Тема 4. Квантовый анализ движения некоторых объектов

П.1. Примеры решения для частицы в яме.

П.2. Квантовый осциллятор.

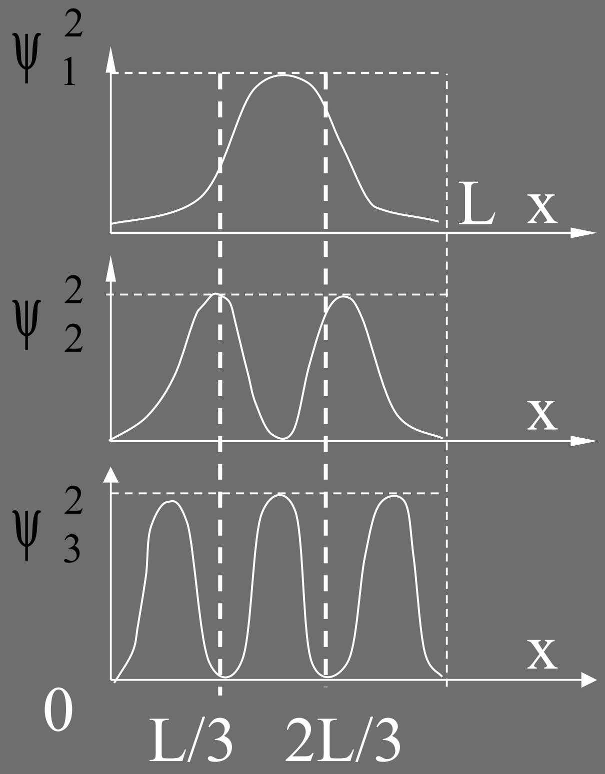
П.3. Квантовый ротатор.

П.4. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект.

П.1. Примеры решения для частицы в яме.

ЗАДАЧА: Найти вероятность пребывания частицы в средней трети ямы для первых трех состояний.

Запишем ВФ для трех состояний: $\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right), \ldots$



Из рисунка хорошо видно, что для третьего состояния в каждой трети ямы вероятность пребывания одна и та же, следовательно,

P (0<x<1/3,1/3<x<2L/3) = 1/3 = 0.33.

т.к. вероятность P (в яме) = 1.

Остальные случаи требуют подробного интегрирования.

Первое состояние:

$$I(\psi_1) = \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \left(\frac{2}{L}\right) \sin^2\left(\pi \frac{x}{L}\right) dx = \frac{2}{2L} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} dx - \frac{2}{2L} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{L}\left[\frac{L}{3} - \frac{L}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right)\Bigg|_{L/3}^{2L/3}\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi}\left(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= 0.33 - \frac{1}{2\pi}\left(\sin 240^{\circ} - \sin 120^{\circ}\right) =$$

$$0.33 + \frac{1}{\pi} \sin 60^{\circ} = 0.609.$$

Ответ: вероятность пребывания частицы в средней трети ямы

для первого состояния 0.609,

для второго 0.18 (получить самостоятельно, СРС),

для третьего 0.33.

ТЕСТ

П.2. Квантовый осциллятор.

<u>Проблема:</u> Как отражаются квантовые закономерности на колебательном движении тела?

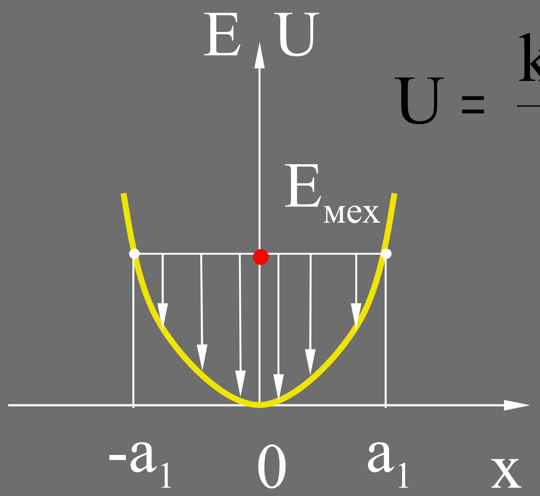
<u>Известно</u>, что колебательное движение возможно, если на тело действует упругая сила, а потенциальная энергия тела меняется, как <u>квадрат координаты</u>.

<u>Квантовый осциллятор</u> – это частица, находящаяся в параболической потенциальной яме.

<u>Параболической</u> потенциальной ямой называется область пространства, в которой потенциальная энергия частицы является квадратичной функцией координаты

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

Классическое решение: $F_{УПР} = -kX$.



$$U = \frac{kx^2}{2}$$

Решение динамического уравнения (II закон Ньютона) дает нам гармонический закон движения

$$x(t) = a \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где частота собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Скорость $V = \dfrac{dx}{dt} = a \cdot \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$

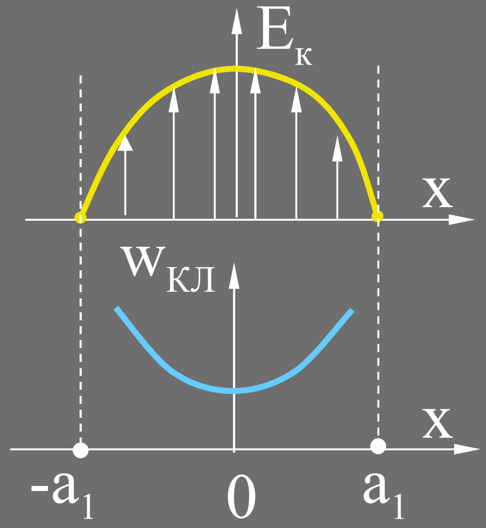
Кинетическая энергия

$$E_{кин} = \frac{mV^2}{2}.$$

Полная механическая энергия

$$E_{мех} = E_к + U = const.$$

Изобразим на рисунке, как меняется кинетическая энергия:

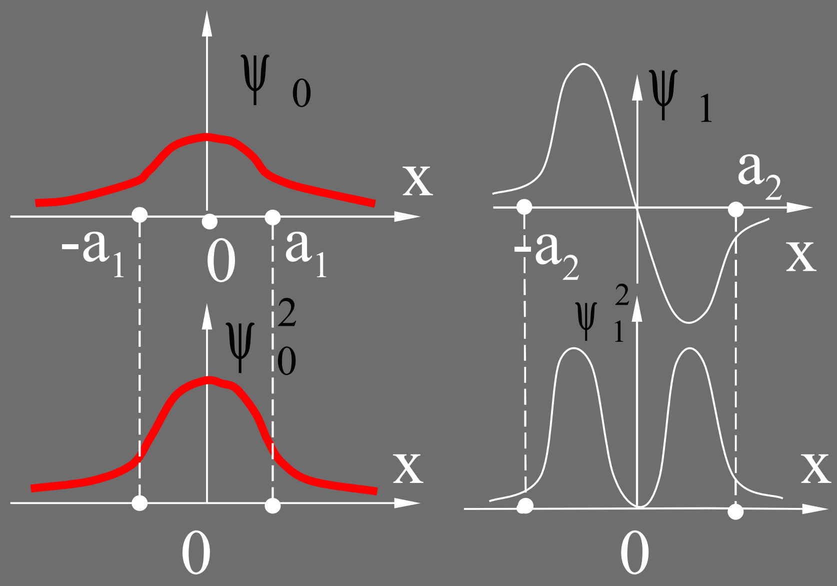


Плотность вероятности $w_{кл}$ обнаружения частицы в яме резко растет к концам параболы, т.е. к точкам поворота.

Решение квантовой задачи. Решается уравнение Шредингера:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E - \frac{kx^2}{2}\right)\psi = 0.$$

Решение этого уравнения записывается с помощью полиномов Чебышева-Эрмита $H_n(x)$, которые табулированы, или выражаются через элементарные функции.



Основные свойства квантового осциллятора:

1) Его энергия квантуется

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\underbrace{\hbar\omega_0}_{h\nu_0}$$

где n = 0,1,2…

2) Имеется минимальный ненулевой уровень энергии

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}, \qquad \text{где} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Состояние осциллятора, имеющего «E_0» называется нулевыми колебаниями.

ТЕСТ ТЕСТ

3) Плотность вероятности нигде не равна 0, а только асимптотически приближается к 0 при $X \to \pm \infty$, т.е. выходит за точки поворота, в зону отрицательных кинетических энергий.

Следствие: Существует вероятность обнаружения частицы за точками поворота.

Явление, связанное с конечной вероятностью нахождения частицы в области отрицательной кинетической энергии, называется туннельным эффектом.

4) Уровни энергии расположены эквидистантно (на равных расстояниях). Расстояние между уровнями

$$E_n - E_{n-1} = \hbar\omega_0 = h\nu_0$$

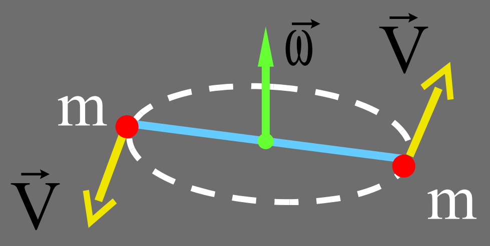
(энергия фотона?).

П.3. Квантовый ротатор.

Проблема: Как отражаются квантовые закономерности на вращающемся теле?

Квантовым ротатором называется свободно вращающееся тело, подчиняющееся квантовым закономерностям.

Известно: Простейшей моделью тела является «гантель» - включающая 2 одинаковые материальные точки, соединенные абсолютно тонким, жестким и невесомым стержнем.



Момент инерции двух МТ и гантели:

$$I = 2mr^2.$$

$$E_{вр} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I}$$ - кинетическая энергия вращающегося тела.

Момент импульса: $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

Учтем закономерности квантовой механики.

Модель квантовый ротатор в квантовой механике анализируется с помощью уравнения Шредингера в полярных координатах (за рамками нашего курса). Перечислим основные результаты.

Модуль момента импульса квантуется (принимает значения из дискретного ряда чисел):

$$\left|\vec{L}\right|_l = \hbar\sqrt{l(l+1)},$$

где целое число $l = 0, 1, 2, 3 \ldots$ - квантовое число ротатора.

<u>Замечание:</u> Скорости шариков много меньше скорости света, т.е. $V \ll c$.

<u>Вывод</u>: $$E_l^{BP} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$$ - формула квантования энергии квантового ротатора.

<u>Замечание</u>: Эта модель применяется для моделирования вращающихся молекул.

П.4. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект.

Изучите самостоятельно явление взаимодействия частицы с потенциальным барьером. Выпишите волновые функции частицы вне и внутри барьера.

Ознакомьтесь с туннельным эффектом.

СРС - 2 стр. Законспектируйте материал, используя учебник.

ТЕСТ

ТЕСТ

ТЕСТ