K_\alpha \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_y^2} (G_\alpha \hat{f}_\alpha) - \frac{\partial}{\partial \hat{v}_y} (H_\alpha \hat{f}_\alpha) \right\}, \quad \alpha = i, e,
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial \hat{y}^2} = -(\hat{n}_i - \hat{n}_e), \quad \hat{E}_y = -\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{y}},$$

$$\hat{t} = 0: \quad \hat{f}_\alpha(\hat{y}, \hat{v}_y, 0) = \hat{f}_\alpha^{maksv}, \quad \alpha = i, e,$$

$$\hat{y} = 0: \quad \hat{f}_\alpha(0, \hat{v}_y, \hat{t}) \Big|_{\hat{v}_y > 0} = 0, \quad \alpha = i, e,$$

$$\hat{\varphi}(0, \hat{t}) = \hat{\varphi}_p,$$

$$\hat{y} = \hat{y}_\infty: \quad \hat{f}_\alpha(\hat{y}_\infty, \hat{v}_y, \hat{t}) = \hat{f}_\alpha^{maksv}, \quad \alpha = i, e,$$

$$\hat{\varphi}(\hat{y}_\infty, \hat{t}) = 0,$$

где $\delta_\alpha = \frac{\varepsilon_\alpha}{\mu_\alpha}$, $\varepsilon_\alpha = \frac{T_{\alpha\infty}}{T_{i\infty}}$, $\mu_\alpha = \frac{m_\alpha}{m_i}$, $K_\alpha = \frac{\ln D_\alpha}{16\pi n_D \mu_\alpha}$, $n_D = M_L^3 M_n$, $Z_\alpha = 1$, $\alpha = i, e$,

$$G_\alpha = \begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{g}_{ii}}{\partial \hat{v}_y^2} + \frac{1}{\sqrt{\delta_e}} \frac{\partial^2 \hat{g}_{ie}}{\partial \hat{v}_y^2}, & \alpha = i, \\ \frac{\partial^2 \hat{g}_{ei}}{\partial \hat{v}_y^2} + \sqrt{\delta_e} \frac{\partial^2 \hat{g}_{ee}}{\partial \hat{v}_y^2}, & \alpha = e, \end{cases} \quad H_\alpha = \begin{cases} \frac{\partial \hat{h}_{ii}}{\partial \hat{v}_y} + \frac{1}{\sqrt{\delta_e^3}} \frac{\partial \hat{h}_{ie}}{\partial \hat{v}_y}, & \alpha = i, \\ \frac{\partial \hat{h}_{ei}}{\partial \hat{v}_y} + \frac{1}{\sqrt{\delta_e}} \frac{\partial \hat{h}_{ee}}{\partial \hat{v}_y}, & \alpha = e, \end{cases}$$

$$\hat{g}_{ii}(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}) = \int \hat{f}_i(\hat{y}, \hat{v}'_y, \hat{t}) |\hat{v}_y - \hat{v}'_y| d\hat{v}'_y, \quad \hat{g}_{ie}(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}) = \int \hat{f}_e(\hat{y}, \hat{v}'_y, \hat{t}) |\hat{v}_y - \hat{v}'_y| d\hat{v}'_y,$$

$$\hat{g}_{ei}(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}) = \int \hat{f}_i(\hat{y}, \hat{v}'_y, \hat{t}) |\hat{v}_y - \hat{v}'_y| d\hat{v}'_y, \quad \hat{g}_{ee}(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}) = \int \hat{f}_e(\hat{y}, \hat{v}'_y, \hat{t}) |\hat{v}_y - \hat{v}'_y| d\hat{v}'_y,$$

$$\hat{h}_{ii}(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}) = 2 \int \frac{\hat{f}_i(\hat{y}, \hat{v}'_y, \hat{t})}{|\hat{v}_y - \hat{v}'_y|} d\hat{v}'_y, \quad \hat{h}_{ie}(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}) = \frac{m_i + m_e}{m_e} \int \frac{\hat{f}_e(\hat{y}, \hat{v}'_y, \hat{t})}{|\hat{v}_y - \hat{v}'_y|} d\hat{v}'_y,$$

$$\hat{h}_{ei}(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}) = \frac{m_i + m_e}{m_i} \int \frac{\hat{f}_i(\hat{y}, \hat{v}'_y, \hat{t})}{|\hat{v}_y - \hat{v}'_y|} d\hat{v}'_y, \quad \hat{h}_{ee}(\hat{y}, \hat{v}_y, \hat{t}) = 2 \int \frac{\hat{f}_e(\hat{y}, \hat{v}'_y, \hat{t})}{|\hat{v}_y - \hat{v}'_y|} d\hat{v}'_y.$$

Поиск решения самосогласованной системы уравнений (7) осуществляется по следующей схеме [7]. Вначале находятся значения напряженности электрического поля по значениям потенциала, полученным из граничной задачи для уравнения Пуассона. Далее, используя найденные значения напряженности, решается уравнение Фоккера-Планка путем перехода к стохастическому дифференциальному уравнению (СДУ) Ито

$$d\hat{\Theta}_\alpha(\hat{t}) = a_\alpha(\hat{t}, \hat{\Theta}_\alpha(\hat{t}))d\hat{t} + \sigma_\alpha(\hat{t}, \hat{\Theta}_\alpha(\hat{t}))dW(\hat{t}), \quad \alpha = i, e, \quad (8)$$

где $\hat{\Theta}_\alpha(\hat{t}) = \begin{bmatrix} \hat{y}(\hat{t}) \\ \hat{v}_y(\hat{t}) \end{bmatrix}$, $\hat{v}_y(\hat{t} = 0) \sim \hat{f}_\alpha^{maksv}$, $\hat{y}(\hat{t} = 0)$ предполагается детерминированной величиной;

$$a_\alpha(\hat{t}, \hat{\Theta}_\alpha(\hat{t})) = \left[-\sqrt{\delta_\alpha} \hat{v}_y - K_\alpha \left\{ H_\alpha + \frac{Z_\alpha}{2\epsilon_\alpha} \hat{E}_y \right\} \right]^T, \quad \sigma_\alpha(\hat{t}, \hat{\Theta}_\alpha(\hat{t})) \sigma_\alpha^T(\hat{t}, \hat{\Theta}_\alpha(\hat{t})) = K_\alpha G_\alpha, \quad \alpha = i, e,$$

$W(\hat{t})$ - стандартный винеровский случайный процесс.

Для нахождения значений вектора состояния $\hat{\Theta}_\alpha(\hat{t})$ применим явную разностную схему стохастического метода Эйлера [8]

$$\hat{\Theta}_\alpha^{n+1} = \hat{\Theta}_\alpha^n + h_\tau \cdot a_\alpha(\hat{t}_n, \hat{\Theta}_\alpha^n) + \sigma_\alpha(\hat{t}_n, \hat{\Theta}_\alpha^n) \Delta W_n, \quad n = 0, \dots, N_t, \quad \alpha = i, e, \quad (9)$$

где $\hat{\Theta}_\alpha^n$, $n = 0, \dots, N_t$, - приближенное значение вектора состояния $\Theta_\alpha(\hat{t})$, $\alpha = i, e$ в момент времени $\hat{t} = \hat{t}_n$, $\hat{t}_n = n \cdot h_\tau$, $n = 0, \dots, N_t$; h_τ - достаточно малый шаг интегрирования; ΔW_n , $n = 0, \dots, N_t$, - величина приращения винеровского процесса $W(\hat{t})$ на отрезке $[\hat{t}_n, \hat{t}_{n+1}]$, по определению независимая от $\hat{\Theta}_\alpha^0, \Delta W_0, \dots, \Delta W_{n-1}$: $\Delta W_n = W(\hat{t}_{n+1}) - W(\hat{t}_n)$; $\Delta W_n \sim N(0, h_\tau)$, т.е. ΔW_n представляют собой гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, равными шагу интегрирования; $\hat{\Theta}_\alpha^0$ - значение вектора состояния $\hat{\Theta}_\alpha(\hat{t})$, $\alpha = i, e$ в момент времени $\hat{t} = 0$.

Для нахождения частных производных $\frac{\partial^2 \hat{g}_{i\alpha}}{\partial v_y^2}$, $\frac{\partial^2 \hat{g}_{e\alpha}}{\partial v_y^2}$, $\frac{\partial \hat{h}_{i\alpha}}{\partial v_y}$, $\frac{\partial \hat{h}_{e\alpha}}{\partial v_y}$, $\alpha = i, e$, которые являются

составляющими матрицы $\sigma_\alpha(\hat{t}_n, \hat{\Theta}_\alpha^n) \sigma_\alpha^T(\hat{t}_n, \hat{\Theta}_\alpha^n)$ и вектора $a_\alpha(\hat{t}_n, \hat{\Theta}_\alpha^n)$ соответственно, применяются формулы численного дифференцирования [9].

Функции $\hat{g}_{i\alpha}$, $\hat{g}_{e\alpha}$ и $\hat{h}_{i\alpha}$, $\hat{h}_{e\alpha}$, $\alpha = i, e$ задаются интегралами, которые вычисляются методом Монте-Карло [10] согласно следующим соотношениям

$$\int \hat{f}_\alpha | \hat{v}_y - \hat{v}'_y | dv'_y = M \left(\zeta(\hat{V}_y) \right), \quad \zeta(\hat{V}_y) = | \hat{v}_y - \hat{V}_y |, \quad \hat{V}_y \sim \hat{f}_\alpha.$$

Для вычисления напряженности самосогласованного электрического поля $\hat{E}_y = - \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{y}}$, входящей в вектор $a_\alpha(\hat{t}_n, \hat{\Theta}_\alpha^n)$, используются аппроксимационные формулы численного дифференцирования [9] с использованием значения потенциала $\hat{\phi}_\ell^n$, найденного из решения уравнения Пуассона. Граничная задача для уравнения Пуассона решается путем перехода к конечно-разностной системе с использованием метода сеток с последующим решением полученной системы методом прогонки.

Концентрации \hat{n}_α , $\alpha = i, e$ и плотности токов частиц на зонд \hat{j}_α , $\alpha = i, e$ вычисляются согласно описанному выше методу Монте-Карло

$$\hat{n}_\alpha(\hat{y}, t) = \int \hat{f}_\alpha(\hat{y}, \hat{v}_y, t) d\hat{v}_y = \frac{N'_{v_y}}{N_{v_y}}, \quad \hat{j}_\alpha(\hat{y}, t) = \int \hat{f}_\alpha(\hat{y}, \hat{v}_y, t) \hat{v}_y d\hat{v}_y = M(\hat{V}_y), \quad \hat{V}_y \sim \hat{f}_\alpha,$$

где N'_{v_y} - количество частиц в фиксированной ячейке в данный момент времени; N_{v_y} - количество частиц в данной ячейке в начальный момент времени.

Результаты численного моделирования

Согласно описанному выше методу решения задачи сформирован и реализован алгоритм решения задачи в виде пакета прикладных программ, который позволяет получить численные и графические результаты моделирования динамики параметров пристеночной плазмы в переходном режиме вблизи заряженной пластины, расположенной перпендикулярно набегающему потоку плазмы.

С использованием данного пакета программ проведены серии численных расчетов, в ходе которых варьировались следующие параметры:

1) значение потенциала $\hat{\phi}_p$, подаваемого на пластину, в безразмерных единицах изменялось в диапазоне $\hat{\phi}_p = -10 \div 0$;

2) количество частиц в кубе с длиной стороны, равной длине Дебая, принималось равным $n_D = 10^2 \div 10^8$. Большие значения n_D соответствуют меньшей концентрации. Например, для покоящейся плазмы с $T_{i\infty} = T_{e\infty} = 3000K$, $n_{i\infty} = n_{e\infty} = 10^{12} [м^{-3}]$ $n_D = 10^4$, а при $n_{i\infty} = n_{e\infty} = 10^{15} [м^{-3}]$, $n_D = 10^3$;

3) величина скорости потока $\hat{v}_\infty = 0 \div 2$.

Отношение температур частиц и отношение масс частиц во всех расчетах оставались неизменными и равными соответственно $\frac{T_{i\infty}}{T_{e\infty}} = 1, \frac{m_i}{m_e} = 1836$.

При проведении расчетов исследовались изменения концентраций частиц, плотностей токов частиц, напряженности самосогласованного электрического поля в возмущенной области пространства. На рис. 1, 2 приведены численные результаты с учетом и без учета направленной скорости потока для случаев наличия и отсутствия столкновений. Величина направленной скорости ионов и электронов полагалась одинаковой и равной скорости потока, в силу чего из-за большей массы ионов основная энергия потока приходится на эти частицы.

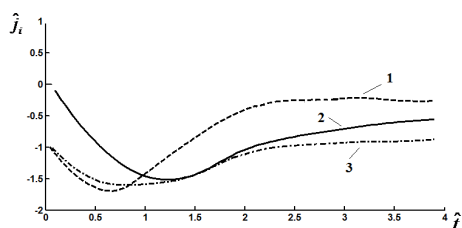


Рис. 1. Кривые плотности тока ионов при $n_D = 10^8$: 1- $\hat{\phi}_p = -10, \hat{v}_\infty = 1$;
2- $\hat{\phi}_p = -10, \hat{v}_\infty = 0$; 3- $\hat{\phi}_p = -6, \hat{v}_\infty = 1$

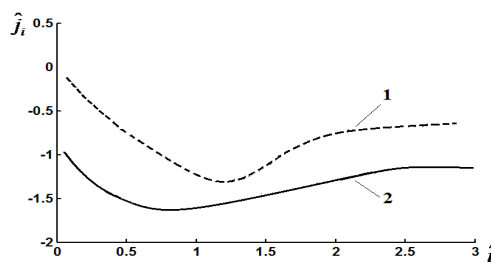


Рис. 2. Кривые плотности тока ионов при $n_D = 10^3, \hat{\phi}_p = -10, \hat{v}_\infty = 0$;
 $\hat{v}_\infty = 0$; 3- $\hat{\phi}_p = -6, \hat{v}_\infty = 1$

Из результатов эксперимента вытекает, что с возрастанием направленной скорости уменьшается промежуток времени установления стационарных значений самосогласованного электрического поля и плотности тока. В случае наличия набегающего потока плазмы характерное поведение кривых напряженности и плотности тока не изменяется как с учетом, так и без учета столкновений. Однако стоит отметить, что достижение экстремального значения кривой плотности тока происходит в более ранний момент времени по сравнению со случаем рассмотрения невозмущенной плазмы. Это объясняется тем, что после внесения заряженной пластины сокращается по времени этап разгона частиц.

Заключение

В данной работе сформирована вычислительная модель, позволяющая описать динамику двухкомпонентной плазмы с учетом столкновений типа «ион-ион», «ион-электрон» и «электрон-электрон» вблизи заряженной пластины, помещенной перпендикулярно потоку плазмы. Модель содержит уравнения Фоккера-Планка для ионов и электронов и уравнение Пуассона. Данная вычислительная модель основана на методе статистических испытаний Монте-Карло. На основе алгоритма, сформированного в рамках разработанной вычислительной модели, создано программное обеспечение, с использованием которого получены и проанализированы результаты моделирования. В ходе проведения вычислительных экспериментов установлено, что с ростом скорости набегающего потока происходит возрастание тока на пластину. Следует отметить также, что существенных отличий в поведении кривых напряженности и плотности тока в случае наличия потока на пластину не наблюдается по сравнению со случаем невозмущенной плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцева И.А., Пантелеев А.В. Динамика пристеночной плазмы вблизи плоского зонда в переходном режиме // Вестник самарского государственного университета. – 2008. - № 6 (65). - С. 281-289.
2. Montgomery D.C., Tidman D.A. Plasma kinetic theory. - New York. -1964.

3. Rosenbluth M.N., MacDonald W., Judd D. Fokker-Planck equation for an inverse-square force // Phys.Rev. - v.107. -1957. -P.1-6.
4. Олдер Б., Фернбах С., Ротенберг М. Вычислительные методы в физике плазмы. - М.: Мир, 1974.
5. Алексеев Б.В., Котельников В.А. Зондовый метод диагностики плазмы. - М.: Энергоатомиздат, 1989.
6. Кудрявцева И.А., Пантелеев А.В. Моделирование динамики двухкомпонентной плазмы с учетом столкновений между заряженными частицами в случае плоского зонда // Научный Вестник МАИ. - 2009. - Т.16. - № 2. - С.114-120.
7. Кудрявцева И.А., Пантелеев А.В. Применение статистического конечно-разностного метода к решению задачи диагностики низкотемпературной плазмы плоским зондом с учетом кулоновских столкновений // Математическое моделирование. - 2010. -Т. 22. - № 5. - С. 45-56.
8. Семенов В.В., Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. Методы описания, анализа и синтеза нелинейных систем управления. - М.: МАИ, 1993.
9. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. - М.: Наука, 1973.
10. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. - М.: Высшая школа, 2002.

MODELING OF TRANSPORT PROCESSES IN PLASMA WITH COULOMB COLLISIONS NEAR CHARGED PLATE LOCATED ON PLASMA FLOW

Kudryavtseva I.A., Panteleyev A.V.

The problem of plasma diagnostics near an infinitely large charged plate is studied; the plate is located perpendicularly to the incoming flow of strongly ionized plasma. In accordance with the mathematical model [1], a numerical model is formulated in the case of Coulomb collisions and nonzero velocity of plasma flow; the model is based on the Monte-Carlo method. The worked out examples illustrate dynamics of plasma parameters for the directed plasma flow velocity.

Key words: the Monte-Carlo method, the Fokker-Planck equation, plasma, Coulomb collisions, the probe.

Сведения об авторах

Пантелеев Андрей Владимирович, 1955 г.р., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана (1978), доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики МАИ, автор более 132 научных работ, область научных интересов - синтез оптимальных систем управления, методы оптимизации.

Кудрявцева Ирина Анатольевна, окончила МАИ (2005), кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математической кибернетики МАИ, автор более 20 научных работ, область научных интересов - физика плазмы, зондовые методы исследования.

УДК 629.76

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ КОНСТРУКЦИЙ МЕХАНИЗМОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

О.Ф. МАШОШИН, Е.А. САМОЙЛОВ

Рассматриваются современные механизмы, используемые на космических аппаратах, при работе в космосе и исследовании других планет. Приведены примеры разработанных механизмов и намечены пути совершенствования их элементов.

Ключевые слова: космические аппараты, механизмы конструкций, передачи, технические устройства.

Конструкция космических аппаратов (КА) и их элементов существенно усовершенствовалась за время от запуска первого космонавта Ю.А. Гагарина в космос до настоящего времени. Рассмотрим основные достижения в развитии механизмов КА, наметим их перспективы и требования предъявляемые к ним.

Механизмы КА, работающие в тяжелых условиях космоса и на планетах, существенно отличаются от аналогов, применяемых в других отраслях машиностроения.

Элементы КА имеют следующие характерные особенности:

- уникальность выполняемых задач в экстремальных условиях и высокая стоимость отказа (стоимость одного кг КА достигает 10000 \$);
- использование высокооборотных электродвигателей постоянного тока малой мощности с мелкомодульными механизмами с большим передаточным числом;
- высокая степень автоматизации - использование электронных и электрических устройств.

Механизмы КА используются для обеспечения их эксплуатации: направления солнечных батарей, выпуска антенн, открытия защитных устройств, функционирования органов управления, стыковки, манипуляторов, планетоходов и др. Рассмотрим лишь некоторые из множества приводов КА.

К механизмам КА предъявляются высокие требования по надежности, КПД, массе, габаритам, стоимости и стойкости к внешним воздействиям.

Для реализации сформулированных требований широко используются волновые, планетарные, шариковинтовые передачи (ШВП) и другие механизмы с малой относительной массой $\gamma = m/T = 0,006 \dots 0,009$ (m - масса редуктора, T - вращающий момент на выходе).

Механизмы КА можно разделить на две группы: силовые (МС) и точные (МТ). Первые обеспечивают необходимый вращающий момент на выходном валу, а вторые дополнительно должны обладать высокой точностью приведения рабочего органа в заданное положение. Точность МТ определяется кинематической точностью и мертвым ходом. Эти параметры реализуются с помощью выходной передачи, которая должна иметь высокую точность и большое передаточное число $u \geq 100$. В этом случае погрешность предыдущих передач не оказывает существенного влияния на точность привода в целом. Часто на выходе для обеспечения повышенной точности МТ в качестве выходных используются волновые передачи. Например, МТ используются в приводах систем управления остронаправленными антеннами.

Для большей надежности у наиболее ответственных механизмов используется резервирование. Например, в механизмах, выполняющих функции, связанные с жизнеобеспечением (СОЖ) космонавтов. Повышение надежности в ряде конструкций приводов выполняется введением дублирующих электродвигателей. Из-за не достаточной надежности для этого не используются переключающие устройства. Наиболее распространен способ включения в кинематическую схему дифференциалов и червячных передач (рис. 1). Червяки 1 и $1'$ червячной передачи соединены с двумя двигателями работающими одновременно. Они приводят во вращение чер-

вячные колеса 2 и $2'$ и дифференциал, состоящий из конических колес 3 , $3'$ и 4 . В штатном режиме вращение на выходном валу B передается от двух двигателей. При отключении одного из двигателей оно продолжается, но с вдвое меньшей скоростью. Использование червячной передачи приводит к снижению КПД всего блока. Также используется горячее резервирование, когда оба двигателя работают одновременно и связаны одной кинематической цепью. Недостаток такой схемы - при заклинивании одного из двигателей выходит из строя весь механизм. Иногда даже применяется двойное дублирование. Например, для надежной расстыковки кораблей, где кроме механических элементов используются и пиротехнические устройства.

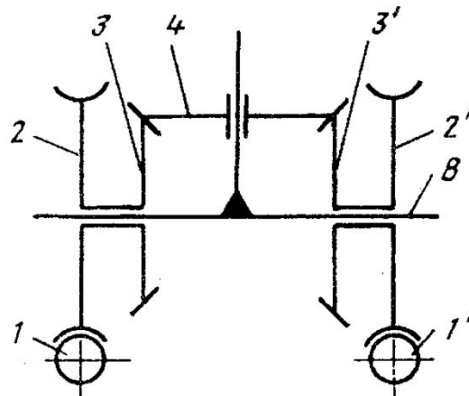


Рис. 1

Сложные задачи конструирования решаются для обеспечения стыковки космических аппаратов. Под руководством В.С. Сыромятникова сконструированы стыковочные устройства: штырь-конус (ШК) и андрогинные периферийные агрегаты (АПА). В ШК для сближения КА используется ШВП обратимого движения, обеспечивающая движение большого винта B_2 и штанги, сближающей КА. К ШВП вращение передается от электродвигателя ЭД через зубчатые колеса и стопорную муфту СМ. В стыковочное устройство также входит малый винт B_1 с ШВП, приводящий во вращение электромагнитный тормоз ЭМТ, демпфирующий колебания КА при стыковке. Удар при касании штанги приемного конуса также гасит пружина П. Устройство ШК еще включает блок концевых контактов КК и колеса передач с числом зубьев z . Копир К и рычаги выравнивания РВ обеспечивают соосность расположения стыкуемых кораблей. Одновременно происходит стягивание большим винтом B_2 ШВП и выравнивание с помощью РВ (рис. 2). После проверки герметичности стыка выполняется жесткое и герметичное соединение аппаратов с помощью активных и пассивных замков, установленных на стыковочном шпангоуте [1, 4].

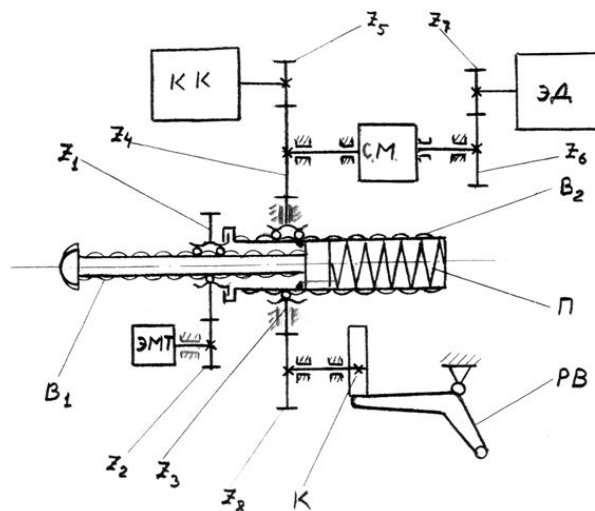


Рис. 2

Перспективой развития этого устройства при увеличении массы стыкуемых аппаратов является замена ШВП на РВП (роликовинтовую передачу), которая увеличит прочность, жесткость стыка и улучшит динамику состыкованных аппаратов.

Позднее была разработана конструкция андрогинного периферийного агрегата стыковки (АПАС), который может быть как активным, так и пассивным, что увеличивает безопасность эксплуатации КА. Его недостаток - большая масса, чем у агрегата ШК. Стыковочное кольцо с направляющими выступами 1 закреплено на трех парах штанг 3, установленных на подвесках 4 с двумя степенями подвижности. На кольце с выступами установлены защелки первичной сцепки 2, которые выполняют соединение колец с направляющими выступами активного и пассивного аппарата (рис. 3). Все штанги соединены между собой механическими передачами и узлами, что делает передачу громоздкой с большой массой по сравнению с устройством штырь - конус. Перспективно использовать принципы мехатроники, при использовании которой в конструкции механические узлы сочетаются с электрическими и электронными устройствами, обеспечивающими управление и связь между элементами всей системы. В рассматриваемом агрегате нужно заменить механические связи штанг и их взаимодействие выполнять с помощью электронной системы управления. Это приведет к снижению массы стыковочного устройства и увеличит его надежность.

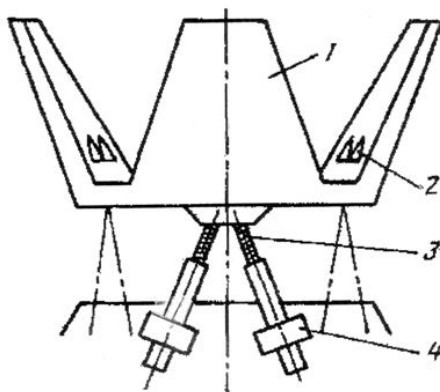


Рис. 3

Герашенко А.Н. и Самсонович С.Л. исследовали волновые передачи с промежуточными звеньями, принцип действия которых соответствует принципу действия зубчатых волновых передач. В передачах с промежуточными звеньями функция гибкого колеса выполняется промежуточными телами качения - шариками или роликами. Эти конструкции также воспринимают радиальную нагрузку, то есть могут выполнять функции опорного устройства [2]. Рассматривается их применение на КА.

В ряде изделий, где нужно обеспечить закрепление подвижного элемента в конечном положении, используются передачи, которые могут обеспечить необратимое вращение. К ним относятся червячные передачи и передачи винт - гайка скольжения. Применение этих передач приводит к большим потерям энергии на трение и низкому КПД. Потери энергии недопустимы, так как запасы энергии на КА ограничены. Имеются оригинальные разработки В.Н. Моторина [1, 3] по созданию прецессирующей передачи с геометрическим самоторможением, у которой обеспечивается необратимость вращения, меньше трение и выше КПД (рис. 4). В предложенной передаче самоторможение обеспечивается поворотом оси кривошипа AB водила H на угол φ так, чтобы равнодействующая сил, действующих на сателлиты 3,4, пересекала ось водила в точке O . Отсутствие плеча у равнодействующей сил относительно оси водила приводит к тому, что вращающий момент, приложенный на выходе к зубчатому колесу 2, не будет передаваться на водило H . Эта передача становится необратимой. Сателлит 3 находится в зацеплении с колесом 1, а сателлит 4 с колесом 2. Прецессирующие передачи имеют более высокий КПД, более высокую точность и надежность, малую

массу, габариты и обеспечивают необратимость движения. Анализ динамических характеристик при различных видах возбуждения показал, что эти передачи обладают улучшенными динамическими характеристиками привода. Целесообразно их использование на КА.

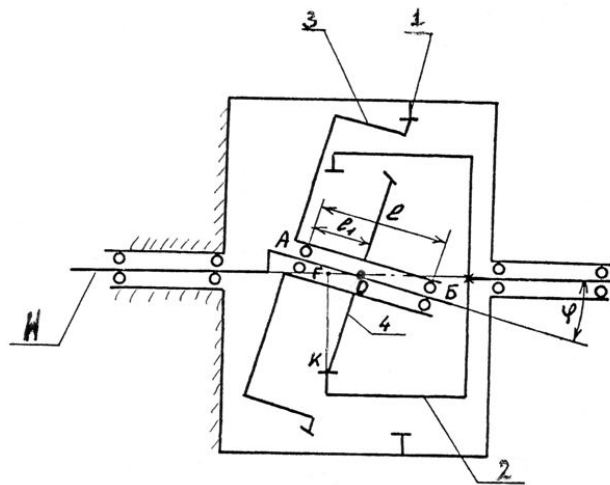


Рис. 4

В МТ для получения больших передаточных чисел у механизмов летательных аппаратов (ЛА) часто используется планетарная передача на входе и волновая передача на выходе, которая изготавливается с высокой точностью и обеспечивает высокую точность привода. Такая передача используется для наведения остронаправленной антенны (рис. 5). Привод также включает шаговый двигатель ШД и вращающийся трансформатор ВТ в качестве датчика положения [1].

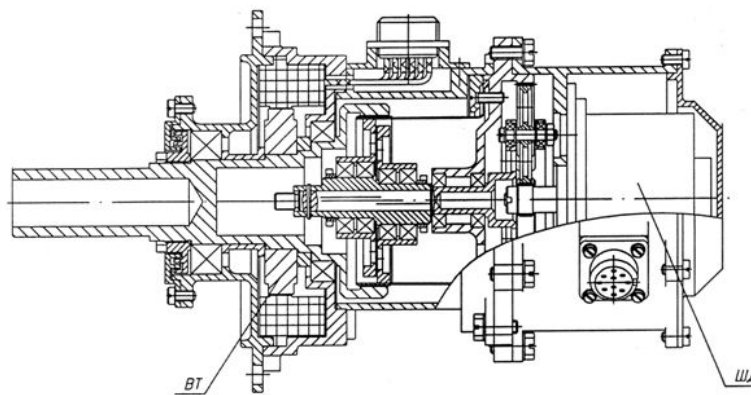


Рис. 5

На многоразовом КА «Буран» использовался дистанционный манипулятор, который, как и рука человека, состоит из плечевой, локтевой и кистевой частей, имеющих соответственно в суставах две, одну и три степени свободы. Это обеспечивает шесть степеней свободы для перемещения грузов в пространстве. Один из его элементов - локтевой сустав с передаточным числом $u = 6003$ состоит из двигателя постоянного тока ЭД (мощностью 70 Вт) с четырьмя планетарными передачами 2К-Н (с колесами z_1, z_2, z_3 с модулем 0,8) и конической передачей (с z_4, z_5 с модулем 2,5). Она связана со звеном 2, которое поворачивается относительно звена 1. Механизм снабжен тормозом Т и предохранительной муфтой М (рис. 6).

Интенсивно развивалось дальнейшее изучение планет. Началось исследование планет планетоходами. В ноябре 1970 г. на Луну был доставлен российский аппарат «Луноход-1», который управлялся с Земли.

21 июля 1969 г. на Луну высадился американский астронавт Нил Армстронг. Космонавты СССР тоже могли попасть на Луну, используя ракету-носитель Н-1. Однако по непонятным причинам работы были прекращены, а готовые изделия уничтожены. Американский луноход LRV был доставлен на Луну в июле 1971 г. Его движение управлялось астронавтом. В приводах луноходов использовались планетарная передача (СССР) и волновая (США). В планетоходах для повышения надежности их работы использовались специальные устройства. Они обеспечивали разблокировку передачи от двигателя к колесу, ведущее колесо при заклинивании двигателя становилось ведомым.

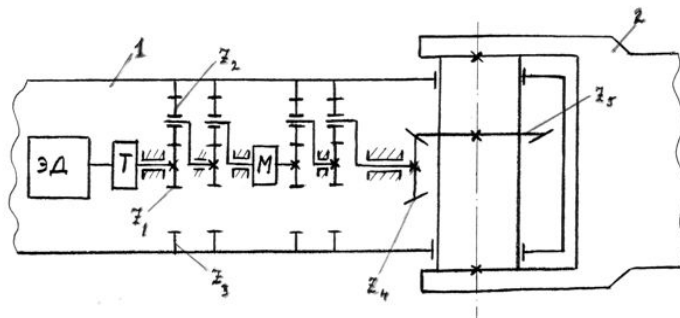


Рис. 6

Позднее были созданы планетоходы для исследования Марса. На Марсе пятый год успешно работают два марсохода Spirit и Opportunity, которые проводят исследование планеты, перемещаясь по поверхности на колесах. Такое движение имеет ограничения на поверхности со сложным рельефом. Имеется и сложность в управлении марсоходом. Управление должно быть автономным, так как сигнал от Земли до Марса идет 22 мин. Это потребовало создания более совершенной конструкции. При движении по поверхности Марса на одном марсоходе прекратилось вращение двух колес из шести, что усложнило выполнение заданной программы исследований.

В настоящее время проводятся исследования по разработке планетохода для Луны и Марса, который существенно отличается от действующих конструкций. Его движение соответствует перемещению скорпиона. Он обладает хорошей проходимостью на поверхности со сложным рельефом (наличие камней, трещин, оврагов, резких склонов и т.д.). Планетоход NASA вместо колес имеет 8 ног и движется со скоростью 1,5 км/ч. Каждая нога состоит из элементов, соединенных тремя подвижными шарнирными узлами (всего их 24). Параметры планетохода: длина 700 мм, ширина 450 мм, высота 600 мм, масса 28 кг. Частота вращения выходного вала шарнира 30 - 60 об/мин.

Такая конструкция обладает отличной проходимостью в сложных условиях, когда на поверхности встречается много препятствий, которые не могут преодолеть изделия с колесами. Планетоход «Скорпион» обладает автономной системой управления, обеспечивающей его перемещение и выполнение других работ. В разработке шагающего планетохода в Германии также участвовали преподаватели и студенты Бременского университета. Одновременно там создаются аналогичные аппараты с другим количеством ног (опор). Намечено в ближайшее десятилетие использовать планетоход «Скорпион» для изучения Марса.

В настоящее время российскими студентами также ведутся работы по разработке механизмов, приводящих в движение шагающий планетоход. Схема такого планетохода имеет 6 или 8 ног.

По аналогии с ногой человека она состоит из бедра a , голени b и тазобедренного v и коленного z суставов (шарниров). Сустав z имеет одну (1), а сустав v - две степени подвижности (2, 3). К корпусу d планетохода нога присоединяется с помощью устройства аварийной разблокировки. Шарниры имеют управляемые электродвигатели и механизмы. Они приводят в движение элементы ног. Шарнир v обеспечивает поворот относительно вертикальной оси $z-z$ на угол φ , а шарниры v, z относительно горизонтальных осей $y-y$ (рис. 7). Ноги последовательно перемеща-

ются. Несколько ног закрепляются на грунте, а остальные ноги поднимаются вверх, не касаясь грунта, движутся в положение, необходимое для выполнения следующего движения и, выполнив его в завершении цикла, они закрепляются на грунте. При этом корпус планетохода перемещается. Далее цикл повторяется. В конструкции привода использовались электродвигатели постоянного тока и волновая передача. Привод шарнира унифицирован для всех элементов ног.

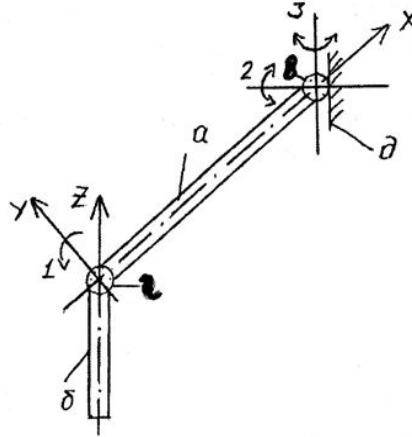


Рис. 7

Все детали привода выполнены из материалов с высокой удельной прочностью (стали, титановых, алюминиевых и магниевых сплавов), что обеспечивает высокую надежность конструкции при минимальной массе. Контактные поверхности стального гибкого колеса подвергаются поверхностному упрочнению. Перспективно использование композиционных материалов и материалов, созданных с использованием нанотехнологий.

Для дальнейшего исследования труднодоступных участков поверхности разрабатываются планетоходы типа «Змея». Он может проходить через узкие щели, подниматься по поверхностям с большими углами наклона, перемещаться на песчаных грунтах. Планетоход, разработанный в Китае, состоит из нескольких блоков (8 и более). В каждом звене имеются два двигателя, обеспечивающие повороты относительно двух осей (по тангажу и рысканью). Длина робота 1,2 м, диаметр 6 см, вес 2 кг. Он развивает скорость 20 м/мин. Обычно приборы, управляющие движением, располагаются в первом звене. Иногда включают дополнительные элементы управления в других звеньях.

В СССР в сентябре 1970 г. на Землю был доставлен грунт с Луны. В России по Федеральной космической программе «Фобос - Грунт» планируется доставка грунта с Марса и Фобоса.

В России, США, Китае, Японии и в других странах продолжают работы по совершенствованию механизмов КА для освоения космоса, изучения и построения баз на планетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Детали механизмов и узлов летательных аппаратов / Е.А. Самойлов, С.Л. Крыськов, Н.В. Морозов и др. - М.: МАИ, 2005.
2. **Герашенко А.Н., Самсонович С.Л.** Пневматические, гидравлические и электрические приводы летательных аппаратов на основе волновых исполнительных механизмов. - М.: Машиностроение, 2006.
3. Детали механизмов авиационной и космической техники / Ю.М. Климов, Е.А.Самойлов, Н.Л. Зезин и др. - М.: МАИ, 1996.
4. **Сыромятников В.С.** Стыковочные устройства космических аппаратов. - М.: Машиностроение, 1984.

THE PERSPECTIVES OF SPACECRAFTS CONSTRUCTION MACHINERIES DEVELOPMENT

Mashoshin O.F., Samoilov E.A.

The article deals with the modern devices, working in space exploration of other planets. Examples of existing mechanisms are given, improving ways for these devices are outlined.

Key words: planet exploration, space devices.

Сведения об авторах

Машошин Олег Федорович, 1966 г.р., окончил МИИГА (1989), доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технической механики МГТУ ГА, автор более 60 научных работ, область научных интересов - техническая эксплуатация и диагностика авиационной и космической техники, прочность и живучесть авиационных конструкций.

Самойлов Евгений Алексеевич, 1928 г.р., окончил МАИ (1958), доктор технических наук, профессор кафедры деталей машин МАИ (ГТУ), автор более 100 научных работ, область научных интересов - детали машин летательных аппаратов.

УДК 519.7

МОДЕЛЬ МОДЕРНИЗАЦИИ ОБОРУДОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ СЕТЕЙ

А.В. КОРСУН

Статья представлена доктором технических наук, профессором Нечаевым Е.Е.

В статье рассматривается математическая модель обоснования вариантов модернизация оборудования информационных сетей в условиях ограниченной информации об ожидаемых характеристиках результатов модернизации.

Ключевые слова: информационная сеть, модернизация, альтернатива, неопределенность, нечеткость.

Развитием технической системы будем называть переход системы из одного качественного состояния в другое в рамках жизненного цикла. Целенаправленные действия людей, связанные с вмешательством в данный процесс, могут интерпретироваться как управление развитием. Проблема обоснования решений по управлению развитием в настоящее время особенно остро встает по отношению к высоко-технологичным и быстро развивающимся техническим системам, к которым, в частности, относятся информационные сети (ИС). С одной стороны, наблюдается постоянное и достаточно динамичное изменение технических требований к перспективным ИС вследствие появления новых разработок и технологий. С другой, для оборудования ИС характерен достаточно высокий уровень надежности элементной базы и, соответственно, запас остаточного ресурса.

В этих условиях актуальной задачей является обоснование возможностей модернизации оборудования ИС с максимально возможным использованием запаса его остаточного ресурса.

Одной из центральных проблем при этом является сравнительное оценивание различных вариантов модернизации оборудования. Существует ряд сложных моментов, затрудняющих решение этой проблемы. Так, ресурсы, выделяемые на модернизацию, как правило, ограничены и не позволяют детально проработать и изучить все возможные варианты. Сам процесс обоснования решения на модернизацию осуществляется в условиях ограниченного объема информации об ожидаемых характеристиках результата модернизации, а опыт лица, принимающего решение, может выражаться в виде вербальных описаний. Кроме того, нужно учесть, что современные образцы оборудования являются достаточно сложными и для их описания необходимо использовать векторные показатели с большим числом компонент.

Многомерность сравниваемых альтернатив и существенная степень неопределённости оценивания показателей приводят к необходимости отнесения задачи сравнения вариантов модернизации оборудования ИС к классу задач многокритериального выбора в нечёткой среде.

Общая постановка задачи в этом случае выглядит следующим образом.

Пусть:

$Z = \{z_l\}$, ($l = 1, L$) - множество вариантов модернизации оборудования ИС;

$X = \{x_i\}$, ($i = 1, n$) - множество частных показателей оценивания вариантов модернизации оборудования ИС;

$\underline{A} = \{\underline{\alpha}_{li}\}$ - множество значений частных показателей X ;

$\underline{G} = \{\underline{g}_i\}$ - множество значений коэффициентов важности частных показателей X ;

$\underline{\alpha}_{li} = \{(f^l(x_i), \mu_{\underline{\alpha}_{li}}[(f^l(x_i))])\}$ - результат нечёткого оценивания i -го частного показателя

l -го варианта;

$$F^l(x_i) = x_i \rightarrow [0,1];$$

$\mu_{\alpha_{li}}[(f^l(x_i))]$ - функция принадлежности нечёткого множества α_{li} ;

$g_i = \{(g_i, \mu_{g_i}(g_i))\}$ - результат нечёткого оценивания коэффициента важности i -го частного

показателя из множества X ;

$\mu_{g_i}(g_i)$ - функция принадлежности нечёткого множества g_i .

Тогда, решающее правило для выбора лучшего варианта модернизации оборудования ИС выражается в виде

$$z^* = \arg \max_{l \in \overline{1, L}} E_l, \quad (1)$$

где $E_l = \text{est}_l$ - значение обобщённого показателя для l -го варианта модернизации оборудования ИС;

$$E_l = \text{est}_l(\underline{A}, \underline{G}). \quad (2)$$

Вычисление обобщённого показателя E_l , как следует из (2), связано с проведением определённых преобразований над нечёткими векторами \underline{A} и \underline{G} . Естественно, что и результат такого преобразования будет представлен в нечёткой форме.

Предлагается применить для вычисления (2) нечёткий интеграл [1]. При этом

$$E_l = \text{est}_l(\underline{A}, \underline{G}) = \max_{\alpha} \min_{i \in \underline{A}} \{\alpha_{li}, g_\lambda(X_\alpha)\}, \quad (3)$$

где $g_\lambda(X_\alpha)$ - есть нечёткое значение обобщённого коэффициента важности показателей из множества X , входящих в множество X_α ;

$$g_\lambda(X_\alpha) = \{(g_\lambda(X_\alpha), \mu_{g_\lambda}(g_\lambda(X_\alpha)))\}, \quad (4)$$

$g_\lambda(X_\alpha)$ - обобщённый коэффициент важности группы частных показателей, входящих в множество α -уровня, т.е.

$$g_\lambda(X_\alpha) = g_\lambda\{x_i \mid f^l(x_i) \geq \alpha\}. \quad (5)$$

Вычисление (3) требует предварительного задания способа вычисления (5) и правил сравнения нечётких множеств.

Вычисление (5) требует введения понятия нечёткой меры. Для данного случая наиболее удобной мерой является так называемая λ -мера (мера Сугено) [2]. Для λ -меры справедливо следующее выражение

$$g_\lambda\left(\bigcup_{i=1}^K x_i\right) = \frac{1}{\lambda} \left[\prod_{i=1}^K (1 + \lambda g_\lambda(x_i)) - 1 \right]. \quad (6)$$

То есть, если известны коэффициенты важности отдельных показателей x_i , $i = \overline{1, K}$, то важность группы показателей из K элементов может быть вычислена по формуле (6). Кроме того, для упрощения вычислений исходные нечёткие множества α_{li} и g_i представляются в триплицитальной форме. При этом любое такое нечёткое множество может быть описано кортежем из четырёх чисел. Например, нечёткое множество \underline{M} записывается в виде

$M = (\underline{m}, \bar{m}, \alpha, \beta)$, где $[\underline{m}, \bar{m}]$ - ядро нечёткого интервала; $[\underline{m} - \alpha, \bar{m} + \beta]$ - носитель нечёткого интервала; \underline{m} - нижнее модальное значение; \bar{m} - верхнее модальное значение; α - левый коэффициент нечёткости; β - правый коэффициент нечёткости.

Тогда исходные данные для сравнения вариантов модернизации оборудования ИС можно записать в виде

$$\underline{\alpha}_{li} = (\underline{\alpha}_{li}, \bar{\alpha}_{li}, \alpha_{li}, \beta_{li}), \tag{7}$$

$$\underline{g}_i = (\underline{g}_i, \bar{g}_i, \alpha_i, \beta_i). \tag{8}$$

При задании исходных данных в форме (7) и (8) значение λ -меры также будет нечётким

$$\underline{\lambda} = (\underline{\lambda}, \bar{\lambda}, \alpha_\lambda, \beta_\lambda). \tag{9}$$

При этом, используя условие

$$\frac{1}{\lambda} \left[\prod_{i=1}^K (1 + \lambda g_\lambda(x_i)) - 1 \right] = 1, \tag{10}$$

производится вычисление λ_j ($j = 1, 2, \dots, 4$) по следующим g_j :

$$g_1 = \underline{g}_i - \alpha_i;$$

$$g_2 = \underline{g}_i;$$

$$g_3 = \bar{g}_i;$$

$$g_4 = \bar{g}_i + \beta_i.$$

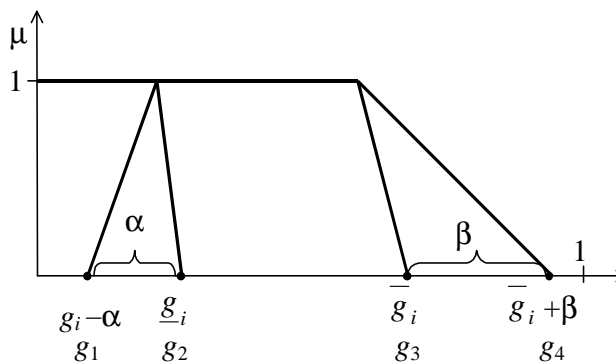


Рис. 1

По результатам вычислений строится нечёткая λ -мера (9) следующим образом:

$$\underline{\lambda} = \lambda_3; \bar{\lambda} = \lambda_2; \alpha_\lambda = \lambda_3 - \lambda_4; \beta_\lambda = \lambda_1 - \lambda_2.$$

При условии задания λ -меры в виде (9) вычисление $g_\lambda(X_\alpha)$ по формуле (4) не представляет труда.

Для сравнения нечётких чисел целесообразно использовать метод сравнения нечётких интервалов [1], который предполагает вычисление и последующее сравнение двух векторов $A_{\langle 4 \rangle}$ и $B_{\langle 4 \rangle}$. В случае, если $A_{\langle 4 \rangle} \geq B_{\langle 4 \rangle}$ делается вывод о том, что нечёткое множество $\underline{A} \geq \underline{B}$. Векторы формируются следующим образом:

$$A_{\langle 4 \rangle} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\},$$

$$B_{\langle 4 \rangle} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\},$$

где

$$a_1 = POS(\bar{a} \geq \underline{b}) = \max(0, \min(1, 1 + (\bar{a} - \underline{b}) / (\beta_a + \alpha_b)));$$

$$a_2 = NEC(\underline{a} \geq \bar{b}) = \max(0, \min(1, (\underline{a} - \bar{b} + \beta_a) / (\alpha_a + \beta_a)));$$

$$a_3 = POS(\bar{a} > \bar{b}) = \max(0, \min(1, (\bar{a} - \bar{b} + \beta_a) / (\beta_a + \beta_b)));$$

$$a_4 = NEC(\underline{a} > \underline{b}) = \max(0, \min(1, (\underline{a} - \underline{b}) / (\alpha_a + \beta_b))).$$

Элементы вектора $B_{\langle 4 \rangle}$ вычисляются аналогично по формулам

$$b_1 = POS(\bar{b} \geq \underline{a}); b_2 = NEC(\underline{b} > \underline{a}); b_3 = POS(\bar{b} > \bar{a}); b_4 = NEC(\underline{b} > \bar{a}).$$

Сравнение векторов $A_{\langle 4 \rangle}$ и $B_{\langle 4 \rangle}$ можно осуществить лексикографическим методом [2].

Используя описанные правила сравнения нечётких множеств, по формуле (1) определяется наилучший вариант модернизации оборудования ИС.

Целесообразность практического применения описанного выше метода сравнения вариантов определяется прежде всего сложностью модернизируемых объектов и неопределённым характером информации о значениях частных показателей.

Следует заметить, что частные показатели, как правило, далеко не равнозначны не только с точки зрения важности, но и в силу своего содержательного смысла. В этом случае необходимо отказаться от механического свёртывания их в обобщённый показатель, а учитывать иерархические связи между группами показателей, осуществляя свёртку последовательно по группам и слоям. Для этой цели можно использовать методику структурного формирования системы показателей с помощью критериальных деревьев или деревьев показателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нечёткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / под ред. Д.А. Поспелова. - М.: Радио и связь, 1986.
2. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике. - М.: Радио и связь, 1990.

A MODEL FOR MODERNIZATION OF INFORMATION NETWORK EQUIPMENT

Korsun A.V.

A mathematical model for choosing modernization variants of the information network equipment in the case of incomplete information on the modernization's required characteristics is studied.

Key words: information network, modernization, mathematical model.

Сведения об авторе

Корсун Андрей Владимирович, 1985 г.р., окончил МИФИ (2008), аспирант ФГУП "Российский научно-технический центр информации по стандартизации, метрологии и оценке соответствия", автор 2 научных работ, область научных интересов – анализ и моделирование прикладных информационных систем.

ББК 05
Н 34
Св. план 2011 г.

Научный Вестник МГТУ ГА
№ 165

ISBN 978-5-86311-780-5

Свидетельство о регистрации в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций № 77-17906 от 31 марта 2004 г.

Редакторы Т.М. Приорова, И.В. Вилкова
Компьютерная верстка Т.Н. Котиковой

Подписано в печать 04.03.11 г.

Печать офсетная
17,25 усл. печ. л.

Формат 60x90/8
Заказ № 1214/

15,21 уч.-изд. л.
Тираж 100 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д. 6а

Подписной индекс в каталоге Роспечати 84254
© Московский государственный
технический университет ГА, 2011