**Лабораторная работа 1**

**Исследование одномерных вещественных автономных систем**

**с дискретным временем**

Пусть – автономная одномерная вещественная динамическая система с дискретным временем, где

, .

Ниже будут рассмотрены случаи, когда зависит от одного, двух или четырех параметров:

*: ,* или  *.*

1. Для заданных значений параметров и начального состояния :
2. построить график движения (с заданным числом шагов ), по графику охарактеризовать тип движения;
3. вывести числовые значения последних точек.
4. Для заданной системы построить диаграмму Ламерея. Охарактеризовать по ней движение системы и найти графически неподвижные точки.
5. Для каждой системы найти параметрическое выражение для ее неподвижных точек (т.е., получить явные выражения для них).
6. Найти явное условие характеристики неподвижной точки (устойчивости, неустойчивости, безразличности).
7. Найти циклы и определить их характеристики.
8. Найти явное параметрическое выражение для второй итерации функции и построить её график.
9. Используя диаграмму Ламерея, найти все циклы длины 2, при этом нужно уметь отделять неподвижные точки.
10. Если это возможно, найти явные выражения для корней уравнения , где .

Неподвижные точки отделяются от цикла длины 2 путем деления на (почему?).

1. Для полученных выражений циклических точек найти условия, характеризующие цикл, и проиллюстрировать графически полученные результаты.
2. Подставляя заданные числовые значения параметров системы, получим числовые значения для циклических точек. (Запустив систему в одной из циклических точек нужно убедиться, что она проходит все остальные).
3. Исследовать обратимость каждой системы.
4. Провести исследование циклов более высокого порядка.

**Системы**

1. Линейная система: .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Параметры | | Начальное состояние | Число шагов | значения последних точек |
|  |  |  |  |  |
| 0 | -2 | 0; 1 | 100 | 10 |
| 1 | -0,5 | 0;1; -1 | 100 | 10 |
| 1/2 | 5 | -2 | 100 | 10 |
| -1/3 | -2 | 1 | 100 | 10 |
| 3 | -2 | 0 | 100 | 10 |
| -1 | 0,5 | 0,25 | 100 | 10 |

1. Дробно-линейная система:

.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Параметры | | | | Начальное состояние | Число шагов |
|  |  |  |  |  |  |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 0; 1; -1, 2; 2; -2 | 10 |
| 1 | 0,5 | 0,5 | -1 | 0; 1; -1, 2; 2; -2 | 20 |
| 4 | 1 | 3 | 4 | 0; 1; -1, 2; 2; -2 | 100 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 0; 1; -1, 2; 1; -2 | 30 |
| -1 | 1 | 2 | 2 | 0; 1; -1, 2; 3; -3 | 200 |
| 0 | 2 | -4 | 0 | 0; 1; -1, 2; 3; -3 | 50 |

1. Логистическая система:

.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Параметр | Начальное состояние | Число шагов |
|  |  |  |
| 0,5 | 0,5 | 100 |
| 1,5 | 0,5 | 100 |
| 2 | 0,2 | 50 |
| 2,8 | 0,2 | 50 |
| 3,2 | 0,8 | 200 |
| 4 | 0,8 | 200 |

1. Показательная система: .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Параметр | Начальное состояние | Число шагов |
|  |  |  |
| 1 | 0, 1; -1; 2; -2; 0,5 | 10 |
| 2 | 0, 1; -1; 2; -2; 0,5 | 20 |
| 1,4 | 0, 1; -1; 2; -2; 0,5 | 100 |
|  | 0, 1; -1; 2; -2; 0,5 | 300 |
| 0,01 | 0, 1; -1; 2; -2; 0,5 | 50 |

1. .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Параметры | | Начальное состояние | Число шагов |
|  |  |  |  |
| 4 | -1 | 0; -3; 2; 1; -2 | 100 |
| 2 | 3 | 0; -3; 2; 1; -2 | 50 |
| 0,5 | 2 | 0; -3; 2; 1; -2 | 70 |
| -4 | 1 | 0; -3; 2; 1; -2 | 50 |
| 1 | 0 | 0; -3; 2; 1; -2 | 100 |
| -1 | 0 | 0; -3; 2; 1; -2 | 100 |

1. , где - дробная часть числа .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Параметр | Начальное состояние | Число шагов |
|  |  |  |
| 2 | 2/5; 5/7 | 120 |
| 3 | 2/5; 5/7 | 10; 20; 30 |
| 2 | 1/4; 2/4; 3/4 | 10; 20; 30 |
| 3 | 1/4; 2/4; 3/4 | 10; 20; 30 |

**Образец выполнения лабораторной работы для линейных и логистических систем**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| f(x)= | | ax+b | |
| а = | | -0,900 | |
| b = | | 3,000 | |
| x0 = | | 0,500 | |
| N = | | 30, M=15 | |
|  | |  | |
|  | n | | f(xn) |
|  | 15 | | 2 |
|  | 16 | | 1 |
|  | 17 | | 2 |
|  | 18 | | 1 |
|  | 19 | | 2 |
|  | 20 | | 1 |
|  | 21 | | 2 |
|  | 22 | | 1 |
|  | 23 | | 2 |
|  | 24 | | 1 |
|  | 25 | | 2 |
|  | 26 | | 2 |
|  | 27 | | 2 |
|  | 28 | | 2 |
|  | 29 | | 2 |
|  | 30 | | 2 |

Неподвижная точка р = 1,578,

устойчивая (аттрактор).

Циклов нет.

График движения

Вариация графика движения

(Здесь и ниже кнопки позволяют варьировать значения параметров)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | f(x)= | ax+b | |  |
| |  | | --- | |  | | |  | а = | | 0,579 |
| 1000 | |  | b = | | 0,824 |
| 1000 | |  | x0 = | | 1,958 |
|  |  | | | N = 37  M =15 | |
|  | n | | | f(xn) | |
|  | 22 | | | 1,957 | |
|  | 23 | | | 1,957 | |
|  | 24 | | | 1,957 | |
|  | 25 | | | 1,957 | |
|  | 26 | | | 1,957 | |
|  | 27 | | | 1,957 | |
|  | 28 | | | 1,957 | |
|  | 29 | | | 1,957 | |
|  | 30 | | | 1,957 | |
|  | 31 | | | 1,957 | |
|  | 32 | | | 1,957 | |
|  | 33 | | | 1,957 | |
|  | 34 | | | 1,957 | |
|  | 35 | | | 1,957 | |
|  | 36 | | | 1,957 | |
|  | 37 | | | 1,957 | |

Неподвижная точка р = 1,9572,

устойчивая (аттрактор),

Циклов нет.

Лестница Ламерея

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| f(x)= | | ax+b | |
| а = | -0,80 | |
| b = | 3,00 | |
| c = | 0,00 | |
| x0 = | 0,50 | |
| xmin = | 0,00 | |
| xmax = | 3,00 | |
| N = | 20 | |
| n | f(xn ) | |
| 5 | 2,59739 | |
| 6 | 2,39502 | |
| 7 | 2,59616 | |
| 8 | 2,39644 | |
| 9 | 2,59498 | |
| 10 | 2,39780 | |
| 11 | 2,59384 | |
| 12 | 2,39911 | |
| 13 | 2,59274 | |
| 14 | 2,40037 | |
| 15 | 2,59169 | |
| 16 | 2,40159 | |
| 17 | 2,59066 | |
| 18 | 2,40276 | |
| 19 | 2,58967 | |
| 20 | 2,40389 | |

Вариация лестницы Ламерея

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | |  | | а =-1,000 |
|  | |  | |  |  | b =2,916 |
|  | |  | |  |  | x0 =-0,077 |
|  | |  | |  |  | xmin =-3,870 |
| |  | | --- | |  | |  | |  | |  | xmax =8,440 |
|  |  | |  | |  | N =72 |

|  |  |
| --- | --- |
| **n**  n | f(xn) |
| 57 | 2,30979 |
| 58 | 2,30979 |
| 59 | 2,30979 |
| 60 | 2,30979 |
| 61 | 2,30979 |
| 62 | 2,30979 |
| 63 | 2,30979 |
| 64 | 2,30979 |
| 65 | 2,30979 |
| 66 | 2,30979 |
| 67 | 2,30979 |
| 68 | 2,30979 |
| 69 | 2,30979 |
| 70 | 2,30979 |
| 71 | 2,30979 |
| 72 | 2,30979 |

Геометрическое нахождение 2-циклов для логистической системы

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
| а = | 3,800 |
| x0 = | 0,010 |
| xmin = | 0,000 |
| xmax = | 1,000 |
| N = | 30,000 |
|  |  |
| n | f(xn) |
| 15 | 0,64794 |
| 16 | 0,63872 |
| 17 | 0,64612 |
| 18 | 0,64022 |
| 19 | 0,64495 |
| 20 | 0,64117 |
| 21 | 0,64420 |
| 22 | 0,64178 |
| 23 | 0,64372 |
| 24 | 0,64217 |
| 25 | 0,64341 |
| 26 | 0,64242 |
| 27 | 0,64321 |
| 28 | 0,64258 |
| 29 | 0,64308 |
| 30 | 0,64268 |

Как видно из рисунка, график функции пересекает график функции в двух точках, которые являются неподвижными точками. С другой стороны, график функции пересекает график функции в четырех точках, две из которых суть неподвижные точки, а остальные две образуют 2-цикл.

**Контрольные вопросы**

Ниже термин «система» означает автономную динамическую систему с дискретным временем.

Отвечая на большинство вопросов, необходимо устный ответ проиллюстрировать с помощью написанной программы.

1. Дайте определение автономной динамической системы с дискретным временем.
2. Что такое уравнение движения и движение системы?
3. Сколько существует движений, удовлетворяющих уравнению движения системы с заданным начальным состоянием?
4. Чем отличаются следующие понятия: движение, траектория, мировая линия?
5. Определяет ли траектория движение системы полностью?
6. Дайте определение неподвижной точки системы.
7. Опишите движение, траекторию и мировую линию системы, если начальное состояние есть неподвижная точка.
8. Дайте определение периодического и квазипериодического движения. Опишите траекторию этих движений.
9. Что такое невозвратное движение?
10. Дайте классификацию движений автономных систем.
11. Дайте определение обратимых систем.
12. Дайте классификацию движений обратимых систем.
13. Что такое фазовый поток системы? Что такое функция перехода системы? Чем отличаются эти два понятия?
14. Дайте определение фазового портрета системы.
15. Что такое бифуркация? Что такое Хаус?
16. Дайте определение устойчивой и неустойчивой неподвижной точки. Укажите способ нахождения неподвижных точек.
17. Что означает термин безразличная неподвижная точка?
18. Пусть функция непрерывно дифференцируема в окрестности неподвижной *p*. Приведите достаточное условие того, что *p* является устойчивой или неустойчивой неподвижной точкой.
19. Пусть функция трижды непрерывно дифференцируема в окрестности нейтральной неподвижной *p*. Приведите достаточное условие того, что *p* является устойчивой или неустойчивой неподвижной точкой.
20. Дайте определение *p*-цикла.
21. Дайте определение устойчивого и неустойчивого *p*-цикла. Укажите способ нахождения точек *p*-цикла. Укажите способ отделения точек *p*-цикла от точек циклов меньшего порядка.
22. Пусть функция непрерывно дифференцируема в окрестности, содержащей точки *p*-цикла. Приведите достаточное условие того, что *p*-циклявляется устойчивым или неустойчивым.
23. Приведите пример, который показывает, что нейтральная неподвижная точка может оказаться устойчивой или неустойчивой.
24. Приведите достаточные условия устойчивости или неустойчивости нейтральных неподвижных точек квадратичной динамической системы .
25. Сформулируйте теорему Шарковского.
26. Если известно, что одномерная динамическая система имеет 3-цикл, то можно что-либо сказать о существовании других циклов?
27. Может ли одномерная линейная система иметь *p*-циклы при *p* > 1?
28. Может ли дробно-линейная система иметь *p*-циклы при *p* > 1?
29. Может ли система иметь *p*-циклы при *p* > 1?
30. Что можете сказать о характере неподвижной точке системы ?
31. Обратимы ли линейные системы?
32. Обратимы ли системы ?
33. Если известно, что одномерная динамическая система имеет 16-цикл, то можно ли что-либо сказать о существовании других циклов?
34. Какие неподвижные точки имеет логистическая функция? Приведите для них явное выражение.
35. Опишите характер неподвижных точек логистической функции в зависимости от изменения параметра *a*.
36. Опишите первую серию бифуркации для логистической системы. При какой точке заканчивается эта серия?
37. Сформулируйте теорему Фейгенбаума.
38. Опишите поведение логистической системы, когда параметр *a* больше точки накопления.
39. Пусть .
40. Найти неподвижные точи и исследовать их,
41. Найти 2- и 3-циклы и исследовать их.

**Лабораторная работа 2**

**Исследование одномерных модулярных систем**

**с дискретным временем**

Пусть – конечная одномерная модулярная динамическая система с дискретным временем, где

, .

Ниже будут рассмотрены случаи, когда зависит от трех параметров

*, .*

1. Для заданных значений параметров и начального состояния : построить график движения, по графику охарактеризовать тип движения;
2. Для каждой системы найти все неподвижные точки.
3. Найти *p* -циклы, где . Для каждого определить количество -циклов. При этом нужно уметь отделять точки цикла данной длины от точек циклов с меньшей длиной.
4. Найти *p*-циклы максимальной длины.
5. Для каждого найти явное параметрическое выражение для *p*-й итерации функции и построить ее график.
6. Построить граф системы.
7. Подставляя заданные значения параметров системы, получим значения для циклических точек. (Запустив систему в одной из циклических точек нужно убедиться, что она проходит все остальные).
8. Исследовать обратимость каждой системы.

Удобно свести исследование к построению нижеприведенных двух таблиц:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1-циклы |  | 2-циклы |  | 3-циклы |  |
| 0 |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Здесь , индекс указывает на номер итерации, а индекс - на точку из , в котором вычисляется значение . При этом

Заметим, что при каждом фиксированном сумма

равна количеству *p*-циклов (почему?).

1. Необходимо вывести для каждого количество *p*-циклов и общее количество их элементов как показано в таблице

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Циклическая структура  отображения | | | | | | | | |
| длина цикла | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |  |  |  |
| число циклов |  |  |  |  |  |  |  |  |
| число элементов |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Системы**

1. Аффинная система: .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 17 | 5 | 3 | 1 |
| 16 | 4 | 6; 7; 8 | 0 |
| 15 | 4 | 2; 3; 12 | 1 |
| 14 | 7 | 5; 6; 13 | 1 |
| 13 | 2 | 2; 5; 6 | 3 |
| 12 | 3 | 7; 8; 9; | 2 |

1. Квадратичная система:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 17 | 5 | 3 | 2; 3; 4; 8; 11 | 1 |
| 16 | 4 | 6; 7;8 | 4; 5; 10; 15 | 0 |
| 15 | 4 | 2; 3; 12 | 3; 4; 9; 14 | 1 |
| 14 | 7 | 5; 6; 13 | 2; 7; 10; 12 | 1 |
| 13 | 2 | 2;5;6 | 1; 2; 4; 12 | 3 |
| 12 | 3 | 7; 8; 9; | 1; 3; 5; 10 | 2 |

**Образец выполнения лабораторной работы для аффинных систем**

|  |
| --- |
| = 5 |
| =1  𝑏 =2 |
| =1 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1-циклы |  | 2-циклы |  | 3-циклы |
| 0 | 2 | 0 |  | 0 |  | 0 |
| 1 | 3 | 0 |  | 0 |  | 0 |
| 2 | 4 | 0 |  | 0 |  | 0 |
| 3 | 0 | 0 |  | 0 |  | 0 |
|  | 1 | 0 |  | 0 |  | 0 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 4-циклы |  | 5-циклы |
|  | 0 | 0 | 1 |
|  | 0 | 1 | 1 |
|  | 0 | 2 | 1 |
|  | 0 | 3 | 1 |
|  | 0 |  | 1 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Циклическая структура отображения | | | | | |
| длина цикла | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| число циклов | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| число элементов | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |

Как видно, имеется цикл максимальной длины 5, содержащий все элементы и движение состоит из одной циклической орбиты.

Граф системы

4

0

2

1

3

**Контрольные вопросы**

Ниже термин «система» означает автономную динамическую систему с дискретным временем.

Отвечая на большинство вопросов, необходимо устный ответ проиллюстрировать с помощью написанной программы.

1. Дайте классификацию движений конечных автономных систем.
2. Может ли конечная система иметь невозвратное движение?
3. Дайте классификацию движений обратимых конечных систем.
4. Опишите циклическую структуру конечной обратимой системы?
5. Как складываются и умножаются структурные многочлены?
6. Как связаны структурные многочлены систем и , где – конечная обратимая система?
7. Выясните, для каких параметров аффинная система обратима.
8. Может ли система иметь все *p*-циклы, где ?
9. Для каких и система может иметь - и –*q*-циклы?
10. Всегда ли система имеет хотя бы один цикл?
11. Покажите, что для обратимой системы есть произведение независимых циклов (в смысле перестановки).

**Лабораторная работа 3**

**Матричные функции**

**Приведение матриц второго порядка к жордановой форме (канонической форме) над полем**

Для данной вещественной матрицы

1. Найти определитель матрицы .
2. Найти собственные значения матрицы . Найти явное выражение для нахождения собственных значений.
3. Проверить, что сумма собственных значений совпадает со следом матрицы .
4. Проверить, что произведение собственных значений совпадает с определителем матрицы .
5. Найти собственные векторы матрицы .
6. Определить канонический тип матриц . Каноническую матрицу будем обозначать через .
7. Найти матрицу перехода Найти явное выражение для элементов матрицы .
8. Найти матрицу перехода . Найти явное выражение для элементов матрицы .
9. Убедиться, что

.

1. Вычислить матрицу заданных *n*.
2. Вычислить заданных .

**Матрицы**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 0,5 | 1 | 0 | 1 | 6 | 3 |
| -7 | -4 | 12 | 7 | 9 | 3,5 |
| 0,2 | 0 | 3,5 | -0,5 | 8 | 4 |
| 0,7071 | -0,7071 | 0,7071 | 0,7071 | 5 | 4,7 |
| 32 | -74 | 13 | -30 | 7 | -2 |
| -0,5 | 2,5 | -0,5 | 1,5 | 11 | -5,5 |
| 32 | -74 | 13 | -30 | 13 | -1 |
| 3 | -3 | 1 | -1 | 24 | -7 |
| 0,4 | 0,6 | 0 | 0,2 | 12 | 6 |
| 0 | -1 | 1 | 0 | 50 | 8,3 |

**Образец выполнения лабораторной работы**

.

.

Собственные значения - комплексные

1 = 2 + *i*,

= 2 – *i.*

1+

1

Каноническая матрица

Матрица перехода

Матрица

Проверка

*.*

.

.

Собственные значения - комплексные

1 = 3,

= 2*.*

1+

1

Каноническая матрица

Собственные векторы

Матрица перехода

Матрица

Проверка

*.*

**Контрольные вопросы**

1. Дайте определение собственного значения и собственного вектора матрицы.
2. Описать способ нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы.
3. Сформулируйте теорему Гамильтона-Кэли.
4. Выписать характеристическое уравнение для матрицы второго порядка.
5. Как связаны собственные значения матрицы с ее следом и определителем?
6. Перечислить все канонические матрицы второго порядка.
7. Описать метод построения матрицы перехода для матриц второго порядка.
8. Всякая ли матрица имеет собственные значения?
9. Описать способ нахождения обратной матрицы. Найти явное выражение для обратной матрицы второго порядка.
10. Всякая ли матрица обратима?
11. Какой критерий обратимости матрицы?
12. Как определяется натуральная степень от матрицы?
13. Как определяется нулевая степень от матрицы?
14. Какие матрицы допускают целую степень?
15. Выписать явные формулы для нахождения степени от канонической матрицы второго порядка.
16. Как определяется экспонента от квадратной матрицы? Какое ее значение?
17. Определена ли экспонента от любой квадратной матрицы?
18. Перечислите основные свойства матричной экспоненты.
19. Для каких матриц матрица обратима? Какова обратная матрица?
20. Верно ли, что ?
21. Чему равна экспонента от диагональной матрицы порядка ? В частности, чему равна экспонента от единичной матрицы порядка ?
22. Как вычислить степень и экспоненту от диагонализуемой матрицы порядка ?
23. Как вычислить степень и экспоненту от жордановой клетки порядка ?
24. Может ли недиагональная матрица порядка иметь одно собственное значение кратности и быть при этом диагонализуемой?
25. Как определяется разложение Лагранжа для матрицы второго порядка?
26. Как вычислить степень и экспоненту от матрицы второго порядка, если известно ее разложение Лагранжа?

**Лабораторная работа 4**

**Линейные двумерные автономные системы**

**c непрерывным временем**

Рассматривается линейная двумерная автономная система с непрерывным временем:

(1)

и с начальным состоянием , где

, *,*

*,* .

1. Построить график координат движения. Для этого необходимо решить численно систему дифференциальных уравнений методом Эйлера или при желании методом Рунге-Кутта четвертого порядка. Ниже будет дано описание метода Эйлера. Найти также оператор перехода (см. ниже).
2. Построить фазовый портрет автономной системы с начальным состоянием .
3. Охарактеризовать полученное движение.
4. Для каждой матрицы найти все неподвижные точки и охарактеризовать их тип.
5. Используя результаты лабораторной работы 3, для каждой матрицы
6. найти собственные значения и собственные векторы;
7. каноническую форму и матрицу перехода;
8. охарактеризовать тип неподвижной точки (0,0);
9. найти точное решение системы дифференциальных уравнений (1). Для этого необходимо найти точное решение канонической системы

где - каноническая матрица для .

**Метод Эйлера**

Пусть - шаг изменения моментов времени, в которых будут вычисляться значения , :

, ,

где - заданное число. Значения , вычисляются рекуррентно в точках по правилу

В результате мы получаем двумерную автономную динамическую систему с дискретным временем. Оператор перехода для этой системы равен

.

Варьируйте при необходимости , и для достижения лучшего результата.

**Системы**

(во всех системах *=*0)

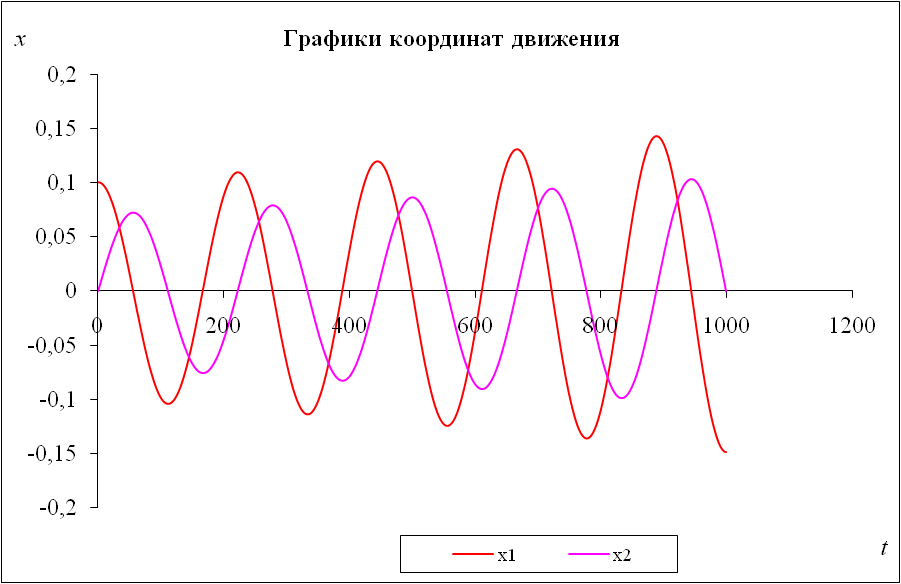
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 0,5 | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 |
| -7 | -4 | 12 | 7 | 5 | 7 |
| 0,2 | 0 | 3,5 | -0,5 | 0 | 2 |
| 0,7071 | -0,7071 | 0,7071 | 0,7071 | 3 | 1 |
| 32 | -74 | 13 | -30 | 1 | 1 |
| -0,5 | 2,5 | -0,5 | 1,5 | 4 | 5 |
| 32 | -74 | 13 | -30 | 4 | 0 |
| 3 | -3 | 1 | -1 | 4 | 1 |
| 0,4 | 0,6 | 0 | 0,2 | 4 | 0 |
| 0 | -1 | 1 | 0 | 4 | -1 |

**Образец выполнения лабораторной работы для двумерных непрерывных линейных систем**

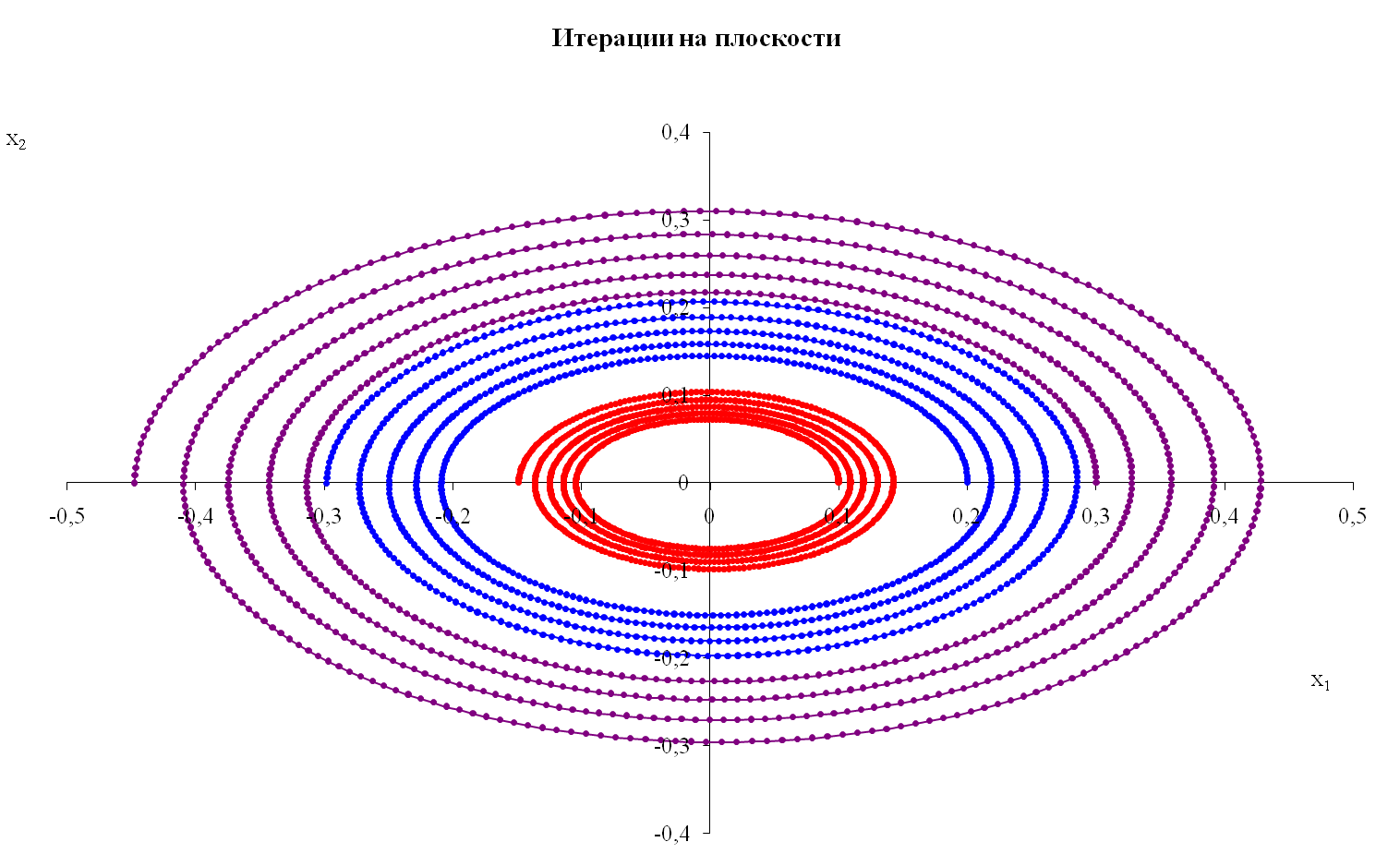
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Матрица системы | | | |
| 0 | -0,2 | | |
| 0,1 | 0 | | |
| Оператор перехода | | | | |
| 1 | | -0,04 | | |
| 0,02 | | 1 | | |
| h | | n | | |
| 0,2 | | 1000 | | |
| начальное состояние | | | | | |
|  | | | | | |
| x1(0) | | | x2(0) | | |
| 0,1 | | | 0 | | |
| 0,2 | | | 0 | | |
| 0,3 | | | 0 | | |

Вычисление значений , при заданных трех состояниях

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0,1 | 0 | 0,2 | 0 | 0,3 | 0 |
| 1 | 0,1 | 0,002 | 0,2 | 0,004 | 0,3 | 0,006 |
| 2 | 0,09992 | 0,004 | 0,19984 | 0,008 | 0,29976 | 0,012 |
| 3 | 0,09976 | 0,005998 | 0,19952 | 0,011997 | 0,29928 | 0,017995 |
| 4 | 0,09952 | 0,007994 | 0,19904 | 0,015987 | 0,29856 | 0,023981 |
| 5 | 0,0992 | 0,009984 | 0,198401 | 0,019968 | 0,297601 | 0,029952 |
| 6 | 0,098801 | 0,011968 | 0,197602 | 0,023936 | 0,296403 | 0,035904 |
| 7 | 0,098322 | 0,013944 | 0,196644 | 0,027888 | 0,294967 | 0,041832 |
| 8 | 0,097764 | 0,01591 | 0,195529 | 0,031821 | 0,293293 | 0,047731 |
| 9 | 0,097128 | 0,017866 | 0,194256 | 0,035732 | 0,291384 | 0,053597 |
| 10 | 0,096413 | 0,019808 | 0,192827 | 0,039617 | 0,28924 | 0,059425 |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 997 | -0,14847 | 0,008674 | -0,29695 | 0,017348 | -0,44542 | 0,026022 |
| 998 | -0,14882 | 0,005704 | -0,29764 | 0,011409 | -0,44646 | 0,017113 |
| 999 | -0,14905 | 0,002728 | -0,2981 | 0,005456 | -0,44715 | 0,008184 |
| 1000 | -0,14916 | -0,00025 | -0,29832 | -0,00051 | -0,44747 | -0,00076 |



Фазовый портрет



Одна неподвижная точка (0,0), являющаяся центром

**Фазовые портрет другой системы**

|  |  |
| --- | --- |
| Матрица системы | |
|  | |
| 2 | -10 |
| 1 | -4 |

****

Одна неподвижная точка (0,0), являющаяся устойчивым фокусом

**Контрольные вопросы**

1. Дайте определение неподвижной точки системы (1).
2. Найти все неподвижные точки системы (1).
3. Как связаны ранги матриц *A* и *J*.
4. Как связаны начальные условия систем (1) и (2).
5. Выписать явное решение системы (2).
6. Как связаны решения систем (1) и (2).
7. Выписать явное решение системы (2).
8. Дайте определение фазового портрета на плоскости.
9. Для каких матричная функция дифференцируема? Найти ее производную.

В вопросах 10-13 предполагается невырожденность матрицы .

1. Перечислите фазовые портреты для канонических систем (2). Сохраняется ли качество поведения решения при переходе к системе (1)?
2. Дайте определение качественной эквивалентности систем.
3. Дайте классификацию линейных систем.
4. Опишите характер зависимости фазовых портретов системы (1) от следа и определителя матрицы .
5. Опишите фазовые портреты системы (2) когда матрица сингулярна.

**Литература**

1. Аль-Натор М.С., Касимов Ю.Ф., Кузнецов В.Л. Основы теории систем: учеб. пособие для студентов IV курса специальности 230401 дневного обучения. -­М.: МГТУ ГА, 2007.
2. Джон Г. Мэтьюз, Куртис Д. Финк. Численные методы. Использование MATLAB. ­­­ – М.: Издательский дом "Вильямс", 2001.
3. Эрроусмит Д.К. Плейс. Обыкновегнные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. ­­­ – М.: Мир, 1986.

**Содержание**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Лабораторная работа 1** | Исследование одномерных вещественных автономных систем с дискретным временем | 3 |
| **Лабораторная работа 2** | Исследование одномерных модулярных систем с дискретным временем | 18 |
| **Лабораторная работа 3** | Матричные функции. Приведение матриц второго порядка к жордановой форме (канонической форме) над полем | 23 |
| **Лабораторная работа 4** | Линейные двумерные автономные системы  c непрерывным временем | 28 |
| **Литература** |  | 34 |