

Практическое занятие №1

Определение местоположения ВС по результатам дальномерных измерений

В спутниковых системах навигации широкое применение получил беззапросный метод измерения дальности (пассивный режим работы). Для его реализации на Земле, на борту искусственного спутника Земли (ИСЗ) и воздушного судна (ВС) устанавливают высокостабильные генераторы эталонной частоты, по которым формируют согласованные между собой сигналы времени, привязанные к системе единого времени.

Положение ВС определяют по результатам дальномерных измерений. Измеряют дальности до трёх ИСЗ и составляют три уравнения в прямоугольных координатах:

$$(x_i - x_{BC})^2 + (y_i - y_{BC})^2 + (z_i - z_{BC})^2 = r_i^2,$$

где x_i, y_i, z_i - координаты i -го ИСЗ, x_{BC}, y_{BC}, z_{BC} - координаты ВС, r_i - расстояние между ВС и i -м ИСЗ, измеренное радионавигационными системами.

Решив систему уравнений находим координаты ВС. При этом никаких дополнительных данных о местонахождении знать не надо.

Пример 1. $x_1 = 1, y_1 = 2, z_1 = 3, r_1 = \sqrt{2}$;

$$x_2 = 4, y_2 = 1, z_2 = 3, r_2 = 2;$$

$$x_3 = 3, y_3 = 2, z_3 = 4, r_3 = \sqrt{3}.$$

Найти x_{BC}, y_{BC}, z_{BC} .

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (1 - x_{BC})^2 + (2 - y_{BC})^2 + (3 - z_{BC})^2 = 2 \\ (4 - x_{BC})^2 + (1 - y_{BC})^2 + (3 - z_{BC})^2 = 4 \\ (3 - x_{BC})^2 + (2 - y_{BC})^2 + (4 - z_{BC})^2 = 3 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое. Получим:

$$\left[16 - 8x_{BC} + x_{BC}^2 + (1 - y_{BC})^2 + (3 - z_{BC})^2 \right] - \left[1 - 2x_{BC} + x_{BC}^2 + (2 - y_{BC})^2 + (3 - z_{BC})^2 \right] = 2.$$

Имеем:

$$15 - 6x_{BC} + (1 - y_{BC})^2 - (2 - y_{BC})^2 = 2,$$

$$15 - 6x_{BC} + 1 - 2y_{BC} + y_{BC}^2 - (4 - 4y_{BC} + y_{BC}^2) = 2,$$

$$15 - 6x_{BC} + 2y_{BC} - 3 = 2$$

$$6x_{BC} = 10 + 2y_{BC},$$

то

$$3x_{BC} = 5 + y_{BC},$$

следовательно

$$y_{BC} = 3x_{BC} - 5.$$

Вычтем из второго уравнения третье уравнение системы, получим:

$$4x_{BC} + 2z_{BC} = 14,$$

$$z_{BC} = 7 - 2x_{BC}.$$

Подставим этот результат в первое уравнение системы, получим:

$$(1 - x_{BC})^2 + (7 - 3x_{BC})^2 + (2x_{BC} - 4)^2 = 2,$$

$$1 - 2x_{BC} + x_{BC}^2 + 49 - 42x_{BC} + 9x_{BC}^2 + 4x_{BC}^2 - 16x_{BC} + 16 = 2,$$

$$7x_{BC}^2 - 30x_{BC} + 32 = 0;$$

Найдём дискриминант полученного уравнения:

$$\frac{D}{4} = 15^2 - 32 \cdot 7 = 1,$$

$$x_{BC} = \frac{15 \pm 1}{7} = \left\{ 2; \frac{16}{7} \right\},$$

$$y_{BC} = \left\{ 1; \frac{13}{7} \right\},$$

$$z_{BC} = \left\{ 3; \frac{17}{7} \right\}$$

На основании приближённых знаний о положении ВС выбирают одну из троек координат: $(2; 1; 3)$ или $\left(\frac{16}{7}; \frac{13}{7}; \frac{17}{7}\right)$.

Пример 2. $x_1 = 0, y_1 = 1, z_1 = 2, r_1 = \sqrt{6};$

$$x_2 = 1, y_2 = 2, z_2 = 0, r_2 = 4;$$

$$x_3 = 2, y_3 = 0, z_3 = 1, r_3 = \sqrt{14}.$$

Найти x_{BC}, y_{BC}, z_{BC} .

Попробуйте решить эту задачу самостоятельно, пользуясь алгоритмом примера 1.

Практическое занятие №2

Оценка точности определения местоположения ВС с помощью СРНС дальномерным методом

Оценка точности определения местоположения ВС псевдодальномерным методом может быть выполнена следующим образом:

Рассчитываются величины $r_{c_i}^2$ по формуле:

$$(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 + (z_i - z_c)^2 = r_{c_i}^2. \quad (1)$$

В качестве счислимых координат x_c, y_c, z_c обычно принимаются координаты воздушного судна, найденные дальномерным методом.

Далее находятся величины:

$$m_i = \frac{x_c - x_i}{r_{c_i}}, \quad n_i = \frac{y_c - y_i}{r_{c_i}}. \quad (2)$$

Далее, считая, что высоты известны точно, составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 \Delta x + n_1 \Delta y = \Delta r_1 \\ m_2 \Delta x + n_2 \Delta y = \Delta r_2 \end{cases}$$

где $\Delta r_1, \Delta r_2$ - погрешности измеренных значений дальности.

Тогда

$$\Delta x = \frac{n_2 \Delta r_1 - n_1 \Delta r_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1}, \quad \Delta y = \frac{m_1 \Delta r_2 - m_2 \Delta r_1}{m_1 n_2 - m_2 n_1}. \quad (3)$$

Далее предположим измерение дальности обоими ИСЗ равноточными, т.е.

$\delta_{r_1} = \delta_{r_2} = \delta_r$. Дисперсии оценок вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \delta_x^2 &= \frac{n_1^2 + n_2^2 - 2n_1 n_2 \rho}{(m_1 n_2 - m_2 n_1)^2} \cdot \delta_r^2 \\ \delta_y^2 &= \frac{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \rho}{(m_1 n_2 - m_2 n_1)^2} \cdot \delta_r^2 \end{aligned} \quad (4)$$

где ρ - коэффициент корреляции между случайными погрешностями измерения дальностей до двух ИСЗ.

Пример 1. Возьмём считаемые координаты и координаты спутников из примера 1 практического занятия №1, $\Delta r_1 = \Delta r_2 = 0,001$, $\delta_r = 0,001$, $\dots \rho = 0,5$.

Найти Δx и Δy , δ_x и δ_y .

По формуле (1):

$$r_{c_1}^2 = (1-2)^2 + (2-1)^2 + (3-3)^2 = 2, \quad r_{c_1} \approx 1,414;$$

$$r_{c_2} = 2.$$

Рассчитаем m_1, n_1, m_2, n_2 по формуле (2):

$$m_1 = \frac{2-1}{1,414} \approx 0,707, \quad n_1 = \frac{1-2}{1,414} \approx -0,707,$$

$$m_2 = \frac{2-4}{2} = -1, \quad n_2 = \frac{1-1}{2} = 0.$$

Тогда по формуле (3):

$$\Delta x = \frac{0 + 0,707 \cdot 0,001}{0,707 \cdot 0 + 1 \cdot (-0,707)} \approx -0,001,$$

$$\Delta y = \frac{0,707 \cdot 0,001 + 1 \cdot 0,001}{-0,707} \approx -0,002.$$

По формулам (4):

$$\delta_x^2 = \frac{0,707^2 + 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot 0,707 \cdot 0,5}{0,707^2} \cdot 10^{-6} = 10^{-6},$$

$$\delta_y^2 = \frac{0,707^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0,707 \cdot 0,5}{0,707^2} \cdot 10^{-6} = 4,42 \cdot 10^{-6}.$$

Пример 2. Взяв данные из примера № 2 практического занятия №1 и, положив $\Delta r_1 = 0,0005$, $\Delta r_2 = 0,0007$, $\delta_r = 0,0015$, $\rho = 0,8$ рассчитать погрешности Δx и Δy , дисперсии δ_x и δ_y .