Кафедра “Авиатопливообеспечение и ремонт летательных аппаратов”

Ю.Н.Макин доктор технических наук, профессор

Методы научного исследования по Ремонту ЛА и АД

Введение

По методике написания диссертаций в настоящее время издано много пособий, например, [1]. Но их обилие не означает, что отпала необходимость их адаптации под конкретные специальности, под специфику работы конкретных диссертационных советов.

«Диссертация» в переводе с латыни – исследование, рассуждение.

От литературных произведений и отчетов по результатам научного исследования, ее отличает то, что она предназначена для публичного обсуждения и защиты с целью получения научной квалификации (ученой степени). А зачем нужна документально подтвержденная квалификация. Для того же, что и диплом инженера: чтобы работодатель сразу мог идентифицировать потребность в выполнении необходимой ему работы и потенциальную способность работника ее выполнить.

Эта потребность работодателя оформилась в публичные защиты диссертаций еще в 16 веке. В 1917 году Совнарком РСФСР ликвидировал ученые степени, но, осознав, что классовая принадлежность не гарантирует умение выполнять сложные, творческие, исследовательские работы, а потребность в них была жизненно необходима, в 1934 г. степени кандидата и доктора наук были восстановлены.

Действующая система ученых степеней исторически эволюционизировалась. В 1791 г. в России были по степени их значимости три степени: кандидат, магистр, доктор. В 1884 г. степень кандидата была упразднена. Степень магистра в дореволюционной России имела высокий статус. Ее обладатели могли занимать должность профессора, они сразу получали гражданский чин 9 класса: титулярный советник (всего было 14 чинов, самый высокий - канцлер), что соответствовало у военных званию штабс-капитана, к нему обращались Ваше благородие.

В то время и квалификация инженер ценилась очень высоко. На одном из московских кладбищ я видел памятник, мраморную стелу высотой около трех метров, с надписью «ИНЖЕНЕР», а дальше «граф, тайный советник» (генерал-лейтенант) и т.д., а рядом, такая же стела на могиле его жены, скончавшейся почти на десять лет позднее – «ИНЖЕНЕРША» и т.д.

В Русской Православной Церкви до настоящего времени сохранена трехстепенная иерархия научных степеней: по окончании духовной академии студенты пишут и защищают квалификационную работу, за которую им присуждают степень кандидата богословия, затем соискатели и «профессорские стипендиаты» (по нашему – аспиранты), готовят и защищают научную работу на соискание ученой степени магистра и, только после этого, на степень доктора. Причем, ученый совет имеет право за магистерскую диссертацию присуждать степень доктора (настоящее время ученые степени богословских вузов приравнены к государственным научным степеням).

До недавнего времени и в светских диссертационных советах разрешалось за представленную кандидатскую диссертацию присуждать докторскую степень.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата наук должна обладать следующими **признаками**:

- являться научно-квалификационная работой;
- в ней должно содержаться решение задачи, имеющей существенное значение для соответствующей отрасли знаний; либо в ней должны быть изложены научно обоснованные технические, экономические или технологические разработки, имеющие существенное значение для экономики или обеспечения обороноспособности страны;
- для работы, имеющей прикладное значение, должны приводиться сведения о практическом использовании полученных автором научных результатов, а для имеющей теоретическое значение, - рекомендации по использованию научных выводов

Основные научные результаты диссертации должны быть обязательно опубликованы в научных изданиях, перечень которых (в том числе, электронных) публикуется в Бюллетене и на официальном сайте ВАК РФ. До недавнего времени это относилось только к докторским диссертациям, сейчас это определено и для кандидатских диссертаций. Научный Вестник МГТУ ГА входит в этот список.

Очень важно! При написании диссертации соискатель обязан давать ссылки на автора и источник, откуда он заимствует материалы или отдельные результаты. При использовании в диссертации идей и или разработок, принадлежащих соавторам, коллективно с которыми были написаны научные работы, соискатель обязан отметить это в диссертации. Указанные ссылки должны делаться также в отношении научных работ соискателя, выполненных им как в соавторстве, так и единолично. В случае использования заимствованного материала без ссылки на автора и источник заимствования диссертация снимается с рассмотрения вне зависимости от стадии ее рассмотрения без права повторной защиты.

Главным и определяющим в диссертации является **наличие впервые полученных автором существенных научных результатов.** Все остальное – необходимый, но недостаточный антураж. **Понятие «впервые» означает в науке факт отсутствия подобных результатов.**

Целью данной работы является, в том числе, и помощь в реализации такого требования к диссертационным исследованиям, **как владение арсеналом научных методов исследования** и (поскольку диссертация является квалификационной работой) **владение научной терминологией**. Чтобы строго научные понятия: индукция, дедукция, классификация, унификация, теория, вепбальный, методология, метод, принцип, концепция, теория, тезис, идеология, трансформация, идентификация, мировоззрение, методика, идея, абстракция, прерогатива, аспект, адекватность, априорный, интерпретация, предикат, континуум, детерминированный, стохастичный, феноменологический, стратегия, тактика, гипотеза, регрессия, корреляция, рекурсия, аппроксимация и другие, не служили лишь украшением доклада на публичной защите.

Особую роль в процессе исследований в области естественных наук играют современные методы формализации – приемы построения абстрактно-математических моделей, раскрывающих сущность изучаемых процессов действительности.

Причиной этого является то, что (согласно Г.Клауссу) если теория некоторой предметной области достаточно разработана, то метод и теория однозначно соответствуют друг другу таким образом, и метод строится на основе теории. Теория устанавливает то, что фактически имеет место, а метод описывает, как на основе того, что действительно имеет место, должна протекать научная или практическая деятельность людей. Однако, в период становления любой науки это соотношение метода и теории выглядит не так. В этот период метод не опирается на какую-либо разработанную теорию. Но для этого периода мы можем обладать методом подхода к вещам еще тогда, когда структура этих вещей и их точный способ поведения не совсем известны. Метод этот кибернетический и основан на отношении вход-выход. Здесь особое внимание уделяется не материалу и не особым структурам систем, а, в первую очередь, их поведению. Математика, математическое моделирование, в этом случае, может хорошо отображать качества предмета, а не только его количественную оценку.

При кибернетическом подходе проблема математического моделирования процессов авиаремонтного производства формулируется как задача синтеза сложной системы. Образованная система будет представлять из себя математическую модель: отображением фактов, вещей и отношений в области знаний в виде более простой, более наглядной материальной структуры этой области. Это математически отображенная система взглядов, представлений, идей, действий, по существу - теория, обладая которой можно решать поставленные исследовательские задачи, используя аппарат теории прогнозирования и методы оптимизации.

Следующей после этого задачей будет структурная оптимизация системы. Эта задача методологическая: поведение системы обусловлено не столько особенностями ее отдельных элементов, сколько свойствами ее структуры.

Необходимым условием реализации указанного алгоритма проведения исследовательской работы является формализация объекта исследования. Но существует много проектных задач творческого характера, для которых способы формализации неизвестны. Это задачи, связанные с выбором принципов построения и организации объекта, синтеза схем и конструкций в условиях, когда выбор варианта производится среди неограниченного множества вариантов и не исключается возможность получения новых, ранее неизвестных решений.

При составлении математических моделей могут использоваться различные математические средства описания объекта. Средства, представленные в данном пособии, используются для решения трудноформализуемых задач. В списке литературы показаны некоторые примеры формализации процессов ремонта авиационной техники.

Содержание

1. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Высказывание – языковое выражение.
Истинное значение – истина == 1, ложь ==0.
Логическа операция – построение из данных высказываний нового.
Логические связки – знаки логических операций.

Отрицание - $\neg A$ - «не А» - унарная логическая операция.
Конъюнкция - $A_1 \wedge (\&) A_2$ - «A_1 и A_2» - логическое умножение.
Дизъюнкция - $A_1 \vee A_2$ - «A_1 или A_2» - логическое сложение.
Импликация - $A_1 \rightarrow A_2$ - «если A_1, то A_2» - логическое следование.
Разделительная дизъюнкция - $A_1 \oplus A_2$ - либо A_1, либо A_2 .
Эквиваленция - $A_1 \leftrightarrow A_2$ - A_1 тогда и только тогда, когда A_2 .
Антиконъюнкция - $A_1 \mid A_2$ - неверно, что A_1 и A_2.
Антидизъюнкция - $A_1 \downarrow A_2$ - ни A_1 , ни A_2

Пропозициональная переменная – переменная P_1 ,P_2 ,P_3 …, значениями которой являются высказывания.
Формула алгебры высказываний(пропозициональная Формула) – отрицание, конъюнкция и т.д.
Булевы функции - $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ - аргументы которой из множества {0,1}, и которая при любом наборе аргументов имеет значения {0,1}.

ОСНОВНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ.

$\overline{\overline{H}} = H$, правило снятия двойного отрицания.

$H \wedge H = H$, - идемпотентность конъюнкции.

$H \vee H = H$, - идемпотентность дизъюнкции.

$H_1 * H_2 = H_2 * H_1$, - коммутативность связки.* это $\vee, \wedge, \leftrightarrow$.

$(H_1 * H_2) * H_3 = H_1 * (H_2 * H_3)$, - ассоциативность связки.

$H_1 \wedge (H_2 \vee H_3) = (H_1 \wedge H_2) \vee (H_1 \wedge H_3)$, - дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции.

$H_1 \vee (H_2 \wedge H_3) = (H_1 \vee H_2) \wedge (H_1 \wedge H_3)$, дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

$$\left.\begin{aligned} \overline{H_1 \wedge H_2} = \overline{H_1} \wedge \overline{H_2} \\ H_1 \vee H_2 = \overline{H_1} \wedge \overline{H_2} \end{aligned}\right\},$$ правила де Моргана.

$$\left.\begin{aligned} & H_1 \vee (H_1 \wedge H_2) = H_1; H_1 \wedge (H_1 \vee H_2) = H_1, \\ & H_1 \vee (\overline{H_1} \wedge H_2) = H_1 \vee H_2; H_1 \wedge (\overline{H_1} \vee H_2) = H_1 \wedge H_2; \\ & H_1 \rightarrow H_2 = \overline{H_1} \vee H_2; \\ & H_1 \leftrightarrow H_2 = H_1 \wedge H_2 \vee \overline{H_1} \wedge \overline{H_2}; \end{aligned}\right.$$ - правила поглощения.

$H \wedge \overline{H} =$ Ложь – *закон противоречия.*

$H \vee \overline{H} =$ Истина – *закон исключения третьего.*

$H \wedge$ И=H; $H \vee$ И=И; $H \wedge$ Л=Л; $H \vee$ Л=H.

$$\bigwedge_{k=1}^{r} P_{i_k}^{\sigma_k} \; (\textit{соответственно}, \; \bigvee_{k=1}^{r} P_{i_k}^{\sigma_k}),$$

где r – ранг элемента конъюнкции,

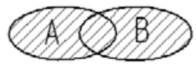
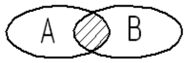
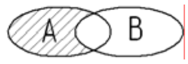
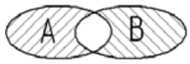
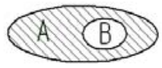
$\sigma_k \in \{0,1\}$; $P_{i_k}^{0} \equiv \overline{P_{i_k}}$; $P_{i_k}^{1} \equiv P_{i_k}$;

$i_k \in \{j_1, j_2, ..., j_n\}$ $\forall k = \{1, 2, ..., r\}$ и $P_{im} \neq P_{ik}$ при $m \neq k$.

это элементарная конъюнкция (дизъюнкция) над множеством пропозициональных переменных $\{P_{j1}, P_{j2}, ..., P_{jn}\}$.

2. Теория множеств

Диаграммы Эйлера-Венна

Объединение	**A∪B**	
Пересечение	**A∩B**	
Разность	**A\B**	
Симметрическая разность	**AΔB**	
Дополнение	**C_AB**	

Пусть существует множество **M**, где **a** – это элементы множества, то
a∈M – элемент **a** принадлежит множеству **M**
b∉M – элемент **b** не принадлежит множеству **M**

A подмножество **B**, если **A⊆B**
⊆ - знак **включения**
Равенство множеств, если **A⊆B** и **B⊆A**
Строгое включение **- A⊂B**

Конечные и бесконечные множества

Мощность множества - |**M**|
Пустое множество - ∅
Список множества – способ задания множества – **{a, b, … d, h}**

$\bigcup_{A \in S} A$ - объединение всех множеств **A**, принадлежащих к системе **S**

$\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ **-** если мощность *К*

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ **-** если A_i – бесконечная система

Разбиение множества U – система множеств, в которой все попарные пересечения множеств пустые.
Классы разбиения – множества такой системы **U**, где всякий элемент **U** входит только в один класс разбиения.
Вектор – упорядоченный набор элементов.
Кортеж – синоним понятия вектор.
Координаты (или компоненты) **вектора** – элементы, образующие вектор, они нумеруются слева направо.
Длина (размерность) **вектора** – это число его координат.
Вектор заключается в круглые скобки. Например, (0, 5, 4)
Упорядочение пары – вектор длины 2
Равенство векторов подразумевает равенство их длин и координат.

Прямое произведение множеств

Ax**B** – множество всех пар (**a, b**) таких, что $a \in A$, $b \in B$
$A_1 x A_2 x \ldots x A_n$ – множество всех векторов ($a_1 \ldots a_n$) длины **n** таких, что $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots a_n \in A_n$

Алфавиты – пусть **A** конечное множество, элементами которого являются символы (буквы, цифры, знаки препинания, знаки операций и т.д.)
Слова – длины **n** в алфавите **A** – это A^n
Множество слов в алфавите $\bigcup_{i \in N} A^i = A^1 \bigcup A^2 \bigcup \ldots$

Теорема

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ конечные множества и $|A_1|=m_1, |A_2|=m_2, \ldots, |A_n|=m_n$, тогда мощность множества $A_1 x A_2 x \ldots x A_n$ будет равна произведению множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$\left| A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n \right| = m_1 m_2 \ldots m_n$$

Следствие -- $\left| A^n \right| = \left| A \right|^n$

Проекция – вектора υ на ***i***-ю ось (обозначается **Пр** $_i$ υ) называется его ***i***-я координата.
Проекцией вектора υ=($a_1, \ldots, a_n$) на оси с номерами $i_1, \ldots i_k$ называется вектор ($a_{i1}, \ldots a_{ik}$) длины к. Обозначение Пр $_{i1,\ldots,ik}$ υ.

Соответствие между множествами **A** и **B** называется подмножеством $G \in A x B$
Если (**a, b**) ∈ **G** то говорят b соответствует a при соответствии G
Область определения соответствия **Пр** $_1$ **G**
Область значений соответствия **Пр** $_2$ **G**
Всюду определённое соответствие, если **Пр** $_1$ **G = A**
Частичное соответствие – если оно не всюду определено.
Сюръективное соответствие, если **Пр** $_2$ **G = B**
Образ a в **B** при соответствии **G** – это множество всех **b** ∈ **B соответсвующих a** ∈ **A**
Прообраз b в A при соответствии **G - это** множество всех **a,** которым соответствует множество **b.**
Функциональное (однозначное) соответствие – соответствие **G**, если образом любого элемента из **Пр** $_1$ **G** является единственный элемент из **Пр** $_2$ **G**
Взаимно-однозначное соответствие – соответствие между A и B, если оно всюду:
1. строго определено **Пр** $_1$ **G = A**
2. сюръективно **Пр** $_2$ **G = B**
3. функционально
4. прообразом любого элемента из **Пр** $_2$ **G** является единственный элемент из **Пр** $_1$ **G**

Если между множествами A и B существует взаимнооднозначное соответствие, то $|A| = |B|$
Если для конечного множества A ($|A| = n$), то число всех подмножеств A равно 2^n, т.е. $2^{|A|}$
Равномощные множества те между элементами которых можно можно установить взаимно однозначное соответствие.

Теорема Кантора – множество всех действительных чисел отрезка [0, 1] не является счётным.
Счетное множество – это множество равномощное N-множеству натуральных чисел.
Континуум – мощность множества (несчетного) всех действительных чисел отрезка [0, 1]

Функции

Отображение – $f : A \to B$
Функция – это функциональное соответствие между множествами **A** и **B**. Говорят, что функция **f** имеет вид $A \to B$ и обозначается $f : A \to B$ или **f(a)= b**
Аргумент – **a**;
Значение функции – **b**.
Образ **A** при отображении **f** обозначается **f(a)**
n-местная функция – это функция типа $A_1 x A_2 x \ldots x A_n \to B$; эта функция имеет n аргументов $f(a_1, a_2, \ldots a_n)=b$, где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots a_n \in A_n, b \in B$

Композиция функций – обозначается **f o g**
Если $f : A \to B$ и $g : B \to C$, то $h : A \to C$ называется композицией. Говорят, что функция **h** получена подстановкой **f** в **g**.
Суперпозиция функций – это функция полученная из $f_1, \ldots f_n$ некоторой подстановкой
$F_1 : A^{m1} \to A, \ldots F_n : A^{mn} \to A$
Формула – это выражение, описывающее суперпозицию.
Способы задания функций:
1) таблицы
2) формула
3) рекурсивная процедура:

a) задаётся значение f(0) или f(1)
b) последующее значение f(n+1) определяется через суперпозицию f(n)

Отношения

Подмножество **R⊆Mn** называется **n**-местным отношением на множестве **M**.
$a_1, a_2, \ldots a_n$ находятся в отношении R, если ($a_1, a_2, \ldots a_n$) ⊆ R. Одноместное отношение – это множество M.
a обладает признаком **R**, если **a∈R** и **R⊆M**.
Бинарные отношения aRb – если **a** и **b** находятся в отношении **R**.

Свойства отношений.

Рефлексивность – если для любого **a∈M** имеет место aRa, то отношение R рефлексивно.
Симметричность – если для пары (a,b) ∈ M^2 из **aRb** соответствует **bRa**
Транзитивность – если для любых a, b, c из **aRb** и **bRc** соответствует **aRc**
Отношение эквивалентности - или просто эквивалентность, если оно: рефлексивно, симметрично и транзитивно.
Система классов эквивалентности – пусть на множестве **M** задано отношение эквивалентности **R**. Выберем элемент $a_1 \in M$ и образуем класс (подмножество **M**) C_1, состоящий из a1 и всех элементов, эквивалентных a_1; то же самое проделаем с элементами $a_2 \in M$ и $a_2 \notin C_1$
$\bigcup_i C_i = M$ **-** индекс разбиения – мощность этой системы.

Отношение порядка

Нестрогого – если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.
Строгого – антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно.
Элементы a,b называются сравнимыми по отношению порядка R, если выполняется **aRb** или **bRa**
Полностью упорядоченное множество M – если любые два элемента M сравнимы.
Частично упорядоченное множество – если оно не полностью упорядоченно.

Предикаты

Предметная область – I-множество
Индивиды – это элементы множества I , т.е. ($a_1, a_2, \ldots a_n$)
Индивидные константы – знаки (символы), которыми обозначаются индивиды. Например, индивид a_1, а его индивидная константа 1.
Индивидная переменная – это знак, обозначающий произвольный индивид из области изменения данной переменной, т.е. из некоторого непустого подмножества множества индивидов.
Пусть $a_1, a_2, \ldots a_n$ – индивиды из предметной области I.
Высказывание об индивидах P($a_1, a_2, \ldots a_n$)
Свойство индивида – если **n=1**, то P(a_1)
Отношения между индивидами – если n≥2
Если $X_1, X_2 \ldots X_n$ – индивидные переменные с областями изменения $I_1, I_2 \ldots I_n$
Предикат - P($X_1, X_2 \ldots X_n$) или логическая функция.
При каждом замещении индивидных переменных $X_1, X_2 \ldots X_n$ индивидами из соответствующих множеств $I_1, I_2 \ldots I_n$ - оно становится высказыванием.
Предикатная константа – P используется для обозначения индивидуального свойства.
Переменный предикат (или предикат) – это переменный предикатный символ – знак, обозначающий произвольную предикатную константу из некоторого множества предикатных констант.
N-местный предикат – это предикат, зависящий от n различных индивидных переменных.
Высказывание – это нуль-местный предикат.
x_1Px_2 – вместо $P(x_1, x_2)$ – для бинарных предикатов.
Элементарная формула – $P(y_1, y_2 \ldots y_n)$ если P($X_1, X_2 \ldots X_n$) – предикат, а y_j – индивидуальная константа, j=1, 2 … n.
Предикатные формулы стоятся из элементарных формул с помощью логических связок, кванторов всеобщности и существования.
∀ - квантор всеобщности - для всех…
∃ - квантор существования – существует…

Теория моделей – рассматривает отношения между свойствами высказываний или множеств определённых высказываний в формализованном языке с одной стороны, и математическими структурами или множествами структур, удовлетворяющих этим высказываниям, с другой.

(**∀xH**) или (**∃xH**) – предикатные формулы, где **H** - предикатная формула, **x** – индивидная переменная. Читается: H есть область действия квантора **∀x** или **∃x.**
Операция навешивания квантора – приписывание к предикатной формуле спереди квантора.

Ограниченные кванторы - $\forall x\in M$ или $\exists x\in M$

3. Общая алгебра

$\varphi : M^n \to M$ n – арная операция на множестве М, где: n – арность операций φ.

Множество М вместе с заданной на нём совокупностью операций $\Omega = \{\varphi_1,...,\varphi_m,...\}$

Т.е. система: $A = (M;\varphi_1,...,\varphi_m,...)$ называется Алгеброй.

Несущее множество (или основное) – М алгебры А.

Сигнатура – Ω

Тип алгебры – вектор арностей алгебры.

Замкнутое множество $M' \subset M$ относительно n – арной операции φ на М, если $\varphi(M'^n) \subset M'$, т.е. если значения φ на аргументах из M' принадлежат M'.

Подалгебра А – если M' замкнуто относительно всех операций $\varphi_1,...,\varphi_m,...$ алгебры А, то система $A' = (M';\varphi_1,...,\varphi_m,...)$ подалгебра А.

Свойства бинарных алгебраических операций.

Ассоциативность – $(a\varphi b)\varphi c = a\varphi(b\varphi c)$.

Коммутативность – $a\varphi b = b\varphi a$.

Дистрибутивность слева относительно операции φ – $a\varphi(b\psi c) = (a\varphi b)\psi(a\varphi c)$.

Дистрибутивность справа относительно операции φ – $(a\psi b)\varphi c = (a\varphi c)\psi(b\varphi c)$.

Гомоморфизм алгебры А в алгебру В:

Алгебры $\left.\begin{matrix} A = (K;\varphi_1,...,\varphi_p) \\ B = (M;\varphi_1,...,\varphi_p) \end{matrix}\right\}$ одинаковые

гомоморфизм алгебры А в алгебру В, это отображение $\tilde{A}: K \to M$, удовлетворяющее условию: $\tilde{A}\left(\varphi_i\left(K_{j1},...,K_{jl(i)}\right)\right) = \varphi_i\left(\tilde{A}(K_{j1}),...,\tilde{A}(K_{jl(i)})\right)$ для всех $i = 1,...,p$, $l(i)$ – арность операций.

СМЫСЛ: независимо от того, выполнена ли сначала операция φ_i в А и затем произведено отображение Г, либо сначала произведено отображение Г, а затем в В выполнена соответствующая операция φ_i, результат будет одинаков.

Изоморфизм алгебры А на алгебру В – это взаимно однозначный гомоморфизм.

В этом случае существует обратное отображение $\tilde{A}^{-1} : M \to K$, тоже взаимно однозначное. $\tilde{A}^{-1}$ – это изоморфизм В на А. При этом алгебры А и В изоморфные.

Автоморфизм или изоморфизм на себя – если А=В.

Изоморфизм в себя – если $B \subset A$.

Полугруппа – алгебра с одной ассоциативной бинарной операцией – обычно умножением.

Запись ab называется мультипликативной.

Абелева (или коммутативная) полугруппа – если умножение коммутативно $ab = ba$.

Единица е – если $ae = ea = a$.

Моноид – полугруппа с единицей.

Группа – это полугруппа с единицей, в которой для каждого элемента а существует элемент a^{-1} (обратный к а) и удовлетворяет условию $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Абелева группа – в которой операция коммутативна.

Циклическая группа – все элементы которой являются степенями одного элемента а – она всегда Абелева.

Алгебраические системы – множества, на которых кроме операций заданы отношения. Алгебры – частный случай алгебр систем.

Модели – множества, на которых заданы только отношения – частный случай алгебр систем.

Структура – частично упорядоченное множество, в котором для любых двух элементов а и b существует их пересечение $a \cap b = c$.

$a \cap b$ – такая нижняя грань а и b, что любая другая нижняя грань а и b меньше с.

$a \cup b = d$ – такая верхняя грань а и b, что любая другая верхняя грань а и b больше d.

Структура – это алгебраическая система $\{M; \le; \cap; \cup\}$ с одним бинарным отношением и двумя бинарными операциями.

Формальные системы

Формальные системы – это системы операций над объектами, понимаемыми как последовательности символов; сами операции также являются символами.
Формально – без содержательных интерпретаций символов. Между символами не существует никаких связей и отношений, кроме тех, которые явно описаны средствами самой формальной системы.
Формализация задачи – уточнение задачи, точное явное описание – всё, что существенно для решения задачи, выписано явно.
Формальная теория (исчисление) строится:
1) множество формул, образующих язык теории
2) подмножество формул – аксиомы теории
3) правила вывода теории – $R(F_1, ..., F_n, G)$ – это вычислимое отношение на множестве формул.

Если формулы $F_1, ..., F_n, G$ находятся в отношении R, то формула G называется непосредственно выводимой из $F_1, ..., F_n$ по правилу R.

$F_1, ..., F_n$ – называется посылками правила R, а G – его следствием или заключением.

Вывод формулы **B** из формул $A_1, ..., A_n$ называется последовательность формул $F_1, ..., F_m$ такая, что $F_m = B$, а любая из $F_i\ (i = 1, ..., m)$ есть либо аксиома, либо одна из исходных формул $F_1, ..., F_{i-1}$.

Если существует вывод **B** из $A_1, ..., A_n$ говорят, что **B** выводима из $A_1, ..., A_n$

запись $A_1, ..., A_n \mapsto B$

$A_1, ..., A_n$ называются гипотезами или посылками вывода

Переход от F_{i-1} и F_1 – называется i-м шагом вывода.

Доказательство формулы **B** в теории **T** называется вывод **B** из аксиом.

4. Системный анализ.

Система- множество объектов с набором связей между ними и между их свойствами. Объекты функционируют во времени как единое целое.

Объекты - компоненты системы.

Свойства - качества параметров объектов.

Связи- то, что соединяет объекты и свойства в системном процессе в целое.

1. порядка- функционально необходимые,
2. порядка- дополнительные связи улучшающие работу системы, но не 1 –го порядка,
3. порядка- противоречивые связи.

Физическая система- состоит из естественных или искусственных объектов.

Абстрактные системы- символьные системы → дают метод анализа- Моделирование метод изучения физической системы ее «заменяют» абстрактной системой с теми же отношениями, и задача ставится чисто математическая.

Свойства применимости метода

1. известны имеющиеся в ней связи,
2. количественно определены существенные для системы свойства,
3. известны формы поведения системы (физические и другие законы).

Системы- обладающие всеми этими свойствами встречаются редко.

Окружающая среда- граница, относительно к-й говорят, что система действует внутри нее. Это совокупность объектов, влияющих на действие системы, изменение свойств которых влияет на систему → подсистемы → их исследованием широко занимается теория множеств в современной алгебре.

Методы изучения сложных систем.

Микроскопический- детальное изучение поведения к-й из подсистем в направлении анализа процесса.

Макроскопический- анализ конечного исхода.

Свойства подсистемы- целостность: изменение одной части системы вызывает изменение в других частях.

Обособленность- если этого нет, изменение в системе в такой совокупности → физическая сумма изменений в ее отдельных частях → это обособленное поведение или физически суммативные.

Прогрессирующая изоляция- если изменения приводят к постепенному переходу от целостности к суммативности.

В основном это результат возрастающей дифференциации функции.

Пргрессирующая систематизация- противоположность системной изоляции.

Централизованная система- некоторый элемент системы играет главную роль.

Децентрализованная система- где нет главной.

Исследование операций- наука поиска лучших путей достижения цели.

Операция- действие, объединенные единым замыслом и направленные на достижение определенной цели.

Основной метод изучения операций изучение моделей операций:

1. Определение и математическая формулировка цели операции (показатель качества процесса) и ограничения.
2. Построение математической модели операции.
3. Определение или прогнозирование входной информации.
4. Нахождение оптимального решения.
5. Оценка адекватности решения.

Постулат- оптимальным решением (управлением) является такое, при котором при заданных внешних условиях достигается максимальное значение показателя качества (эффективности целевой функции) операции и соблюдения ограничений.

Требования к критерию оптимизации

1. Представительность- отражение основной роли операции.
2. Критичность к варьируемым параметрам сильно изменяется при изменении параметров, зависящих от правильного решения.

3. Желательно-единственным- если их несколько → сведем к одному **К=к$_1$а$_1$+к$_2$а$_2$+к$_3$а$_3$** → коэффициенты важности частных критериев определяют экспертно или логически

Или превращение части критериев в ограничения.

Или ранжировка критериев- расположение по степени важности.

Критерий Лапласа- $K_{лi}$ определяется оптимальное значение величины **а** при которой максимален критерий К. На величину К оказывает влияние параметр А, точное значение которого неизвестно.

Задаются: $A_1, A_2, \ldots, A_j$ возможными значениями $a_1, a_2, \ldots, a_i$ и рассчитываются все K_{ij}

Итоговый критерий: $K_{лi} = \sum_j K_{ij}$; оптимальны $\mathbf{a}_i$ при максимальном K_{ki}

Если известны вероятности P_j получения величин A_j, то итоговый стохастический критерий: $\overline{K}_i = \sum_j K_{ij} P_j$

Критерий Гурвица- $K_{гi} = \mu K_{ijmax} + (1-\mu) K_{ijmin}$

μ- коэффициент, выбираемый исходя из специфики задачи.

При μ=1- оптимистическая оценка: выбор при max [max K_{ij}].

При μ=0 осторожная оценка.много раз. Находят математическое ожидание и дисперсию.

Критерий Вальда- $K_{вj} = K_{ijmin}$ выбор при [min K_{ij}].

Критерий Сэвиджа- $K_{ci} = \left| K_{ij} - K_{ijmax} \right|$: выбор при $K_{ci} = \min_i \left| K_{ij} - K_{ijmax} \right|$ /

Модель операции- стохастические модели: динамика средних; вероятностные (дискретные и непрерывные) и статистические.

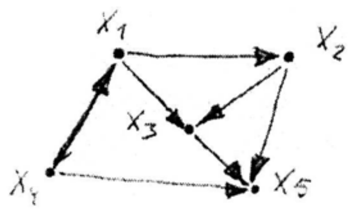
Модели динамики средних- если в процессе участвуют, большое количество однородных единиц, то можно рассматривать математическое ожидание, как неслучайные величины.

Статистические модели применяют для изучения процессов любой сложности.

Метод Монте-Карло. Все случайные величины с помощью датчика случайных чисел заменяются на детерминированные и вычисляется результат. Так повторяется много раз. Находят математическое ожидание и дисперсию.

Теория графов

Абстрактный граф (или просто **граф**) *G (X, U)* – совокупность непустого множества *X* и изолированного от него подмножества *U* (возможно, пустого), представляющего собой множество всех упорядоченных пар (X_i, Xj), где X_i ; $X_j \in X$.
Вершины графа – элементы множества *X*.
Дуги (ребра) графа – элементы множества *U*.



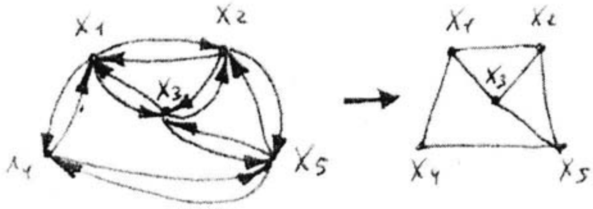
Геометрическое представление графа – множество точек $X = \{x_i\}$, где i = 1, 2, … n в n- мерном евклидовом пространстве E^n и множества простых направленных самонепересекающихся кривых U = $\{\vec{u}_к\}$, где k = 1, 2,… r, соединяющих X_i, $X_j \in X$, которые находятся в некотором отношении друг к другу.
Ориентированный граф (направленный, несимметричный) если все вершины графа соединены дугами. Любой ориентированный граф описывается системой алгебраических уравнений

$$\begin{cases} X_1 = T_{41} X_4 \\ X_2 = T_{12} X_1 \\ X_3 = T_{13} X_1 + T_{23} X_2 \\ X_5 = T_{45} X_4 + T_{35} X_3 + T_{25} X_2 \end{cases}$$

Неориентированный граф (ненаправленный, симметричный) – граф, в котором для двух любых вершин X_i, $X_j \in X$ справедливо $T_{ij} = T_{ji}$. В нем вершины X_i, X_j соединяют направленной кривой – неориентированным ребром.
Смежные вершины – если они определяют ребро.
Смежные ребра – если у них общая вершина или вершина X_i смежна X_j, если $X_j \in ΓX_i$, где $ΓX_i$ – отображение X_i на множестве *X*.

Еще способ задания графа – если задано непустое множество X и отображение Г множества X в X, которые обозначаются G (X, Г), каждую вершину $X_i \in X$ соединяют со всеми вершинами $X_j \in \Gamma X_i$.

$$G(X,\Gamma)\begin{cases} X=\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\} \\ \Gamma X_1=\{X_2,X_3,X_4\} \\ \Gamma X_2=\{X_1,X_3,X_5\} \\ \Gamma X_3=\{X_1,X_2,X_5\} \\ \Gamma X_4=\{X_1,X_5\} \\ \Gamma X_5=\{X_2,X_3,X_4\} \end{cases}$$



Вершина X_i **инцидентна** ребру u_i, если она является началом и концом ребра. Ребро u_i **инцидентно** вершине X_i, если оно выходит или входит в нее.
Степень вершины ρ(X_i) – число ребер, инцидентных вершине X_i. Для графа (см. рис.)

$$\rho(X_1)=\rho(X_2)=\rho(X_3)=\rho(X_5)=3$$
$$\rho(X_4)=2$$

В неориентированном графе каждое ребро инцидентно двум вершинам, потому:

$$\sum_{i=1}^{n}\rho(X_i)=2|U|,$$

где $n = |X|$ - число вершин графа, $|U|$ - число ребер графа.
Изолированная вершина – неинцидентная никакому ребру.
Нуль граф – граф состояний из изолированных вершин.
Петля – связь вершины самой с собой, т. е. $U=(X_i,X_j)\sim X_iT_{ij}X_j$. Необходимым и достаточным условием отсутсвия петель в графе является $\forall X_i \in X[X_i \notin \Gamma X_i]$. Петля считается неориентированной.
Конечный граф – если число ребер конечно. Если у него отсутствуют петли и изолированы вершины – **регулярный**. **Бесконечный граф** – число ребер бесконечно.
Однородный степени *t* граф – если все ρ(X) графа равны t. Число ребер в таком графе $|U| = 0{,}5\ |X|\ t$.
Сильносвязанный (полный) граф – граф, все вершины которого попарно смежные. Для него

$$\rho(X_i)=n-1;$$
$$|U|=n\frac{n-1}{2}.$$

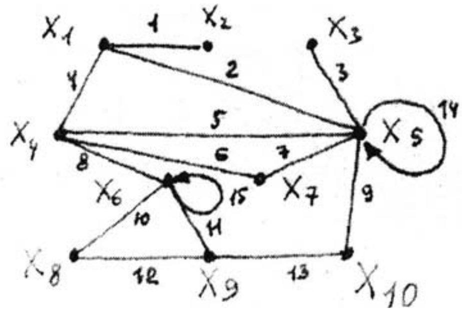
Плотный граф – полный граф, у которого при каждой вершине имеется петля.
Связанный граф – если перемещаясь по ребрам из вершины в вершину можно попасть в каждую вершину.
Несвязанный граф – состоящий из отдельных фрагментов.
Ранг графа *R*(*G*) = *n* – *p* – разность между числом вершин графа n и числом компонент связности p.
Изоморфность графов G и G' – если они имеют одинаковое число вершин и если каждой паре вершин, соединенных ребром, в одном графе соответсвует такая же пара вершин, соединенных ребром в другом графе.
Мультиграф – граф, у которого существует хотя бы одна пара вершин, соединенная m ребрами в одном направлении. При этом ребра связывающие одну и туже пару вершин – **кратные**.
Мультичисло графа – максимальное число кратных ребер в графе.
Частичный граф – если в графе G (X, Г) опущены некоторые ребра, а число вершин осталось прежним, т. е. G (X, Γ_p).
Подграф получается из G (X, Г) опусканием некоторых вершин и инцидентных им ребер, т. е. G (X_l, Γ_a). Запись $X_1 \in X;\ \forall X_i \in X_1[\Gamma_a X_i = \Gamma X_i \cap X_1]$.
Частичный подграф считают граф G (X_l, Γ_{pa}), получаемый из графа G (X, Г) с помощью операций, свойственных одновременно и частичным графам, и подграфам, т. е. $X_1 \in X;\ \forall X_i \in X_1[\Gamma_{pa} X_i \in \Gamma X_i n \cap X_1]$.
Дополняющая часть графа – для графа G (X, Г)существует единственная дополняющая часть, состоящая из всех ребер графа G (X, Г), которые не принадлежат этой части. Пример: граф $\overline{G}(X',\Gamma'_a)$ является дополнением подграфа G (X_l, Γ_a) графа G (X, Г), если:
$X = X_1 \cup X';\ \forall X_i \in X[\Gamma X_i = \Gamma_a X_i \cup \Gamma_a X_1]$.
Цикл графа – последовательность ребер $U_1 = (X_1, X_i)$,…, $U_k = (X_j, X_1)$, при котором в результате обхода всех вершин графа X_1, X_2,…X_i…X_j по этим ребрам возвращаются в исходную вершину X_1, при этом каждое ребро встречается только один раз, вершины могут повторятся несколько раз.
Простой цикл – если в нем нет повторяющихся вершин.
Сложный цикл – если в нем есть повторяющиеся вершины.
Элементарный цикл – если он не содержит в себе других циклов.
Минимальный цикл – если минимальное число ребер.
Максимальный цикл – если максимальное число ребер.

Цепь – последовательность ребер цикла (цикл – замкнутая цепь).
Эйлеров цикл – цикл, в котором содержатся все ребра графа (граф, имеющий такой цикл – эйлеров граф).
Необходимое и достаточное условие наличия в конечном, связанном графе эйлерова цикла является четность степеней всех его вершин.
Прикладное задание – выбор наиболее рационального пути движения без холостых ходов – эйлеров цикл.
Гамильтонов цикл – если он проходит через каждую вершину графа один раз.
Критерий Дирака: граф имеет гамильтонов цикл, если сумма локальных степеней двух любых вершин графа больше или равна числу вершин, т. е. $\forall X_i, X_j \in X\left[\rho(X_i)+\rho(X_j)\geq n\right]$.
Прикладное назначение – для построения плоского изображения графа, коммуникационные задачи.
Дерево – связанный неориентированный граф, не содержащий циклов.
Лес – несвязанный граф без циклов, отдельные компоненты связности которого являются деревьями.
Дерево, построенное на n вершинах содержит $r_i = n - 1$ ребер. Лес, состоящий из p компонент связи имеет $r_f = n - p$ ребер. Для любого графа имеющие циклы $r > n - p$. Число различных деревьев, которые можно построить на n вершинах $t_n = n^{n-2}$.

Способы задания графов

1. Совокупность двух множеств: X – множество вершин и U – множество ребер графа, т. е. $G(X,U)$.
2. Совокупность множества X и отображения Г множества X в X, т. е. $G(X,\Gamma)$.
3. Матрица смежности.
   Графу $G(X,U)$ можно поставить в соответствие матрицу смежности
   $$A=\left\|a_{ij}\right\|_{n\times n}\left(n=|X|\right),$$
   общий элемент которой
   $$a_{ij}=\begin{cases}m(X_i,X_j),\ \text{если}\ (X_i,X_j)\in U\\ 0,\ \text{если}\ (X_i,X_j)\notin U\end{cases},$$
   где $m(X_i, X_j)$ – кратность ребер между вершинами X_i, X_j.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
X_2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
X_4	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
X_5	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
X_6	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
X_7	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
X_8	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
X_9	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
X_{10}	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0



4. Матрица весовых соотношений
   Это квадратная матрица $C=\left\|C_{ij}\right\|_{n\times n}$, общий элемент которой $C_{ij}=\begin{cases}T_{ij},\ \text{если}\ X_j\ \text{смежна}\ X_i\\ 0,\ \text{если}\ X_j\ \text{не смежна}\ X_i\end{cases}$, где T_{ij} – вес связи $(X_i,\ X_j)$.
5. Матрица длин – это квадратная матрица $D=\left\|d_{ij}\right\|_{n\times n}$, общий элемент которой $d_{ij}=\begin{cases}l_{ij},\ \text{если}\ X_j\ \text{смежна}\ X_i\\ 0,\ \text{если}\ X_j\ \text{не смежна}\ X_i\end{cases}$, где l_{ij} – длина ребра $(X_i,\ X_j)$.
   $$l_{ij}=\sqrt{(S_i-S_j)^2+(t_i-t_j)^2},$$
   где S_i, t_i – координаты вершин X_{ij},
   S_j, t_j – координаты вершин X_{ji}.
   Часто пользуются линейной метрикой $l_{ij}=\left|S_i-S_j\right|+\left|t_i-t_j\right|$;

Степенная метрика $l_{ij} = \left(S_i - S_j\right)^k + \left(t_i - t_j\right)^k$;

Один из критериев качества $l_{ij} - \min$.

6. Матрица инцидентности.

   Прямоугольная матрица $S = \left\| S_{ij} \right\|_{n \times r} \left(n = |X|; r = U\right)$ строки соответствуют вершинам, столбцы – ребрам.

$$S_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если } u_j \textit{ инцидентно } X_j \\ 0, \textit{если } u_j \textit{ инцидентно } X_i \end{cases}$$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}
X_1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_4	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
X_5	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
X_6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
X_7	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
X_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
X_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
X_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0

Петли надо исключать!

Действия над графами

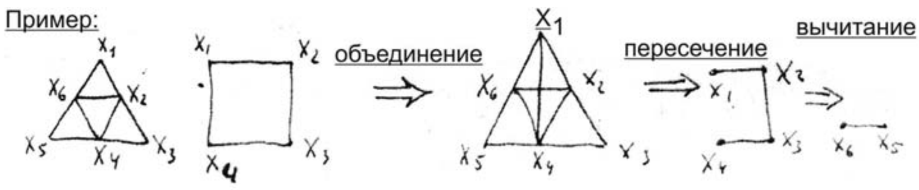
Объединение графов

$$G(X, \Gamma) = G_1(X_1, \Gamma_1) \cup G_2(X_2, \Gamma_2)$$

1. Вершины графа $G(X, \Gamma)$ – объединение вершин исходных графов $X = X_1 \cup X_2$.
2. Отображение для каждой вершины графа $G(X, \Gamma)$ получают путем объединения отображений этой вершины для исходных графов

$$\text{A}X_i \in X\left[\Gamma X_i = \Gamma_1 X_i \cup \Gamma_2 X_i\right]$$

Пример



$$X = X_1 \cup X_2 = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$$
$$\Gamma X_1 = \Gamma_1 X_1 \cup \Gamma_2 X_1 = \{X_2, X_6\} \cup \{X_2, X_4\} = \{X_2, X_4, X_6\}$$
$$\Gamma X_2 = \Gamma_1 X_2 \cup \Gamma_2 X_2 = \{X_1, X_4, X_6, X_3\} \cup \{X_1, X_3\} = \{X_1, X_3, X_4, X_6\}$$
$$\Gamma X_3 = \Gamma_1 X_3 \cup \Gamma_2 X_3 = \{X_2, X_4\} \cup \{X_2, X_4\} = \{X_2, X_4\}$$
$$\Gamma X_4 = \Gamma_1 X_4 \cup \Gamma_2 X_4 = \{X_2, X_3, X_5, X_6\} \cup \{X_3, X_1\} = \{X_1, X_2, X_3, X_5, X_6\}$$
$$\Gamma X_5 = \Gamma_1 X_5 \cup \Gamma_2 X_5 = \{X_4, X_6\} \cup \varnothing = \{X_4, X_6\}$$
$$\Gamma X_6 = \Gamma_1 X_6 \cup \Gamma_2 X_6 = \{X_5, X_4, X_2, X_1\} \cup \varnothing = \{X_1, X_2, X_4, X_6\}$$

Пересечение графов

$$G(X, \Gamma) = G_1(X_1, \Gamma_1) \cap G_2(X_2, \Gamma_2)$$

1. Вершинами графа $G(X, \Gamma)$ является пересечение вершин $X = X_1 \cap X_2$.
2. Отображение для каждой вершины графа $G(X, \Gamma)$ получают путем пересечения отображений этой вершины для исходных графов

Пример

$X = X_1 \cap X_2 = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$

$\Gamma X_1 = \{X_2, X_6\} \cup \{X_2, X_4\} = X_2$

$\Gamma X_2 = \{X_1, X_4, X_6, X_3\} \cap \{X_1, X_3\} = \{X_1, X_3\}$

$\Gamma X_3 = \{X_2, X_4\} \cup \{X_2, X_4\} = \{X_2, X_4\}$

$\Gamma X_4 = \{X_2, X_3, X_5, X_6\} \cup \{X_3, X_1\} = \{X_3\}$

Вычитание графов

$$G(X, \Gamma) = G_1(X_1, \Gamma_1) \setminus G_2(X_2, \Gamma_2)$$

1. Вершинами графа $G(X, \Gamma)$ являются вершины графа $G_1(X_1, \Gamma_1)$, за исключением вершин общих для исходных графов $X = X_1 \setminus X_2$.
2. Отображение для каждой вершины графа $G(X, \Gamma)$ является пересечение множества вершин этого графа и отображение той же вершины в графе $G_1(X_1, \Gamma_1)$

$$\forall X_i \in X[\Gamma X_i = X \cap \Gamma X_i]$$

Пример

$X = X_1 \setminus X_2 = \{X_5, X_6\}$

$\Gamma X_5 = X \cup \Gamma_1 X_5 = \{X_6\}$, т.е. $X_5 \cap \{X_5, X_6\} = \{X_6\}$

$\Gamma X_6 = X \cup \Gamma_1 X_6 = \{X_5\}$, т.е. $X_6 \cap \{X_6, X_5\} = \{X_5\}$

Характеристические числа графов

Цикломатическое число $\nu(G)$

Указывает то нм. число ребер, которое необходимо удалить из графа $G(X, U)$ неориентированного и без петель, чтобы получить дерево (для связанного графа) или лес (несв.), то есть добиться отсутствия циклов.

$$\nu(G) = r - n + p,$$

где $n = |X|$ – мощность множества X, т. е. число вершин;
$r = |U|$ – число связей (ребер);
p – число компонент связности.

<u>Теорема</u>: циклометрическое число мультиграфа равно максимальному числу независимых циклов (цикл независимый, если в n-ом из них содержится по крайней мере одно ребро, не входящее в другие циклы).

Хроматическое число $k(G)$

Наименьшее возможное число подмножеств, получаемое в результате разбиения вершин графа $G(X, U)$ на k непересекающихся подмножеств:

$$X_1, X_2, ..., X_k, X = \overset{k}{\underset{i=1}{U}}, \forall X_i, X_j \in X[X_i \cap X_j = \varnothing]$$

так чтобы две смежные вершины X_S, $X_t \in X$ принадлежали разным подмножествам, то есть чтобы ребра графа соединяли вершины из разных подмножеств:

$$\forall X_S \in X[X_S \in X_i \Rightarrow \Gamma X_S \notin X_i]$$

<u>Графы Кенига</u> $G(X_1, X_2, U)$ – граф для каждого множества вершин можно разложить на два пересекающихся подмножества (или бихроматические графы).

<u>Теорема Кенига</u>: обыкновенный граф $G(X, U)$ является бихроматическим тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

Если граф – дерево, то он бихроматический граф.

Граф Кенига – полный – если каждая вершина $X_i \in X$ смежна с вершиной $X_j \in X_2$.

Граф критический, если удаление любой вершины $X_i \in X$ с инцидентными ей ребрами уменьшает хроматическое число графа.

Полный граф всегда критический.

<u>Оценка хроматического числа:</u>

1. $1 \le k(G) \le |X| = n$
2. при отсутствии в графе петель и кратных ребер

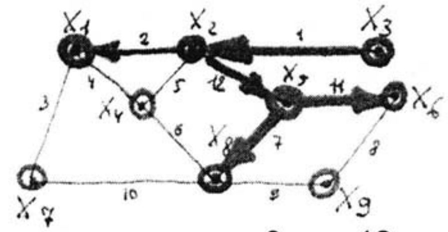
$$-\left[-\frac{n}{\left[\frac{n^2-2r}{n}\right]}\left(1-\frac{\left\{\frac{n^2-2r}{n}\right\}}{1+\left[\frac{n^2-2r}{n}\right]}\right)\right] \le k(G) \le \left[\frac{3+\sqrt{9+8(r-n)}}{2}\right]$$

Квадратная скобка – взятие целой части заключенного в них числа
Фигурная скобка – взятие дробной части заключенного в них числа.
где $|X| = n,\ |U| = r$

3. $K(G) \le \rho_{\max(X)} + 1,\ \rho_{\max(X)} = \max\limits_{X_{ш} \in X} \rho(X_i)$ – степень вершины.

Для полных графов: $k(G) = \rho(X) + 1$.

4. практический метод:



для него $n = 9 \quad r = 12$

1) выбираем вершину с min локальной степенью и метим красным точку X_3, т. к. $\rho(X_3) = 1$.
2) Вершины смежные с ней метим в синий X_2
3) Вершины смежные X_2, но не смежные между собой и с X_3 красим в красный X_1 и X_5.
4) Вершины смежные с X_5, но не смежные между собой и с X_2 красим в синий X_6, X_8.
5) Больше под это правило не подходит ни одна вершина, их мы окрашиваем в желный.

Всего ушло 3 краски $k(G) = 3$;

$$-\left[\frac{9}{\left[\frac{81-24}{9}\right]}\left(1-\frac{\left\{\frac{81-24}{9}\right\}}{1+\left[\frac{81-24}{9}\right]}\right)\right] = -\left[\frac{9}{6{,}33}\left(1-\frac{\{6{,}33\}}{1+[6{,}33]}\right)\right] = -\left[-\frac{9}{6}\left(1-\frac{0{,}33}{7}\right)\right] = [1{,}43] = 1$$

$$\left[\frac{3+\sqrt{9+8(12-9)}}{2}\right] = \left[\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right] = \left[\frac{3+5{,}75}{2}\right] = [4{,}37] = 4$$

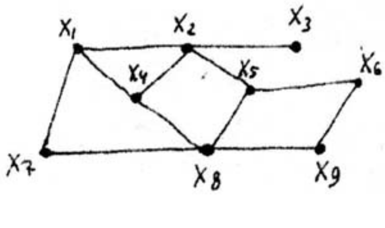
$$1 \le k(G) \le 4$$

Число внутренней устойчивости $a(G) = \max\limits_{F_i < \Im} |F_i|$

Это величина , равная мощности наибольшего внутренне устойчивого подмножества из семейства $\Im = \{F_1, F_2, ..., F_m,\}$ внутренне устойчивых подмножеств (если в графе $G(X, U)$ имеется некоторое подмножество $F_i < X$ несмежных между собой вершин, т. е. $\forall X_i \in F_i\ \left[F_i \cap \Gamma X_j = \varnothing\right]$, то такое подмножество F_i – внутренне устойчивое)

Непополнимое внутреннее устойчивое подмножество, если его нельзя дополнить ни одной вершиной $X_i \in X$ без потери свойств внутренней устойчивости. Поэтому нб. внутреннее подмножество всегда пополнимо.

$F_1 = \{X_3, X_4, X_5, X_7, X_9\}$
$F_2 = \{X_2, X_6, X_7\}$
$F_3 = \{X_3, X_4, X_6, X_7\}$
$F_4 = \{X_2, X_7, X_9\}$
$F_5 = \{X_2, X_6, X_8\}$
$F_6 = \{X_1, X_3, X_5, X_9\}$
$F_7 = \{X_1, X_3, X_6, X_8\}$
$a(G) = |F_1| = 5$



$$\boxed{k(G) \cdot a(G) \ge |X| = n}$$

Проверка: $3 \cdot 5 = 15 > 9$

Для графа без петель и кратных ребер:

$$a(G) \le \left[\tfrac{1}{2} + \sqrt{\left(n - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 2r} \right] = \left[0{,}5 + \sqrt{(9 - 0{,}5)^2 - 2 \cdot 12} \right] = \left[0{,}5 + \sqrt{48{,}3}\right] = \left[0{,}5 + 6{,}94\right] = 7,\ \text{т.е. } 5 < 7$$

Теорема: подмножество вершин F_g является внутренне устойчивым тогда и только тогда, когда $\Pi_G = 1$ для системы переменных $\{X_i^\circ\}$, определяемых

$$X_i^\circ = \begin{cases} 1, \text{ если } X_i \notin F_g \\ 0, \text{ если } X_i \in F_g \end{cases},$$

где $\Pi_G = \prod_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} S_{ij} X_i$ в котором j-й сомножитель представляет собой сумму двух слагаемых, соответствующих вершинам инцидентных ребру $u_j \in U$ графа $G(X, U)$.

Получение внутренне устойчивого неполного подмножества

$$\Pi_G = (X_1 + X_2)(X_1 + X_4)(X_1 + X_7)(X_2 + X_3)(X_2 + X_4)(X_2 + X_5)(X_4 + X_8)\times$$
$$(X_5 + X_6)(X_5 + X_8)(X_6 + X_9)(X_7 + X_8)(X_8 + X_9)$$

По закону поглощения: $(a+b)(a+c)...(a+q) = a + bc...q$, учитывая, что $X_i^2 = X_i$, получим:

$$\Pi_G = (X_1 + X_2, X_4, X_7)(X_2 + X_3, X_4, X_5)(X_6 + X_5, X_9)(X_8 + X_4, X_5, X_7, X_9) =$$
$$= (X_1X_2 + X_1X_3X_4X_5 + X_2X_4X_7 + X_2X_4X_5X_7)(X_6X_8 + X_6X_4X_5X_7X_9 +$$
$$+ X_8X_5X_9 + X_4X_5X_7X_9) = (X_1X_2X_6X_8 + X_1X_2X_6X_4X_5X_7X_9 +$$
$$+ X_1X_2X_8X_5X_9 + X_1X_2X_8X_5X_9 + X_1X_2X_4X_5X_7X_9 + X_1X_3X_4X_5X_6X_8 +$$
$$+ X_1X_3X_4X_5X_6X_7X_9 + X_1X_3X_4X_5X_8X_9 + X_1X_3X_4X_5X_7X_9 +$$
$$+ X_2X_4X_7X_6X_8 + X_2X_4X_7X_6X_5X_9 + X_2X_4X_7X_8X_5X_9 + X_2X_4X_7X_8X_5X_9 +$$
$$+ X_2X_4X_7X_5X_9 + X_2X_4X_5X_7X_6X_8 + X_2X_4X_5X_7X_6X_9 + X_2X_4X_5X_7X_8X_9 +$$
$$+ X_2X_4X_5X_7X_9)$$

Число внешней устойчивости $\beta(G) = \min\limits_{R_l \in \mathrm{B}} |R_l|$

где семейство $\mathrm{B} = \{R_1, R_2, ..., R_S\}$ всех внешне устойчивых подмножеств графа $G(X, U)$, где $R_l \in X$ - подмножество вершин не смежных остальным вершинам графа, т.е.

$$\forall X_i \in (X \setminus R_l) \exists X_i \in R_l \left[(X_i, X_j) \in U\right]$$

Пример:

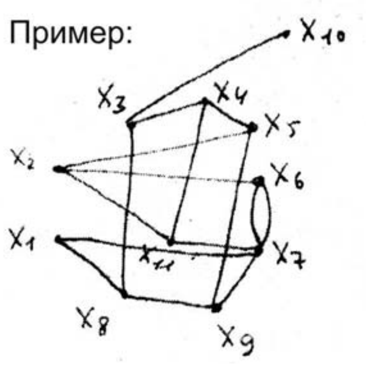
$\beta(G) = 3$. Если $a(G) = \beta(G)$, то это подмножество ядро графа.

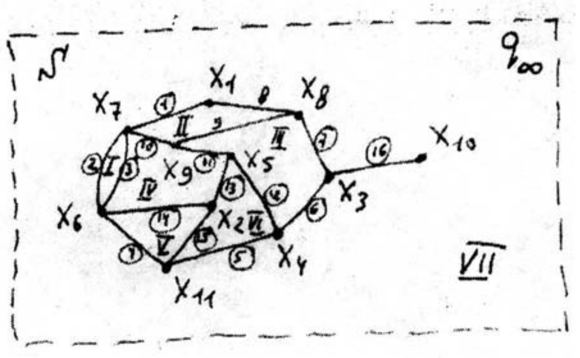
$$N = \Im U \mathrm{B}$$

Плоские графы и их свойства

Плоский (планарный) граф $G(X, U)$ если он имеет геометрическую реализацию в двухмерном евклидовом пространстве, т. е. может быть расположен на плоскости так, что все его ребра пересекаются только в вершинах X графа.

Пример:





Лемма – связный плоский граф с n вершинами, r ребрами и k гранями (включая внешнюю или бесконечную грань) удовлетворяет формуле Эйлера $n - r + k = 2$.

Пример: $n = 11;\; r = 16;\; k = VII$

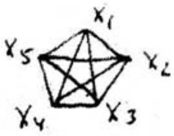
$$11 - 16 + 7 = 2$$

Расширение графа – введение некоторых на некоторых ребрах графа новых вершин степени два.
Сжатие графа – удаление промежуточных вершин степени два. Получившийся в результате расширения или сжатия граф называется **изоморфным графом** исходному.

Критерии планарности графов

1. Если $r > 3(n\text{-}2)$ – граф заведомо неплоский, $r \le n + 2$ – граф заведомо плоский.
2. При $n + 2 < r \le 3(n - 2)$

Теорема Понтрягина-Куратовского: граф является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, изоморфного с точностью до вершин степени два одному из графов Понтрягина-Куратовского.
Графы Понтрягина-Куратовского:



первый

второй (граф Кенига)

3. теорема Уитни: необходимым и достаточным условием планарности графа является наличие у него двойственного графа.

Существуют некоторые методы определения планарности графов и получения их плоских изображений. Они приведены в кн. Б. Н. Дроботенко, А. С. Малика «Автоматизация конструирования РЭА», стр. 57…66.
6. Элементы теории алгоритмов.

Алгоритм – информация об организации некоторого процесса
Реализационная система – система, осуществляющая процесс.
Реализация алгоритма – конкретное выполнение алгоритма в соответствии с заданным алгоритмом.
Детерминированный алгоритм – если алгоритм выражен системой правил, однозначно опредеяющих результа процесса при заданных исхоных данных.
Вероятностный (стохастический) алгоритм – если правила не однозначны и результат можно предсказать только стохастически (т.е. в среднем).
Эвристический алгоритм – если нельзя осуществить ни детерминированный, ни стохастический алгоритм, а можно только сформулировать содержательные указания о целесообразном направлении процесса.
Существует:

- Общая теория алгоритмов – в ней ставятся и решается вопрос о принципиальной осуществимости алгоритма, но не обращается внимание на его реализуемость. В ней предполагается наличие системы с бесконечно большой памятью и быстродействием. Разрабатывалась она для детерминированных алгоритмов.
- Прикладная теория алгоритмов – в ней учитываются конкретные характеристики реализующей системы, накладывающие ограничения.
- Структурная теория алгоритмов - алгоритмы рассматриваются как сети (списки, составленные из блоков – операторов, отражающих некоторые элементарные действия – отдельные шаги-этапы) в процессе реализации алгоритмов. Алгоритмами в ней считают конструктивно задаваемые соответствия между словами в абстрактных алфавитах.

Абстрактный алфавит – любая конечная совокупность объектов, называемых буквами или символами данного алфавита (т.е. конечное множество различных символов).
Слово или **строка** алфавита – конечное множество различных символов, последовательность которых упорядочена.
Длина слова – число символов в слове.
Алфавитный оператор или алфавитное отображение – всякое соответствие, осуществляющее перевод слов некоторого алфавита в слова того же или какого – либо другого фиксированного алфавит. При этом входной – первый алфавит. Выходной – алфавит данного оператора. Т.е. алфавит – оператор – функция, задающая соответствие между словами входного алфавита и словами этого же или другого выходного алфавита.
Область определения – совокупность всех слов, на которых алфавитный оператор определен.
Программирование – расшифровка укрупненных операторов алгоритма в командах на языке ЭВМ.
Программа – запись алгоритма на языке, воспринимаемом ЭВМ.
Алгоритмирование – неформальное построение алгоритма для определенной цели, направленной для перевода некоторых исходных данных в искомые результаты.
Взаимосвязь между операторами в схеме R – алгоритмов может выражаться последовательной структурой ABC, параллельной структурой A, B, C, циклической структурой A, B, q, C, иерархической структурой $A,\ A := \Gamma[B,C]$. Здесь A,B,C – любые операторы, q – оператор переключения.

Алгебраическая теория алгоритмов

Рекурсия – способ задания функции, при котором значение определяемой функции для произвольных аргументов выражается через значение этой функции для меньших значений аргументов.
Операция суперпозиции – заключается в подстановке одних арифметических функций вместо аргументов других функций.
Операция примитивной рекурсии – позволяет построить (n+1) мерную функцию по двум заданным функциям, одна из которых (n) мерная, а другая – (n+2).
Операция наименьшего корня (операция минимизации) – позволяет определить новую арифметическую функцию $f(X_1,\dots,X_n)$ от n переменных с помощью ранее построенной арифметической функции $g(X_1,\dots,X_n)$ от (n+1) переменных.
Логические схемы алгоритма – выражения, составленные из операторов и логических условий, следующих один за другим, после каждого логического условия ставится стрелка, которая оканчивается у какого – либо из операторов, например оператор A,B,C и логические условия p и q можно составить:
$\downarrow^2 Ap\uparrow^1 B\uparrow^1 q\uparrow^2 C$ или $p\uparrow^1 A\downarrow^2 B\downarrow^1 Cq\uparrow^2$,

знак $\uparrow^i$ обозначает начало стрелки, $\downarrow^{\text{i}}$ – конец стрелки, одинаковые номера - началои конец одной стрелки.

Типы операторов:

Арифметические операторы – для записи арифметических действий. Обозначаются начальными заглавными буквами латинского алфавита.

Операторы проверки логических условий – определяют порядок работы алгоритма. Обозначаются малыми буквами латинского алфавита.

Операторы переадресации – изменяющие адреса в приказах и различные параметры, от которых зависят операторы программы, восстанавливающие значения параметров и адресов. Которые были изменены в процессе работы алгоритма.
Оператор, изменяющий параметр i(адрес или параметр) на единицу обозначается F(i), оператор, увеличивающий параметр на единицу i на n единиц - $F^n(i)$, уменьшающий параметр i на n единиц - $F^{-n}(i)$.

Оператор переноса – для переноса одного параметра на место другого. $[a \to b]$, a определяет, что переносится, b – что заменяется.

Операторы формирования – формируют начальные значения некоторых операторов алгоритма. Они, перенося некоторые заранее запасенные приказы в определенные места алгоритма. Если начальное значение параметра i равно l, то операцию записывают $\{l \to i\}$.

Специальные знаки перехода:

$\overset{n}{\underset{m}{[}}$ - переход либо к оператору с номером n, либо к оператору с номером m.

$\underset{m}{\llcorner}$ - переход к оператору, расположенному справа от данного символа, либо к оператору с номером m.

$\overset{n}{\ulcorner}$ - переход к оператору с номером n, либо к оператору, расположенному справа от данного символа.

Пример:

$$1)\ y=\sum_{n=1}^{50}\frac{n}{n+1};$$

$$U_0A_1A_2A_3P_4\underset{2}{\llcorner}A_5;$$

$U_0 -$ оператор начала,

A_1 - оператор, задающий n=1, y=0,

A_2 - расчитывает y: $y+n\big/_{n+1}$,

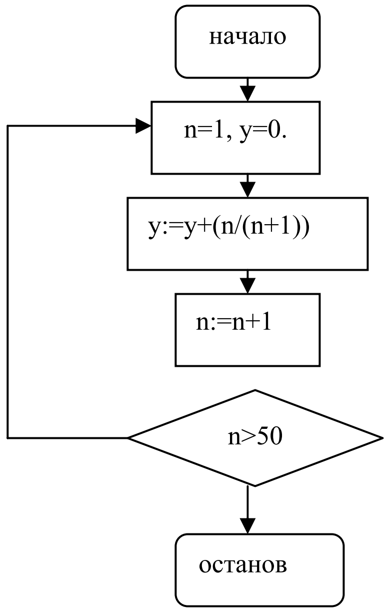
A_3 - увеличивает n на единицу.

P_4 - проверяет выполнение n>50,

A_5 - останов.

$$2)\ y=\prod_{n=1}^{k}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

$$U_0A_1A_2A_3P_4\underset{2}{\llcorner}A_5.$$



Геометрическая теория алгоритмов – алгоритмы строят в виде множеств, между которыми вводят связи, носящие характер отображений. Граф схема алгоритма – ориентированный граф с конечным множеством соединенных между собой вершин-узлов схемы. Каждому узлу дается вход-выход и элементарный оператор. ГОСТ 19428-74.

<u>Оценка алгоритмов:</u>

Сложность – т.е. число элементарных операций, записанных в программе, направленных на решение данной задачи (от 10 до 100 тыс. операций).
Связность – min машинной памяти.
Массовость – применимость алгоритмов к большему классу задач.

<u>Оптимизация алгоритмов:</u>

- Использование рекурсии и рекуррентных отношений.
- Расчленение сложного алгоритма, выделение подпрограмм, унификация подалгоритмов и подпрограмм.
- Преобразование логической схемы алгоритма таким образом, чтобы действия над внешними переменными не выполнялись бы во внутреннем цикле.
- Использование приближенных значений вместо точных, аппроксимация, экстраполяция, интерполяция.
- Разработка эвристических приемов улучшения алгоритмов.

Особенностью математического программирования является то, что поиск оптимального решения всегда предполагает построение математической модели, т.е. представление в математической форме взаимосвязи целевой функции с параметрами задачи. При формировании задачи необходимо, чтобы хотя бы некоторые характеристики оптимальности имели количественное выражение. Качественные характеристики учитываются дополнительно и являются своеобразным «фоном» данной модели. Используемые в математических моделях ограничения представляют собой систему соотношений, сужающих область допустимых значений переменных, подлежащих оптимизации (обычно ограничения возникают из ТУ). Выражение через параметры оптимизации целевой функции и ограничения составляют математическую модель рассматриваемой задачи.

Линейное программирование.

Показатель качества выражают линейно через параметры проектируемой системы, а условия, которым должны удовлетворять искомые параметры записывают в виде линейных равенств и неравенств. Ищут оптимальный показатель качества.

Математические формулировки.

Определить такие значения переменных $X^* = \{X^*_1, \ldots, X^*_n\}$, удовлетворяющих системе ограничений:

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i R_j b_j$, где j=1, 2..., m. При которых достигается max целевой функции:

$F(X) = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$, где i=1, 2, ..., n. $R_j -$ один из знаков =, $\leq$, $\geq$;

$a_{ji}, b_j, c_i -$ заданные действительные числа.

Система ограничений приводится к каноническому виду:

$$y_i + \sum_{i=1}^{n} a_{ji} X_i = b_j$$

Множество $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$, удовлетворяющее системе ограничений называют допустимым решением.

Множество всех допустимых решений $L(X)$ - допустимое множество решений.

$X^* = \{X^*_1, \ldots, X^*_n\}$ - оптимальное решение. Решение оптимально, если $\begin{matrix} F(X^*) = \max(\min) \\ F(X) \forall L(X) \end{matrix}$

Методы решения задач:

Симплекс метод:

1. По определенному правилу находим какую – либо вершину, принадлежащую множеству допустимых решений. Проверяем, не соответствует ли данная вершина оптимальному значению целевой функции. Если да – задача решена.
2. Если не решена, то по определенному правилу проверяем, нельзя ли на данном шаге утверждать, что целевая функция не ограничена сверху (снизу) на множестве допустимых решений при отыскании max(min) функции. Если да, то задача не имеет решений.
3. Если задача имеет решение, то по определенному правилу находим новую вершину, в которой целевая функция имеет более оптимальное значение. Далее переходим к пункту 1.

<u>Модифицированное жорданово исключение</u> – упрощает процесс поиска базисных решений при большом числе переменных, при решении задач Симплекс-методом.

Стр. 123.

<u>Венгерский метод</u> – строится на основе ряда эквивалентных преобразований матриц, задач линейного программирования.

Утверждения:

1) задачи линейного программирования называют эквивалентными, если их оптимальные решения (планы) совпадают;
2) преобразование, приводящее задачу линейного программирования в эквивалентную, называют эквивалентным.

Пример: Задана матрица эффективности:

$$C = \begin{array}{c} \\ A1 \\ A2 \\ A3 \\ A4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} B1 & B2 & B3 & B4 \end{matrix} \\ \begin{Vmatrix} 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 12 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \end{Vmatrix} \end{array}$$

где – A1, A2, A3, A4 – рабочие
- B1, B2, B3, B4 – виды работ
- каждый элемент матрицы соответствует эффекту, который может быть получен при использовании конкретного рабочего на данной работе.

Требуется разместить их так, чтобы общая эффективность их использования дала максимальный эффект.

Решение:

1. отыскиваем максимальные эффекты в каждом из столбцов матрицы C

B1 = max $\{C_{i1}\}$ = 5 B2 = max $\{C_{i2}\}$ = 8

$B3 = \max \{C_{i3}\} = 12$ $B4 = \max \{C_{i4}\} = 11$

2. Вычитаем каждый элемент матрицы C из максимального элемента соответствующего столбца:

$$C^1 = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 9 & 7 \end{Vmatrix}$$

3. Отыскиваем min элементы в каждой из строк матрицы C^1

$A^1_1 = \max \{C_{j1}\} = 0$

$A^1_2 = \max \{C_{j2}\} = 4$

$A^1_3 = \max \{C_{j3}\} = 0$

$A^1_4 = \max \{C_{j4}\} = 4$

4. Вычитаем из каждого элемента матрицы C^1 минимальный элемент соответствующей строки:

$$C_0 = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{Vmatrix}$$

5. Образуем первоначальную систему независимых нулей, отмечая их звездочками. Так, чтобы их число *к* было меньше n = 4.

6. Выделяем столбцы матрицы содержащие 0* и отмечаем их знаком +

$$\begin{array}{c} C_0 = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 5 & 0^* \\ 0^* & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0^* & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{Vmatrix} \\ \quad\;\; + \quad\; + \qquad\quad + \end{array}$$

7. Среди невыделенных элементов матрицы C_0 (что лежат в столбце j = 3) имеется невыделенный 0 (C_{33}), и он располагается в строке, где имеется 0*. Преобразуем матрицу.

$$C_0 = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 5 & 0^* \\ 0^* & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0^* & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{Vmatrix}$$

8. Во 2-м столбце j = 2 есть ещё один невыделенный нуль, и он располагается в строке, где есть 0*. Преобразуем матрицу.

$$C_0 = \begin{array}{cccc|c} + & + & & + & \\ \hline 2 & 3 & 5 & 0^* & \\ 0^* & 0 & 2 & 4 & \\ 0 & 0^* & 0' & 4 & + \\ 0 & 0 & 5 & 3 & \end{array}$$

9. 0 на месте C_{31} выделить нельзя, т.к. он находится в ранее выделенной строке.

0 на месте C_{41} можно выделить штрихом, т.к. в 4-ой строке нет 0*.

$$C_0 = \begin{array}{cccc|c} + & + & & + & \\ \hline 2 & 3 & 5 & 0^* & \\ 0^* & 0' & 2 & 4 & + \\ 0 & 0^* & 0' & 4 & + \\ 0 & 0 & 5 & 3 & \end{array}$$

10. Построение цепочки нулей с последнего выделенного 0’ на месте C_{41}

Получим $\mathbf{C_{41} \to C_{21} \to C_{22} \to C_{32} \to C_{33}}$

$$C_0 = \begin{array}{cccc|c} + & + & & + & \\ \hline 2 & 3 & 5 & 0^* & \\ 0^* & \to 0' & 2 & 4 & + \\ 0 & 0^* & \to 0' & 4 & + \\ 0' & 0 & 5 & 3 & \end{array}$$

11. Убираем пометки * около нулей, а на место 0’ ставим 0*.

$$C_0 = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 5 & 0^* \\ 0 & 0^* & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0^* & 4 \\ 0^* & 0 & 5 & 3 \end{Vmatrix}$$

12. Подсчитаем число независимых 0*, т.к. их 4, то задача решена. Получаем opt план.

$$X^* = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Поэтому

$$F(X^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \cdot X_{ij}^* = 1 + 4 + 12 + 11 = 28$$

Нелинейное программирование

В большинстве случаев нелинейность связанна эмпирическими соотношениями и необходимостью учета случайных факторов.

<u>Математическая формулировка.</u>

Определить такие значения переменных $X^* = \{X_1^*, X_2^*, \dots X_n^*\}$ удовлетворяющие системе **n + m** ограничений

$$\begin{cases} \psi_j(X) \le 0, & i = 1, 2, ..., m; \\ Xi \ge 0, & j = 1, 2, ..., n; \end{cases}$$

при которых достигается max(min) целевой функции F (X)

Методы решения.

1. метод вариаций и дифференциальное уравнение Эйлера.

Недостаток: они предполагают задание ограничений в виде строгих равенств $\psi j(X)=0, j=1,2,...,m$, а также непрерывности и дифференцируемости функций F(X) и Ψ_j(X) по крайней мере до 2 порядка.

2. Численные методы

Недостаток: локальность, т.е. можно отыскать стационарную точку (локальный экстремум), но нельзя определить, имеются ли в области допустимых решений L другие стационарные точки с более оптимальными значениями целевой функции F(X).

3. Для нахождения глобального решения используют метод динамического программирования или комбинацию методов поиска локального экстремума и метода Монте-Карло.

Градиентные методы

Градиент n-мерной дифференциальной функции F(X) в точке $X_к$ является вектор V $F(X_к)$, определяемый:

$$gradF(X_k)=\nabla F(X_k)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(X_k)}{\partial X_k}\overrightarrow{X}_i$$

где $\overrightarrow{X}_i$ (i=1,2,…n) единичные векторы, направленные вдоль координатных осей в пространстве E^n.

grad – определяет направление, для которого производная по направлению функции F(X) максимальна, т.е. направление наискорейшего увеличения F(X).

Пример.

Минимизировать функцию $F(X) = 5X_1 + 3X_2 + 2X_1^2 + 4X_2^2$;

Решение:

1. Примем $X_1^0 = X_2^0 = 0$ тогда $F(X) = F(X^0) = 0$

2.
$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F(X)}{\partial X_1}=5+4X_1; \quad \frac{\partial F(X_0)}{\partial X_1}=5;\\ &\frac{\partial F(X)}{\partial X_2}=3+8X_2; \quad \frac{\partial F(X_0)}{\partial X_2}=3;\end{aligned}\right\}$$
т.к. они ≠ 0, то можно целевую функцию улучшить.

Условие минимизации:

$$F(X-t\nabla F(X))=5\left(X_1-\frac{\partial F(X)}{\partial X_1}t\right)+3\left(X_2-\frac{\partial F(X)}{\partial X_2}t\right)+2\left(X_1-\frac{\partial F(X)}{\partial X_1}t\right)^2+4\left(X_2-\frac{\partial F(X)}{\partial X_2}t\right)^2;$$

где t – длина шага; т.к. выражение в правой части квадратное относительно t, то приравниваем его к 0 и находим t_{opt}

$$-(4X_1+5)\left(\frac{\partial F(X)}{\partial X_1}\right)-(8X_2+3)\left(\frac{\partial F(X)}{\partial X_2}\right)+4\left(\frac{\partial F(X)}{\partial X_1}\right)^2t+8\left(\frac{\partial F(X)}{\partial X_2}\right)^2t=0;$$

$$t_0=0,25\left[1-\frac{\dfrac{\partial F(X_0)}{\partial X_2}}{\left(\dfrac{\partial F(X_0)}{\partial X_1}\right)^2+2\left(\dfrac{\partial F(X_0)}{\partial X_2}\right)^2}\right]=\frac{17}{86}$$

3. Определим координаты новой точки:

$$X_1^1=X_1^0-\frac{\partial F(X_0)}{\partial X_1}t_0=0-\frac{85}{86}=-\frac{85}{86};$$

$$X_2^1=X_2^0-\frac{\partial F(X_0)}{\partial X_2}t_0=0-\frac{51}{86}=-\frac{51}{86};$$

Повторяем тот же расчет приравнивая $X_1^0 = X_1^1$; $X_2^0 = X_2^1$; если $\frac{\partial F(X)}{\partial X_i}$ определить невозможно, то $\approx \frac{\Delta F(X)}{\Delta X_i}$

Целочисленное программирование.

Формируется аналогично задачам нелинейного программирования: найти план $X^*=\{X_1^*, X_2^{**}, \ldots, X_n\}$ соответствующий min(max) целевой функции n переменных F(X) при ограничениях:

$$\begin{cases} \psi_j\left(X\right) \le 0, & i = 1, 2, ..., m; \\ Xi \ge 0, & j = 1, 2, ..., n; \end{cases}$$

X_i – целые числа; $i = 1, 2, \ldots p$ ($p \le n$).
Если $p=n$ т.е. все переменные должны быть целыми числами, то модель определяет полностью целочисленную задачу. Если $p<n$ – частично целочисленную задачу.

Решение методами:

- отсечения,
- комбинаторными,
- приближенное (случайного поиска и др.)

<u>Метод отсечения</u> – сведение решения задачи целочисленного программирования к решению последовательно задач линейного программирования путем отсечения на каждом шаге алгоритма оптимального целочисленного результата.

Пример.
Найти max (X_1+2X_2) при $X_1 + 7X_2 \le 31$,
$9X_1 - 5X_2 \le 22$,
$X_1 + X_2 \le 8$,
$X_1, X_2 \ge 0$
X_1 и X_2 – целые числа. $F(X) = X_1 + 2X_2 \rightarrow \max$

<u>Решение:</u>
Составим уравнения $Y_1 = -X_1 - 7X_2 + 31$
$Y_2 = -9X_1 + 5X_2 + 22$
$Y_3 = -X_1 - X_2 + 8$

Решаем с помощью алгоритма Гомори. Составим симплекс-таблицу и с помощью модифицированного жорданова исключения найдем решение без учета целочисленности.
Найти opt $F(X) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + CnXn$ при

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} X_i \ge b_j; \quad j = 1, 2, ..., m$$
$$X_i \ge 0; \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Перепишем систему линейных неравенств в канонической форме, введя дополнительные переменные.
1.
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} X_i + Y_j = b_j; \qquad j = 1, 2, ..., m$$
$$i = 1, 2, ..., n$$
$$X_i \ge 0;$$
$$Y_j \ge 0;$$

	-X1	-X2	…	-Xs	…	-Xn	1
Y1=	**a11**	**a12**	**…**	**a1s**	**…**	**a1n**	**b1**
Y2=	**a21**	**a22**	**…**	**a2s**	**…**	**a2n**	**b2**
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**
Yr=	**ar1**	**ar2**	**…**	**ars**	**…**	**arn**	**br**
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**
Ym=	**am1**	**am2**	**…**	**ams**	**…**	**amn**	**bm**
F(x)	**-C1**	**-C2**	**…**	**-Cs**	**…**	**-Cn**	**0**

	-X1	-X2	1
Y1=	**1**	**7**	**31**
Y2=	**9**	**-5**	**22**
Y3=	**1**	**1**	**8**
F(x)=	**-1**	**-2**	**0**

2. Переходим к новому виду таблицы

	-X1	-X2	…	-Ys	…	-Xn	1
Y1=	f11	f12	…	a1s	…	f1n	d1
Y2=	f21	f22	…	a2s	…	f2n	d2
…	…	…	…	…	…	…	…
Xr=	ar1	ar2	…	ars	…	arn	br
…	…	…	…	…	…	…	…
Ym=	fm1	fm2	…	ams	…	fmn	dm
F(x)	-C'1	-C'2	…	-C's	…	-C'n	F0

:ars

В ней переменные Yr и Xs меняются местами

	-X1	-Y1	1
X2=	1	1	31
Y2=	9	+5	22
Y3=	1	-1	8
F(x)=	-1	-2	0

произведены операции 2, 3, 4, 5

3. На месте разрешающего элемента записываем 1
4. Все элементы разрешающей строки (кроме разрешающего элемента) сохраняют свои значения
5. Все элементы разрешающей строки (кроме разрешающего элемента) меняют свои знаки на противоположные.
6. Остальные элементы вычисляем по формуле

$$f_{ji} = a_{ji}\, a_{rs} - a_{js}\, a_{ri}$$

7. Элементы строки целевой функции рассматриваются, как общие элементы таблицы, т.е.

$-C_1' = f_{m+1,\, 2 \text{ и т.д.}}$

	-X1	-Y1	1
X2=	1	1	
Y2=	68	5	
Y3=	6	-1	
F(x)=			

8. После всех преобразований каждый элемент таблицы должен быть разделён на a_{rs}.
9. Циклы жордановых исключений получаем до тех пор, пока не получим опорное решение.

Метод ветвей и границ.

1. Просматриваем список L задач, полученных в результате разбиения множества допустимых решений на подмножества и подлежащих решению. Если он пуст, то вычисления прекращаем, в противном случае выбираем из списка одну из задач и исключаем её из L.
2. Решаем выбранную задачу без учета требований целочисленности. Если она не имеет целочисленного решения или найденное opt значение целевой функции $F(X_t) \le F(X_0)$, возвращаемся к 1.
3. Если полученное opt решение отвечает требованиям целочисленности, то $F(X_0)$ принимаем равным $F(X_t)$ и возвращаемся к 1.
4. Выбираем любую переменную *Xi, i = 1, 2,…p* не имеющую целого значения.
   Пусть *Xi = di*, а *di* определяет наибольшее число, меньшее или равное *di*. Заносим в список 2 задачи.

7. Планирование эксперимента

Планирование эксперимента – процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

$X_1 \ldots X_K$ – способы воздействия на поведение черного ящика: Факторы.
Черный ящик – объект исследования.
$У_1 \ldots У_M$ – численные характеристики целей исследования:

- Параметры оптимизации.
- Целевая функция.
- Критерий оптимизации.

Математическая модель объекта: $y = \varphi(X_1 \ldots X_K),\ \ \varphi -$ функция отклика.

Каждый фактор может в опыте принимать несколько значений – это уровни.

Интерполяционные задачи – требуется установить связь между целевой функцией и факторами.

Экстремальные задачи – необходимо добиться критерия оптимизации факторов. Задача экстремальная. Если её цель состоит в поиске экстремума некоторой функции.

Число различных состояний объекта – число уровней факторов (если оно для всех одинаково) возвести в степень числа факторов: P^K .

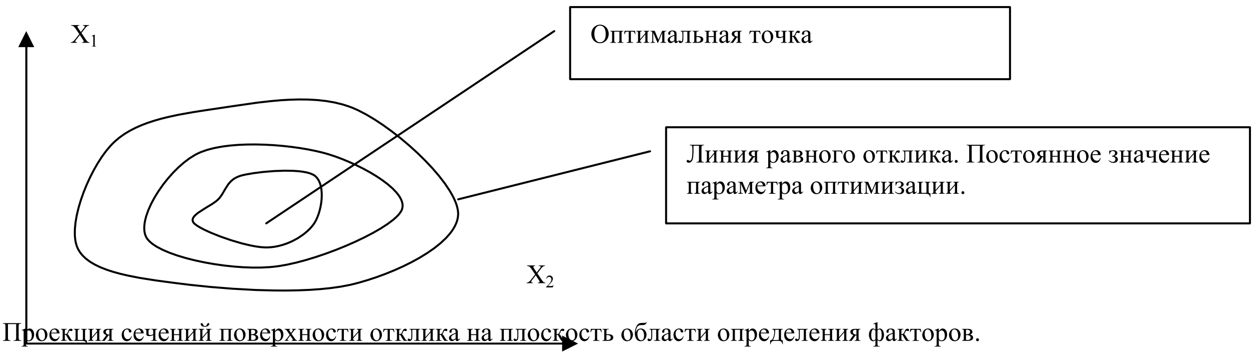
Необходимые свойства объекта исследования

Воспроизводимость результатов: эксперимент производится несколько раз через неравные промежутки времени при одних и тех же уровнях для всех факторов. Разброс значений характеризует воспроизводимость результатов. Он не должен превышать заданных значений (наших требований к точности эксперимента).
Управляемость объектом исследования: планирование эксперимента предполагает активное вмешательство в процесс и возможность выбора в каждом опыте тех уровней факторов, которые представляют интерес. Такой эксперимент называют активным. Объект, на котором возможен активный эксперимент, называют управляемым.
Планирование экстремального эксперимента: метод выбора количества и условий проведения опытов. Минимально необходимых для отыскания оптимальных условий.
Параметр оптимизации – является откликом на воздействие факторов. Это признак, по которому мы должны оптимизировать процесс. Он должен быть количественным.
Область определения параметра оптимизации – множество значений, принимаемых параметром оптимизации.
Ранг – количественная оценка параметра оптимизации, но она носит условный характер.
Требование к параметру оптимизации:

- Выражение одним числом.
- Однозначность в статистическом смысле (заданному набору факторов должно соответствовать одно значение параметра оптимизации с точностью до ошибки.)
- Параметр оптимизации должен действительно оценивать функционирование системы в заранее выбранном смысле.
- Статистическая эффективность – выбор параметра оптимизации, который определяется с наибольшей возможной точностью.
- Универсальность (полнота) – способность всесторонне характеризовать объект.
- Наличие физического смысла. Простота и легковычисляемость.

Фактор: задан, если задана область его определения – совокупность всех значений, которые в принципе может принимать данный фактор. Требований:

- Управляемость.
- Операциональное определение фактора – последовательность операций, с помощью которых устанавливаются его конкретные значения (уровни).
- Точность замера – возможно более высокая.
- Однозначность – факторы должны быть непосредственными воздействиями на объект.



Проекция сечений поверхности отклика на плоскость области определения факторов.

Постулаты:

- Непрерывность поверхности отклика.
- Гладкость поверхности отклика.
- Наличие единственного оптимума.

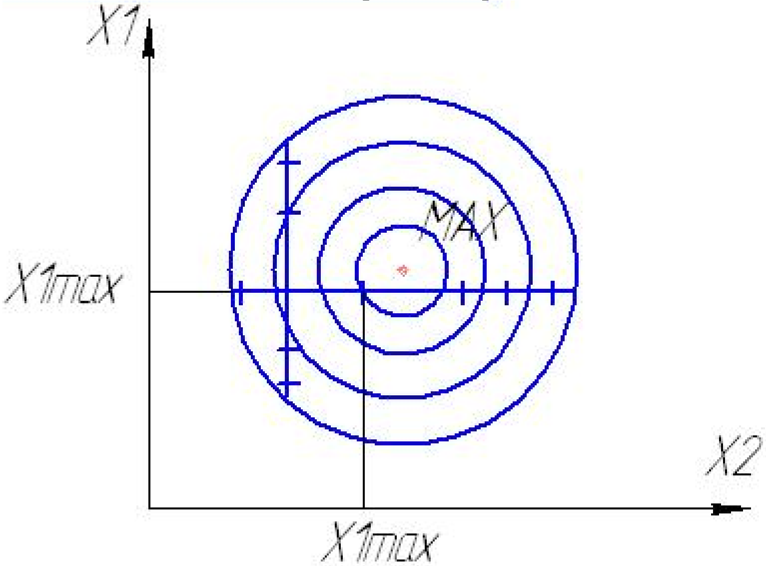
Способы поиска оптимума: мы выбиваем в факторном пространстве какую – то точку и рассматриваем множество точек в ее окрестности. Проводим в них эксперимент и строим первую модель. По ней предсказываем результат опыта в тех точках, которые не входи в эксперимент.

- Интерполяция – если лежащие точки лежат внутри нашей подобласти.
- Экстраполяция – вне подобласти.

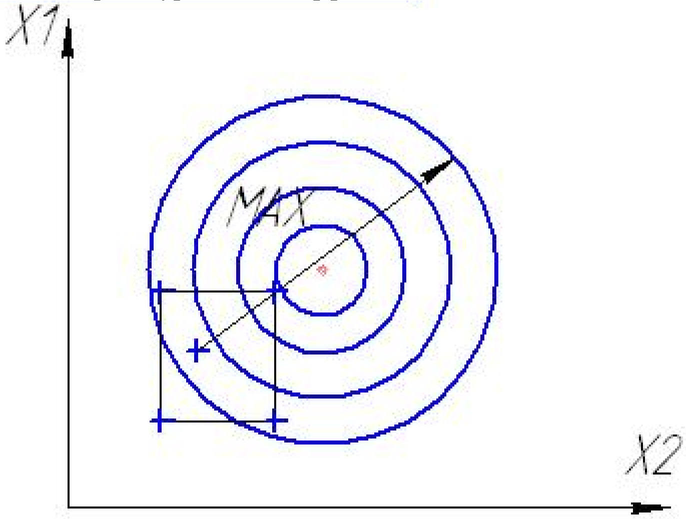
- Интерпретация – проверка по полученной модели предположения, что увеличение значения некоторых факторов должно привести к увеличению значения параметра оптимизации.

Метод Гаусса – Зейделя.

1. последовательно изменяются значения одного фактора X_1 при фиксированном значении X_2.
2. фиксируется наилучшее значение этого фактора $X_{1\ max}$.
3. При фиксированном $X_{1\ max}$ изменяется значение второго фактора X_2.
4. фиксируется наилучшее значение $X_{2\ max}$.
5. последовательно повторяется операция.



Шаговая процедура – более эффективна статистически.



1. изучается локальная область 1.
2. определяется наиболее интересное направление.
3. в этом направлении ставятся следующие опыты.

Выбор модели

Адекватность – модель должна предсказывать направление дальнейших опытов с требуемой точностью. Точность предсказания во всех направлениях должна быть одинакова. Предсказанное моделью значение отклика не должно отличаться от фактического больше, чем на заранее заданную величину.
Выбор класса моделей – при прочих равных условиях следует предпочитать степенные ряды. Их отрезки – алгебраические полиномы.
Аппроксимация – операция замены одной функции другой, эквивалентной данной в каком – то смысле. В эксперименте мы аппроксимируем неизвестную нам функцию полиномом.

Выбор степени полинома – эксперимент нужен только для того, чтобы найти значения коэффициентов полинома. Чем больше коэффициентов, тем больше оптов. Требуется найти полином, где содержится как можно меньше коэффициентов, но удовлетворяющий требованиям, предъявленным модели.

$$y = b_0; -\text{ полином нулевой степени,}$$

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2; \text{ - полином первой степени,}$$

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2; \text{ - второй степени,}$$

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{112}x_1^2x_2 +$$

$$b_{122}x_2^2x_1 + b_{111}x_1^3 + b_{222}x_2^3; \text{ - третьей степени.}$$

Направление градиента – модель должна хорошо предсказывать направление наискорейшего улучшения параметра оптимизации.
Полином 1-ой степени – наилучшая модель. Всегда существует такая окрестность любой точки в которой линейная модель адекватна. Размер такой области заранее неизвестен, но адекватность проверяется по результатам эксперимента. Значит, выбрав сначала произвольную область, можно постепенно найти требующие размеры, а затем двигаться по градиенту.

Если требуется построить интерполяционную модель - нас не интересует оптимум. Мы хотим предсказывать результат с требуемой точностью во всех точках некоторой заранее заданной области. Необходимо последовательно увеличивать степень полинома до тех пор, пока она стала адекватной.

Полный факторный эксперимент
Принятие решений перед планированием эксперимента:
1. Оценка границ областей определения факторов (принципиальные, технико-экономические, связанные с аппаратурой, технологией организацией)
2. Анализ априорной информации – вывод области факторного пространства, связанный с информацией по результатам предыдущих испытаний или литературных источников.

Выбор основного уровня – определение из анализа априорной информации исходной комбинации факторов.
Выбор интервалов варьирования Интервал варьирования – некоторое число, прибавление которого к основному уровню дает верхний (а вычитание - нижний) уровни фактора.

Записывают
+1 – верхний уровень
-1 - нижний уровень
○ – основной уровень
● – интервал варьирования не может быть меньше той ошибки, с которой экспериментатор фиксирует уровень фактора.
● – не может быть настолько больше, чтобы уровни оказались за пределами области определения.
Полный факторный эксперимент – в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов.

Свойства полного факторного эксперимента

1. Симметричность относительно центра эксперимента – алгебраическое суммирование элементов столбца равные нулю.
2. Условия нормировки – суммирования квадратов столбца равна числу опытов.
3. Ортогональность – суммирование почленных произведений любых 2-х столбцов равна нулю.

Прием построения матриц полного планирования.

j-ый столбец

№ опыта	X_1	X_2	X_3	Y
1	-	-	+	Y_1
2	-	+	+	Y_2
3	+	-	+	Y_3
4	+	+	+	Y_4
5	-	+	-	Y_5
6	-	-	-	Y_6
7	+	-	-	Y_7
8	⊕	+	-	Y_8

i-я строка

$X_{ij\ 18}$

4. Ротатабельность – точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказания значений параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.

Математическая модель в полном факторном эксперименте

Для матрицы планирования 2^2

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

Цель: найти по результатам эксперимента значения неизвестных нам коэффициентов модели.

$$b_j = \frac{(\sum_{i=1}^{N} x_{ij} y_i)}{N},\quad b_0 = \frac{(\sum_{i=1}^{N} y_i)}{N}$$

Коэффициенты – при независимых переменных указывают на силу влияния факторов. Чем больше - тем больше влияние оказывает фактор. Знак ⊕ - с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, если «-» уменьшается.

Оценка нелинейности уравнения

Часто нелинейность связана с тем, что эффект одного фактора зависит от уровня на котором находится другой фактор – эффект взаимодействия двух факторов.

1. По правилу произведения двух столбцов получить столбец произведения 2-х факторов. Этот новый вектор- столбец участвует в вычислении коэффициента взаимодействия – эффект взаимодействия 1-го порядка.

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2\ ,\ b_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_1 \cdot x_2) y_i}{N}$$

эффект взаимодействия 3-х факторов X_1,X_2,X_3 получается перемножение 3-х столбцов – эффект взаимодействия 2-го порядка.

t – Критерий – Стьюдента

Если известна ошибка опыта, значимость различий двух средних:

$$t = \frac{\overline{y}_1 + \overline{y}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$\overline{y}_1$ - среднее значение выхода в одном опыте.

$\overline{y}_2$ - среднее значение выхода в другом опыте.
S – ошибка опыта (если ошибки 1 и 2-го опыта близки одна к другой).
n_1 –количество наблюдений в 1-ом эксперименте,
n_1 –количество наблюдений в 1-ом эксперименте.

<u>Ошибки параллельных опытов</u>

Среднее арифметическое результатов опытов (которые проводят в одинаковых условиях).

$$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n}$$

<u>Дисперсия опыта</u>

Среднее значение квадрата отклонений величины от ее среднего значения

$$S^2 = \frac{\sum_{1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n-1}$$

<u>Среднее квадратическое отклонение (стандарт; квадратичная ошибка)</u>

$$\sigma = \sqrt{S^2}$$

<u>Оценка брака опыта</u>

При числе степеней свободы - 2 и вероятность брака 0,05 табличный критерий Стьюдента 4,303

$$\frac{y - \overline{y}}{S} = t_{табл.}$$ - критерий брака

Сомнительный опыт исключается из расчета, по остальным вычисляется $\overline{y}$ и S и проверяется критерий <u>Стьюдента.</u>

<u>Критерий Кохрейна - G</u>

- Когда во всех точках имеется одинаковое число повторных опытов,
- Если одна дисперсия значительно превышает остальные,
- Подсчитывается **G** в каждой строке матрицы и находится максимальное $S_{мах}^2$, оно делится на сумму всех дисперсий.

$$G = \frac{S^2_{\max}}{\sum_{i=1}^{N} S_i^2}$$ табличный: $G_{табл.}$=0,68, $G_{опытов}$> $G_{табл}$- Брак

<u>Критерий Бартлето – χ</u>

Проверка однородности дисперсии $\chi_{эксп}^2 < \chi_{табл}^2$ (здесь 2 степени свободы).

<u>Расчет параметров</u>

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$$

1. $b_0 = \frac{(\sum_{i=1}^{N} y_i)}{N}$ - среднее арифметическое параметра оптимизации

2. $b_j = \frac{(\sum_{i=1}^{N} x_{iu} y_u)}{N}$;

x_{iu} – значение фактора x_i в u-м опыте,
y_u – значение параметра оптимизации в том же опыте,

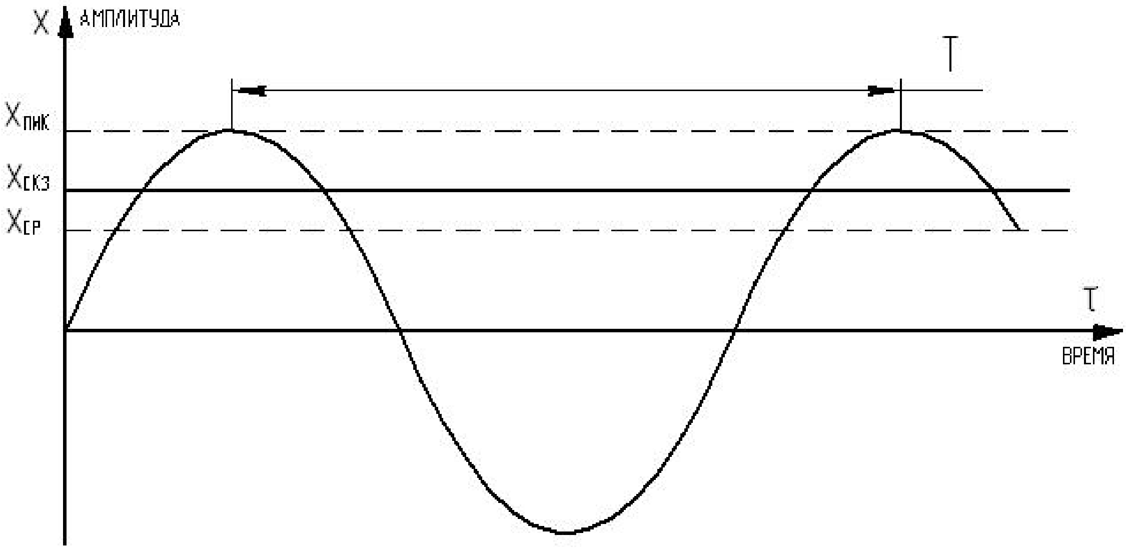
N – число опытов в матрице

3. $$b_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{iu} \cdot x_{ju}) y_u}{N}$$

8. Частотный анализ

- В большинстве случаев вибрации – нежелательные побочные последствия полезных процессов и большие усилия тратятся на уменьшение их эффекта.
- Некоторые вибрации вызываются с определённой целью.

Характеристики вибрации



T – период колебания;

$\mathrm{f} = \frac{1}{\mathrm{T}}$ – частота колебания;

$\omega = 2\pi \cdot \mathrm{f}$ – угловая частота;

$\mathrm{x}(\tau) = \mathrm{X}_{\text{Ï ÈÊ}} \sin(\omega \cdot \tau)$ – перемещение;

$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d}\tau} = \omega \cdot \mathrm{X}_{\text{Ï ÈÊ}} \cdot \cos(\omega \cdot \tau)$ – скорость;

$\mathrm{a} = \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{d}\tau^2} = -\omega^2 \cdot \mathrm{X}_{\text{Ï ÈÊ}} \cdot \sin(\omega \cdot \tau)$ – ускорение;

$\omega \cdot \mathrm{X}_{\text{Ï ÈÊ}} = \mathrm{V}_{\text{Ï ÈÊ}}$ – пиковая скорость;

$\omega^2 \cdot \mathrm{X}_{\text{Ï ÈÊ}} = \mathrm{A}_{\text{Ï ÈÊ}}$ – пиковое ускорение.

Среднее абсолютное значение перемещения – описательная величина, учитывающая историю происхождения колебаний:

$$\mathrm{X}_{|\text{ñï åäí åå}|} = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} |\mathrm{x}| \, \mathrm{d}\tau .$$

Среднеквадратичное значение СКЗ:

$$X_{\text{ýô ô}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{0}^{T} x^2(\tau)\,d\tau}\,.$$

$$F_f = \left(\frac{X_{\text{ýô ô}}}{X_{\text{ñðåäí}}}\right)$$ – коэффициент формы;

$$F_c = \left(\frac{X_{\text{Ï ÈÊ}}}{X_{\text{ýô ô}}}\right)$$ – коэффициент амплитуды;

эти коэффициенты дают представление о форме волны излучаемых вибраций.

<u>Метод частотного анализа</u>

Основан на математической теореме Фурье – любую периодическую кривую, несмотря на сложность её формы, можно рассматривать как множество чисто синусоидальных кривых с гармонически связанными частотами.

$$F(\tau) = X_0 + X_1 \cdot \sin(\omega\cdot\tau + \varphi_1) + X_2 \cdot \sin(\omega\cdot\tau + \varphi_2) + \ldots + X_n \cdot \sin(\omega\cdot\tau + \varphi_n)$$, где

$X_n \cdot \sin(\omega\cdot\tau + \varphi_n)$ – частотный спектр вибрации.

Среднеквадратическое ускорение

Спектры периодических колебаний в частотной области состоят из дискретных линий.

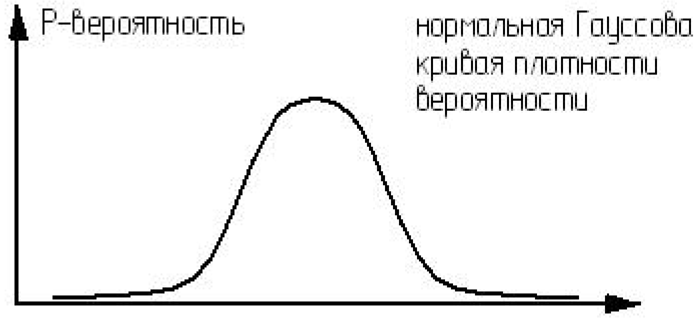
Случайные колебания показывают непрерывные частотные спектры.

Стационарные случайные вибрации – случайные вибрации характеристики которых не меняются во времени.

Методы теории коммуникации (статистической механики) – распределение вероятности амплитуды в виде плотности вероятности.

Непрерывные частотные спектры вибрации в виде – среднеквадратичных спектральных плотностей (спектральная плотность мощности).

Фактически при этом все детерминированные величины, описывающие синусоидальные гармоники преобразованием Фурье, заменяются на их вероятности.



Характеристики вибрации.

Это позволяет использовать весь аппарат теории математической статистики.

Плотности вероятности дают незначительную информацию об истории происхождения или частотном содержании изучаемого процесса.

Функция автокорреляции – она описывает в среднем зависимость некоторого мгновенного значения амплитуды от её мгновенных значений, появившихся ранее – $\psi(\tau)$. Из функции автокорреляции выводится функция среднеквадратичной спектральной плотности (функция спектральной плотности мощности) – она аналогична частотным спектрам Фурье.

$W(\omega)$, где: $\omega = 2\pi \cdot f$;

f – частота.

$$\psi(\omega) = 2\int_0^\infty W(\omega)\cdot\cos(\omega\cdot\tau)df .$$

Если обозначить $W(f) = 2\cdot W(\omega)$

$$\psi(\omega) = \int_0^\infty W(f)\cdot\cos(2\pi\cdot\omega\cdot\tau)df .$$

$W(f)$ – частотная функция – среднеквадратичная спектральная плотность – она измеряется аналоговыми частотными анализаторами.

Описание комплексного сигнала в виде его общего среднеквадратического значения остаётся в силе, независимого от периодического или случайного характера сигнала.

<u>Удар</u> – передача кинетической энергии системе, происходящая в относительно короткое время по сравнению с собственным периодом колебаний этой системы.

<u>Неустановившиеся явления</u> – или комплексные удары – могут происходить в течение нескольких периодов вибрации системы.

В большинстве случаев форма волны сама по себе не является конечной целью, а скорее, способом предварительной оценки эффекта, вызываемого, соответственно, ударом или неустановившейся вибрацией на некоторую механическую систему. Описывается преобразованием Фурье для ударной временной функции.

Нестационарные случайные вибрации – могут определяться как случайные вибрации, статистические свойства которых меняются по времени, в таких его интервалах, которые необходимы для их описания.

<u>Измерительная аппаратура</u>

Виброметр – вибродатчик + электронный усилитель с индикатором : (g; м/сек^2; м/сек; мм) – калибровка.

Частотные анализаторы – дают спектр.

Акселерометр – электромеханический датчик, дающий напряжение пропорциональное колебательному ускорению.

Есть приборы: измерения взаимной корреляции и взаимной спектральной плотности мощности – плотности вероятности.

Основные понятия частотного анализа

Комплексные числа – частотные составляющие представлены вращающимися векторами (фазорами).

$F = a + j \cdot b$; где

a – действительная составляющая в направлении действительной оси;

$j \cdot b$ – мнимая составляющая в направлении мнимой оси;

b – вещественное число, изображённое в направлении действительной оси, но j обуславливает их поворот.

Дельта - функции – Дирака – единичный импульс. Ширина составляющей функции в частотной области бесконечно мала, а присущая ей спектральная плотность мощности (мощность на единицу частоты) – бесконечно большая. Взвешенная дельта функция имеет определённую конечную мощность.

Преобразование Гильберта – определяет взаимосвязь между действительной и мнимой составляющими трансформаций Фурье односторонних сигналов.

Кепстральный анализ

- Спектры логарифмических спектров

Спектр мощности определённый в логарифмическом масштабе более эффективен, чем в линейном. Кепстр даёт возможность обнаружения периодических составляющих логарифма соответствующего спектра.

- Целесообразен для диагностики машинного оборудования.

9. Методы оптимизации.

Нелинейное программирование
Множество допустимых значений аргументов X минимизируемой функции Y задается с помощью системы равенств и неравенств.

Линейное программирование
Если целевая функция и ее ограничения задаются с помощью линейных функций.

Выпуклое программирование
Когда задачи нелинейного программирования решаются на основе их последовательной аппроксимации задачами линейного программирования.

Задача анализа
Решается на основе математического описания оптимизируемой системы- заключается в вычислении вектора выходных параметров по заданным значениям всех остальных переменных при фиксированной функциональной структурной модели системы.

Задача проектирования систем
Процесс создания математического описания еще не существующего объекта с целью его последующего изготовления или последующей реализации (воплощения).

Этапы проектирования системы

1. Структурный синтез – формирование структуры, определяющей элементный (компонентный) состав будущей системы и связи между ними.

2. Параметрический синтез- выбор такого вектора параметров проектирования (параметров оптимизации), при которых все выходные характеристики проектируемой системы удовлетворяют требованиям технического задания.

Существуют методы преобразования , исключения и учета ограничений для решения задач нелинейного программирования → линейным

1. алгоритмы проекции градиента
2. методы штрафных функций и модифицированных функций Лагранжа.

Декомпозиция задач оптимизации больших систем

Способы сведения исходной «сложной» задачи к нескольким «простым», поддающимся решению стандартными методами математического программирования.

Если оптимизируется сложная многопараметрическая система, то ее можно представить как некоторую совокупность связанных подсистем меньшей размерности.

Задачи аппроксимации –
Необходимо подобрать вектор управляемых параметров таким образом, чтобы «расстояние» между заданной и расчетной характеристикой было минимальным.

Задачи идентификации относятся к задачам аппроксимации.
Задача выборов параметров моделей реальных объектов по экспериментально полученным данным.
Задачи решения систем неравенств

Проблемы неудовлетворительной оптимизации

Явление овражности- вторые производные минимизируемых целевых функционалов приводят к овражистой структуре поверхностей уровня критерия оптимизации

Стандартные методы конечномерной оптимизации

- методы сопряженных градиентов
- Ньютоновские методы
- Квазиньютоновские методы
- Метод Ливенберга
- Метод Гаусса- Ньютона
- «Метод оврагов» Гельфанда Цетлина
- Метод глобального оптимума

Покоординатные стратегии конечномерной оптимизации

- Метод покоординатного спуска
- Метод Розенброка
- Методы обобщенного покоординатного спуска
- Методы вычисления производных
  - Разложение в ряд Тейлора
  - Матрица Гессе
  - Метод Якоби
  - Метод Пауэлла
  - Преобразование Хаусхолдера

Оценка вычислительных алгоритмов
Производится в специальных единицах **Горнер**
1Г- трудоемкость операции однократного вычисления значения минимизируемого функционала.

Градиентные стратегии конечномерной оптимизации

Основаны на применении антиградиентов в качестве направлений спуска.
Простой градиентный спуск:

- Метод Ньютона
- Метод Ливенборга
- Метод Маркуардта

Метод оптимизации больших систем
Большая система- система, описываемая моделями с большим числом управляемых параметров.
Оптимизация большой системы- оптимизируемая большая система может быть представлена как совокупность взаимосвязанных подсистем меньшей размерности. Требования к выходным параметрам системы.

Экспертные системы принятия решений

В жестких временных рамках даже высококвалифицированный человек подвержен влиянию различных **психологических факторов.**
Экспертная система за счет своего быстродействия и отсутствия влияния нежелательных человеческих факторов позволяет быстро и непредвзято оценить результаты анализа обстановки и выработать разумную ответную реакцию.

Системы поддержки принятия решений в виде экспертных систем
Широко используются в решении неформализованных задач выбора, являющихся трудными для традиционных методов математического анализа и традиционных методов программирования.

- Диагностирующая и управляющая система
- Прогнозирующие системы
- Интерпретирующие (анализирующие) системы

Факты (декларативные знания) дают описания фактов и явлений внешнего мира, относительно которых можно установить, есть они в наличии или нет.

Процедурные знания заключаются в правилах манипулирования фактами для получения заключений приводящий к новым значениям.

Процедурные экспертные системы если А то В организуется логическая цепочка вывода, которая заканчивается фактом- результатам экспертизы.

Фреймы – экспертные системы – основаны на специальных методах представления знаний в виде объектов и отклонений между объектами.

Слоты – места хранения информации.
Семантические сети и нейлоровские диагностирующие системы. Никакие новые факты не могут быть получены в результате работы экспертной системы.

Байесовский подход – одним из исчислений неопределенностей в теории экспертных систем является теория вероятностей и теория Байеса. С помощью формулы Байеса удается накапливать информацию, поступающую из различных источников с целью подтверждения или не подтверждения определенной гипотезы.

Схема работы байесовской экспертной системы.

Мы имеем априорную вероятность P(H) которая хранится в базе данных. Получив свидетельство E и пересчитав вероятность по формуле Байеса, мы можем записать ее вместо P(H).Получение очередного свидетельства приводит к новому обновлению этой вероятности, каждый раз текущее значение этой информации будет считаться априорным.

Нейлоровские диагностирующие системы - введение верхних и нижних порогов для вероятностей гипотез. Производится учет неопределенностей, заключенных в ответах пользователя на вопросы экспертной системы.

- Методом максиминной свёртки могут быть получены все слабоэффективные решения
- Методом линейной свёртки можно получить только эффективные решения, но не все

Метод Джофриона – выделение эффективных точек из множества с помощью процедуры максимилизации линейной свёртки. В результате будут построены все эффективные и только эффективные решения.
Термин **лексикографическая оптимизация** – лексикографическое упорядочение двух критериев – максиминного и линейного.
Вначале ведётся максиминная свёртка, далее, если будет получен неоднозначный результат, то выбирают тот элемент, который максимизирует линейную свертку.

По аналогии поиска слова в словаре – сначала работают с первой буквой, затем со второй и т.д.

Вывод – ни один из методов не позволяет выделить единственное оптимальное решение.
Решение, соответствующее различным наборам весовых коэффициентов, являются равноправными элементами множества эффективных и слабоэффективных решений.

Для того чтобы выбрать единственное решение, должна привлекаться дополнительная информация.
Принцип Парето – позволяет лишь сузить класс возможных претендентов на решение и исключить из рассмотрения заведомо неконкурентоспособные.

Принятие решений в условиях неопределённости

Когда множество альтернатив X и исходов Y конечны, ситуацию выбора альтернативы в условиях неопределенности можно представить с помощью матрицы – **матрица решений**.
Для решения используется оценочная функция – преобразующая матрицу в одностолбцовую. После построения оценочной функции наилучшей альтернативы производится из условий max или min значения оценочной функции.

Принятие решения в условиях риска.

При многократно реализованном исходе (когда есть некоторая статистика) выбор альтернативы определяется max математического ожидания.
Может иногда следует поступиться значением матожидания для уменьшения возможности разброса результатов – min дисперсии – **принцип (критерий) недостаточного основания Бернулли –** применяется в условиях полной неопределённости. Если нет данных к тому, чтобы считать одно событие из полной системы несовместимых событий более вероятным, чем другие, то все события нужно считать равновероятными. При этом производится операция суммирования «доходов» по строкам матрицы решений.
Уникальные (одноразовые) задачи – если исход принятого решения реализуется однократно.
Здесь вероятности заменяются некоторыми «коэффициентами уверенности».

Критерий принятия решений в условиях полной неопределённости.

<u>Множество неопределённости</u> решений – его выбор может основываться на введении разумных гипотез о поведении среды.
<u>Гипотеза антагонизма</u> – предполагает, что среда ведёт себя «наихудшим» образом.
В качестве оптимальной альтернативы «подбирается» «наихудший» возможный вариант.
Принцип гарантированного результата или принцип максимина – критерий Вальда.
Гарантирующая оценка
Гарантирующее решение
Матрица сожалений, поскольку выражает сожаление лица, принимающего решение по поводу того, что он не выбрал наилучшего решения относительно состояния системы.

Критерий Сэвиджа – критерий минимального сожаления.
Критерий Гурвица – критерий оптимальности принимаемого решения – он охватывает ряд различных подходов от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного – критерий пессимизма-оптимизма – устанавливает баланс между этими двумя случаями.

Принятие решения в условиях конфликта (это по существу – Теория игр)

Принцип устойчивости (принцип Нэша)

Выбор рациональной стратегии должен производиться среди множества точек равновесия. Равновесие решения называется оптимальными по Нэшу.
Данный принцип отражает такое важное свойство коллективного решения – если оба субъекта **А** и **Б** смогли договориться о том, чтобы придерживаться определенного выбора, то тот субъект, который нарушает договоренность прежде всего и пострадает. Свойство устойчивости даёт известную гарантию против нарушения договоренности.
Устойчивое решение может и не принадлежать к числу эффективных, т.е. к множеству Парето, то имеется противоречие между устойчивостью и выгодностью.
Важное направление теории принятия решений – изучение систем, в которых устойчивые точки принадлежат множеству Парето.

Многостадийные процессы принятия решений.

Многостадийные процессы принятия решений в условиях неопределенности при условии, что решаемая проблема одноцелевая.
Предполагается наличие – **графа – дерева решений**, как можно попасть из данного множества начальных величин в заданное множество конечных вершин графа.
Каждая ветвь графа имеет свой вес – вещественное число – означающее соответствующие локальные затраты на переход в другое состояние.
Задача – оптимальный выбор начальной вершины из множества допустимых и пути из неё в любую из конечных вершин.
Оптимальность – построение допустимого пути, реализующего min суммарных затрат.

Метод Беллмана – для детерминистской системы.

Идея метода –
1. задача поиска оптимального пути начинается с конца
2. исходная задача погружается в множество аналогичных задач с разными начальными вершинами и одной конечной вершиной
3. предполагается, что в качестве начальной вершины последовательно выступают все без исключения вершины графа

Многостадийные процессы в условиях неопределенности.

Решаются методом Беллмана, но «веса» вершин графа определяются стахостическими величинами.

Метод многокритериального выбора на основе дополнительной информации пользователя.

Это стандартная задача нелинейного программирования о поиске минимизатора, т.е. функции потерь, она решается следующим методом.

Метод Нелдера-Мида

– решает задачу поиска минимизатора X и некоторой заданной функции U. Прообразом этого метода являются метод Спендли, Хекста, Химсворта.

Задача с малым числом критериев и альтернатив.

Проблема ранжирования объектов по «важности». Матрица попарных сравнений.

Методы Саати, Коггера и Ю

1. Создание модели ситуации выбора – математическое описание.
2. Анализ неопределенностей, формализация понятия цели, формирование критериев и целевых функций.
3. Решение возникающих оптимизационных и др. математических задач.

1.1. язык бинарных отношений,
1.2. критериальный язык.

10. Методы принятия решений.

Постановка задачи принятия решений.
- Задача принятия решений возникает, когда присутствует несколько вариантов (альтернатив) действий для достижения заданного или желаемого результата.
- Требуется выбрать наилучшую в определенном смысле альтернативу.

1. Определение связи альтернатив с исходами.
1) Детерминированная – когда существует однозначное отображение альтернативы действия в результат.
2) Стохастическая (вероятностная) – выбор альтернативы не гарантирует наступление определённого исхода – задача принятия решения в условиях риска. Желаемый результат оценивается вероятностью наступления исхода при выборе альтернативы.
3) полная неопределённость – информация вероятностного характера отсутствует.

2. Изучение системы предпочтений лица, принимающего решение.

1) Когда каждый исход Y можно оценить конкретным вещественным числом R.

$$f : Y \to R$$

f – целевая функция;

– критериальная функция;

–функция полезности;

–функция критерия оптимальности;

– критерий оптимальности.

Функционал – однозначное отображение произвольного множества на множество вещественных чисел.

Поэтому – f – целевой функционал.

2) Когда каждый исход оценивается несколькими числами.

$$f_k : Y \to R;$$

$$k = 1, 2, ..., m$$

Существует несколько показателей качества решения (критериев).

f_k – частные целевые функции. Концептуальная трудность – что понимать под оптимальным решением.

3. Формирование критериев и целевых функций.

Формальные модели задачи принятия решений на языке бинарных отношений.

На языке графов – наилучший элемент соответствует наличию вершины, соединённой исходящими из неё стрелками со всеми остальными вершинами графа. При этом могут присутствовать и любые другие дополнительные соединения.

Граф отношение, имеющего max элементы должен содержать вершины, в которых каждой входящей в неё стрелке соответствует «компенсирующая» выходящая стрелка, направленная в вершину, из которой исходит указанная входящая стрелка, т.е. обратная связь.

<u>Однокритериальный выбор.</u>

Целевая функция, которую требуется максимизировать

$$f : Y \to R$$

Многокритериальный выбор.

Качество или «полезность» исхода оценивается не одним числом, а несколькими

$$f_k : Y \to R;$$

$$k = 1, 2, ..., m$$

Здесь $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$

Отношение доминирования $\to$ отношение Парето.

Если для некоторой точки не существует более предпочтительной по Парето точки, то такая точка называется эффективным или Парето – оптимальным решением многокритериальной задачи.

Множество, включающее в себя все эффективные элементы – множество Парето для векторного решения (отношение).

Множество эффективных оценок – множество Парето в пространстве критериев.

<u>Смысл этого</u> – оптимальный исход следует искать только среди элементов множества недоменируемых элементов (принцип Парето).

<u>Цель решения многокритериальной задачи</u> – состоит в выделении множества Парето. При отсутствии дополнительной информации о системе предпочтений пользователя большего сделать нельзя.

<u>Решение оптимальное по Слейтеру.</u>

Слабо эффективное решение многокритериальной задачи, если исход «Y» не может быть улучшен сразу по всем критериям «полезности».

Многокритериальные модели принятия решений в условиях определённости.

X – множество альтернатив;

Y – множество исходов.

$$f_i : Y \to R$$

$i = 1, 2, ..., m$ - множество показателей качества (критериев).

$\varphi_i : X \to Y$ - детерминирующая функция, отображающая множество альтернатив множество исходов.

R - множество вещественных чисел.

Решение $f_i(\varphi(X)) = J_i(X) \to \max$.

Методы многокритериальной оптимизации.

Задачу оптимального выбора параметров $X_1, ..., X_n$ некоторой системы, качество функционирования которой оценивается показателями $f_1, ..., f_m$, отражает наши технологические возможности реализации значений X.

Часто ограничения могут формироваться на основе имеющейся априорной информации, позволяющей исключить из рассмотрения заведомо неудачные варианты X.

1) Метод главного критерия.

В качестве целевой функции выбирается один из функционалов f_i, наиболее полно с точки зрение исследователя отражающий цель принятия решения.

Остальные требования к результату оцениваются с помощью введения необходимых дополнительных ограничений. Задача сводится к решению однокритериальной задачи.

2) Метод линейной свёртки.

Основан на линейном объединении всех частных целевых функционалов в один:

$$J(X) = \sum a_i f_i(X) \to \max$$

Весовые коэффициенты a_i рассматриваются как показатели относительной значимости отдельных критериев функционалов f_i.

Чем большее значение придаётся критерию f_i, тем больший вклад в сумму он должен давать и следовательно, тем большее значение a_i должно быть выбрано.

3) Метод максиминной свёртки.

Если в случае линейной свёртки возможны «плохие» значение некоторых f_i за счёт достаточно хороших остальных целевых функционалов, то в случае максимального критерия производится расчёт «на наихудший случай» и мы можем оценить гарантированную оценку для всех функционалов.

Этот метод максимизирует минимальный из запасов и приводит к однокритериальной задаче (в основном используется в электронике).

Максиминные стратегии.

Эффективное (Парето – оптимальное) решение многокритериальной задачи – оно не может быть улучшено по какому-либо показателю f_i без ухудшения ситуации по остальным показателям.

Слабоэффективное (Слейтер - оптимальное) решение многокритериальной задачи – которое не может быть улучшено одновременно по всем показателям.

Вычислительные средства стратегий.

Лексиографическая оптимизация.

Список литературы

1. Кузин Ф.А. Диссертация: Методика написания. Правила оформления. Порядок защиты. Практическое пособие для докторантов, аспирантов и магистрантов.- М.: Ось-89, 2001.- 320 с.
2. Макин Ю.Н. Моделирование технологических процессов восстановления изделий с целью выявления резервов повышения эффективности авиаремонтного производства / **Научный вестник** МГТУ ГА, серия “Эксплуатация воздушного транспорта и ремонт авиационной техники. Безопасность полетов.” № 35, **2001**.- с. 100 – 107.
3. Фролов В.П., Макин Ю.Н. Моделирование технологического процесса восстановления изделий авиатехники методом пайки / **Научный вестник** МГТУ ГА, серия “Эксплуатация воздушного транспорта и ремонт авиационной техники. Безопасность полетов.” № 52, **2002**.- с. 125 – 132.
4. Коняев Е.А., Макин Ю.Н., Доценко Г.Н. Микробиологический метод очистки деталей авиадвигателей от нагароподобных загрязнений / **Научный**

вестник МГТУ ГА, серия “Эксплуатация воздушного транспорта и ремонт авиационной техники. Безопасность полетов.” № 52, **2002**.- с. 133 – 138.

5. Фролов В.П., Макин Ю.Н. Алгоритм математической модели пайки / **Научный вестник** МГТУ ГА, серия “Эксплуатация воздушного транспорта и ремонт авиационной техники. Безопасность полетов.” № 63, **2003**.- с. 34 – 39 .

6. Груздков С.К., Макин Ю.Н. Перспективы металлизации как средства комплексного восстановления свойств деталей авиационной техники / **Научный вестник** МГТУ ГА, серия “Эксплуатация воздушного транспорта и ремонт авиационной техники. Безопасность полетов.” № 63, **2003**.- с. 40 – 45 .

7. Макин Ю.Н., Груздков С.К. Элементы математической модели ремонта деталей авиационной техники диффузионной металлизацией / **Научный вестник** МГТУ ГА, серия “Эксплуатация воздушного транспорта и ремонт авиационной техники. Безопасность полетов.” № 74 (8), **2004**.- с. 54 – 61 .

8. Макин Ю.Н. Основы общей теории авиаремонтного производства / Учебное пособие.- М.: МГТУ ГА, **2004.-** 85 с.

9. Брюль и Къер. Измерения механических колебаний и ударов. Август. 1973 – 308 с.

10. Брюль и Къер. Частотный анализ. Август. 1973 – 388 с.

11. Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации и принятия решений. – СПБ.: Изд-во «Лань», 2001. – 384 с.