* **Первообразная и неопределённый интеграл**

Функция F(x) называется первообразной для функции f(x) на (a,b), если F/(x)=f(x) на (a,b).

Множество всех первообразных для функции f(x) называется неопределенным интегралом и обозначается .

***Основные свойства неопределенного интеграла***

1. Если и U=U(x), где U(x)- непрерывно дифференцируемая функция, то
2. Если x=x(t) непрерывно дифференцируемая функция, то .

**Таблица 1**

**Таблица простейших часто встречающихся интегралов**

1. 2.

3. 4.

5. 6.

7. 8.

9. 10.

11. 12.

13. 14.

15. 16.

17. 18.

При применении свойств 6 и 7 полезно использовать табл. 2.

**Таблица 2**

**Таблица основных дифференциалов**

1. *где С-константа*.
2. 9.
3. 10.
4. 11.
5. 12.
6. 13.
7. 14.
8. 15.

Рассмотрим примеры нахождения неопределенного интеграла методом «подведения под знак дифференциала», т.е. будем использовать табл. 2.

***Пример 1***

*.*

***Пример 2***

.

***Пример 3***

.

***Пример 4***

.

* **Интегрирование путем замены переменной**

Один из наиболее распространенных методов, применяемых при вычислении неопределенных интегралов, метод замены переменных или подстановки.

Если известно, что , то

где f(t), u(x), u/ (x) – непрерывны.

Способ подстановки состоит в том, что сообразно виду подынтегральной функции составляют вспомогательную функцию, подстановка которой в исходный интеграл приводит его к виду более удобному для интегрирования (часто табличному).

Рассмотрим примеры, уже решенные ранее:

***Пример 1***

.

***Пример 2***

.

***Пример 3***

.

***Пример 4***

.

Используем замену в более сложных примерах.

***Пример 5***

В этом случае используется форма подстановки, а именно , получим

и

***Пример 6***

Использование универсальной тригонометрической подстановки

*.*

*Метод замены переменной является одним из общих методов интегрирования. Умения использовать такие подстановки, которые упрощают подынтегральные выражения, вырабатываются практикой. Общих указаний по выбору выгодной подстановки дать нельзя.*

* ***Интегрирование по частям***

Пусть непрерывно дифференцируемые функции, тогда или

***Пример 7***

*.*

***Пример 8***

.

Рассмотрим получившийся интеграл

***Ответ:***

***Замечания***

Метод интегрирования по частям применяется при интегрировании следующих видов функций.

1. При интегрировании функций вида интегрирование по частям применяется 2 раза, что приводит к решению уравнения для получения конечного ответа.

***Пример 9***

.

Пусть .

Тогда последнее равенство может быть переписано в виде

.

Получим уравнение

Отсюда

.

1. Метод интегрирования по частям может быть использован при интегрировании функций , тогда , .

***Пример 10***

*.*

Рассмотрим получившийся интеграл.

.

*:* уравнение относительно J.

*.*

**Ответ:**

.

Пример 10 может быть решен методом замены.

Пусть , тогда .

.

.

При вычислении одного и того же интеграла разными методами могут получаться отличные друг от друга ответы. Здесь имеем две функции и . Однако

Предлагается проверить самостоятельно.

1. Необходимо иметь в виду, что применение метода интегрирования по частям приводит к частичному интегрированию, т.к. правая часть формулы (1) содержит интеграл. Но при правильном применении метода этот интеграл получается табличным или просто приводящимся к табличному.

Если в результате применения метода интегрирования по частям в правой части получается интеграл сложнее исходного, необходимо заново применить этот метод, разбив подынтегральное выражение на другие два множителя U и dV, из которых первый дифференцируется, а второй интегрируется при переходе к интегралу в правой части.

Умения правильного использования этого метода приобретаются только в результате упражнений.

* ***Интегрирование дробно-рациональных выражений***

1. .
2. , причем, как предполагалось выше, .

Обозначим: .

Сделаем замену переменных

*, ,,*

*.*

Имеем:

.

1. Пусть правильная дробь, т.е. m < n. Рассмотрим упрощенный вариант разложения многочлена на множители (полные способы разложения здесь не рассматриваются)

, т.е. n=5;

Тогда

.

Найдя коэффициенты А,В,С и D, мы придем к вычислению трех уже известных интегралов

.

***Пример 11***

.

-> m < n дробь правильная.

–> разложили как сумму кубов

.

*.*

Т.к имеет действительный корень х=-1 (х+1=0), то применим метод частных значений: подставим х=-1 в левую и правую часть разложения

*.*

*−>A=2*.

Других удобных значений X у нас нет. Применим метод сравнения коэффициентов при одинаковых степенях X в левой и правой частях.

.

.

Имеем

.

* ***Необходимые сведения и формулы***

1. **Формулы сокращенного умножения**

.

.

*.*

*.*

1. **Выделение полного квадрата**

*.*

*,* далее учесть, что , .

1. **Разложение квадратного трехчлена на множители**

где - корни квадратного трехчлена

*,* , если коэффициент b-четный, то удобнее использовать следующую формулу:

.

1. **Тригонометрические формулы**

* **Функции одного угла**

; ; , ; ; .

* **Функции кратных углов**

*; ; .*

* **Функции половинного угла**

; .

* **Произведение функций**

*;*

*;*

*.*

* **Универсальная тригонометрическая подстановка**

; .

1. **Гиперболические функции**

; ; .

**Основные формулы гиперболической тригонометрии**

; ; .

1. **Таблица производных элементарных функций**

|  |  |
| --- | --- |
| **Функция** | **Производная** |
| С (постоянная) | 0 |
| x | 1 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

1. **Правила дифференцирования**

*; ; ; .*

1. **Производная сложной функции (функции от функции - цепное правило)**

; ; ;

В случае длинной цепочки поступают аналогично.

1. **Свойства дифференциала**

, , , где С-константа.

1. **Общие правила интегрирования**

**Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:**

.

**Интеграл суммы (разности) равен сумме (разности) интегралов от слагаемых:**

*,* где *u,v,w* – функции от x.

**Правило подстановки:**

если x=z(t), то .

**Интегрирование по частям**

, где *u,v* – функции от x.

*В дальнейшем во всех формулах постоянная интегрирования опущена, первообразные, содержащие , следует понимать как , знак абсолютной величины опущен для простоты.*

1. **Таблица основных интегралов**

|  |  |
| --- | --- |
| ***Степенные функции*** | ***Показательные функции*** |
| *;*  *.* | . |
| . | . |
| ***Тригонометрические функции*** | ***Гиперболические функции*** |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| ***Дробно-рациональные функции*** | ***Иррациональные функции*** |
| *.* | . |
| . | . |
| *.* | *.* |

1. **Интегрирование иррациональных функций**

Эти интегралы вычисляются с помощью следующих подстановок:

; или   
;

; ;

*;*

(n-наименьшее общее кратное показателей всех радикалов, под которым X входит в подынтегральную функцию)

, Интегралы этого вида после выделения полного квадрата под корнем линейными подстановками сводятся к следующим:

1. если а > 0, то
2. если а < 0, то
3. **Интегрирование биномиальных дифференциалов**

,

может быть выражен в элементарных функциях только в следующих трех случаях:

1. *p*- целое. Следует произвести все указанные действия в подынтегральной функции.
2. - целое. Замена , где *r-* знаменатель дроби *p*
3. - целое. Замена , где *r-* знаменатель дроби *p*
4. **Интегрирование тригонометрических функций**

.

Универсальная тригонометрическая подстановка

; ; ; .

**Частные подстановки**

* Если R (sin x, cos x)нечетная относительно cos x, то применима подстановка sin x=t.
* Если R (sin x, cos x) четная относительно cos x и sin x, то tg x=t
* .

1. Если показатель одной из тригонометрических функций – нечетное положительное целое число, то, принимая другую функцию за t, сведем интеграл к табличным.
2. Если m+n есть четное отрицательное целое число, подстановка tg x=t сводит интеграл к табличным.
3. Если m и n – четные неотрицательные числа, то применение формул понижения степени

позволяет упростить интеграл.

1. **Дополнение к таблице неопределенных интегралов**
2. .
3. .
4. .
5. .
6. .
7. .
8. .
9. .
10. .
11. .
12. .
13. .
14. .
15. .
16. .
17. .
18. .
19. .
20. .
21. .
22. .
23. .
24. .
25. .
26. .
27. .
28. .
29. .
30. .
31. .
32. .
33. .
34. .
35. .
36. .
37. .
38. .
39. .
40. .
41. .
42. .
43. .
44. .
45. .
46. .
47. .
48. .
49. .
50. .
51. .
52. .
53. .
54. .
55. .
56. .
57. .
58. .
59. .
60. .
61. .
62. .
63. .
64. .
65. .
66. .
67. .
68. .
69. .
70. .
71. .
72. .
73. .
74. .
75. .
76. .
77. .
78. .
79. .
80. .

*Во всех формулах постоянная интегрирования опущена, первообразные, содержащие , следует понимать как , знак абсолютной величины опущен для простоты.*