

# МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ

## Состав курса

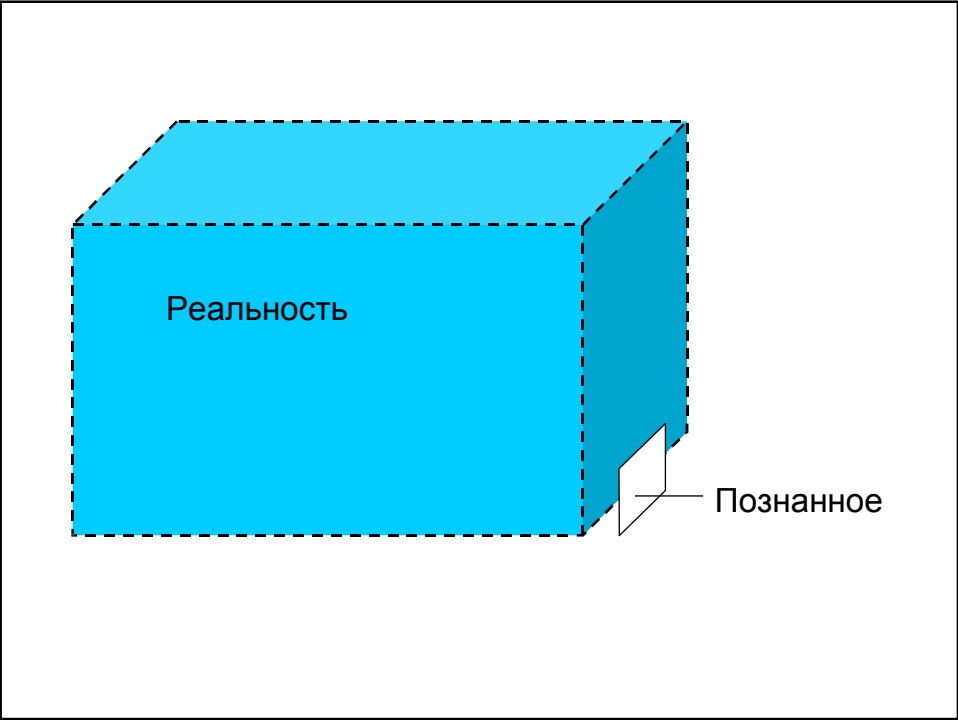
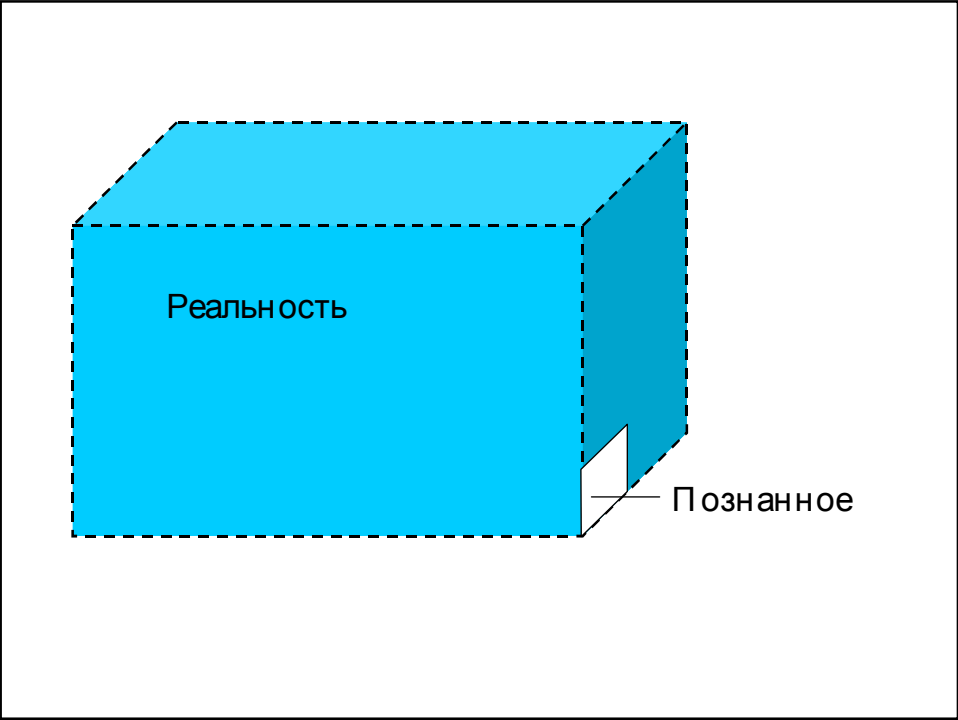
- 36 лекций
- 5 лабораторных работ (1-я, 2-я - на компьютерах, 3-я, 4-я - резервные, 5-я - репетиция экзамена)
- 4 практических занятия (1-е + 2-е - сдвоенное - ознакомительное)
- КДЗ - РГР (3 задачи по методичке)
- Экзамен на компьютерах

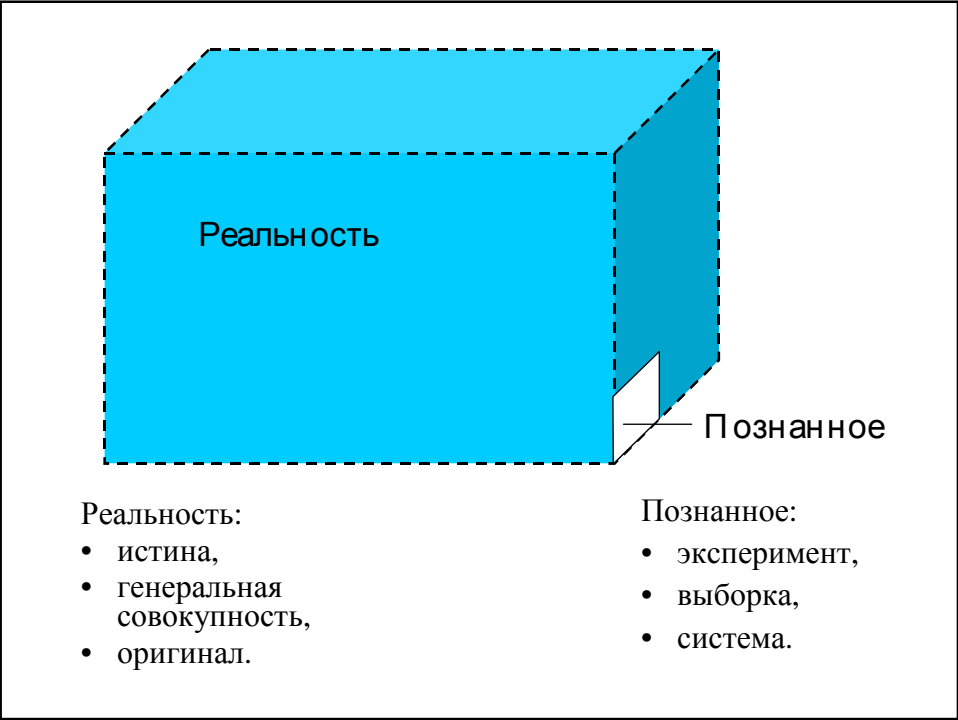
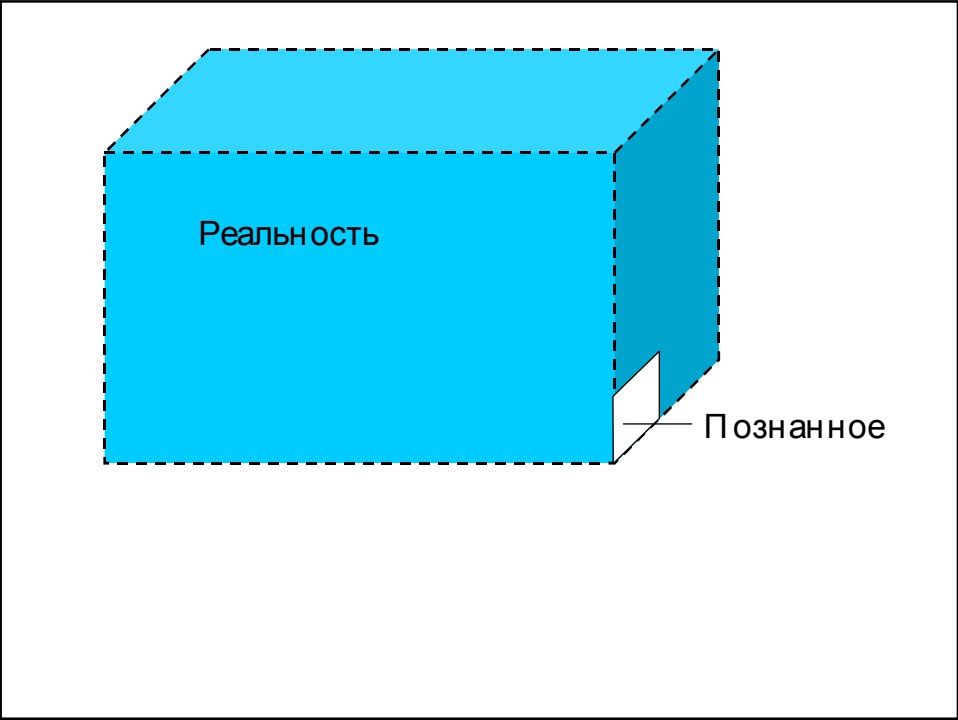
## Литература

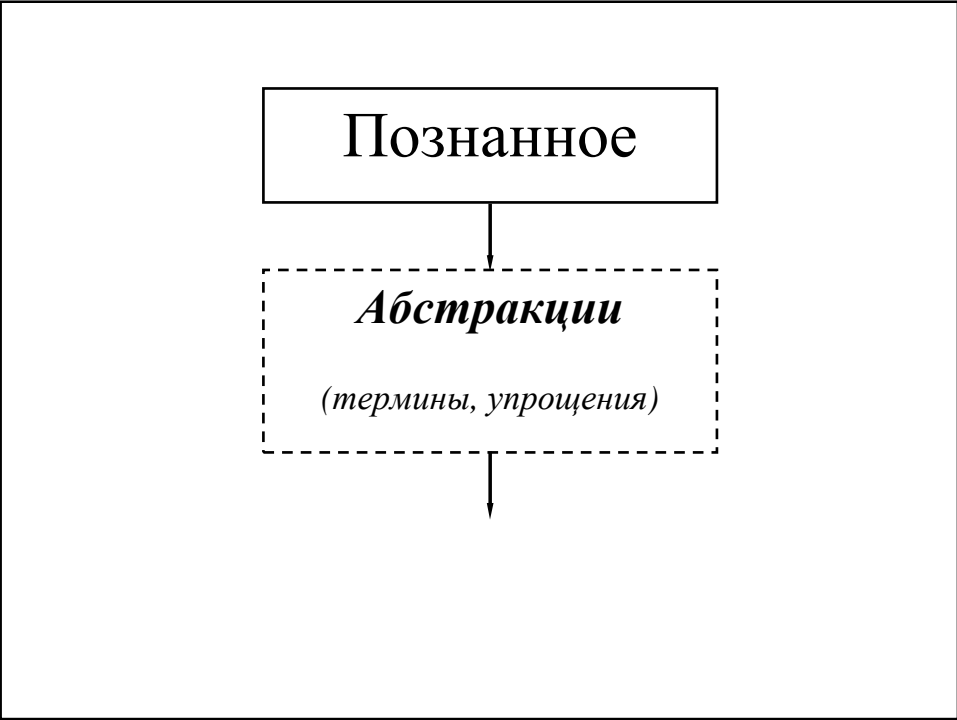
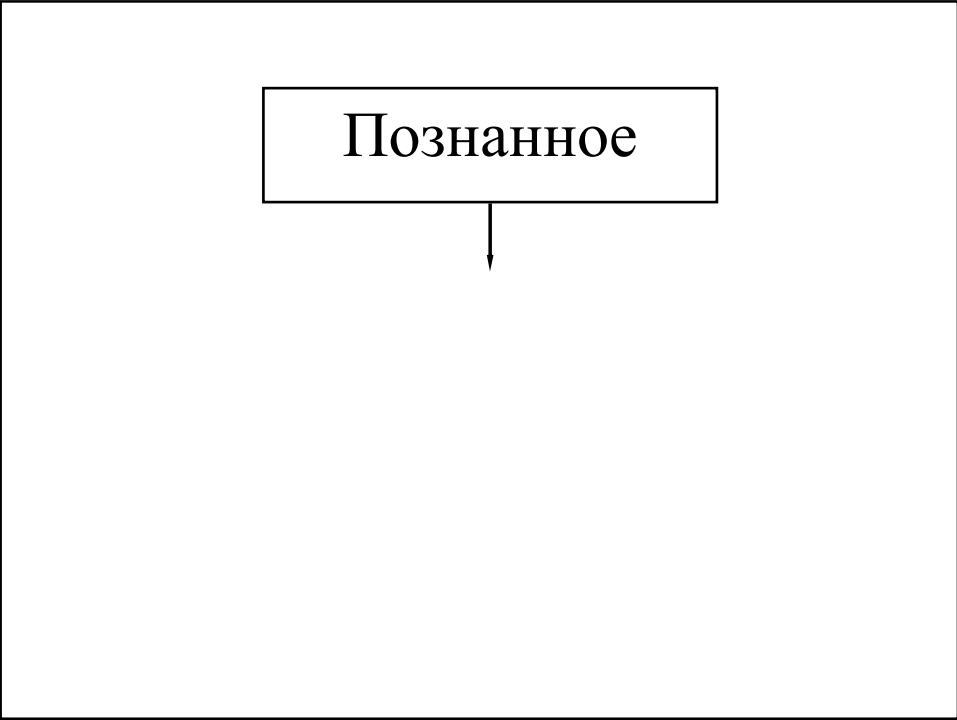
Математическое моделирование: Учебное пособие. Ч. I и II. 2004.	517.8 К88
Аэродинамика и динамика полета: Учебное пособие. 2000.	052–011 К88
методичка по изучению дисциплины, выполнению ЛР и варианты РГР	№ 1233

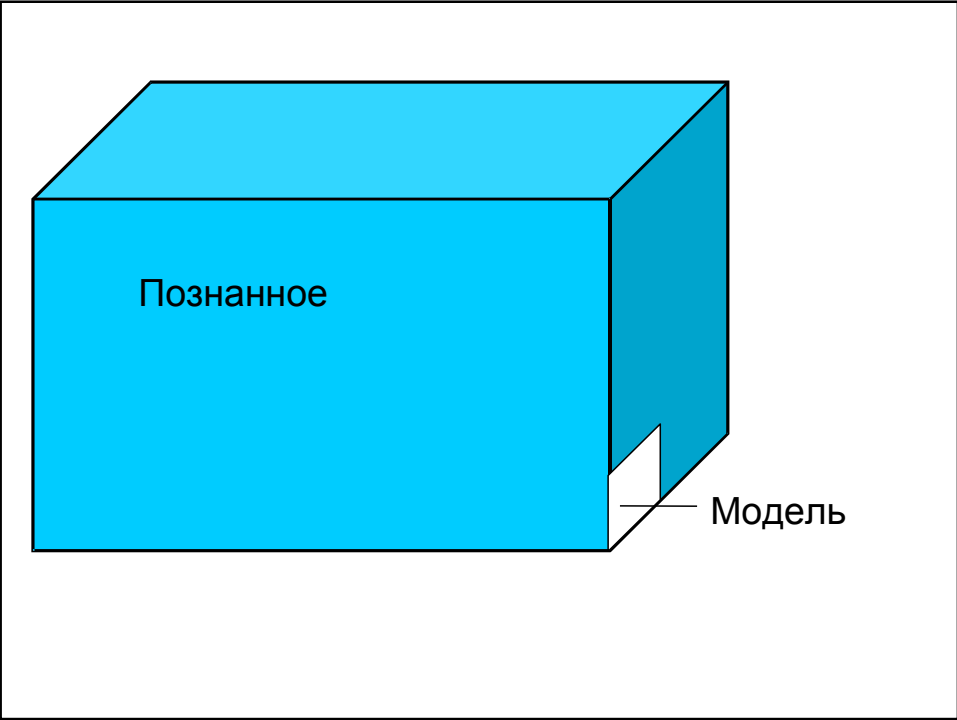
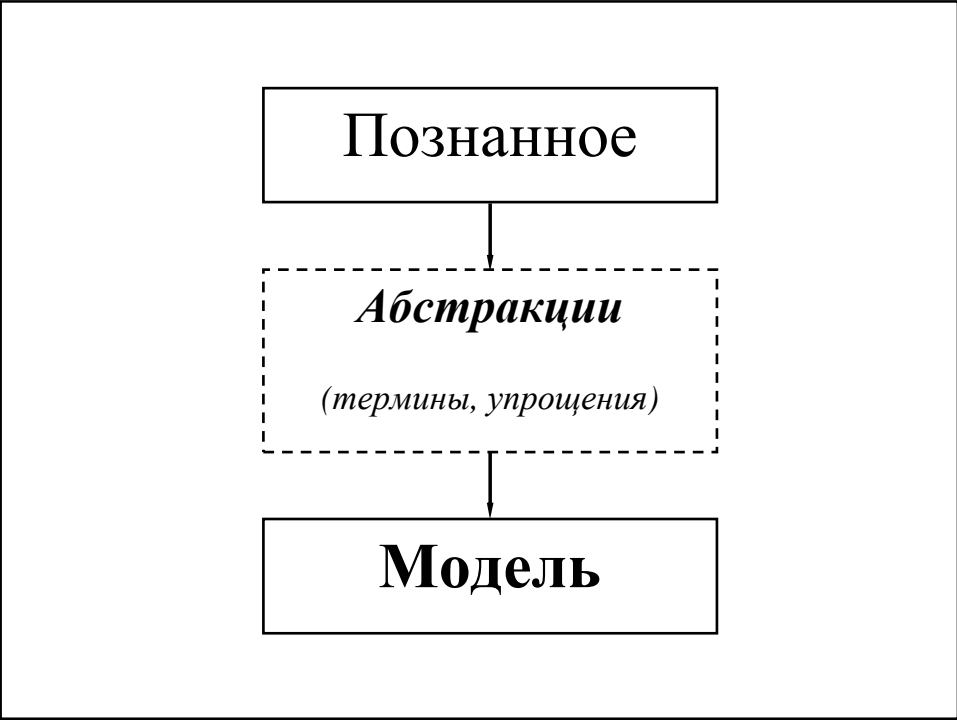
## Введение

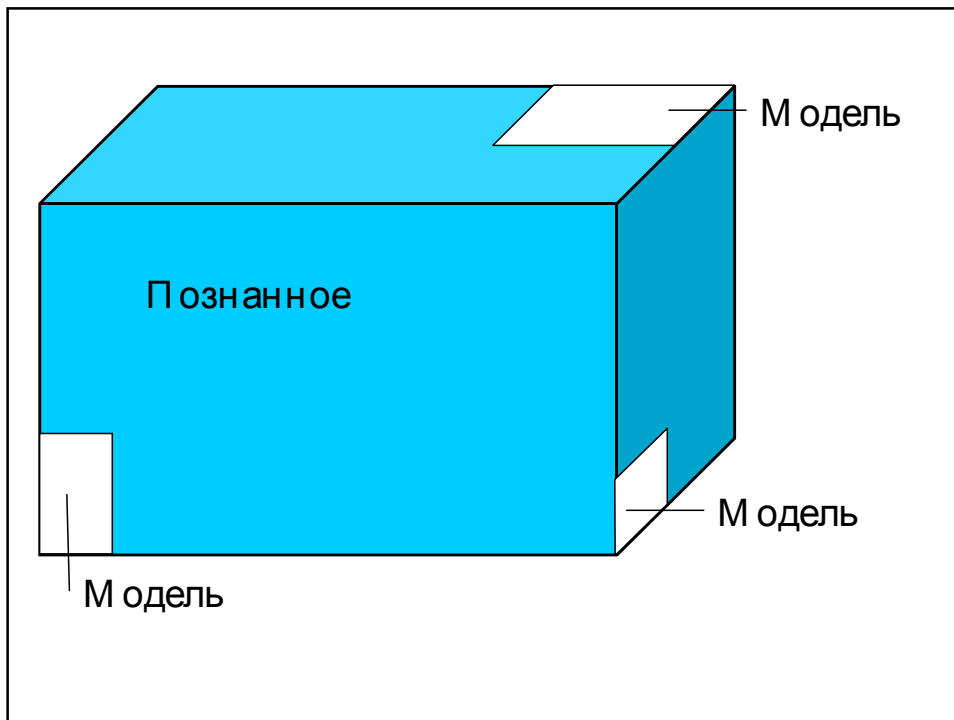
[Часть I, стр. 6 - 8]











«Хорошо организованные системы» - явления и объекты, достаточно точно и однозначно описываемые **небольшим** количеством факторов

«Плохо организованные системы» - сложные системы,  
в которых нельзя разделить  
отдельные явления

**ХОРОШО  
ОРГАНИЗОВАННЫЕ  
СИСТЕМЫ**

ЗАКОНЫ

- классической механики,
- генетики,
- ХИМИИ...

**ПЛОХО  
ОРГАНИЗОВАННЫЕ  
СИСТЕМЫ**

ЗАКОНОМЕРНОСТИ

- поляра ЛА,
- инфляционные ожидания,
- надежность...



Целью научных исследований  
является познание **законов**  
природы.

Целью инженерных  
исследований следует считать  
познание **закономерностей**,  
свойственных продуктам  
человеческой деятельности.

Выявление закономерностей,  
т.е. эксперимент нуждается  
не только в четкой формулировке  
**цели исследования**,  
но и в знании **основных свойств**  
оригинала,  
что невозможно без его  
**модели**

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

## Модели и моделирование

### Понятие модели и моделирования

[Часть I, стр. 9 - 11]

Колебания чугунного шара,  
подвешенного на тросе крана в Москве для  
разрушения сносимых строений.

Колебания маятника старинных  
башенных часов в Праге.

Колебания маятника Фуко...



## **Модель** - ЭТО

- заместитель оригинала,
- позволяющий изучить некоторые его свойства
- в определенных условиях.

Достаточно, чтобы сходство было лишь в тех свойствах, которые являются объектом данного исследования.

Не существует моделей "вообще" – не предназначенных для каких-либо исследований.

Нет таких моделей, которые воспроизвели бы все свойства оригинала.

Выбор необходимых для исследования свойств и условий дает возможность на основании предварительного изучения оригинала планомерно строить модель, удовлетворяющую поставленным целям (определенным требованиям точности, широты применения, ответа на поставленные вопросы и т.п.).

## Примеры моделей

- **Арифметика** - модель счетно-обменных операций.
- **Радиосхема** - модель электронной аппаратуры.
- **Электронная система автоматического управления** - модель действий управляющего оператора (пилота).
- **Глобус** - модель земного шара.

## **Моделирование** - ЭТО

- процесс выбора или построения модели
- для исследования определенных свойств оригинала
- в определенных условиях.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ

Реальная  
ситуация

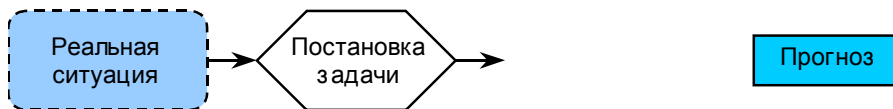
# МОДЕЛИРОВАНИЕ

Реальная  
ситуация

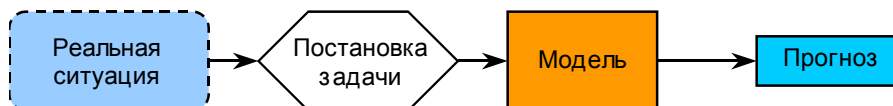


Прогноз

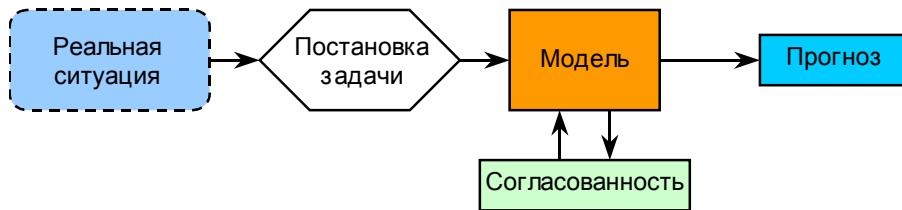
# МОДЕЛИРОВАНИЕ



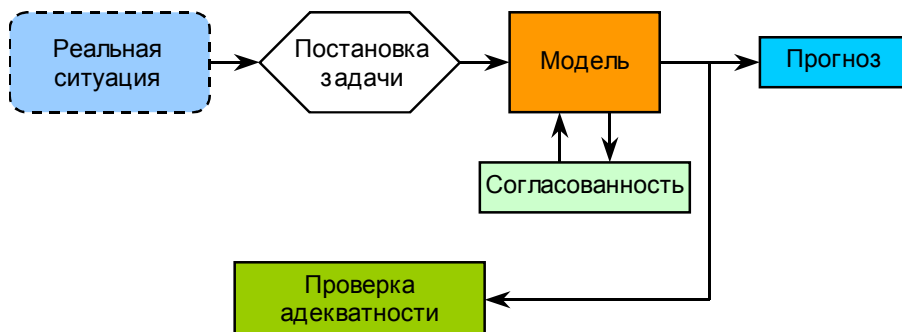
# МОДЕЛИРОВАНИЕ



# МОДЕЛИРОВАНИЕ

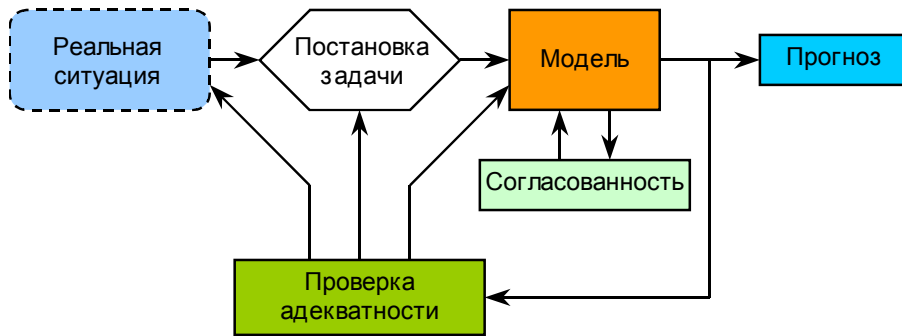


# МОДЕЛИРОВАНИЕ

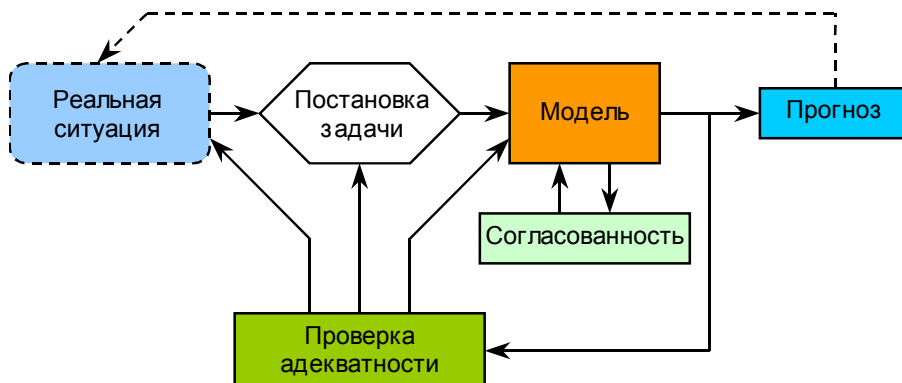




# МОДЕЛИРОВАНИЕ



# МОДЕЛИРОВАНИЕ



Приведенная схема – предварительная!  
Позднее будет разработан подробный алгоритм  
процесса моделирования.

Пренебрежение стадиями моделирования  
чревато ошибками и неверными выводами по  
существованию решаемой практической задачи.

Ошибки, возможные при нарушении  
процесса моделирования:

– вычисление с недопустимой,  
неконтролируемой погрешностью;

– несоответствие полученных результатов поставленной задаче (полученные результаты могут оказаться решением совсем другой задачи);

– неоднозначность решения при невозможности селекции;

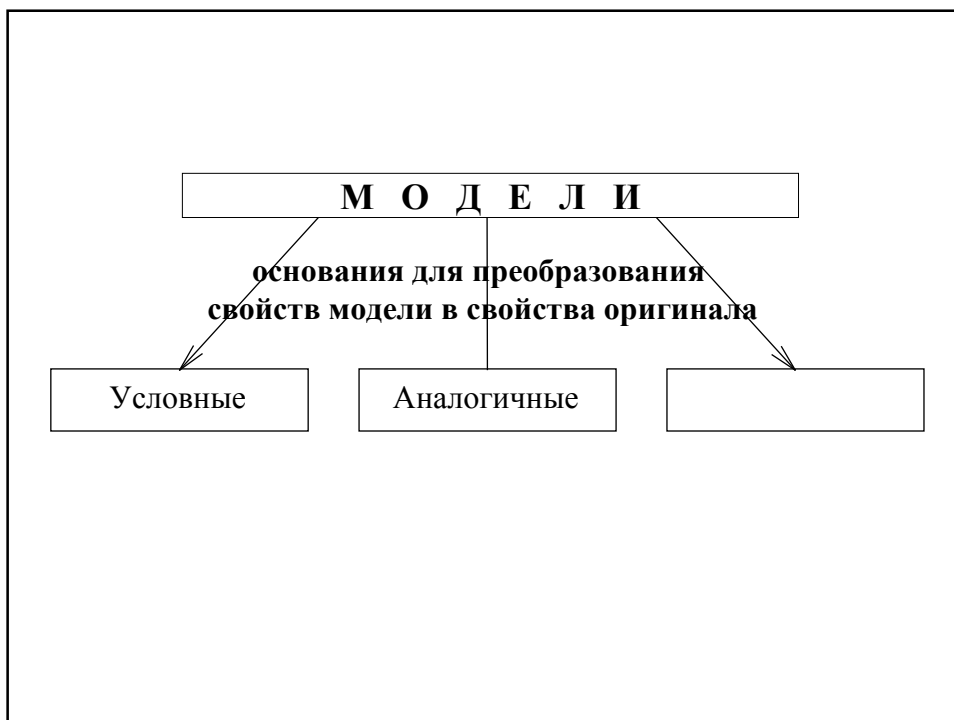
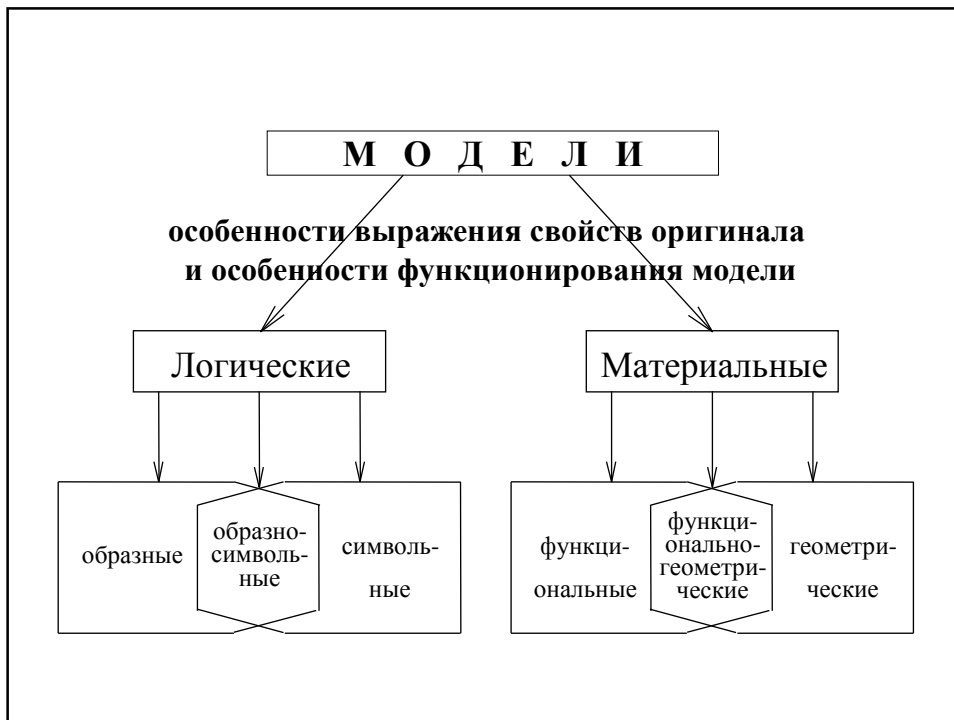
– неполучение решения (алгоритм расходится или не может завершиться).

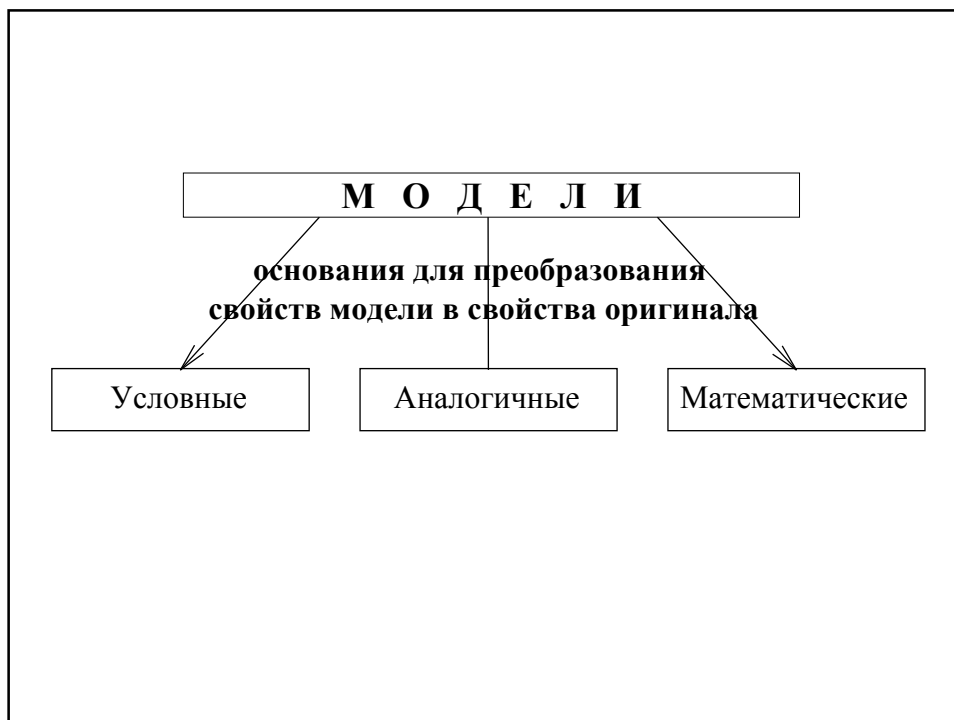
**Причины**, вынуждающие *применять моделирование*, без которого изучение оригинала **НЕВОЗМОЖНО**:

- сложность или дороговизна натурального исследования (например, в экономике, в экологии),
- невозможность натурального исследования по причинам аварийности или бесконечного времени ожидания результатов (например, аварийные ситуации при полетах, астрофизические явления).

## Классификация моделей

[Часть I, стр. 12 - 13]





**ПРИМЕР.** Маятник башенных часов в Праге.

В средней школе изучают "математический маятник" и предполагают определенные **условности**:

- масса маятника сосредоточена **в точке** на конце нити,
- нить **длинная**,
- нить **нерастяжимая**,
- нить **невесомая**,
- трение и аэродинамическое **сопротивление отсутствуют**,
- на массу действует единственная внешняя сила – **сила тяжести**.

Эту абстракцию можно классифицировать как **образную, условную** модель реального маятника.

Формулу колебаний:

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

можно классифицировать как  
*символьную, математическую*  
модель.

Реальный (металлический) маятник можно  
использовать в качестве *геометрической*  
(или *функционально-геометрической*),  
*аналогичной* модели.

Электрический колебательный контур,  
воспроизводящий реальные колебания,  
можно классифицировать как  
***функциональную, математическую***  
модель.

Программа для цифровой ЭВМ,  
рассчитывающая колебания реального маятника,  
тоже ***функциональная, математическая***  
модель,  
с возможным уточнением – ***дискретная*** (или  
***цифровая***),  
в отличие от ***непрерывной*** (или ***аналоговой***)  
в предыдущем случае.



# Методология математического моделирования Математические модели и их виды

[Часть I, стр. 14 - 20]

Особенности **моделей механических** систем и процессов:

- факторы – измеримые величины – параметры;
- в основе – уравнения фундаментальных законов природы (механики);
- недостоверно известные характеристики объекта;
- необходимость учета множества факторов.



**Математические** модели

**Математические**  
**модели**

ОСНОВЫВАЮТСЯ НА  
*математическом*  
*описании*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ



Взаимосвязи параметров объекта, характеризующие его особенности функционирования, могут представляться в виде:

- вектор-функций  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ ,
- неявных функций  $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) = 0$ ,
- обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots, \mathbf{x}^{(m)}, t) = 0,$$

- дифференциальных уравнений с частными производными

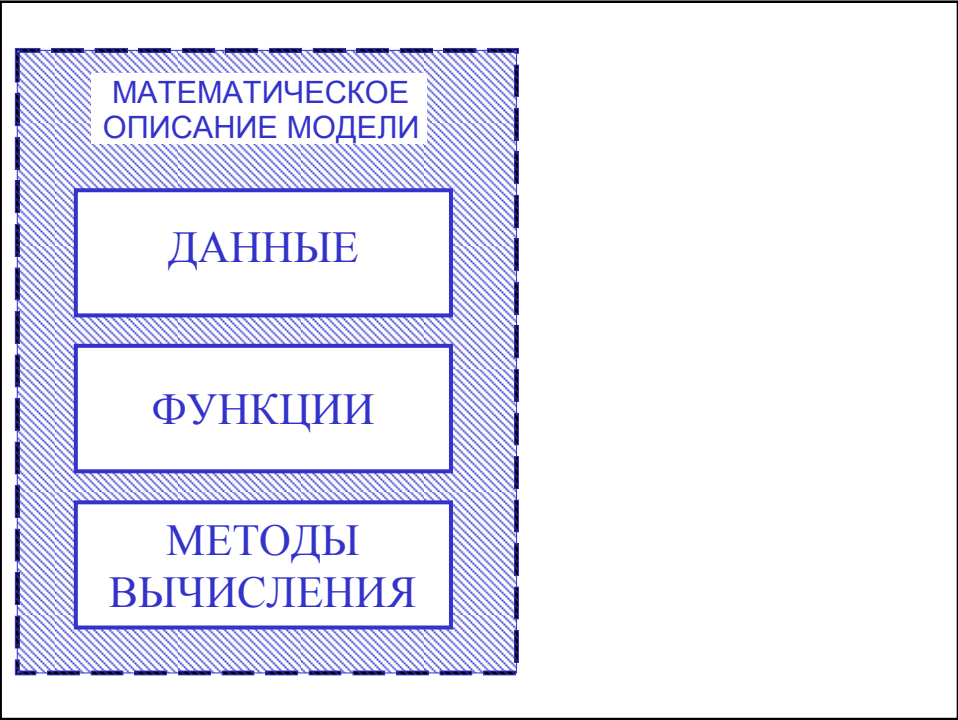
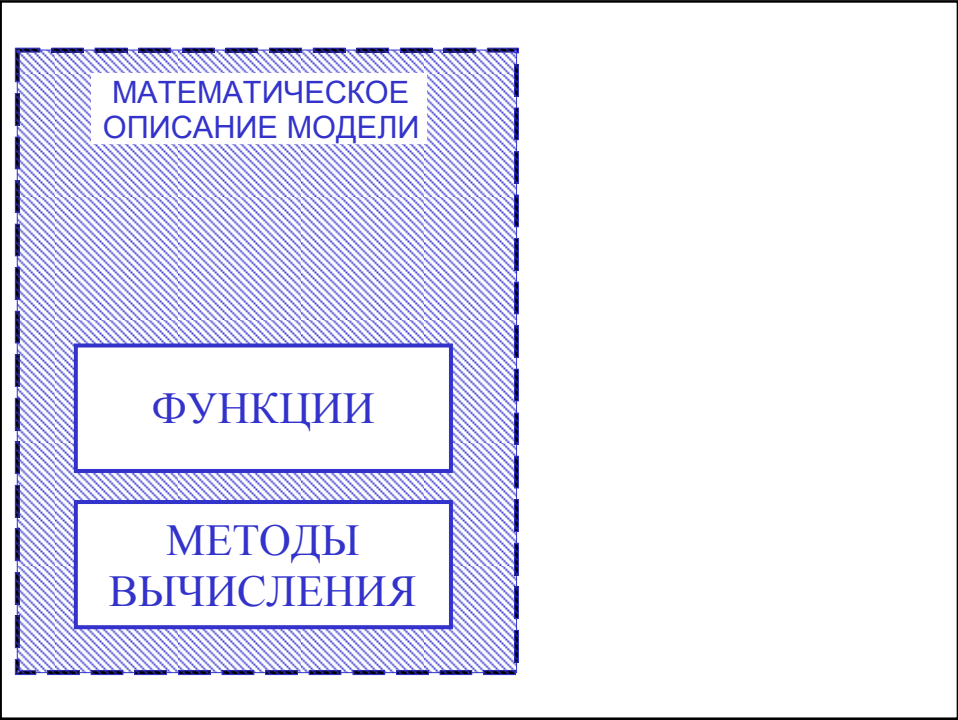
$$\mathbf{F}\left(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}, \dots\right) = 0$$

- вычислительного алгоритма,
- вероятностного (стохастического) описания.

аналитические  
зависимости

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

ФУНКЦИИ

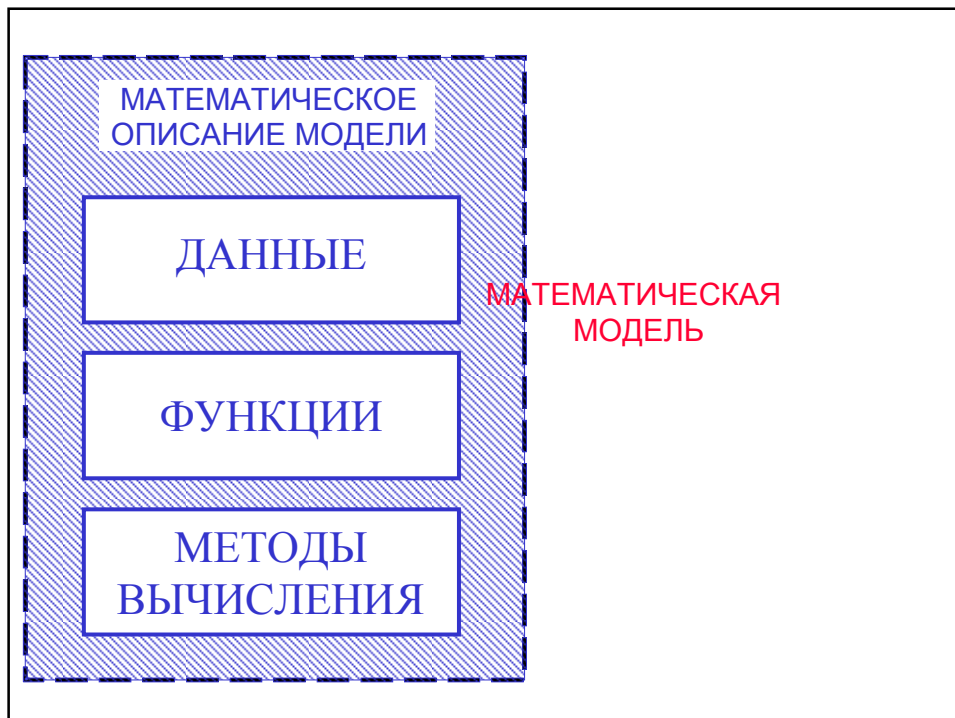


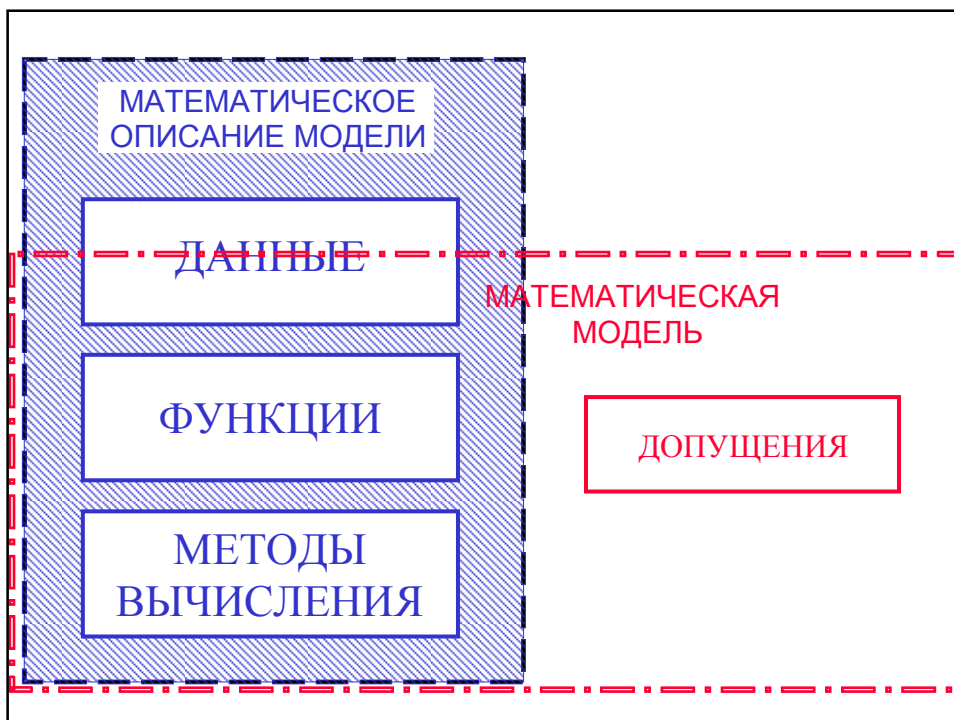
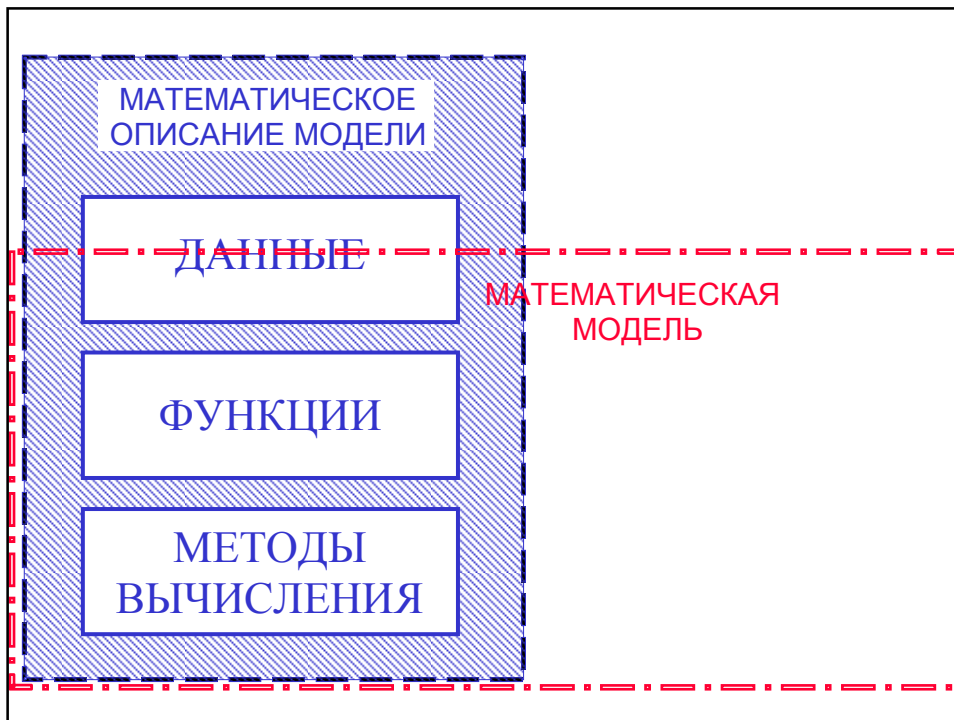
**Математическое описание -**

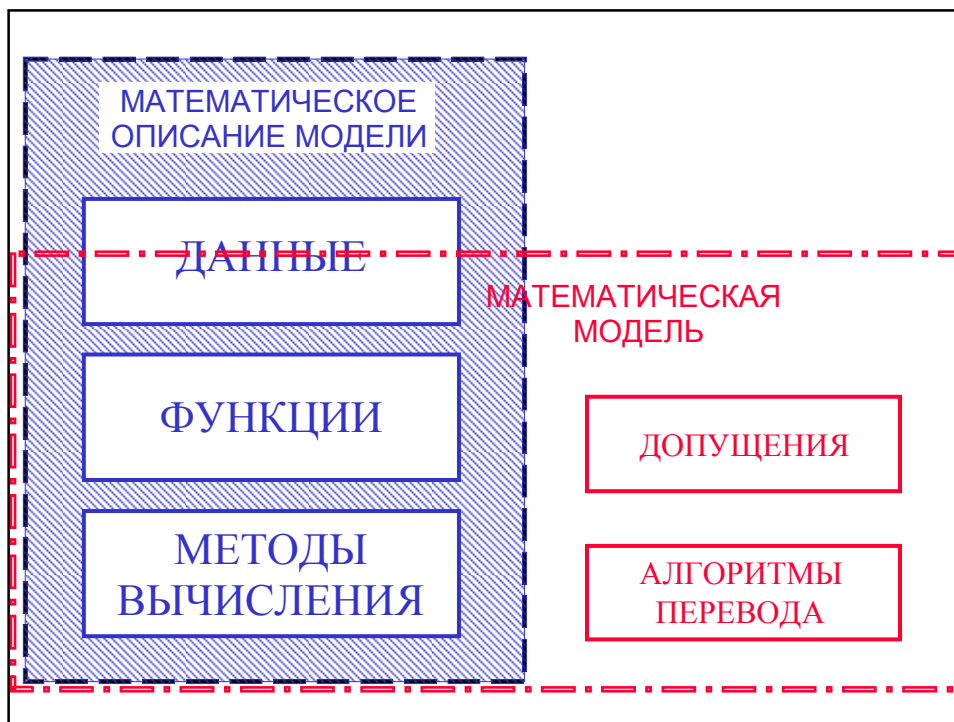
**ПОЛНАЯ СОВОКУПНОСТЬ**

- ЧИСЛОВЫХ ДАННЫХ,
- ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ,
- МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ,

**ПОЗВОЛЯЮЩАЯ ПОЛУЧАТЬ  
РЕЗУЛЬТАТ.**







### Виды математических моделей:

- **расчетные** (формулы, алгоритмы, таблицы (РЛЭ));
- **соответственные** (модель в а/д трубе и реальный самолет);
- **подобные** (одинаковые математические описания **И** пропорциональные соответствующие параметры);

– **линейные** (описываемые функциями, которые содержат основные параметры только в степени 0 и 1) или **нелинейные**, (любыми видами функций),

– **стационарные** (независящие от времени) или **нестационарные** (зависящие от времени),

– **непрерывные** или **дискретные**,

– **четкие** или **нечеткие** (примеры нечетких множеств: около 10; глубоко или мелко; хорошо или плохо),



- **непрерывные** или **дискретные**,
- **четкие** или **нечеткие** (примеры нечетких множеств: около 10; глубоко или мелко; хорошо или плохо),
- **детерминированные** (точные, однозначные) или **стохастические** (вероятностные: корреляционные, дисперсионные, регрессионные)

**Имитационные модели (стохастические)** – это математические модели таких оригиналов, для отдельных элементов которых отсутствует аналитический вид математического описания.

Математическое описание имитационных моделей содержит описание **случайных процессов** (стохастических) и использует *корреляционные, дисперсионные и регрессионные модели*, а также *модели массового обслуживания* и *метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)*.

# Адекватность математических моделей

[Часть I, стр. 20 - 28]

**Вычислительный эксперимент** –  
это получение результатов с помощью  
математической модели для какого-либо  
конкретного случая исследований.

**Вычислительный эксперимент** –  
единичный расчет или комплекс расчетов. В  
последнем случае необходима процедура  
*планирования вычислительного эксперимента.*

**Целью планирования вычислительного  
эксперимента** является получение максимума  
**достоверной** информации при минимуме затрат.

**Достоверность** результата ВЭ –  
одновременное выполнение двух условий:

– результат должен быть достаточно **точен**  
(*несмещен*),

– не может быть **опровергнут** с помощью  
каких-либо дополнительных расчетов  
(*состоятелен*).

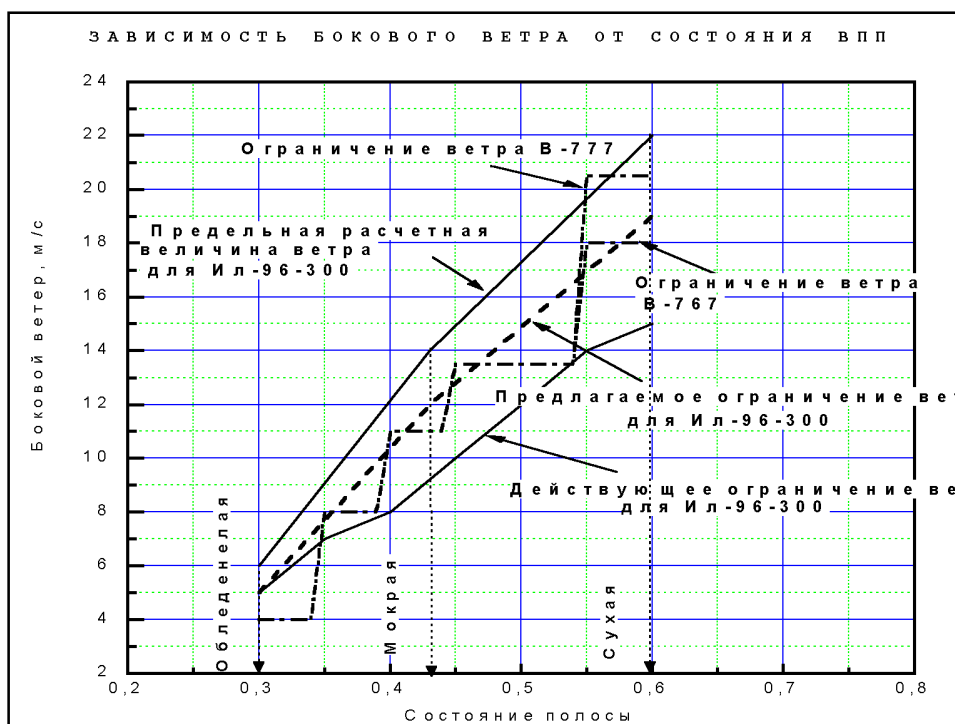
**ПРИМЕР.** Определение предельных по  
условиям бокового выкатывания сочетаний  
значений скорости бокового ветра **W** и  
коэффициента сцепления колес шасси с ВПП  
 **$\mu_{\text{ВПП}}$**  многодвигательного самолета с  
двигателями под крылом.

Последовательность действий (*план вычислительного эксперимента*):

– выявление **критических** случаев (например, взлет с отказом критического двигателя в критический момент: при ветре слева критическим является правый крайний двигатель, а критическим моментом является момент достижения скорости принятия решения);

– выбор способов нетрадиционного **управления** самолетом (например, раздельное управление тягой двигателей, включение-выключение управления передним колесом, раздельное торможение);

– последовательная *аппроксимация* линии, представляющей на координатной плоскости исследуемых параметров (скорости бокового ветра и коэффициента сцепления) предельные допустимые сочетания значений, полученных в результате расчетов на множестве критических случаев и способов управления самолетом.



Адекватность математической модели –

это **соответствие** результатов  
вычислительного эксперимента  
поведению реального объекта.

Это соответствие следует оценивать  
с точки зрения целей исследования.

**Механические системы и процессы**

характеризуются измеримыми величинами –  
параметрами.



Имеет смысл сравнение только **соответствующих**  
параметров модели и оригинала **в одних и тех же**  
**условиях** и только **в той области**  
функционирования объекта, в которой  
предполагается его исследовать.



ММ механических систем и процессов –  
подобные детерминированные модели,  
обладающие **общим** с оригиналом  
математическим описанием.



Поэтому для адекватности математической  
модели поведению оригинала достаточно  
убедиться в выполнении двух свойств:  
**точности и непротиворечивости.**

**Точность** в задачах механики:

обобщенная характеристика **рассогласования**  
соответствующего параметра модели и оригинала  
( $\Delta u = u_{\text{модели}} - u_{\text{оригинала}}$ ) должна быть не больше,  
чем заранее заданное значение **приемлемой**  
**погрешности  $\delta_{\text{зад}}$ .**

Примеры обобщенных характеристик рассогласования:

- $\max |\Delta u|$ ;
- $\overline{\Delta u}$ ;
- *доверительный интервал* для математического ожидания  $\Delta u$ ;
- $\Delta u_{\max} - \Delta u_{\min}$ ;
- интегральная оценка одного из следующих типов:

$$K_{\Delta} = \alpha \int_0^T \Delta u(t) dt \left( K_{\Delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta u_i \right), \text{ или } K_{\delta} = \beta \int_0^T \delta u(t) dt \left( K_{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta u_i \right).$$

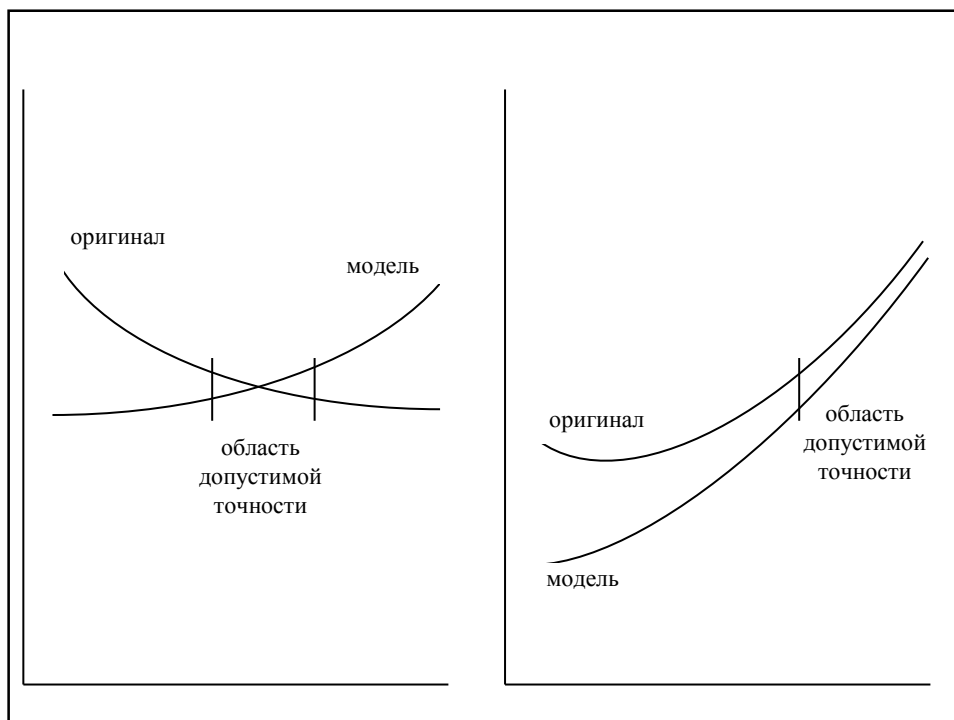
### Непротиворечивость –

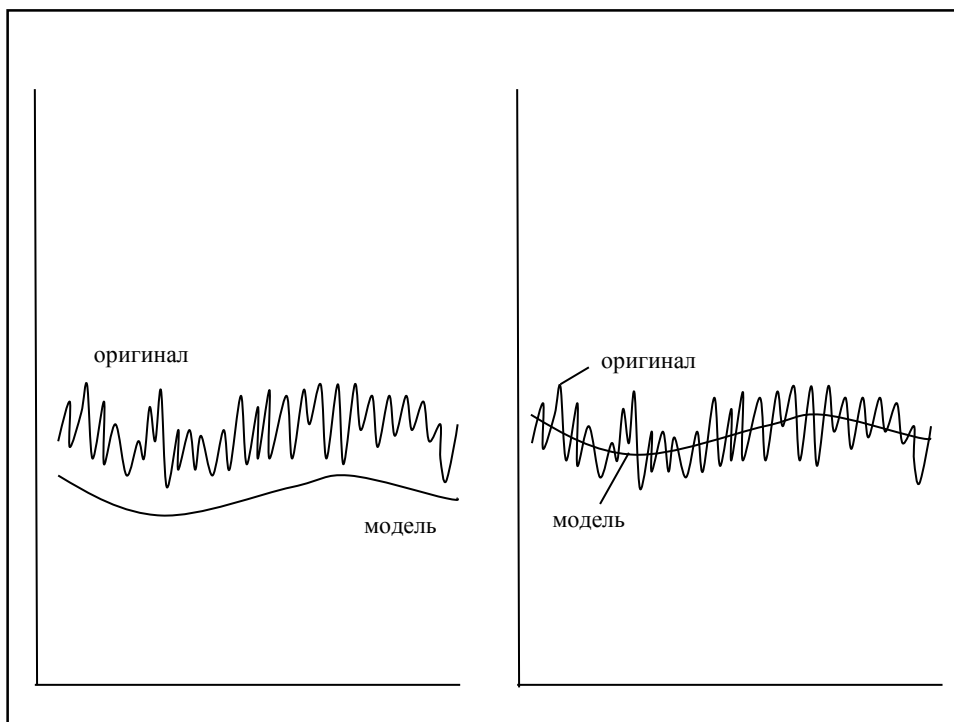
**идентичный характер изменения**  
соответствующих параметров, т.е. идентичный  
вид основных **свойств** функциональных  
зависимостей на отдельных участках  
(возрастание, убывание, асимптоты,  
периодичность, экстремумы, выпуклость...)

Смысл непротиворечивости – в  
**отсутствии закономерности**  
рассогласования.



Т.е. **хорошо**, когда  
рассогласование между моделью  
и оригиналом ведет себя как  
**простая ошибка измерения.**





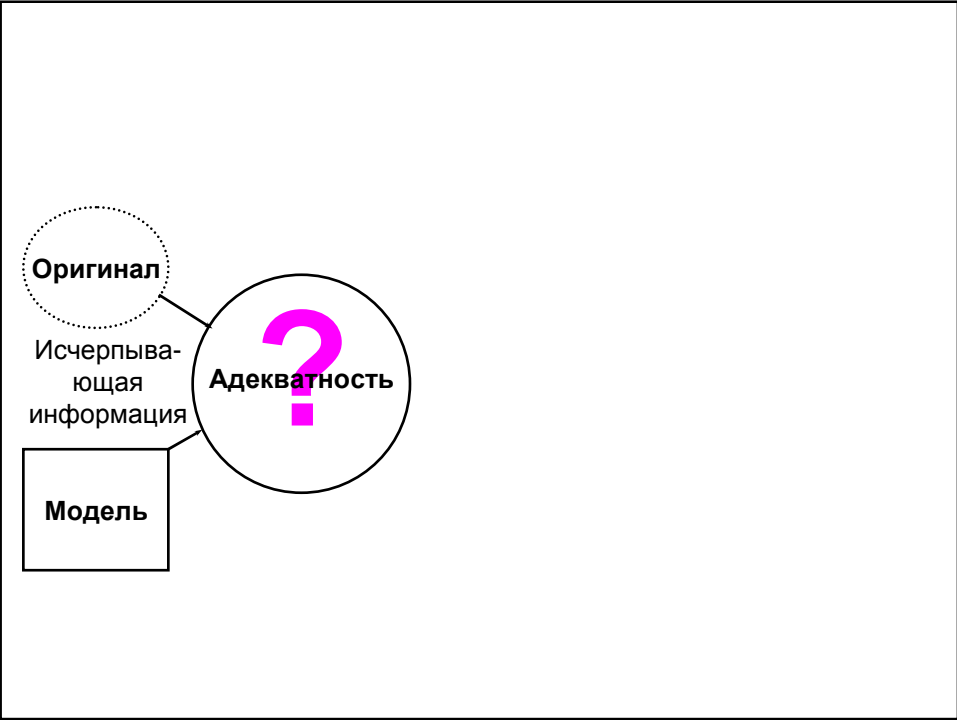
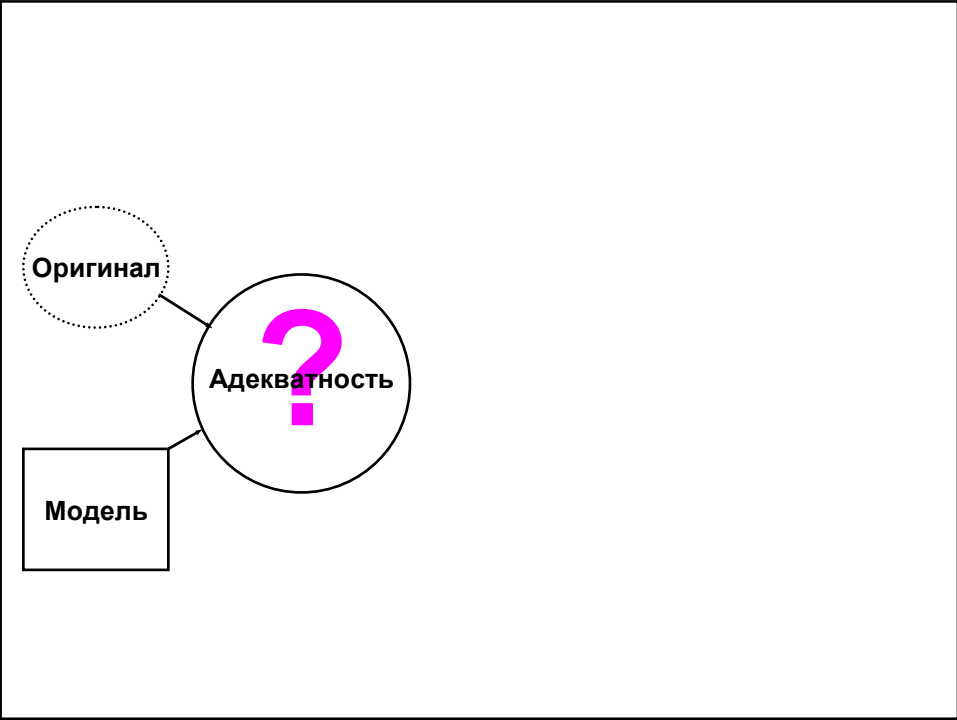
**Рассогласование** результатов *вычислительного эксперимента* с результатами *натурного эксперимента* в тех же условиях:

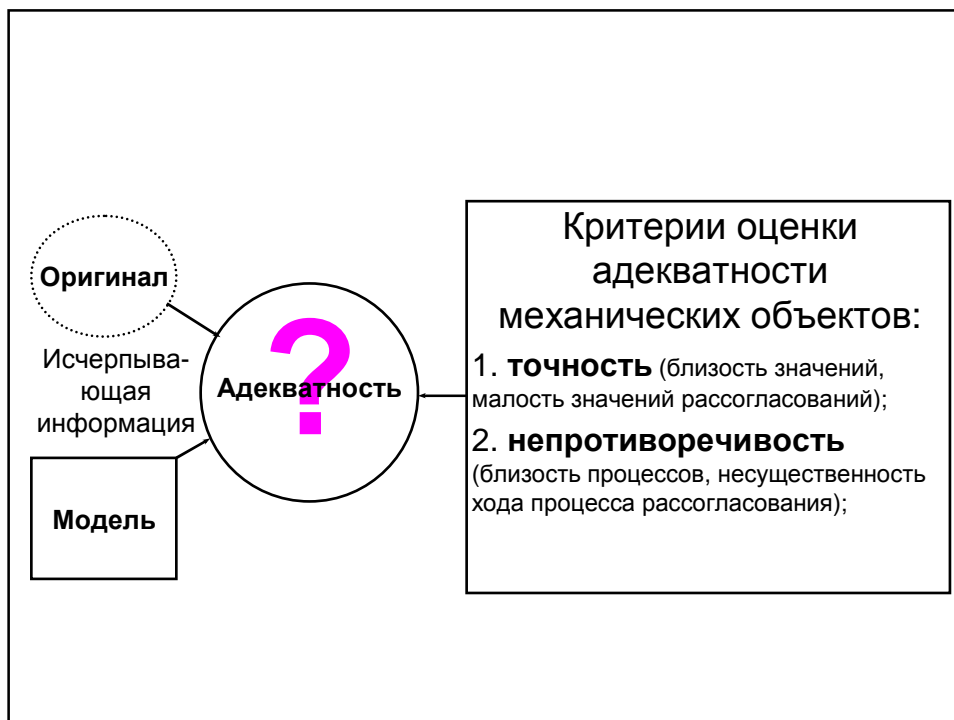
$$\Delta u = u_{\text{модели}} - U_{\text{оригинала}}$$

– величина на практике дискретная:  $\{\Delta u_i; i = 1, 2, \dots, N\}$  –  
 выборка из генеральной совокупности истинной величины  
 рассогласования.



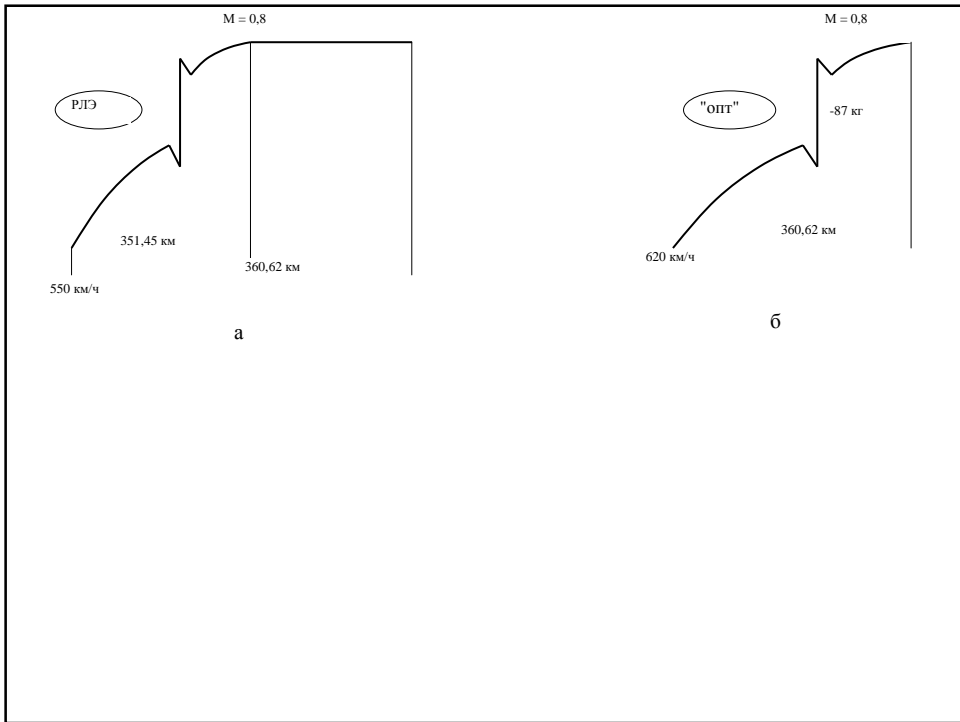
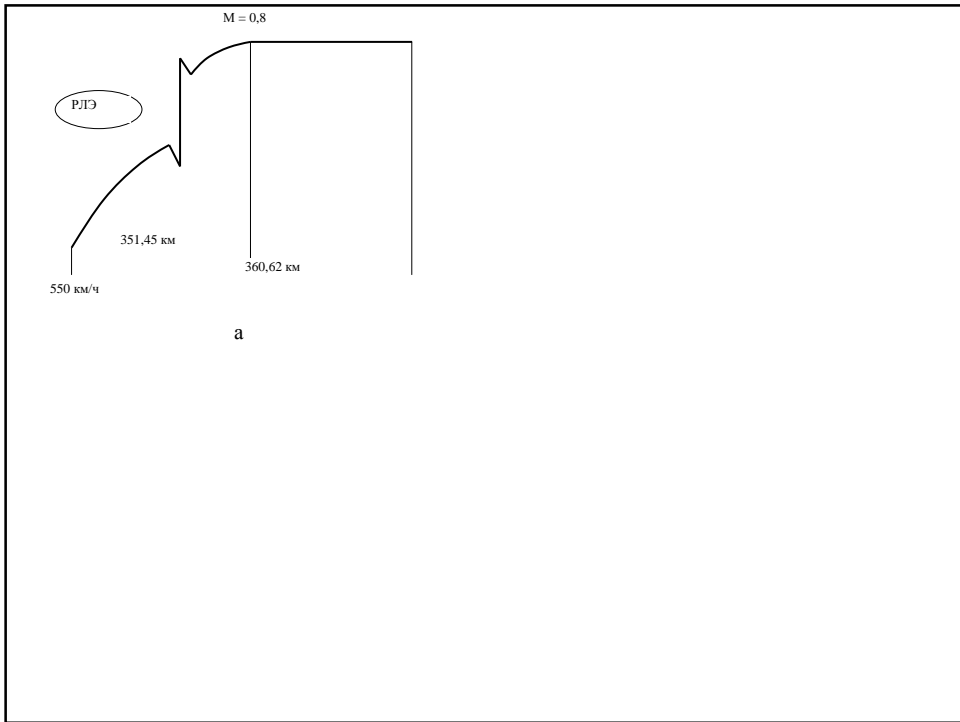
Необходим **статистический анализ**.

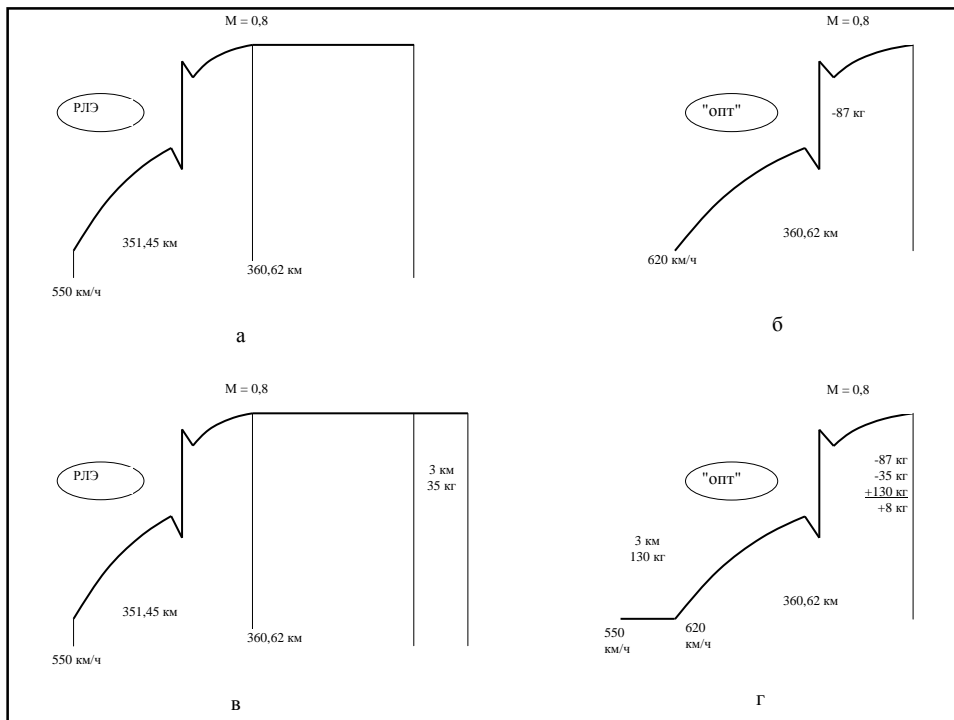




Результат оценки адекватности зависит от:

- **ограниченности** допустимого диапазона изменения параметров системы (вследствие ограниченной области функционирования объекта, в которой он моделируется);
- соответствия математического описания **условий** проведения реального и вычислительного экспериментов;
- возможной **неоднозначности** результата вычислительного эксперимента;
- **точности** вычислительного эксперимента.





**Точность** модели определяется рассогласованием значений рассматриваемого параметра  $u$  – **погрешностью**:

– **абсолютная погрешность**  $\Delta u = u_{\text{модели}} - u_{\text{оригинала}}$ ,

– **относительная погрешность**

$$\delta u = \frac{\Delta u}{u_{\text{оригинала}}} \cdot 100\% ,$$

– **относительная приведенная погрешность**

$$\delta u = \frac{\Delta u}{u_{\text{меры}}} \quad (\text{где } u_{\text{меры}} - \text{характерное значение, например,}$$

$$u_{\text{меры}} = |u|_{\text{max}}).$$



*Погрешности* получили следующие  
эпитеты:

– грубая – недопустимая с точки зрения  
целей исследования;

– удовлетворительная – допустимая с точки  
зрения целей исследования;

– случайная – принимающая случайные  
значения при многократном повторении опыта в  
неизменных условиях (например, замер времени  
падения шара с Пизанской башни с помощью  
одного и того же секундомера);

– систематическая – принимающая неизменное значение при многократном повторении опыта в неизменных условиях (то же, что в предыдущем случае, но с испорченным секундомером, который начинает отсчет времени на 0,1 с позже пуска).

При математическом моделировании возможны *погрешности*, обусловленные различными причинами:

– погрешности **физической абстракции** (неточность физических законов и закономерностей, неучет некоторых факторов);

– погрешности **математического описания**:

– приближенность уравнений,

– приближенность данных,

– погрешность расчетов (погрешность установок, ЭВМ, приближенные методы расчетов);

– погрешность **обработки результатов** (округление результатов, графическое изображение).

## Погрешности приближенных вычислений

$$a \Rightarrow a + \Delta a \quad b \Rightarrow b + \Delta b$$

1. Сумма:  $(a + \Delta a) + (b + \Delta b) = (a + b) + (\Delta a + \Delta b)$ ,

т.е. **абсолютная погрешность**:  $\Delta(a + b) < |\Delta a| + |\Delta b|$ ,

а **относительная погрешность**:  $\delta(a + b) = \frac{\Delta a + \Delta b}{a + b} = \frac{\delta a \cdot a + \delta b \cdot b}{a + b}$ ,

но, если для определенности  $\delta(a) < \delta(b)$ , то:

$$\frac{\delta a \cdot a + \delta a \cdot b}{a + b} < \frac{\delta a \cdot a + \delta b \cdot b}{a + b} < \frac{\delta b \cdot a + \delta b \cdot b}{a + b},$$

и, следовательно,  $\min(\delta a, \delta b) < \delta(a + b) < \max(\delta a, \delta b)$ .

2. Разность:  $(a + \Delta a) - (b + \Delta b) = (a - b) + (\Delta a - \Delta b)$ ,

т.е. **абсолютная погрешность**:  $\Delta(a - b) < |\Delta a| + |\Delta b|$ ,

а **относительная погрешность**:  $\delta(a - b) = \frac{\Delta a - \Delta b}{a - b} = \frac{\delta a \cdot a - \delta b \cdot b}{a - b}$ .



В приближенных вычислениях необходимо **контролировать** разность близких величин, что особенно важно учитывать при программировании алгоритмов для ЭВМ.

3. Произведение:

$$(a + \Delta a) \times (b + \Delta b) = (a \times b) + (\Delta a \times b + \Delta b \times a) + (\Delta a \times \Delta b),$$

что в первом приближении (линейном) дает **абсолютную погрешность**:

$$\Delta(a \times b) \approx \Delta a \times b + \Delta b \times a,$$

и **относительную погрешность**:

$$\delta(a \times b) \approx \frac{\Delta a \times b + \Delta b \times a}{a \times b} = \delta a + \delta b.$$

$$4. \text{ Деление: } \frac{a+\Delta a}{b+\Delta b} = \frac{a \times b}{(b+\Delta b)^2} + \frac{\Delta a \times b + \Delta b \times a}{(b+\Delta b)^2} + \frac{\Delta a \times \Delta b}{(b+\Delta b)^2},$$

т.е. в первом приближении (линейном) **абсолютная**

**погрешность:**  $\Delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{\Delta a \times b + \Delta b \times a}{(b + \Delta b)^2},$

а **относительная погрешность:**  $\delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{\Delta a \times b + \Delta b \times a}{(b + \Delta b)^2} \frac{a}{b} \approx \delta a + \delta b.$

5. Вычисление функции  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

В первом (линейном) приближении:

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) \approx f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i,$$

т.е. **абсолютная погрешность:**

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i,$$

а **относительная погрешность:**

$$\begin{aligned} \delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\approx \frac{1}{|f(x_1, x_2, \dots, x_n)|} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f|} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left| x_i \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \delta x_i. \end{aligned}$$

6. Погрешность методов вычисления в более сложных случаях связана с применяемым алгоритмом. Поэтому для обеспечения возможности контроля погрешности методы должны обладать свойствами *аппроксимации и устойчивости*

## Понятие об обратных задачах

[Часть I, стр. 29 - 30]

Задача идентификации – задача определения недостающих или неточно известных параметров или функциональных соотношений модели с помощью результатов вычислительного эксперимента и данных о реальном поведении объекта.

Цель задачи идентификации - адекватность модели.

Суть задачи идентификации - доводка модели с помощью подбора подходящих параметров модели.

Пример идентификации математической модели  
разбега самолета Ан-2.

Контрольный вычислительный эксперимент:

$$V_{\text{отр}} = 28,0 \text{ м/с} = 100,8 \text{ км/ч}; \quad T_{\text{разб}} = 12 \text{ с}; \quad L_{\text{разб}} = 205 \text{ м.}$$

Взлет реального самолета Ан-2 в тех же условиях:

$$V_{\text{отр}} = ?; \quad T_{\text{разб}} = ?; \quad L_{\text{разб}} = 232 \text{ м.}$$

Вывод об адекватности зависит от **цели исследований**.

### **Контрольный вычислительный эксперимент**

– поэтапный подбор и коррекция  
математической модели для ее идентификации  
при воспроизведении реального известного  
случая поведения оригинала в конкретных  
условиях.



Только для строго линейной модели можно решить задачу идентификации *прямым* образом – найти  $x$  из уравнения  $ax + b = y$  при известном  $y$ .

Задача идентификации относится к особому классу – обратных задач.

Академик А.Н. Тихонов:  
любое решение обратной задачи  
следует рассматривать не более чем  
**"интерпретацию данных наблюдений"**.

Для решения обратных задач чаще всего используются: *метод проб и ошибок, метод перебора* (выборочного или последовательного), *метод последовательных приближений, метод проверки гипотез.*

Второй тип обратных задач – *задачи оптимизации.*

## Алгоритм исследований с помощью математического моделирования

[Часть I, стр. 30 - 31]

## АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЙ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1 — изучение оригинала: выявление основных факторов, особенностей, **диапазонов** исследуемых параметров, **условий и задач** исследования, постановка (формулировка) задачи исследования, оценка **требуемой точности**;

2 — феноменологическое описание оригинала ("физическое" описание): поиск **аналогий и функциональных** зависимостей на основе предыдущего этапа и достижений в различных областях **науки**;

3 — *математическое описание* оригинала;

4 — разработка алгоритмического и программного **обеспечения** для реализации математического описания с помощью ЭВМ;

5 — проведение контрольного вычислительного эксперимента (воспроизводящего реальный известный случай поведения оригинала в конкретных условиях);

6 — оценка *адекватности* результатов *контрольного вычислительного эксперимента* **реальному случаю**; при необходимости – повторение алгоритма с пункта 3, 2 или 1;

7 — *планирование* **вычислительного**  
эксперимента **в целях исследования;**

8 — проведение *вычислительного*  
*эксперимента* в целях исследования, **обработка**  
его результатов;

9 — **анализ** результатов вычислительного  
эксперимента, сравнение с результатами  
изучения оригинала (при необходимости —  
повторение алгоритма с пункта 7 или 1);

10 — формулировка **выводов**  
**исследования.**

Пункты 1 – 6 составляют процесс *моделирования* – построения математической модели.

В нем можно выделить процесс *идентификации*, объединяющий пункты 3 – 6.

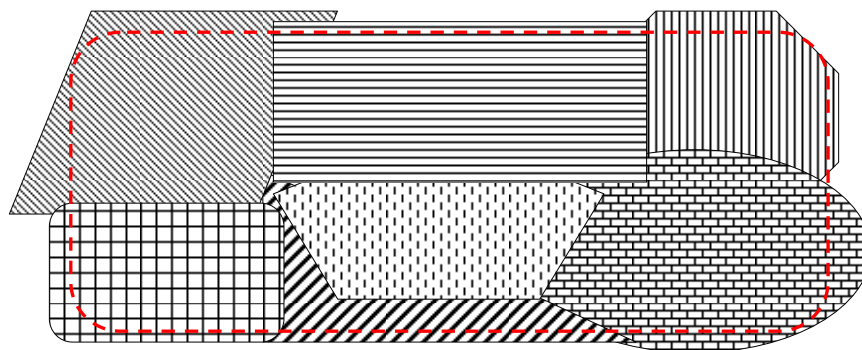
## Основные принципы математического моделирования механических систем и процессов

[Часть I, стр. 32 - 33]

### Принципы разработки ММ

принцип	чем обеспечивается
адекватность	определенные требования к математическому описанию
гибкость, инвариантность и динамичность	полная унификация всего программного обеспечения (ПО)
состоятельность результатов	математическая строгость: устойчивые, сходящиеся и однозначные вычислительные методы
удобство исследователя	диалоговый режим и унификация ПО
планирование вычислительного эксперимента (ВЭ)	
<b>конкретизация условий и области применения</b>	декомпозиция
<b>опережающая математическая строгость и глубина феноменологического описания явления</b>	приоритет физичности

### К пояснению принципа конкретизации условий и области применения (декомпозиции)



# Методы разработки математических моделей

## Проблемы построения математических моделей

[Часть I, стр. 34 - 35]

### Проблемы построения математической модели

проблемы	методы
множественность критериев оценки качества функционирования моделируемой системы ( <i>многокритериальность</i> )	ранжирование, методы экспертных оценок
большая размерность описания сложных систем ( <i>"проклятие размерности"</i> )	ранжирование, агрегирование, многомерный статистический анализ
<i>адекватность</i>	анализ условий моделирования, выбор критериев

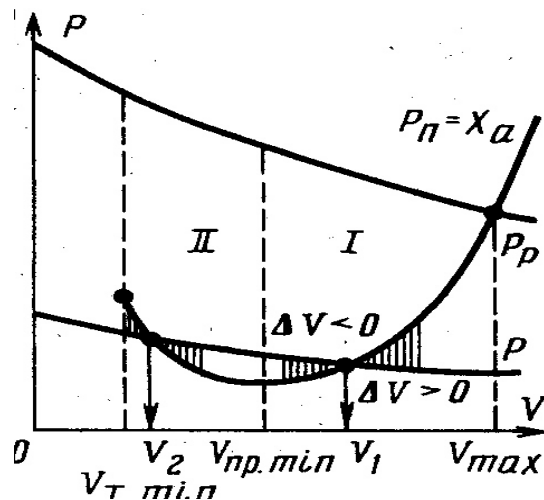


## Ранжирование

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.

## Агрегирование (декомпозиция)


## Теория катастроф (часть математической логики)



Метод последовательных приближений – общее название группы математических методов, в которых на каждом очередном **цикле** однообразных вычислений определяются новые значения параметров, более точные, которые в свою очередь используются на следующем цикле.

Метод проб и ошибок – по результатам одного или нескольких (отличающихся подбираемыми значениями параметров) расчетов делается **вывод о направлении** дальнейшего подбора искомых значений для минимизации ошибки.

Метод перебора – процесс отыскания решения, в котором проверяются **возможные варианты**, или *простым* перебором всего их множества, или *случайным* перебором. Этот прием для непрерывно распределенных факторов механических систем и процессов, принимающих бесконечное множество значений на любом отрезке своего изменения, не может считаться методом, поскольку не гарантирует получение решения.

Метод проверки гипотез – процесс выдвижения, анализа и проверки разнообразных **предположений** о причинах появления определенного результата. Этот метод имеет смысл применять там, где требуется найти скорее качественное, чем количественное объяснение сложного и неординарного явления.

### Задачи многомерного статистического анализа

1	Существует ли <b>связь</b> между отдельными факторами (любыми из: $y_i, y_k, x_s, z_l, z_v$ )	корреляционный анализ
2	Если между какими-то факторами есть связь, то насколько она <b>тесная</b>	
3	Если между какими-то факторами есть связь, то какой функцией ее можно <b>представить</b>	регрессионный анализ
4	Какие входные факторы оказывают на определенные выходные наибольшее <b>влияние</b>	дисперсионный анализ
5	Какие входные факторы можно <b>отбросить</b> из процесса изучения на основании их слабого, сравнимого с шумом, влияния	
6	Существуют ли <b>неучтенные</b> факторы, которые необходимо рассматривать ввиду их существенного влияния на выходные	
7	Существуют ли <b>обобщенные</b> факторы, которыми можно заменить несколько рассматриваемых	факторный анализ
8	Как связаны между собой <b>зашумленные</b> факторы	конфлюэнтный анализ
9	Каковы <b>характеристики шума</b>	
10	Как <b>выделить</b> "полезную" информацию из зашумленной	теория фильтрации

Методы разработки математических моделей, рассматриваемые подробно в следующих разделах:

- подобие и анализ размерностей;
- теория графов;
- теория массового обслуживания;
- метод Монте-Карло;
- методы экспертных оценок.

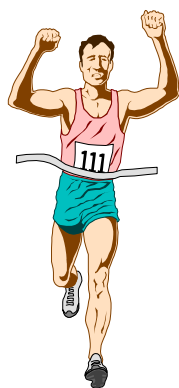
## Подобие и анализ размерностей

[Часть I, стр. 36 - 42]

Два объекта **подобны**, если выполнены **одновременно два условия**:

1) они имеют **одинаковые** математические описания;

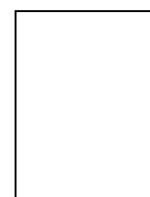
2) их соответствующие переменные связаны **коэффициентами подобия** (масштабами, константами подобия, коэффициентами пропорциональности).



$$L + t = ?$$

$$a + b = p/2$$

$$\frac{L}{t} = v$$



Величины, сумма или разность которых имеет физический смысл, назвали **однородными**.

**Единицей измерения** физической величины  $D$  (**размерностью**, обозначаемой с помощью квадратных скобок  $[D]$ ) называется условно выбранная физическая величина, имеющая тот же самый физический смысл, что и величина  $D$ .

Градус по шкале Фаренгейта равен  $1/180$  части разности температур кипения воды и таяния льда при нормальных атмосферных условиях, причем температура таяния льда принята за 32 градуса по шкале Фаренгейта.



$1^{\circ}\text{F}$

Величины, численное значение которых зависит от принятых единиц измерения, называются **размерными**.

Величины, численное значение которых не зависит от принятых единиц измерения, называются **безразмерными**.

**Анализ размерностей** занимается изучением размерных величин.

Необходимо производить не только арифметические действия с числами, но и преобразования единиц измерения:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{220 \text{ В}}{2 \text{ кОм}} = \frac{220 \text{ В}}{2000 \text{ Ом}} = \frac{220 \frac{\text{м}^2 \text{кг}}{\text{с}^3 \text{А}}}{2000 \frac{\text{м}^2 \text{кг}}{\text{с}^3 \text{А}^2}} = 0,11 \text{ А} .$$



Порядок и правила применения размерностей устанавливают **системы единиц измерения** (СГС, техническая, МКС, МКСА, СГСЭ и СГСМ).

XI Генеральная конференция по мерам и весам (1960 г. Париж) приняла **Международную систему единиц измерения**, обозначаемую **SI** (в русской транскрипции **СИ**: ГОСТ 8.417–81 Единицы физических величин).

**Основные единицы измерения СИ (независимые):**

- **метр** [м] в качестве меры длины,
- **килограмм** [кг] в качестве меры массы,
- **секунда** [с] в качестве меры времени,
- **ампер** [А] в качестве меры силы электрического тока,
- **кельвин** [°К] в качестве меры термодинамической температуры,
- **моль** [моль] в качестве меры количества вещества,
- **кандела** [кд] в качестве меры силы света.

Дополнительные единицы измерения (безразмерные):

- плоских углов – **радиан** [рад],
- телесных углов – **стерадиан** [ср].

Остальные размерные единицы принято называть **производными**. Они получаются из основных с помощью физических законов. Например, единица мощности N Ватт [Вт] получается применением следующих формул известных законов механики, использующих понятия работы, силы, массы и ускорения:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{Fs}{t} = \frac{mas}{t}; \text{ откуда } [N] = \text{Вт} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3}.$$

Все основные законы природы в любой системе единиц измерения описываются **степенными комплексами**:

$$z = x_1^{y_1} \cdot x_2^{y_2} \cdot \dots \cdot x_n^{y_n},$$

– произведениями размерных параметров  $x_i$ , определяющих изучаемое явление, со своими числовыми показателями степеней  $y_i$ .

Нетрудно видеть, что выражение:

$$\Pi = \frac{z}{x_1^{y_1} \cdot x_2^{y_2} \cdot \dots \cdot x_n^{y_n}}$$

безразмерно, так как числитель и знаменатель его должны иметь одну и ту же размерность в силу записи закона природы.

### **П-теорема ("Пи-теорема" – по названию греческой буквы $\Pi$ )**

Независимая от выбора системы единиц измерения связь между  $n + 1$  размерными величинами  $z, x_1^{y_1}, x_2^{y_2}, \dots, x_n^{y_n}$  принимает вид соотношения между  $n + 1 - k$  безразмерными степенными комплексами (критериями подобия), где  $k$  – количество величин из используемых  $n + 1$ , которые имеют независимые размерности.

## Следствие из П-теоремы:

Для функционального описания изучаемого явления достаточно выбрать параметры, которые его характеризуют, и составить из них все возможные **критерии подобия** (*безразмерные степенные комплексы*).

**ПРИМЕР 1.** Равномерное поступательное движение: для объекта  $L = VT$ ; для подобной модели  $l = vt$ . Это означает, что при переходе от оригинала к модели должен сохраняться *безразмерный степенной комплекс*:

$$\frac{VT}{L} = \frac{vt}{l} = \Pi \text{ – критерий подобия.}$$

**ПРИМЕР 2.** Каким параметром определяется вид движения вязкой жидкости в гладкой трубе (ламинарный или турбулентный)?

**ПРИМЕР 2.** Каким параметром определяется вид движения вязкой жидкости в гладкой трубе (ламинарный или турбулентный)?

Основные параметры явления:

радиус трубы  $r$  [м],

вязкость жидкости  $\mu$  [кг/(м·с)],

плотность жидкости  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>],

средняя скорость движения жидкости  $V$  [м/с].

Степенной комплекс  $\Pi = r^{y_1} \cdot \mu^{y_2} \cdot \rho^{y_3} \cdot V^{y_4}$   
 должен иметь размерность  $[\Pi] = 1$  хотя бы при  
 одном комплекте значений показателей степеней:

$$\begin{aligned} [\Pi] &= [r]^{y_1} \cdot [\mu]^{y_2} \cdot [\rho]^{y_3} \cdot [V]^{y_4} = \\ &= \text{м}^{y_1} \text{кг}^{y_2} \text{м}^{-y_2} \text{с}^{-y_2} \text{кг}^{-y_3} \text{м}^{-3y_3} \text{м}^{y_4} \text{с}^{-y_4} = \\ &= \text{м}^{y_1 - y_2 - 3y_3 + y_4} \text{кг}^{y_2 + y_3} \text{с}^{-y_2 - y_4} = 1. \end{aligned}$$

Поскольку м, кг и с – *основные единицы*,  
 имеющие *независимые* размерности, то показатели  
 степеней при каждой из них должны независимо  
 обращаться в нуль:

$$\left. \begin{aligned} (\text{м}): \quad & y_1 - y_2 - 3y_3 + y_4 = 0 \\ (\text{кг}): \quad & y_2 + y_3 = 0 \\ (\text{с}): \quad & -y_2 - y_4 = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Решение этой системы:  $y_2 = -y_4$ ,  $y_3 = y_4$ ,  $y_1 = y_4$ , где  $y_4$  – произвольно (свободное неизвестное), дает:  $\Pi = \left( \frac{r\rho V}{\mu} \right)^{y_4}$ .

Решение этой системы:  $y_2 = -y_4$ ,  $y_3 = y_4$ ,  $y_1 = y_4$ , где  $y_4$  – произвольно (свободное неизвестное), дает:  $\Pi = \left( \frac{r\rho V}{\mu} \right)^{y_4}$ .

Откуда следует известный критерий подобия:  $Re = \frac{r\rho V}{\mu}$ .

Т.е. вид движения жидкости в трубе определяется числом Рейнольдса.

**ПРИМЕР 3.** Этот пример применения П-теоремы демонстрирует возможность составления недостающих элементов математического описания, связывающих параметры исследуемого явления.

В условиях невесомости (при этом ускорение силы тяжести несущественно) рассматривается шар в вязкой жидкости. Для очень медленного равномерного движения шара (при этом плотность жидкости и масса шара несущественны) требуется определить вид зависимости силы сопротивления  $W$  от скорости движения  $V$  и других существенных параметров явления.

Существенные параметры этого явления со своими размерностями, выраженными через основные (независимые) единицы измерений:

$$[d] = \text{м},$$

$$[\mu] = \text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с}),$$

$$[V] = \text{м}/\text{с},$$

$$[W] = \text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2,$$

$$[h] = \text{м},$$

$$[T] = \text{°К}.$$



Критерий подобия, который должен быть безразмерным:

$$\Pi = d^{y_1} \cdot \mu^{y_2} \cdot V^{y_3} \cdot W^{y_4} \cdot h^{y_5} \cdot T^{y_6}.$$

Из приведенных размерностей следует:

$$\begin{aligned} [\Pi] = 1 &= [d]^{y_1} \cdot [\mu]^{y_2} \cdot [V]^{y_3} \cdot [W]^{y_4} \cdot [h]^{y_5} \cdot [T]^{y_6} = \\ &= \text{м}^{y_1} \text{кг}^{y_2} \text{м}^{-y_2} \text{с}^{-y_2} \text{м}^{y_3} \text{с}^{-y_3} \text{кг}^{y_4} \text{м}^{y_4} \text{с}^{-2y_4} \text{м}^{y_5} (\text{°К})^{y_6} = \\ &= \text{м}^{y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5} \cdot \text{кг}^{y_2 + y_4} \cdot \text{с}^{-y_2 - y_3 - 2y_4} \cdot (\text{°К})^{y_6}. \end{aligned}$$

Поскольку м, кг, с и °К – основные единицы, имеющие независимые размерности, то показатели степеней при каждой из них должны независимо обращаться в нуль:

$$\left. \begin{array}{l} (\text{м}): \quad y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0 \\ (\text{кг}): \quad y_2 + y_4 = 0 \\ (\text{с}): \quad -y_2 - y_3 - 2y_4 = 0 \\ (\text{°К}): \quad y_6 = 0 \end{array} \right\}$$

*Интересующие* нас решения можно получить в следующих случаях:

1)  $y_5, y_4$  – свободные, тогда линейно независимые ортонормированные комбинации в пространстве двух переменных могут получиться в двух случаях:

1.1)  $y_5 = 1, y_4 = 0$ : тогда  $y_2 = y_3 = 0, y_1 = -1 \Rightarrow \Pi = d^{-1} \cdot h^1$ ,  
(геометрическое подобие);

1.2)  $y_5 = 0, y_4 = 1$ : тогда  $y_1 = y_2 = y_3 = -1 \Rightarrow \Pi = d^{-1} \cdot \mu^{-1} \cdot V^{-1} \cdot W^1 \Rightarrow$  искомая функциональная зависимость:

$$\frac{W}{\mu d V} = k \text{ или } W = k \mu d V;$$

2)  $y_1, y_4$  – свободные, тогда:

2.1)  $y_1 = 1, y_4 = 0$ : тогда  $y_2 = y_3 = 0, y_5 = -1 \Rightarrow \Pi = d^1 \cdot h^{-1}$ ;

2.2)  $y_1 = 0, y_4 = 1$ : тогда  $y_2 = y_3 = y_5 = -1 \Rightarrow \Pi = h^{-1} \cdot \mu^{-1} \cdot V^{-1} \cdot W^1$ .

Ответ. Зависимость силы сопротивления вязкой жидкости при медленном равномерном движении шара в невесомости имеет вид:  $W = k \mu d V$ .

Замечание 1. П-теорема – мощное средство математического моделирования, но не являющееся панацеей. Получить с ее помощью принципиально новые законы природы невозможно, так как необходимо **знать размерности всех** основных определяющих параметров.

Замечание 2. Система определяющих явление параметров должна быть **полной**. Если это не так, то можно и не получить требуемый критерий подобия.

Так, например, для определения величины мощности  $N$  некоторого процесса набора из трех параметров:  $\rho$  – плотность среды,  $s$  – путь,  $T$  – температура – недостаточно.

Замечание 3. Безразмерный коэффициент  $k$  не зависит от размерных параметров. Поэтому для применения найденного соотношения в математическом описании достаточно определить его эмпирически в процессе *идентификации* модели.

# Статистическая проверка адекватности математических моделей

[Часть II, стр. 33 - 39]

Для изучения механических систем и процессов  
используются в основном *подобные*  
*детерминированные* математические модели

---

⇓  
**АДЕКВАТНОСТЬ**

⇓  
**ТОЧНОСТЬ**

+

⇓  
**НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ**

## ТОЧНОСТЬ



обобщенная характеристика рассогласования соответствующего параметра модели и оригинала ( $\Delta u = u_{\text{модели}} - U_{\text{оригинала}}$ ) должна быть по модулю не больше, чем заранее заданное значение приемлемой погрешности  $\delta_{\text{зад}}$

**Рассогласование** результатов *вычислительного эксперимента* с результатами *натурного эксперимента* в тех же условиях:

$$\Delta u = u_{\text{модели}} - U_{\text{оригинала}}$$

– величина на практике дискретная:  $\{\Delta u_i; i = 1, 2, \dots, N\}$  –

**выборка** из генеральной совокупности истинной величины рассогласования.



Необходим **статистический анализ**.

Оценка точности с помощью  $\sigma$  (или  $s$ ) страдает неполнотой, так как не учитывает, насколько часто встречаются большие и малые, положительные и отрицательные рассогласования.

Величина статистического среднего рассогласований  $\overline{\Delta v}$  страдает теми же недостатками, но может быть использована в качестве оценки *систематической* погрешности.

Наиболее полная оценка точности (*погрешности*) ВЭ – доверительный интервал для математического ожидания рассогласования: интервал, внутрь которого с заданной доверительной вероятностью попадает "истинное" значение "а" рассогласования  $\Delta u$ .

Вывод о точности:

с доверительной вероятностью 0,98  
гарантируется рассогласование не более 0,3 м.

Непротиворечивость –  
идентичный **характер изменения**  
соответствующих параметров, т.е. идентичный  
вид основных **свойств** функциональных  
зависимостей на отдельных участках  
(возрастание, убывание, асимптоты,  
периодичность, экстремумы, выпуклость...)

Смысл непротиворечивости – в **отсутствии**  
**закономерности** рассогласования.  
⇓  
Т.е. **хорошо**, когда рассогласование между  
моделью и оригиналом ведет себя как **простая**  
**ошибка измерения**, т.е. подчиняется *нормальному*  
*закону распределения* с  $\sigma = 0$ .



### Алгоритм проверки адекватности ММ реальному

поведению оригинала

(исходя из целей исследования предварительно заданы:  
допустимая погрешность  $\pm\delta_{\text{зад}}$ , уровни значимости  $\alpha_m$ ,  $\alpha$  и  
доверительная вероятность  $\gamma$ )

1. Выбирается один из параметров объекта, для которого есть результаты наблюдения  $\{U_i\}$  в  $N$  точках, и соответствующий параметр  $\{u_i\}$ , полученный в контрольном вычислительном эксперименте в тех же условиях в тех же точках.

2. Вычисляются разности  $\Delta u_i = u_i - U_i$ .

3. Вся область значений  $\Delta u$  разбивается на  $r$  интервалов таким образом, чтобы в каждый из них попало не менее пяти значений  $\Delta u_i$ .

4. Производится расчет количества попадания  $\Delta u_i$  в каждый  $j$ -й ( $1 \leq j \leq r$ ) интервал – частот  $N_j$ .

5. Определяются статистические оценки параметров распределения случайной величины  $\Delta u$ :

выборочное среднее  $\overline{\Delta u} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^r N_j \Delta u_j$ , где  $\Delta u_j$  – середина

$j$ -го интервала; и несмещенная оценка дисперсии

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^r N_j (\Delta u_j - \overline{\Delta u})^2 .$$

6. Проверка **непротиворечивости**: вычисленное по

выборке значение  $\chi^2_{\text{набл.}} = \sum_{j=1}^r \frac{(N_j - Np_j)^2}{Np_j}$  сравнивается с

табличным значением распределения Пирсона

$\chi^2_{\text{крит}}(\alpha; r - 2)$ .

Если  $\chi^2_{\text{набл.}} < \chi^2_{\text{крит}}(\alpha; r - 2)$ , то распределение  $\Delta u$  **незначимо** отличается от нормального, т.е. результаты вычислительного эксперимента можно считать **не противоречащими** реальному поведению оригинала.

Если  $\chi_{\text{набл}}^2 > \chi_{\text{крит}}^2(\alpha; r - 2)$ , то *значимое* отличие распределения  $\Delta u$  от нормального свидетельствует о противоречии результатов вычислительного эксперимента реальному поведению оригинала и исследования адекватности следует **прекратить**.

Замечание. Проверка непротиворечивости (пригодности нормального закона распределения) проводится в начале, так как критерий согласия К. Пирсона  $\chi^2$  не требует сведений о законах распределения, а все последующие пункты **требуют знания закона** распределения и **основаны** на том, что  $\Delta u$  распределено по нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием  $a = 0$  и средним квадратическим отклонением  $s$ .

7. Оценка **систематической** ошибки:

вычисленная по выборке величина  $t = \frac{\overline{\Delta u}}{s} \sqrt{N}$

сравнивается с  $t(1 - \alpha_m; N - 1)$  (по таблице распределения Стьюдента).

Если  $|t| < t(1 - \alpha_m; N - 1)$ , то систематическая погрешность **незначимо** отличается от нуля и можно продолжать исследования.

Если  $|t| > t(1 - \alpha_m; N - 1)$ , то дальнейшие исследования адекватности нужно **прекратить**, так как систематическая погрешность **значимо** отличается от 0.

Замечание. Вывод об отсутствии систематической ошибки ( $a = 0$ ) лишь **подтверждает** возможность исследования непротиворечивости в п. б, а противоположный вывод – опровергает, т.е. делает его ничтожным.

8. Оценка **точности** ММ:

$$\overline{\Delta u} - t(\gamma, N) \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} < a < \overline{\Delta u} + t(\gamma, N) \cdot \frac{s}{\sqrt{N}}$$

где  $t(\gamma; N)$  – по таблице распределения Стьюдента.

Если

$$\left| t(\gamma, N) \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} \right| \leq \delta_{\text{зад}},$$

то ММ можно считать достаточно **точной** по отношению к оригиналу.

В дополнение к этому можно построить доверительный интервал для среднего квадратического отклонения рассогласования:

$$s \sqrt{\frac{N-1}{\chi^2(1-\gamma/2, N)}} < \sigma < s \sqrt{\frac{N-1}{\chi^2(\gamma/2, N)}},$$

используя распределение  $\chi^2$ .

9. Если можно считать ММ *не противоречащей оригиналу* **И** достаточно *точной*, то результаты расчетов *адекватны* реальному поведению оригинала.

Замечание. Если оценка точности ММ оказывается во много раз лучше допустимой (иными словами, погрешность практически неразличима), то даже в отсутствии непротиворечивости математическую модель можно признать адекватной.

# Методы экспертных оценок

[Часть II, стр. 111 - 116]

Вопросы, решаемые с помощью методов экспертных оценок

- формулировка постановки задачи исследований;
- выбор основных факторов;
- выбор наблюдаемых и регистрируемых параметров;
- структурирование сложных систем;
- ранжирование критериев и целей деятельности

отдельных элементов сложных систем и т.д.

Группы экспертов (от 1 до 30 специалистов) создаются с учетом их квалификации по специально разработанным методикам.

Основным требованием всех методов экспертных оценок является *строгая формулировка* вопросов экспертизы, содержащих единообразно понимаемые и единичные (не распространенные или комплексные) темы.

### **Задачи экспертизы:**

1. Оценивание имеющихся объектов по качественным и количественным характеристикам.
2. Построение множества объектов (составление списка).
3. Построение множества объектов и их оценивание.



### **Этапы экспертизы:**

- формирование множества оцениваемых объектов;
- формирование экспертной комиссии;
- выбор процедуры экспертного оценивания (выбор метода);
- обработка результатов экспертного оценивания;
- анализ результатов экспертизы и принятие решения.

### **Классификация методов экспертизы**

– *по количеству экспертов:*

индивидуальные,

коллективные (следует учитывать, что при количестве экспертов менее 7 информация страдает неполнотой, а стабилизируются результаты экспертизы при 10 – 30 экспертах);

– *по методу опроса* (возможны сочетания методов):  
индивидуальный,  
очный (интервью) с обратной связью или без нее,  
открытый (ответ в произвольной форме),  
закрытый (ответ типа да/нет или выбор ответа из предложенного набора),  
прямой (до экспертов доводится цель экспертизы),  
косвенный (до экспертов не доводится цель экспертизы);

– *по информированности экспертов*:  
с заданным множеством объектов оценивания,  
с неопределенным множеством объектов оценивания;

– по организации процедуры:  
простые,  
сложные (с декомпозицией  
проблемы на простые вопросы);

– по типу оценок:  
качественные,  
количественные.

### Шкалы экспертных оценок

- абсолютная шкала (измерение в принятых единицах) – позволяет получить самую тонкую количественную оценку;
- шкала отношений (измерение "во сколько раз") – дает относительную количественную оценку;
- шкала разностей (измерение в принятых единицах "на сколько" больше или меньше) – дает разностную количественную оценку;

- шкала интервалов (в принятых единицах выбор интервала, в котором находится оцениваемый параметр) – дает "мягкую" количественную оценку;
- шкала порядка (распределение по порядку, рангу без учета кратности предпочтения) – дает качественную оценку;
- номинальная шкала (разбиение на классы эквивалентности) – дает качественную оценку;
- балльная шкала (оценка в баллах по принятой размерности: непрерывно – от 0 до 1, или дискретно – целые от 0 до 5, или 10, или 100).

### **Процедуры экспертного оценивания альтернатив**

– ранжирование (наиболее предпочтительная оценка имеет ранг  $R = 1$ , остальные – бóльшие целые значения – ранг определяется последовательной нумерацией альтернатив в порядке убывания предпочтения);

– парное сравнение (построение матрицы парных сравнений элементов:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{– при } \alpha_i < \alpha_j, \\ 1 & \text{– при } \alpha_i \approx \alpha_j, \\ 2 & \text{– при } \alpha_i > \alpha_j, \end{cases}$$

где  $\alpha_i$  – значение сравниваемого признака  $i$ -го элемента);

– метод фон Неймана-Моргенштерна (матрица парных сравнений имеет непрерывные значения элементов  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ );

– непосредственная оценка (дается балльная оценка (см. выше) каждой альтернативе, для эквивалентности используется одно общее значение);

– последовательное сравнение – метод Чёрчмена-Акофа – по рекуррентному алгоритму:

1. ранжирование альтернатив,
2. присвоение "1" первой альтернативе, остальным меньше 1,
3. сравнение предпочтительности первой альтернативы перед **всеми следующими вместе** и при необходимости увеличение (или уменьшение) оценки "1" до величины, большей (меньшей) суммы остальных,
4. повторение сравнения для второй и последующих альтернатив.

**Методы проведения экспертизы**  
(формы организации экспертизы)

Метод мозговой атаки (метод мозгового штурма) –  
*коллективный открытый метод:*

**генерация / лаконизация / отсеивание /  
систематизация / противоположные / реализуемость /  
конкретная критика**

Метод дискуссии – *коллективный открытый метод:*

**обсуждения / генерация / формулировка /  
обобщение**

Метод комиссий – *коллективный открытый*  
метод:

**отбор состава экспертов / комиссии / вся  
информация / коллегиальная оценка по принятой  
шкале**

Метод суда ~ метод комиссий:

**отбор с обеспечением противоположных  
мнений и интересов**

Метод деловых совещаний – *коллективный открытый* метод:

**ведущий формулирует / эксперты высказывают (дополнительную информацию, альтернативы, идеи и оценки) / выбор ведущего**

Анкетирование и интервьюирование – метод любой по количеству экспертов и по методу опроса, с жесткими требованиями к **лаконичности и однозначности** вопросов и ответов, в **письменной или устной** форме, **независимым опросом** экспертов.

Метод Дельфи – *анонимное* анкетирование:

**несколько этапов (2 – 3) / с сообщением результатов и аргументации крайних суждений.**



Метод решающих матриц:

**декомпозиция / альтернативы / матрица оценок**

Метод прогнозного графа – многошаговый метод:

**список целей / систематизация подчиненности / оценка возможности / уточнение** (можно проводить другим составом экспертов) / **спуск по дереву целей** до таких "заземленных", решение которых очевидно

## **Обработка результатов экспертизы**

### **1) Показатели обобщенного мнения**

1.1) Средняя балльная оценка  $M_j = \frac{1}{m_j} \sum_{i=1}^{m_j} C_{ij}$ , где  $m_j$  – число экспертов, оценивших  $j$ -й вопрос,  $0 \leq C_{ij} \leq B$  – оценка по балльной шкале.

1.2) Частота  $k$ -ой оценки  $j$ -го вопроса  $K_j^k = \frac{m_j^k}{m_j}$ .

1.3) Сумма рангов  $j$ -го вопроса  $S_j = \sum_{i=1}^{m_j} R_{ij}$ , где  $R_{ij}$  – ранг.

## 2) Показатели степени согласованности экспертов

2.1) Коэффициент вариации мнений по j-му вопросу  $V_j = \frac{\sigma_j}{M_j}$ ,

где  $\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{m_j-1} \sum_{i=1}^{m_j} (C_{ij} - M_j)^2}$  (согласованность тем выше, чем меньше  $V_j$ ).

2.2) Коэффициент конкордации  $W = \frac{12}{m^2(n^3 - n) - m \sum_{i=1}^m T_i} \cdot \sum_{j=1}^n d_j^2$ ,

где  $d_j = S_j - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n S_j$ ;  $T_i = \sum_{l=1}^L (t_l^2 - t_l)$ ,  $t_l$  – кратность l-го ранга (полная согласованность экспертов при  $W = 1$ , согласованности нет при  $W = 0$ ).

## 3) Статистическая значимость показателя согласованности

$W$  по критерию Пирсона:  $\chi_n^2 = \frac{1}{mn(n+1) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m T_i} \cdot \sum_{j=1}^n d_j^2$  с  $n-1$  степенями

свободы.

4) Коэффициент активности эксперта при ответе на j-ый

вопрос:  $K_{\text{Э}j} = \frac{m_j}{m}$ .

## 5) Учет компетентности экспертов

5.1) Самооценка, например, по балльной шкале с вычислением *коэффициента осведомленности*  $K_{oc} = B / 10$ .

Градация	Балл
не знаком с вопросом	0
плохо знаком, но вопрос входит в сферу знаний и деятельности	1, 2, 3
удовлетворительно знаком, тесно связан со смежной узкой специализацией	4, 5, 6
хорошо знаком, принимает практическое участие	7, 8, 9
вопрос входит в узкую специализацию	10

5.2) *Самообъективная оценка* (сумма оценок степени влияния всех видов источников информации (максимальное значение равно 1)).

Источники информации	Степень влияния источника		
	высокая	средняя	низкая
производственный опыт	0,5	0,4	0,2
проведенный теоретический анализ	0,3	0,2	0,1
обобщение отечественной литературы	0,05	0,04	0,03
обобщение зарубежной литературы	0,05	0,04	0,03
личное знакомство с состоянием вопроса за рубежом	0,05	0,04	0,03
интуиция	0,05	0,04	0,03

5.3) Коэффициент компетентности  $i$ -го эксперта по  $j$ -ому вопросу:

$$k_{ij} = \frac{\sum_{v=1}^s \theta_{vi} R_{vj}}{\sum_{v=1}^s R_{vj}},$$

где  $0 < \theta_{vi} < 10$  (целые числа) – уровни осведомленности по каждой  $v$ -ой специализации, определяемые единым образом (руководителем, или каждым экспертом для себя, или взаимно);  $R_{vj}$  ( $0 \leq R_{vj} \leq 2$ ) – оценка уровня важности:

Уровень важности специализации для вопроса	Оценка
весьма существенно	2
полезно	1
несущественно	0

5.4) Исходная оценка (как в п. 5.6 и 5.7) на основе информации о **предыдущих** экспертизах и **знании истины**.

5.5) Взаимная оценка экспертов (исключая самооценку).

5.6) Мгновенная оценка по итогам данной экспертизы:

$$K_{ij} = 1 - \frac{|C_{ij} - M_j|}{B} \text{ – по } j\text{-ому вопросу } i\text{-го эксперта, } K_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n K_{ij} \text{ – по}$$

всем вопросам  $i$ -го эксперта.

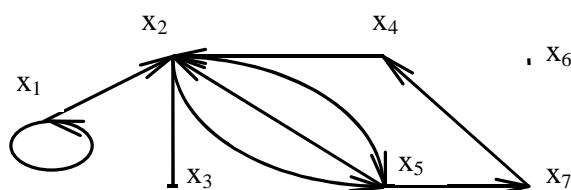
5.7) Итоговая оценка на основании знания об истине:

$$\bar{K}_{ij} = 1 - \frac{|C_{ij} - \bar{M}_j|}{B}, \text{ где } \bar{M}_j \text{ – истинное значение балльной оценки.}$$

# Понятие о теории графов

[Часть I, стр. 42 - 44]

## Термины теории графов

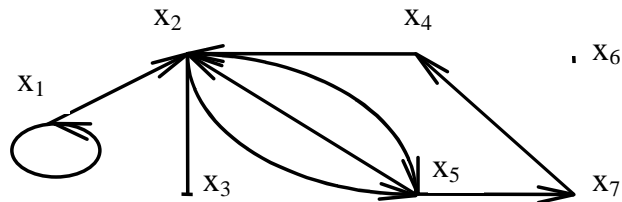


Множество  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  вершин  $x_i$ .

Вершина  $x_6$  изолированная.

Линия, связывающая две вершины без учета направления, называется ребром (например,  $(x_2, x_3)$ ).

Ребро с направлением называется дугой и обозначается стрелкой (например, левая дуга  $(x_2, x_5)$ ).



Смежные ребра имеют общую вершину (ребра  $(x_1, x_2)$  и  $(x_2, x_3)$ ).

Конечная последовательность смежных ребер называется путем (например,  $(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_5, x_7)$ ).

Путь, у которого первая и последняя вершины совпадают, называется циклом (например,  $(x_2, x_5), (x_5, x_7), (x_7, x_4), (x_4, x_2)$ ).

Путь называется простым, если в нем все вершины кроме, может быть, первой и последней различны.

Цикл называется простым, если соответствующий путь простой.

Обозначим множество ребер  $U$ , а множество дуг  $\tilde{U}$ . Тогда пара объектов  $G = (X, U)$  называется (неориентированным) графом, а пара  $G = (X, \tilde{U})$  ориентированным графом.

Полустепень исхода вершины – количество исходящих из нее дуг.

Полустепень захода вершины – количество входящих в нее дуг.

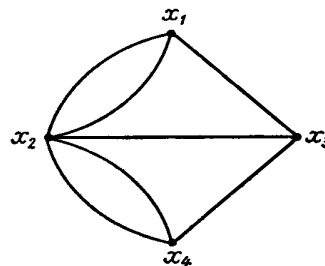
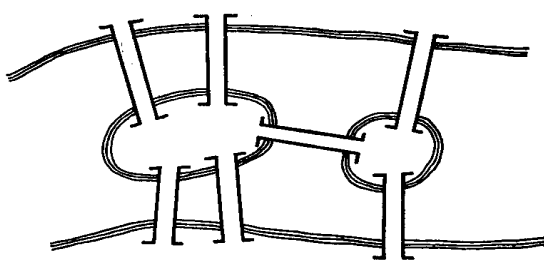
Степень вершины – их сумма (вершина  $x_1$  имеет полустепень исхода 2, полустепень захода 1 и степень 3).

В неориентированном графе используется только понятие степени (у вершины  $x_3$  степень равна 1).

Граф, в котором для любой пары вершин существует хотя бы один путь, называется связанным графом.

### *Задача о Кенигсбергских мостах*

Можно ли обойти однократно все мосты и вернуться обратно?



На языке теории графов это звучит так: существует ли в графе простой цикл, содержащий все ребра графа (эйлеров цикл).

Эйлер доказал, что такое возможно тогда и только тогда, когда граф *связан* и степени его вершин *четны*.

В Кенигсберге XVIII века было 7 мостов, связывающих 2 берега реки и 2 острова, т.е. степени всех вершин нечетны и задача не имеет решения.

### ***Задача о коммивояжере***

(первая из цикла "*транспортных*" задач)

Требуется найти кратчайший замкнутый маршрут (цикл), проходящий через все назначенные пункты по одному разу.

(Не путать эту задачу, в которой рассматривается однократное появление в **вершинах помеченного графа**, с предыдущей с кратными дугами!)

К транспортным задачам относятся задачи менеджмента, например, об оптимальном назначении сотрудников, а также задачи распределения ресурсов.

### ***Задача о раскраске политической карты***

Можно ли любую политическую карту раскрасить четырьмя цветами так, чтобы имеющие общую протяженную границу страны обозначались различными цветами.

В терминах графов это означает возможность раскрасить четырьмя цветами вершины произвольного неориентированного графа так, чтобы никакие две смежные вершины не были выкрашены одинаково.

Для двух, трех, пяти красок на плоскости задача давно решена, а для четырех красок ее удалось разрешить только в конце 80-х годов XX века и только с помощью компьютера!



## Метод Монте-Карло

[Часть I, стр. 50 - 53]

***Стохастическое (имитационное)***  
моделирование  
позволяет **имитировать** работу  
оригинала.

Элементарным примером этого  
может служить выбор одного из  
двух исходов с помощью  
подбрасывания монетки.

**Метод статистических испытаний**  
**(метод Монте-Карло)** –

розыгрыш случайных событий –  
включает в себя три этапа:

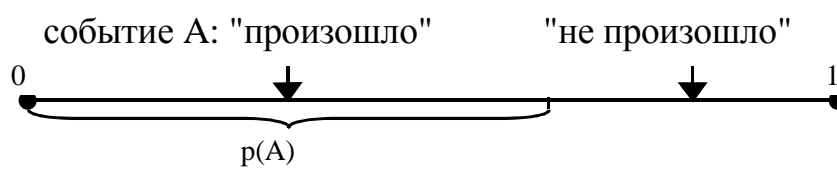
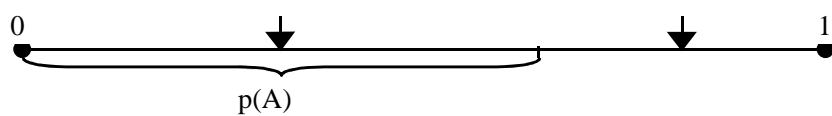
- получение случайного числа  $R$ ,
- отождествление его с вероятностью,
- розыгрыш единичного жребия.

**Единичный жребий**

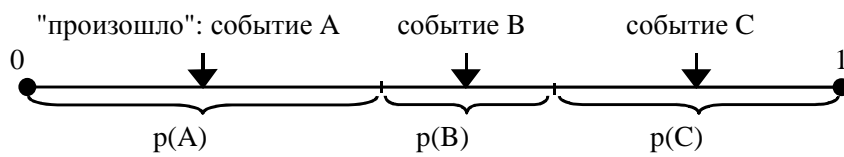
Любой опыт со случайным исходом, который  
отвечает на один из следующих вопросов:

- "произошло" или "не произошло" (якобы) определенное событие  $A$ ;
- какое событие из *полной группы независимых* событий  $\{A, B, \dots, C\}$  "произошло" (якобы);
- какое значение "приобрела" случайная величина (якобы).

Для ответа на **первый вопрос** единичного жребия необходимо знать вероятность события  $A$ :  $p(A) = p$ .

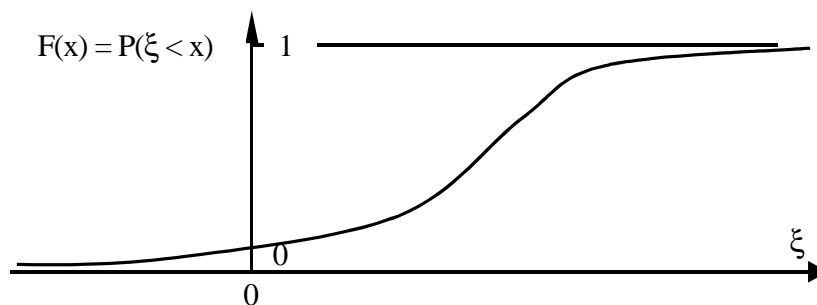


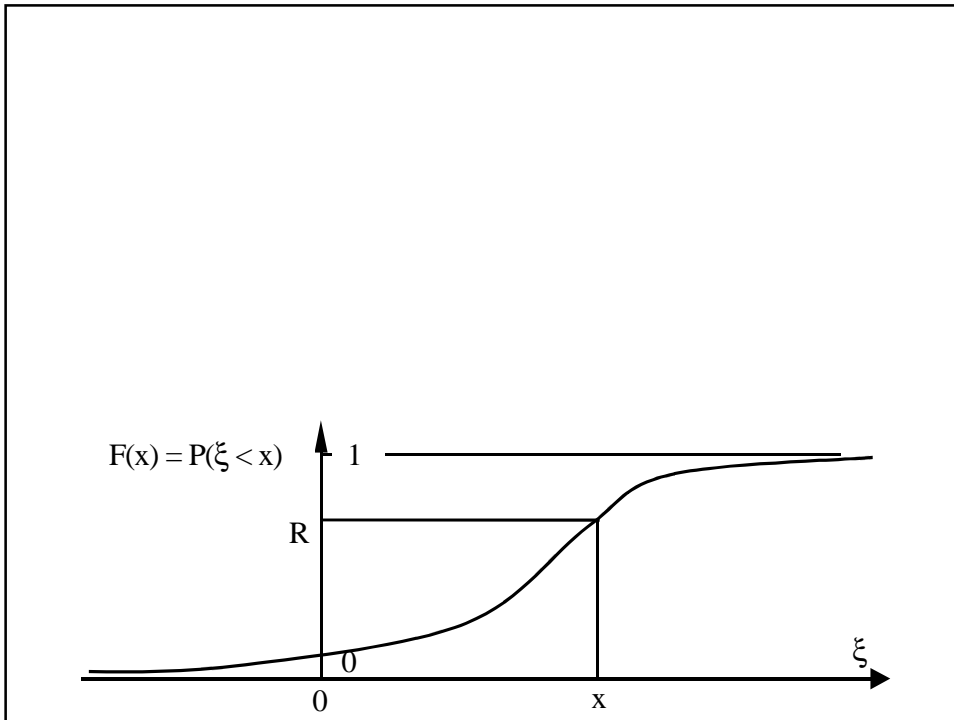
Ответ на **второй вопрос** единичного жребия можно построить аналогичным образом



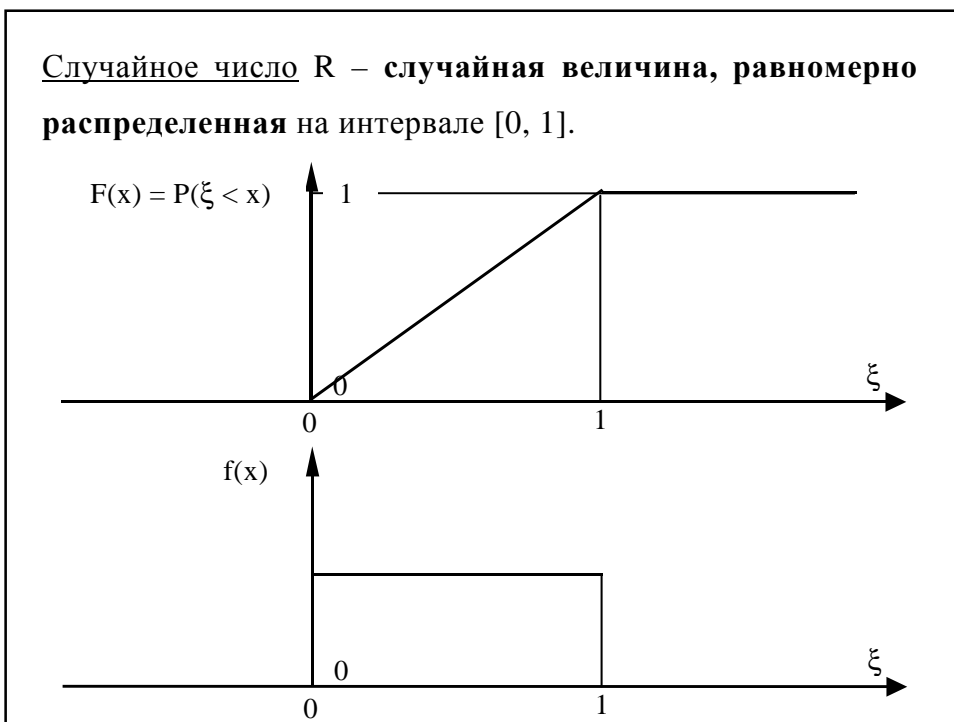
В **третьем случае**, если случайная величина дискретна, то процедура сводится к предыдущей.

Непрерывная случайная величина задается законом распределения в виде интегральной функции распределения:





Случайное число  $R$  – случайная величина, равномерно распределенная на интервале  $[0, 1]$ .



Случайное число можно получить:

- бросанием монеты – в двоичном виде;
- с помощью рулетки в казино, размеченной, например, простыми десятичными дробями;
- из таблиц случайных чисел;
- "датчиком случайных чисел" на ЭВМ ("псевдослучайное число" – случайная величина, распределенная **почти** равномерно на  $[0, 1]$  и принимающая конечное множество значений, определенное разрядной сеткой ЭВМ).

**ПРИМЕР.** Сымитировать работу аэродрома методом Монте-Карло. Найти время, за которое совершат посадку и освободят ВПП 10 самолетов. Выделить интервалы времени, в течение которых ВПП свободна более 5 минут, т.е. когда вылетающий самолет может произвести взлет. Выделить номера самолетов, которым будет отказано в посадке по причине занятости ВПП.

$\Delta t_c$ , мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1(\Delta t_c)$	0	0,02	0,02	0,23	0,40	0,56	0,71	0,83	0,92	0,97	1

$\Delta t_3$ , мин	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$F_2(\Delta t_3)$	0	0,01	0,02	0,05	0,19	0,40	0,67	0,85	0,96	0,99	1

Расчетная таблица имитационной модели

Подлет самолета			Освобождение ВПП		
$F_1$	$\Delta t_C$	$t_C$	$F_2$	$\Delta t_3$	$t_3$
0,31					

Расчетная таблица имитационной модели

Подлет самолета			Освобождение ВПП		
$F_1$	$\Delta t_C$	$t_C$	$F_2$	$\Delta t_3$	$t_3$
0,31	3,5				

Расчетная таблица имитационной модели

Подлет самолета			Освобождение ВПП		
$F_1$	$\Delta t_C$	$t_C$	$F_2$	$\Delta t_3$	$t_3$
0,31	3,5	3,5	0,91		

Расчетная таблица имитационной модели

Подлет самолета			Освобождение ВПП		
$F_1$	$\Delta t_C$	$t_C$	$F_2$	$\Delta t_3$	$t_3$
0,31	3,5	3,5	0,91	1,5	



Расчетная таблица имитационной модели

Подлет самолета			Освобождение ВПП		
$F_1$	$\Delta t_c$	$t_c$	$F_2$	$\Delta t_3$	$t_3$
0,31	3,5	3,5	0,91	1,5	5,0

Расчетная таблица имитационной модели

Подлет самолета			Освобождение ВПП		
$F_1$	$\Delta t_c$	$t_c$	$F_2$	$\Delta t_3$	$t_3$
0,31	3,5	3,5	0,91	1,5	5,0
0,06	2,2	5,7			

Расчетная таблица имитационной модели

Подлет самолета			Освобождение ВПП		
$F_1$	$\Delta t_c$	$t_c$	$F_2$	$\Delta t_3$	$t_3$
0,31	3,5	3,5	0,91	1,5	5,0
0,06	2,2	5,7	0,49	1,1	6,8

Расчетная таблица имитационной модели

Подлет самолета			Освобождение ВПП		
$F_1$	$\Delta t_c$	$t_c$	$F_2$	$\Delta t_3$	$t_3$
0,31	3,5	3,5	0,91	1,5	5,0
0,06	2,2	5,7	0,49	1,1	6,8
0,01	0,5	6,2			

Расчетная таблица имитационной модели

Подлет самолета			Освобождение ВПП		
$F_1$	$\Delta t_c$	$t_c$	$F_2$	$\Delta t_3$	$t_3$
0,31	3,5	3,5	0,91	1,5	5,0
0,06	2,2	5,7	0,49	1,1	6,8
0,01	0,5	<u>6,2</u>	<i>- посадка запрещена</i>		

Расчетная таблица имитационной модели

Подлет самолета			Освобождение ВПП		
$F_1$	$\Delta t_c$	$t_c$	$F_2$	$\Delta t_3$	$t_3$
0,31	3,5	3,5	0,91	1,5	5,0
0,06	2,2	5,7	0,49	1,1	6,8
0,01	0,5	<u>6,2</u>	<i>- посадка запрещена</i>		
0,08	2,3	8,5	0,91	1,5	10,0

Расчетная таблица имитационной модели

Подлет самолета			Освобождение ВПП		
F <sub>1</sub>	Δt <sub>c</sub>	t <sub>c</sub>	F <sub>2</sub>	Δt <sub>3</sub>	t <sub>3</sub>
0,31	3,5	3,5	0,91	1,5	5,0
0,06	2,2	5,7	0,49	1,1	6,8
0,01	0,5	<u>6,2</u>	– посадка запрещена		
0,08	2,3	8,5	0,91	1,5	10,0
0,05	2,1	10,6	0,45	1,0	<u>11,6</u>
0,86	7,3	<u>17,9</u>	0,54	1,1	<u>19,0</u>
0,79	6,7	<u>24,6</u>	0,94	1,6	<u>26,2</u>
0,90	7,8	<u>32,4</u>	0,75	1,3	<u>33,7</u>
0,85	7,2	<u>39,6</u>	0,08	0,6	40,2
0,39	3,9	43,5	0,99	1,8	45,3

Вывод по результатам расчетов:

10 самолетов будут приняты диспетчером посадки за 45,3 минуты.

4 интервала времени, когда ВПП свободна более 5 минут, позволяют произвести взлет вылетающих самолетов в следующие периоды времени (в минутах): с 11,6 по 17,9; с 19,0 по 24,6; с 26,2 по 32,4; с 33,7 по 39,6.

Третий самолет, подлетевший на 6,2 минуте, не получил разрешения на посадку, т.к. ВПП оказалась занятой предыдущим самолетом до 6,8 минуты.

Замечание 1. *Математическое описание* имитационной математической модели состоит лишь из законов распределения.

Замечание 2. Имитационные математические модели позволяют обнаружить **новые свойства**, явно не заложенные в математическое описание или имеющие очень малую вероятность появления.

Замечание 3. Так как основой имитационных моделей являются законы распределения случайных величин (или вероятностные характеристики случайных явлений), получаемые чаще всего из наблюдения за оригиналом, то вопрос о проверке **адекватности** отпадает: нет смысла проверять соответствие симитированной и наблюдаемой реализаций случайных процессов, построенных на одном и том же законе распределения.

# Вычислительные методы и приемы

## Вычислительные методы алгебры

[Часть I, стр. 54 - 62]

А)

### Системы линейных алгебраических уравнений

$AX = B$  (матричная запись)

<u>Правило Крамера</u> : $x_k = \frac{D_k}{D}$ ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) – только для $n$ уравнений с $n$ неизвестными при $D \neq 0$ .	Точные методы
<u>Методы исключения</u> : схемы Гаусса, Жордана...	
<u>Итерационные методы</u> (методы последовательных приближений): простая итерация, методы Ричардсона, Зейделя, метод релаксации, градиентные методы...	Приближенные методы

## Б) Нелинейные алгебраические уравнения вида: $f(x) = 0$

Частные виды уравнений известны

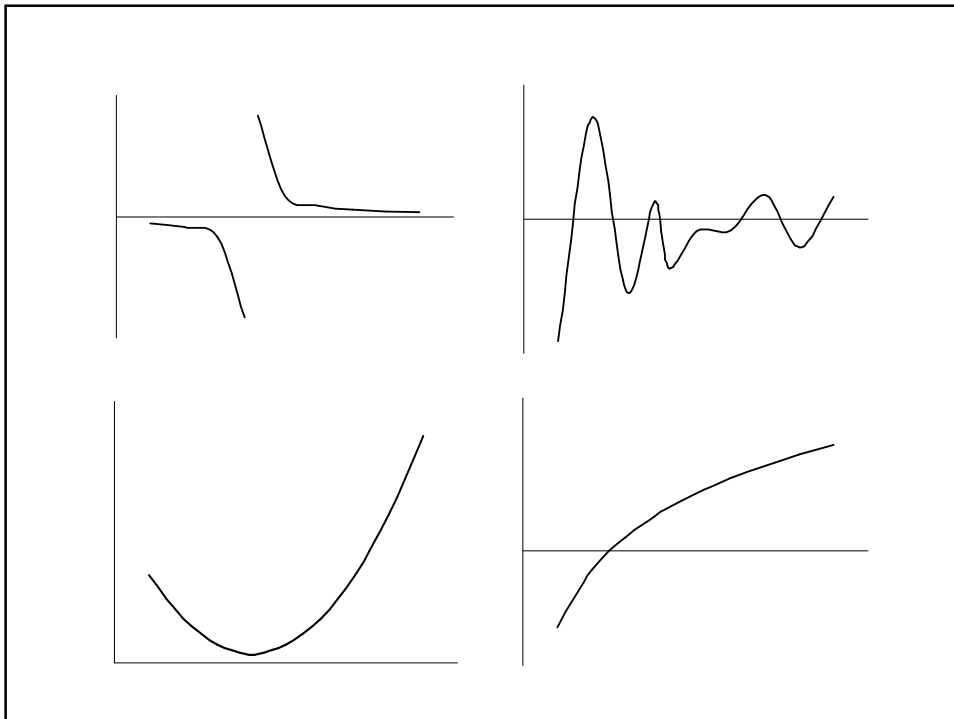
Общий подход  $\Rightarrow$  итерации (*последовательные приближения*)

Построение итерационных методов:

1)  $f(x) = 0 \Rightarrow x = \varphi(x)$ ;

2) **итерационный процесс** – "пошаговое уточнение" искомого значения  $x$  по рекуррентным формулам:  $x^{[i+1]} = \varphi(x^{[i]})$ , где  $[i]$  обозначает номер шага итераций (номер приближения);

3) Проверка *условий сходимости* и оценка *погрешности*.



Отделение корня – выбор интервала, на котором безусловно **существует единственный** корень искомого уравнения  $f(x) = 0$

**Теорема** о монотонной на отрезке функции: всякая монотонная на отрезке функция принимает любое свое промежуточное значение в одной единственной точке внутри отрезка.



Для *отделения корня* необходимо выбрать интервал, на котором выполнены **одновременно два** свойства:

- **монотонность** ( $f'(x) \neq 0$  или из физических соображений);
- на концах этого отрезка  $x^{[0]}$  и  $x^{[1]}$  функция принимает значения **разных** знаков (т.е. на одном конце  $f(x^{[0]}) > 0$ , а на другом  $f(x^{[1]}) < 0$ ).

Для уравнения в виде  $f(x) = g$

изменяется только проверка второго условия:

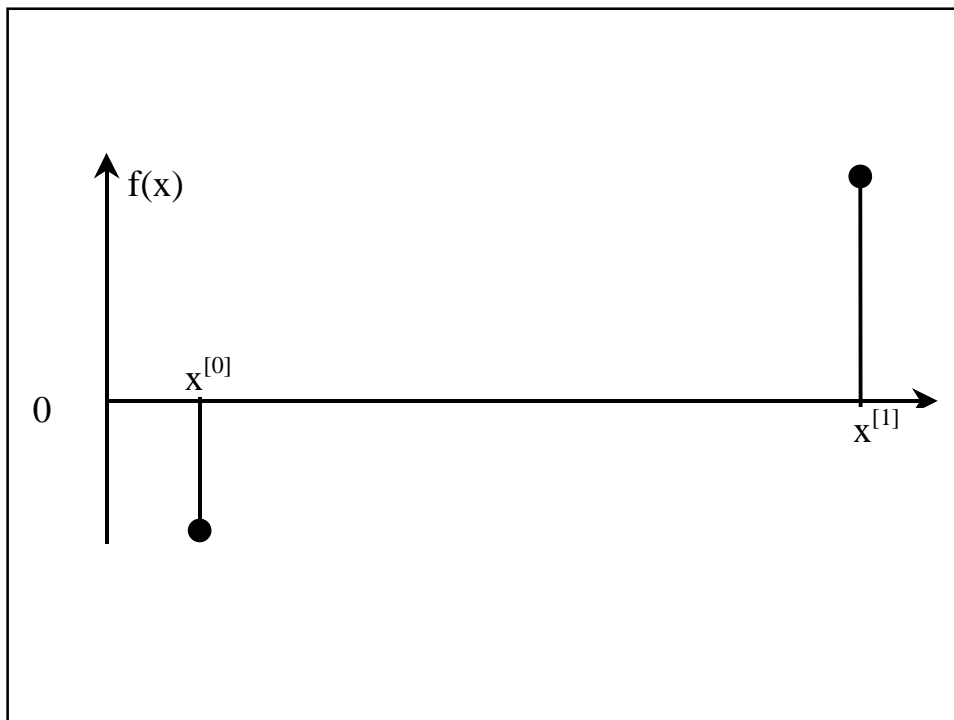
- на концах отрезка  $x^{[0]}$  и  $x^{[1]}$  функция принимает значения по обе стороны от необходимого  $g$  (т.е. на одном конце  $f(x^{[0]}) > g$ , а на другом  $f(x^{[1]}) < g$ ).

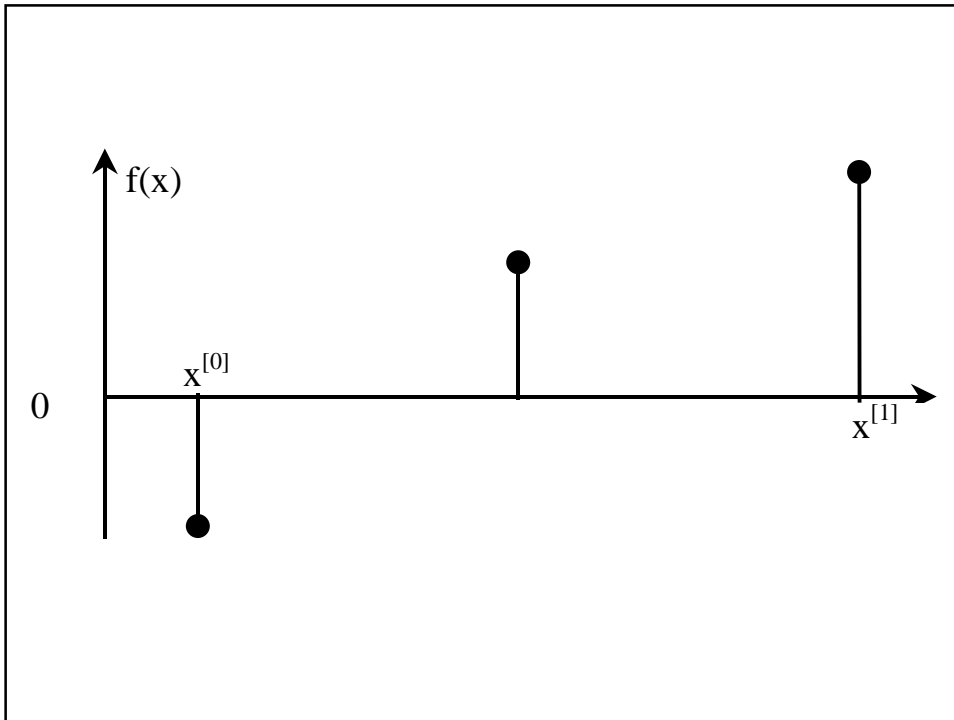


Процедура отделения корня гарантирует существование внутри отрезка одной единственной точки, в которой  $f(x) = 0$ .

В итоге процедуры отделения корней получается, что положение корня уравнения известно с точностью до длины выбранного отрезка.

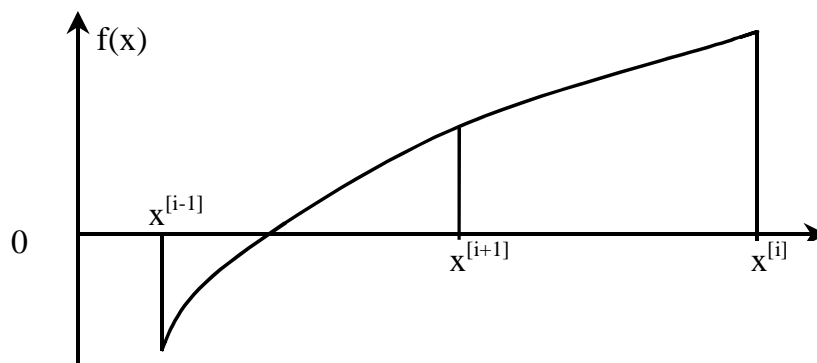
Остается построить итерационный процесс таким образом, чтобы на каждой итерации **уменьшать** отрезок, на котором находится корень.





### Метод деления отрезка пополам

(На отрезке, для которого проведена процедура отделения корня)



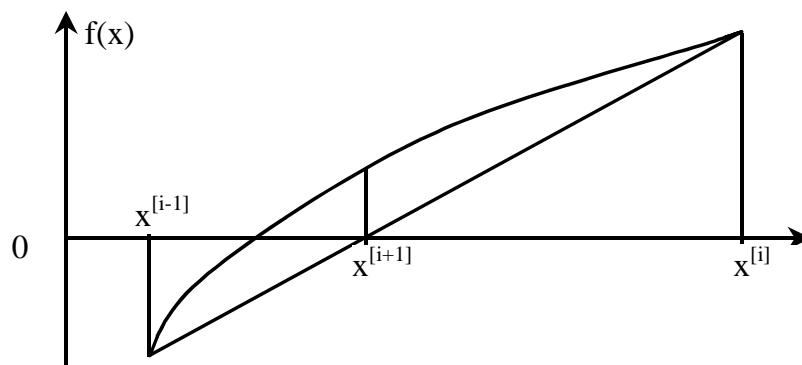
Итерационное уравнение: 
$$x^{[i+1]} = \frac{1}{2}(x^{[i]} + x^{[i-1]})$$

### Алгоритм метода деления отрезка пополам

1. определение знака  $f(x)$  в средней точке отрезка;
2. выбор полуотрезка, на концах которого выполняются условия  $f(x^{[i+1]}) > 0$  **И**  $f(x^{[i]}) < 0$ ;
3. проверка выполнения условия **заданной точности**:
  - или **по аргументу**  $|x^{[i+1]} - x^{[i]}| < \varepsilon_{\text{зад}}$ ,
  - или **по функции**  $|f(x^{[i+1]})| < \delta_{\text{зад}}$ ;
4. при выполнении условия заданной точности – окончание алгоритма, в противном случае – **продолжение** итерационного процесса по 1 – 3.

### Метод секущих (метод хорд)

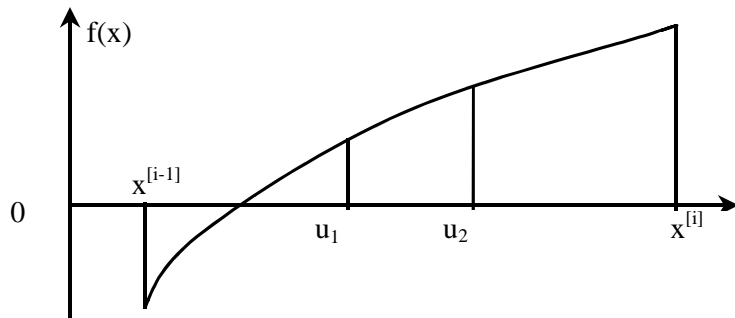
(На отрезке, для которого проведена процедура отделения корня)



Итерационное уравнение: 
$$x^{[i+1]} = x^{[i]} - \frac{x^{[i]} - x^{[i-1]}}{f(x^{[i]}) - f(x^{[i-1]})} \cdot f(x^{[i]})$$

### Метод золотого сечения

(На отрезке, для которого проведена процедура отделения корня)



Итерационные уравнения:

$$u_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a) \approx a + 0,381966911(b - a),$$
$$u_2 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a) \approx a + 0,618033989(b - a),$$

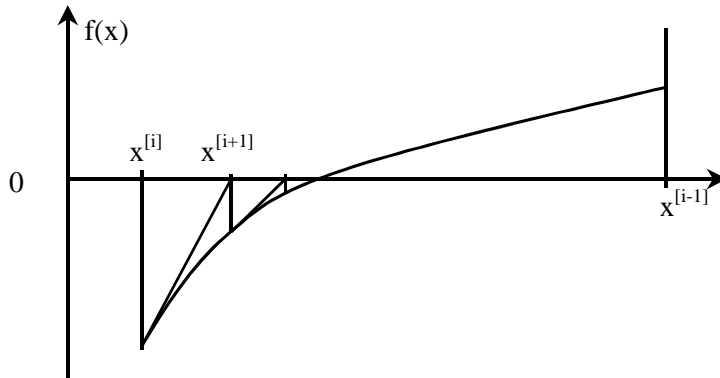
Золотое сечение – две точки  $u_1$  и  $u_2$ , каждая из которых делит исходный отрезок на две неравные части таким образом, что **отношение** длины **всего** отрезка к длине **большой** части равняется **отношению** длины **большой** части к длине **меньшей** части:

$$\frac{b-a}{b-u_1} = \frac{b-u_1}{u_1-a}, \quad \frac{b-a}{u_2-a} = \frac{u_2-a}{b-u_2}.$$

Для перехода к следующему шагу итерации выбираются те две **ближайшие** друг к другу точки из четырех:  $x^{[i]}$ ,  $x^{[i+1]}$ ,  $u_1$  и  $u_2$ , в которых значения функции **различаются знаком**.

### Метод касательных (метод Ньютона)

(На отрезке, для которого проведена процедура отделения корня и выпуклости)



Итерационное уравнение: 
$$x^{[i+1]} = x^{[i]} - \frac{f(x^{[i]})}{f'(x^{[i]})}.$$

Метод касательных требует соблюдения **одновременно трех** свойств:

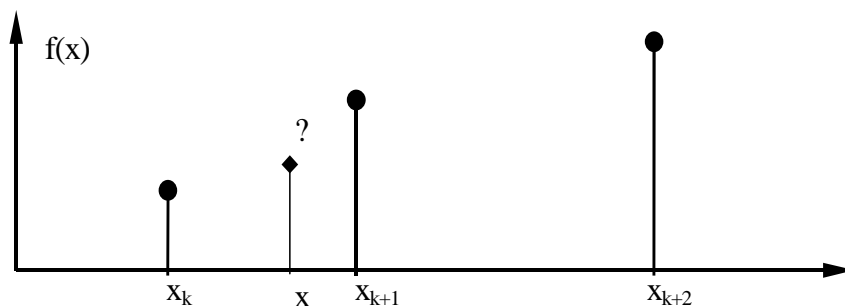
- **монотонность** ( $f'(x) \neq 0$  или из физических соображений);
- на концах этого отрезка  $x^{[0]}$  и  $x^{[1]}$  функция принимает значения **разных** знаков (на одном конце  $f(x^{[0]}) > 0$ , а на другом  $f(x^{[1]}) < 0$ );
- сохранения знака второй производной  $f''(x) \neq 0$  (функция **выпукла**).

Касательная строится на том конце отрезка, на котором знаки  $f(x)$  и  $f''(x)$  **совпадают**.

## В) Методы интерполяции

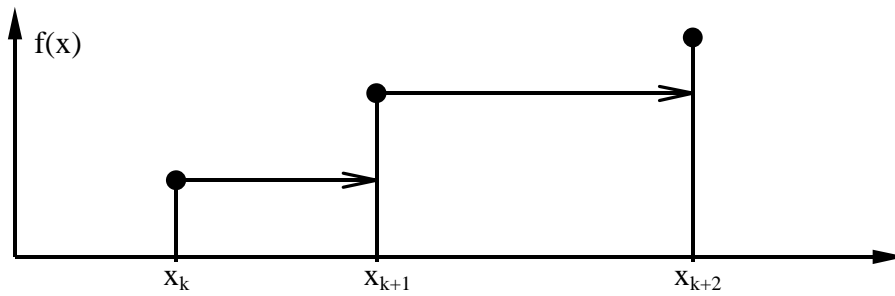
**Интерполяция функции** –  
доопределение функции в  
промежутках между соседними  
узловыми точками, в которых  
она задана

Интерполяция – доопределение функции в промежутках между соседними узлами  $x_k$  и  $x_{k+1}$ , в которых значения функции  $f(x_k)$  и  $f(x_{k+1})$  заданы.



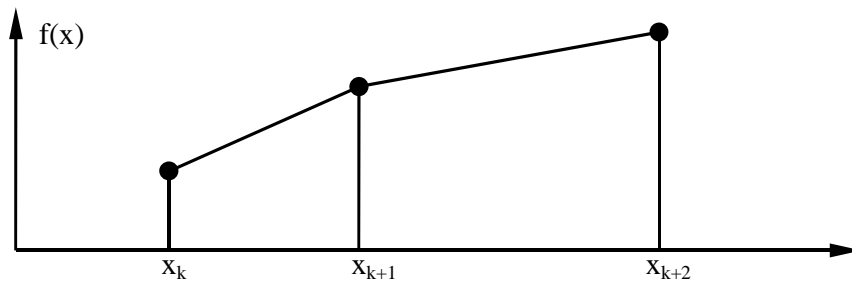
### Кусочно-постоянная интерполяция

$$f(x) = f(x_k)$$



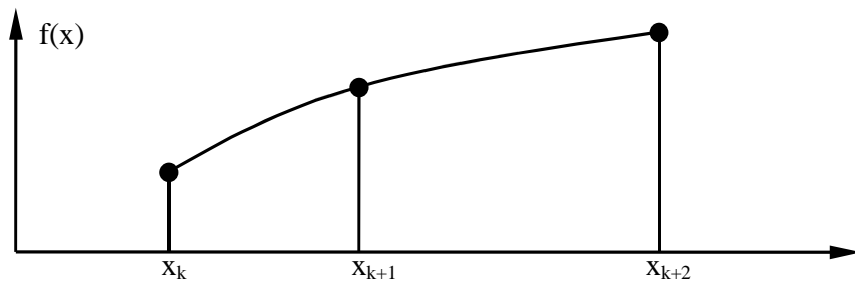
### Линейная интерполяция

$$f(x) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \cdot (x - x_k).$$

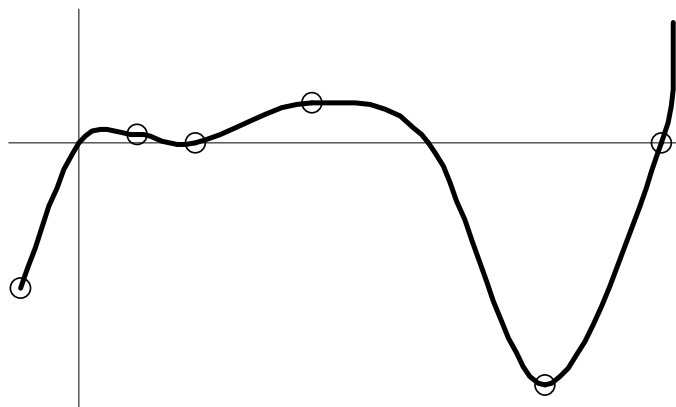


## Квадратичная интерполяция

$$f(x) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \cdot (x - x_k) + \\ + \frac{f(x_{k+2}) - f(x_{k+1})}{x_{k+2} - x_{k+1}} \cdot \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \cdot (x - x_k) \cdot (x - x_{k+1})$$



## Полиномиальная интерполяция





Интерполяционная формула Лагранжа:

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} \cdot f(x_0) +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} \cdot f(x_1) +$$
$$+ \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} \cdot f(x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x-x_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x_i-x_k)} \cdot f(x_i)$$

Интерполяционная формула Ньютона:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) \cdot \Delta_1(x_0, x_1) +$$
$$+ (x-x_0)(x-x_1) \cdot \Delta_2(x_0, x_1, x_2) +$$
$$+ \dots + \prod_{k=0}^{n-1} (x-x_k) \cdot \Delta_n(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

где  $\Delta_1(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0};$

$$\Delta_r(x_0, x_1, \dots, x_r) = \frac{\Delta_{r-1}(x_1, x_2, \dots, x_r) - \Delta_{r-1}(x_0, x_1, \dots, x_{r-1})}{x_r - x_0}$$

для  $r = 2, 3, \dots, n.$

## Сплайновая интерполяция

**Сплайны** – многочлены на **каждом** участке интерполяции между соседними узлами, которые не только проходят через заданные узловые точки, но и сохраняют **необходимое число непрерывных производных** при переходе от одного участка интерполяции к соседнему.

Для этого при определении очередного сплайна используют не только значения заданной в узлах функции, но и условия равенства значений требуемых производных у смежных сплайнов.

**ПРИМЕР.** Сплайновая интерполяция с непрерывной первой производной.

На участке  $[x_0, x_1]$  известны лишь  $f(x_0)$  и  $f(x_1)$ . Поэтому однозначно определить можно лишь два коэффициента  $a_0^{(0)}$  и  $a_1^{(0)}$  линейного сплайна вида:  $f^{(0)}(x) = a_0^{(0)} + a_1^{(0)} \cdot (x - x_0)$ .

На любом следующем  $k$ -ом участке кроме  $f(x_k)$  и  $f(x_{k+1})$  известно еще и значение производной от предыдущего сплайна. Можно определить три коэффициента  $a_0^{(k)}$ ,  $a_1^{(k)}$  и  $a_2^{(k)}$  для сплайна второго порядка:

$$f^{(k)}(x) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)} \cdot (x - x_k) + a_2^{(k)} \cdot (x - x_k)^2.$$

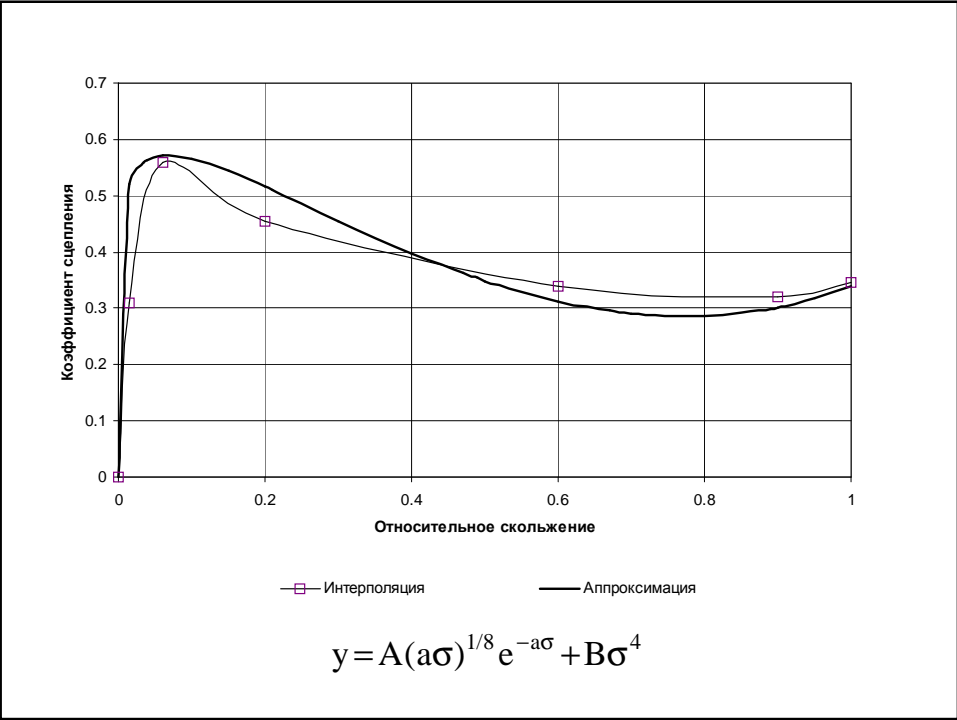
Система рекуррентных соотношений, позволяющих определить коэффициенты всех сплайнов, обеспечивающих интерполяцию с непрерывной первой производной:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0^{(0)} = f(x_0), \\ a_1^{(0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \\ a_0^{(k)} = f(x_k), \quad k=1,2,\dots,n-1, \\ a_1^{(k)} = a_1^{(k-1)} + 2a_2^{(k-1)} \cdot (x_k - x_{k-1}), \\ a_2^{(k)} = \frac{\frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - a_1^{(k)}}{x_{k+1} - x_k}. \end{array} \right.$$

## Г) Методы аппроксимации

**Аппроксимация функции** -  
 приближенная замена  
 заданной сложной зависимости  
 с помощью более простой

<i>Интерполяция</i>	<i>Аппроксимация (сглаживание)</i>
доопределение таблично заданной функции между узлами	замена таблично заданной функции удобной аналитической
проходит через заданные узловые точки	может не проходить через заданные узловые точки
обеспечивает требуемые <b>математические</b> свойства	обеспечивает требуемые <b>физические</b> свойства



# Вычислительные методы решения дифференциальных уравнений

[Часть I, стр. 63 - 72]

## Численные *методы интегрирования* обыкновенных *дифференциальных* *уравнений* и их систем

Задача Коши:  $y' = f(x,y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ .

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ – разностные схемы}$$

(чем меньше  $\Delta x$ , тем меньше погрешность замены)

## А) Методы Эйлера

**Простейший метод Эйлера первого порядка:**

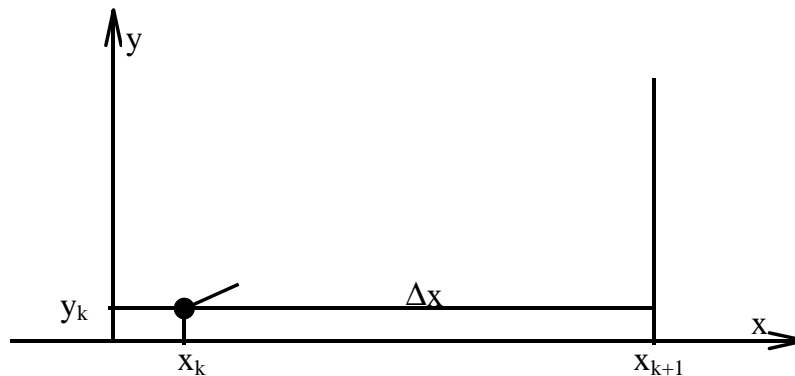
аппроксимация:  $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$ .

Так как  $y' = f(x, y)$ , разностное уравнение метода:

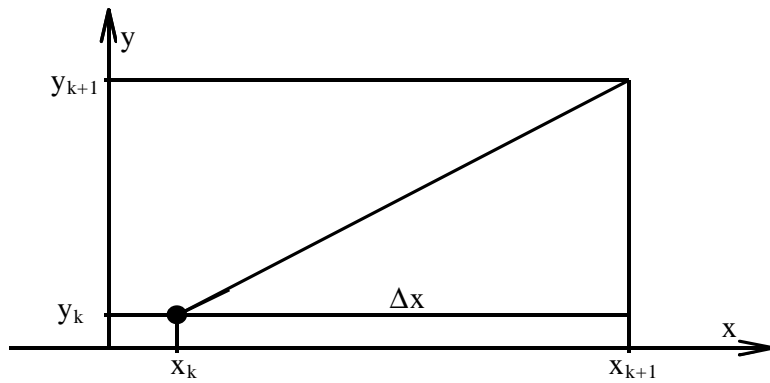
$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x.$$

$\Delta x$  – шаг интегрирования.

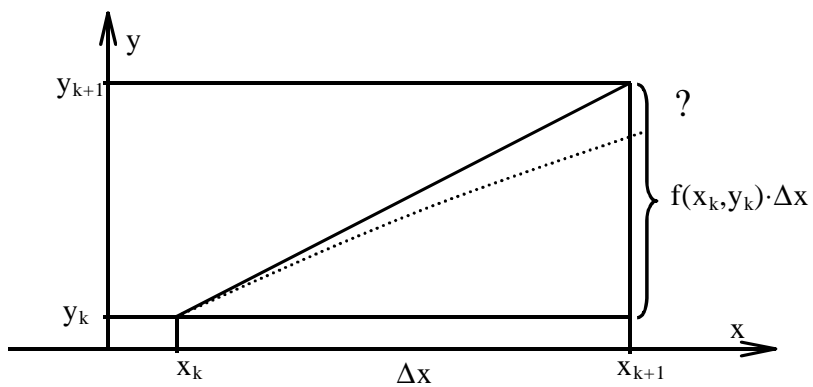
Геометрическая интерпретация простейшего метода  
Эйлера первого порядка



Геометрическая интерпретация простейшего метода  
Эйлера первого порядка



Геометрическая интерпретация простейшего метода  
Эйлера первого порядка



Погрешность метода не контролируемая и всегда приводит к отклонению в сторону выпуклости.

Методы Эйлера I порядка слабо устойчивы (погрешность растет и накапливается).

Для обеспечения удовлетворительной точности приходится сильно мельчить шаг интегрирования.

Однако все методы I порядка позволяют изменять шаг интегрирования в любой момент расчетов.



Другие разностные схемы аппроксимации производной:

$$\text{схема I порядка } y' \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}},$$

$$\text{схема II порядка } y' \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} \text{ и т.д.}$$

**Чем выше *порядок* метода  
(количество вычисляемых на  
шаге интегрирования значений  
функции),  
тем меньше погрешность на  
шаге и точнее метод.**

### Модифицированные методы Эйлера II порядка

(за два полушага):

$$y_{k+1} = y_k + f \left\{ x_k + \frac{1}{2} \Delta x, y_k + f(x_k, y_k) \cdot \frac{1}{2} \Delta x \right\} \cdot \Delta x;$$

(с предварительным шагом):

$$y_{k+1} = y_k + [f(x_k, y_k) + f \{ x_k + \Delta x, y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x \}] \cdot \frac{1}{2} \Delta x.$$

### Б) Методы Адамса

(учитывают предысторию поведения функции:  $y_{k-1} \dots$ )

Формула метода Адамса I порядка =  
= формула простейшего метода Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x;$$

II порядка:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x + [f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})] \cdot \frac{1}{2} \Delta x;$$

III порядка:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x + [f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})] \cdot \frac{1}{2} \Delta x + \\ + [f(x_k, y_k) - 2f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_{k-2}, y_{k-2})] \cdot \frac{5}{12} \Delta x$$

Методы Адамса более устойчивы, чем методы Эйлера.

Методы Адамса высоких порядков намного более экономны, чем другие методы, так как используют заранее вычисленные значения функции.

Методы Адамса обладают двумя существенными недостатками:

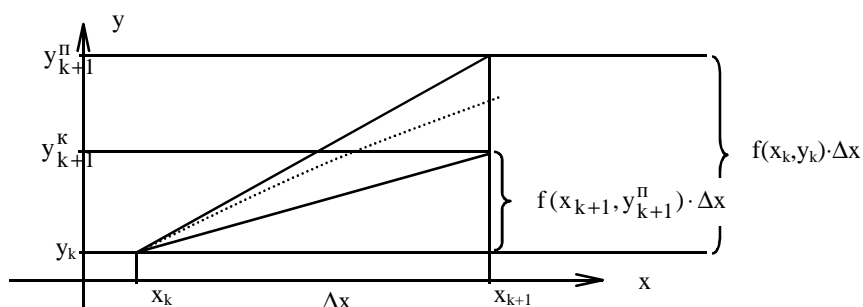
- необходимостью нестандартного начала,
- невозможностью изменения шага интегрирования.

В) Методы "прогноз-коррекция" – двухшаговые  
 (используют формулы метода Адамса того же порядка)

Простейший метод I порядка:

$$y_{k+1}^{\Pi} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x - \text{"предсказание"},$$

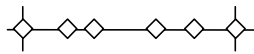
$$y_{k+1} = y_{k+1}^{\kappa} = y_k + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{\Pi}) \cdot \Delta x - \text{"коррекция"}.$$



Истинная погрешность на шаге  
 интегрирования всегда не  
 превосходит разности между  
 «предсказанным» (которое  
 отклонено в сторону выпуклости)  
 и «скорректированным» (которое  
 отклонено в сторону вогнутости)  
 значениями.

Методы прогноз-коррекция  
 кроме достоинств и  
 недостатков методов Адамса  
 имеют преимущество:  
 они позволяют  
**контролировать погрешность**  
 на шаге интегрирования.

### Г) Методы Рунге-Кутты

Методы  $m$ -го порядка используют  $m$  внутренних точек шага  
 интегрирования  $\Delta x$ :  $x_k^{(1)} = x_k; \dots; x_k^{(m)} \leq x_{k+1}$ , 

в которых **последовательно** вычисляются  $m$  значений функции:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_k^{(1)}, y_{k+1}); \\
 k_2 &= f(x_k^{(2)}, y_k + k_1 \cdot (x_k^{(2)} - x_k^{(1)})); \\
 &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 k_m &= f(x_k^{(m)}, y_k + k_{m-1} \cdot (x_k^{(m)} - x_k^{(1)}));
 \end{aligned}$$

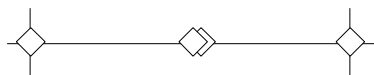
а затем производится непосредственно сам шаг интегрирования:

$$y_{k+1} = y_k + \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i k_i \right) \cdot \Delta x .$$

**Методы Рунге-Кутта**  
**отличаются:**  
**высокой устойчивостью,**  
**возможностью контроля**  
**погрешности и возможностью**  
**изменения шага**  
**интегрирования.**

"Стандартный" метод Рунге-Кутта IV порядка использует 4

точки:



$$x_k^{(1)} = x_k; \quad x_k^{(2)} = 0,5(x_k + x_{k+1}); \quad x_k^{(3)} = 0,5(x_k + x_{k+1}); \quad x_k^{(4)} = x_{k+1}$$

и соответствующий набор коэффициентов  $\alpha_i$ :

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_k, y_k); \\
 k_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}\Delta x, y_k + k_1 \cdot \frac{1}{2}\Delta x\right); \\
 k_3 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}\Delta x, y_k + k_2 \cdot \frac{1}{2}\Delta x\right); \\
 k_4 &= f(x_k + \Delta x, y_k + k_3 \cdot \Delta x); \\
 y_{k+1} &= y_k + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \cdot \frac{1}{6}\Delta x.
 \end{aligned}$$

Наиболее экономичный метод Рунге-Кутты II порядка

$$(x_k^{(1)} = x_k; x_k^{(2)} = x_{k+1}):$$

$$k_1 = f(x_k, y_k);$$

$$k_2 = f(x_k + \Delta x, y_k + k_1 \cdot \Delta x);$$

$$y_{k+1} = y_k + (k_1 + k_2) \cdot \frac{1}{2} \Delta x,$$



$$(x_k^{(1)} = x_k; x_k^{(2)} = x_{k+1}):$$

$$k_1 = f(x_k, y_k);$$

$$k_2 = f(x_k + \Delta x, y_k + k_1 \cdot \Delta x);$$

$$y_{k+1} = y_k + (k_1 + k_2) \cdot \frac{1}{2} \Delta x,$$

он совпадает с

*модифицированным методом Эйлера II порядка*

**(с предварительным шагом):**

$$y_{k+1} = y_k + [f(x_k, y_k) + f\{x_k + \Delta x, y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x\}] \cdot \frac{1}{2} \Delta x.$$

**ПРИМЕР.** Сравнение разностных методов

Задача Коши:  $y' = -\frac{x-y}{x}$ ;  $y(1)=0$ ;  $y(2)=?$

Для краткости в табл. 2 обозначено:

$f_k = f(x_k, y_k)$ ;  $f_k^k = f(x_{k+1}, y_{k+1}^p)$ ;  $y_k^+ = y_k + k_1 \cdot \Delta x$ .

Шаг интегрирования  $\Delta x = 0,2$ .

Сравнительная таблица методов численного интегрирования  
обыкновенных дифференциальных уравнений

k	x <sub>k</sub>	Эйлер I		"прогноз-коррекция" I		Адамс II		Рунге-Кутта II					
		y <sub>k</sub>	f <sub>k</sub>	y <sub>k</sub> <sup>p</sup>	f <sub>k</sub> <sup>k</sup>	y <sub>k</sub>	f <sub>k</sub>	y <sub>k</sub> <sup>+</sup>	k <sub>2</sub>	y <sub>k</sub>	k <sub>1</sub>		
0	1	0	-1										
1	1,2												
2	1,4												
3	1,6												
4	1,8												
5	2,0												



Сравнительная таблица методов численного интегрирования  
обыкновенных дифференциальных уравнений

k	x <sub>k</sub>	Эйлер I		"прогноз-коррекция" I				Адамс II		Рунге-Кутта II			
		y <sub>k</sub>	f <sub>k</sub>	y <sub>k</sub> <sup>п</sup>	f <sub>k</sub> <sup>к</sup>	y <sub>k</sub>	f <sub>k</sub>	y <sub>k</sub>	f <sub>k</sub>	y <sub>k</sub> <sup>+</sup>	k <sub>2</sub>	y <sub>k</sub>	k <sub>1</sub>
0	1	0	-1										
1	1,2	-0,2	-0,8(3)										
2	1,4												
3	1,6												
4	1,8												
5	2,0												

Сравнительная таблица методов численного интегрирования  
обыкновенных дифференциальных уравнений

k	x <sub>k</sub>	Эйлер I		"прогноз-коррекция" I				Адамс II		Рунге-Кутта II			
		y <sub>k</sub>	f <sub>k</sub>	y <sub>k</sub> <sup>п</sup>	f <sub>k</sub> <sup>к</sup>	y <sub>k</sub>	f <sub>k</sub>	y <sub>k</sub>	f <sub>k</sub>	y <sub>k</sub> <sup>+</sup>	k <sub>2</sub>	y <sub>k</sub>	k <sub>1</sub>
0	1	0	-1										
1	1,2	-0,2	-0,8(3)										
2	1,4	-0,3(6)	-0,7381										
3	1,6	-0,5143	-0,6786										
4	1,8	-0,6500	-0,6389										
5	2,0	<b>-0,7778</b>											

Сравнительная таблица методов численного интегрирования  
обыкновенных дифференциальных уравнений

k	$x_k$	Эйлер I		"прогноз-коррекция" I				Адамс II		Рунге-Кутта II			
		$y_k$	$f_k$	$y_k^p$	$f_k^k$	$y_k$	$f_k$	$y_k$	$f_k$	$y_k^+$	$k_2$	$y_k$	$k_1$
0	1	0	-1			0	-1						
1	1,2	-0,2	-0,8(3)	-0,2	-0,8(3)								
2	1,4	-0,3(6)	-0,7381										
3	1,6	-0,5143	-0,6786										
4	1,8	-0,6500	-0,6389										
5	2,0	<b>-0,7778</b>											

Сравнительная таблица методов численного интегрирования  
обыкновенных дифференциальных уравнений

k	$x_k$	Эйлер I		"прогноз-коррекция" I				Адамс II		Рунге-Кутта II			
		$y_k$	$f_k$	$y_k^p$	$f_k^k$	$y_k$	$f_k$	$y_k$	$f_k$	$y_k^+$	$k_2$	$y_k$	$k_1$
0	1	0	-1			0	-1						
1	1,2	-0,2	-0,8(3)	-0,2	-0,8(3)	-0,1(6)	-0,8611						
2	1,4	-0,3(6)	-0,7381										
3	1,6	-0,5143	-0,6786										
4	1,8	-0,6500	-0,6389										
5	2,0	<b>-0,7778</b>											

Сравнительная таблица методов численного интегрирования  
обыкновенных дифференциальных уравнений

k	$x_k$	Эйлер I		"прогноз-коррекция" I				Адамс II		Рунге-Кутта II			
		$y_k$	$f_k$	$y_k^p$	$f_k^k$	$y_k$	$f_k$	$y_k$	$f_k$	$y_k^+$	$k_2$	$y_k$	$k_1$
0	1	0	-1			0	-1						
1	1,2	-0,2	-0,8(3)	-0,2	-0,8(3)	-0,1(6)	-0,8611						
2	1,4	-0,3(6)	-0,7381	-0,3389	-0,7579	-0,3183	-0,7727						
3	1,6	-0,5143	-0,6786	-0,4728	-0,7045	-0,4592	-0,7130						
4	1,8	-0,6500	-0,6389	-0,6018	-0,6657	-0,5923	-0,6709						
5	2,0	<b>-0,7778</b>		-0,7265	-0,6368	<b>-0,7197</b>							

Сравнительная таблица методов численного интегрирования  
обыкновенных дифференциальных уравнений

k	$x_k$	Эйлер I		"прогноз-коррекция" I				Адамс II		Рунге-Кутта II			
		$y_k$	$f_k$	$y_k^p$	$f_k^k$	$y_k$	$f_k$	$y_k$	$f_k$	$y_k^+$	$k_2$	$y_k$	$k_1$
0	1	0	-1			0	-1	0	-1				
1	1,2	-0,2	-0,8(3)	-0,2	-0,8(3)	-0,1(6)	-0,8611	-0,2[Э]	-0,8(3)				
2	1,4	-0,3(6)	-0,7381	-0,3389	-0,7579	-0,3183	-0,7727						
3	1,6	-0,5143	-0,6786	-0,4728	-0,7045	-0,4592	-0,7130						
4	1,8	-0,6500	-0,6389	-0,6018	-0,6657	-0,5923	-0,6709						
5	2,0	<b>-0,7778</b>		-0,7265	-0,6368	<b>-0,7197</b>							

Сравнительная таблица методов численного интегрирования  
обыкновенных дифференциальных уравнений

k	$x_k$	Эйлер I		"прогноз-коррекция" I				Адамс II		Рунге-Кутта II			
		$y_k$	$f_k$	$y_k^{\Pi}$	$f_k^K$	$y_k$	$f_k$	$y_k$	$f_k$	$y_k^+$	$k_2$	$y_k$	$k_1$
0	1	0	-1			0	-1	0	-1				
1	1,2	-0,2	-0,8(3)	-0,2	-0,8(3)	-0,1(6)	-0,8611	-0,2[Э]	-0,8(3)				
2	1,4	-0,3(6)	-0,7381	-0,3389	-0,7579	-0,3183	-0,7727	-0,35	-0,75				
3	1,6	-0,5143	-0,6786	-0,4728	-0,7045	-0,4592	-0,7130						
4	1,8	-0,6500	-0,6389	-0,6018	-0,6657	-0,5923	-0,6709						
5	2,0	<b>-0,7778</b>		-0,7265	-0,6368	<b>-0,7197</b>							

Сравнительная таблица методов численного интегрирования  
обыкновенных дифференциальных уравнений

k	$x_k$	Эйлер I		"прогноз-коррекция" I				Адамс II		Рунге-Кутта II			
		$y_k$	$f_k$	$y_k^{\Pi}$	$f_k^K$	$y_k$	$f_k$	$y_k$	$f_k$	$y_k^+$	$k_2$	$y_k$	$k_1$
0	1	0	-1			0	-1	0	-1				
1	1,2	-0,2	-0,8(3)	-0,2	-0,8(3)	-0,1(6)	-0,8611	-0,2[Э]	-0,8(3)				
2	1,4	-0,3(6)	-0,7381	-0,3389	-0,7579	-0,3183	-0,7727	-0,35	-0,75				
3	1,6	-0,5143	-0,6786	-0,4728	-0,7045	-0,4592	-0,7130	-0,4917	-0,6927				
4	1,8	-0,6500	-0,6389	-0,6018	-0,6657	-0,5923	-0,6709	-0,6245	-0,6531				
5	2,0	<b>-0,7778</b>		-0,7265	-0,6368	<b>-0,7197</b>		<b>-0,7512</b>					

Сравнительная таблица методов численного интегрирования  
обыкновенных дифференциальных уравнений

k	$x_k$	Эйлер I		"прогноз-коррекция" I				Адамс II		Рунге-Кутта II			
		$y_k$	$f_k$	$y_k^p$	$f_k^k$	$y_k$	$f_k$	$y_k$	$f_k$	$y_k^+$	$k_2$	$y_k$	$k_1$
0	1	0	-1			0	-1	0	-1			0	-1
1	1,2	-0,2	-0,8(3)	-0,2	-0,8(3)	-0,1(6)	-0,8611	-0,2[Э]	-0,8(3)	-0,2	-0,8(3)		
2	1,4	-0,3(6)	-0,7381	-0,3389	-0,7579	-0,3183	-0,7727	-0,35	-0,75				
3	1,6	-0,5143	-0,6786	-0,4728	-0,7045	-0,4592	-0,7130	-0,4917	-0,6927				
4	1,8	-0,6500	-0,6389	-0,6018	-0,6657	-0,5923	-0,6709	-0,6245	-0,6531				
5	2,0	<b>-0,7778</b>		-0,7265	-0,6368	<b>-0,7197</b>		<b>-0,7512</b>					

Сравнительная таблица методов численного интегрирования  
обыкновенных дифференциальных уравнений

k	$x_k$	Эйлер I		"прогноз-коррекция" I				Адамс II		Рунге-Кутта II			
		$y_k$	$f_k$	$y_k^p$	$f_k^k$	$y_k$	$f_k$	$y_k$	$f_k$	$y_k^+$	$k_2$	$y_k$	$k_1$
0	1	0	-1			0	-1	0	-1			0	-1
1	1,2	-0,2	-0,8(3)	-0,2	-0,8(3)	-0,1(6)	-0,8611	-0,2[Э]	-0,8(3)	-0,2	-0,8(3)	-0,18(3)	-0,8472
2	1,4	-0,3(6)	-0,7381	-0,3389	-0,7579	-0,3183	-0,7727	-0,35	-0,75				
3	1,6	-0,5143	-0,6786	-0,4728	-0,7045	-0,4592	-0,7130	-0,4917	-0,6927				
4	1,8	-0,6500	-0,6389	-0,6018	-0,6657	-0,5923	-0,6709	-0,6245	-0,6531				
5	2,0	<b>-0,7778</b>		-0,7265	-0,6368	<b>-0,7197</b>		<b>-0,7512</b>					

Сравнительная таблица методов численного интегрирования  
обыкновенных дифференциальных уравнений

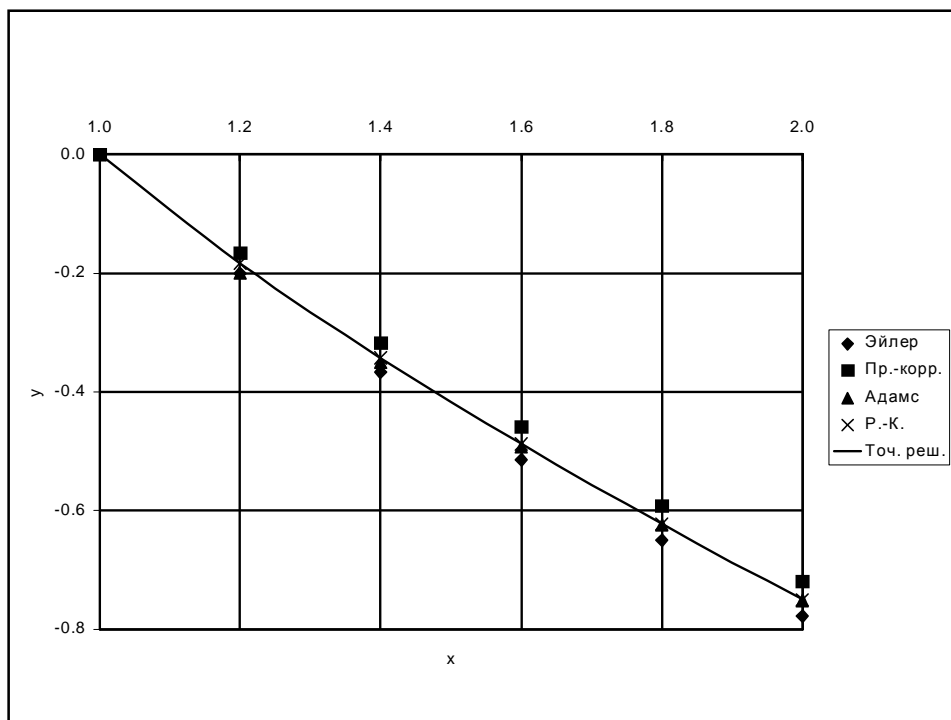
k	x <sub>k</sub>	Эйлер I		"прогноз-коррекция" I				Адамс II		Рунге-Кутта II			
		y <sub>k</sub>	f <sub>k</sub>	y <sub>k</sub> <sup>п</sup>	f <sub>k</sub> <sup>к</sup>	y <sub>k</sub>	f <sub>k</sub>	y <sub>k</sub>	f <sub>k</sub>	y <sub>k</sub> <sup>+</sup>	k <sub>2</sub>	y <sub>k</sub>	k <sub>1</sub>
0	1	0	-1			0	-1	0	-1			0	-1
1	1,2	-0,2	-0,8(3)	-0,2	-0,8(3)	-0,1(6)	-0,8611	-0,2[9]	-0,8(3)	-0,2	-0,8(3)	-0,18(3)	-0,8472
2	1,4	-0,3(6)	-0,7381	-0,3389	-0,7579	-0,3183	-0,7727	-0,35	-0,75	-0,3528	-0,7480	-0,3429	-0,7551
3	1,6	-0,5143	-0,6786	-0,4728	-0,7045	-0,4592	-0,7130	-0,4917	-0,6927	-0,4939	-0,6913	-0,4876	-0,6953
4	1,8	-0,6500	-0,6389	-0,6018	-0,6657	-0,5923	-0,6709	-0,6245	-0,6531	-0,6267	-0,6519	-0,6223	-0,6543
5	2,0	<b>-0,7778</b>		-0,7265	-0,6368	<b>-0,7197</b>		<b>-0,7512</b>		-0,7532	-0,6234	<b>-0,7501</b>	

Точное решение этой задачи Коши:

$$y' = -\frac{1-x^2}{2x}; \quad y(2) = -0,75.$$

Сравнительная таблица методов численного интегрирования  
обыкновенных дифференциальных уравнений

k	$x_k$	Эйлер I		"прогноз-коррекция" I				Адамс II		Рунге-Кутта II				точное решение
		$y_k$	$f_k$	$y_k^p$	$f_k^k$	$y_k$	$f_k$	$y_k$	$f_k$	$y_k^+$	$k_2$	$y_k$	$k_1$	
0	1	0	-1			0	-1	0	-1			0	-1	0
1	1,2	-0,2	-0,8(3)	-0,2	-0,8(3)	-0,1(6)	-0,8611	-0,2[Э]	-0,8(3)	-0,2	-0,8(3)	-0,18(3)	-0,8472	-0,18(3)
2	1,4	-0,3(6)	-0,7381	-0,3389	-0,7579	-0,3183	-0,7727	-0,35	-0,75	-0,3528	-0,7480	-0,3429	-0,7551	-0,34286
3	1,6	-0,5143	-0,6786	-0,4728	-0,7045	-0,4592	-0,7130	-0,4917	-0,6927	-0,4939	-0,6913	-0,4876	-0,6953	-0,4875
4	1,8	-0,6500	-0,6389	-0,6018	-0,6657	-0,5923	-0,6709	-0,6245	-0,6531	-0,6267	-0,6519	-0,6223	-0,6543	-0,6(2)
5	2,0	<b>-0,7778</b>		-0,7265	-0,6368	<b>-0,7197</b>		<b>-0,7512</b>		-0,7532	-0,6234	<b>-0,7501</b>		<b>-0,75</b>



Д) Два подхода к решению задачи Коши для обыкновенных **дифференциальных уравнений** второго и более **высоких** порядков

$$y'' = f(x, y, y') \Rightarrow \begin{cases} z' = f(x, y, z) \\ y' = z \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{специальные разностные} \\ \text{схемы} \end{array} \right.$$

Е) Методы решения **краевых задач**

**Дифференциальные уравнения** с заданными **краевыми условиями** – известными значениями функции и/или ее производных в начальной **и** конечной точках интервала интегрирования

Методы сеток  
(метод прогонки и др.)

Метод стрельбы



## Методы сеток

**Сеточная функция** – таблица значений функции  $y_k$ , заданных в узлах, совпадающих с сеткой шагов интегрирования:  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ .

## Метод прогонки

**ПРИМЕР 1.** Краевая задача:  $y' = f(x)$ ;  $y(\bar{x}) = \bar{y}$  для интервала интегрирования от  $x_0$  до  $\bar{x}$ .

Будем искать численное решение  $y(x)$  с шагом интегрирования  $\Delta x = \frac{1}{5}(\bar{x} - x_0)$ , т.е. значения сеточной функции в пяти точках:  $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4$ . Заметим, что  $y_5 = \bar{y}$  известно из граничного (краевого) условия.

Воспользуемся простейшей разностной схемой Эйлера:

$$y' \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}.$$

Запишем исходное уравнение для всех 5 шагов интегрирования:

$$\left. \begin{array}{rcl} -y_0 & +y_1 & = f_0 \cdot \Delta x \\ & -y_1 & +y_2 = f_1 \cdot \Delta x \\ & & -y_2 & +y_3 = f_2 \cdot \Delta x \\ & & & -y_3 & +y_4 = f_3 \cdot \Delta x \\ & & & & -y_4 & +y_5 = f_4 \cdot \Delta x \end{array} \right\},$$

где  $f_k = f(x_k)$  можно вычислить во всех точках в силу особого ее вида.

$y_5 = \bar{y}$  известно, остальные  $y_4, y_3, y_2, y_1, y_0$  находятся обратной прогонкой.

**ПРИМЕР 2.** Краевая задача:  $y'' = f(x)$ ;  $y(x_0) = \tilde{y}$ ,  $y(\bar{x}) = \bar{y}$  на обоих концах интервала интегрирования от  $x_0$  до  $\bar{x}$ .

*Сеточную функцию* строим по 5 точкам с разностной схемой второго порядка по трем узловым точкам (с коэффициентами  $a, b, c$ ):

$$y'' \approx \frac{ay_{k-1} + by_k + cy_{k+1}}{(\Delta x)^2}.$$

Разностная система алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{array}{rcccccc} y_0 & & & & & & = \tilde{y} \\ ay_0 & +by_1 & +cy_2 & & & & = f_1 \cdot (\Delta x)^2 \\ & ay_1 & +by_2 & +cy_3 & & & = f_2 \cdot (\Delta x)^2 \\ & & ay_2 & +by_3 & +cy_4 & & = f_3 \cdot (\Delta x)^2 \\ & & & ay_3 & +by_4 & +cy_5 & = f_4 \cdot (\Delta x)^2 \\ & & & & & y_5 & = y \end{array} \right\}.$$

*Прямая прогонка* (запись уравнений в особом виде)

Заменим 1-е уравнение:  $\boxed{y_0 = \tilde{y}} \Rightarrow \boxed{y_0 = L_0 y_1 + K_0}$ , где  $L_0 = 0$ , а  $K_0 = \tilde{y}$

↓

Из 2-го уравнения системы исключим  $y_0$  и выразим  $y_1$ :

$$\boxed{y_1 = L_1 y_2 + K_1}, \text{ где } L_1 = \frac{-c}{b+aL_0} = \frac{-c}{b}, K_1 = \frac{f_1 - aK_0}{b} = \frac{f_1 - a\tilde{y}}{-b}$$

↓

...

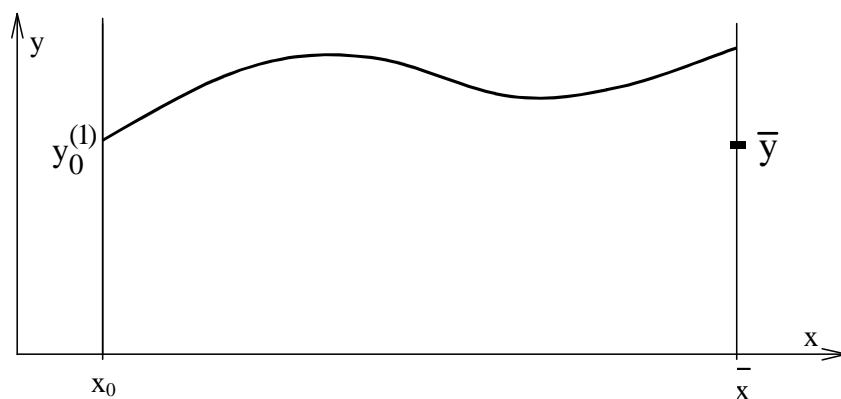
*Обратная прогонка* – вычисление последовательно:  $y_4, y_3, y_2, y_1$ .

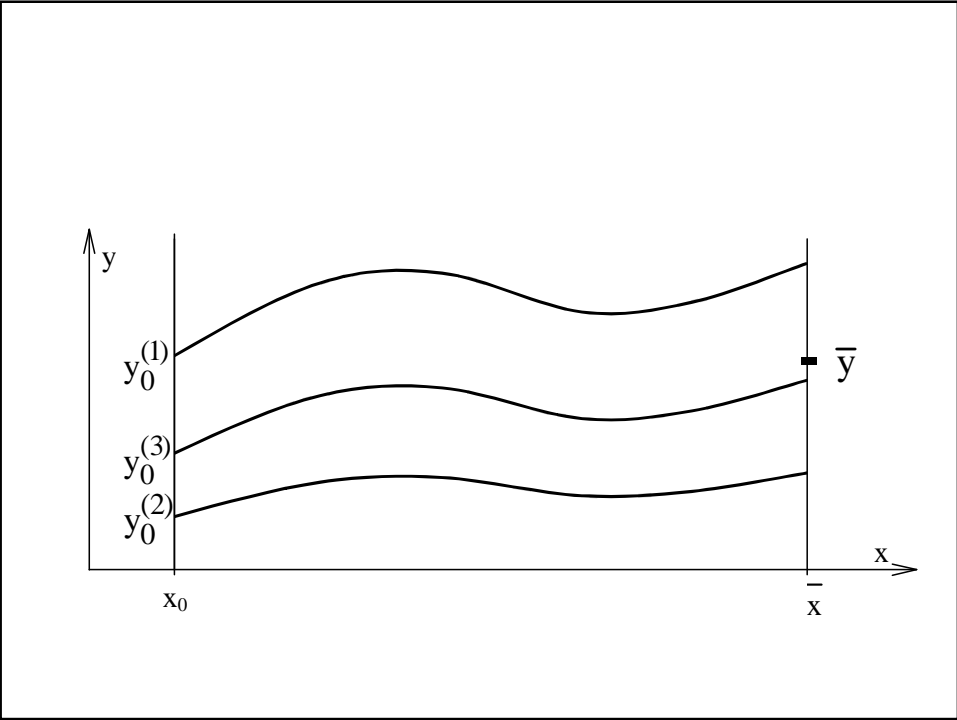
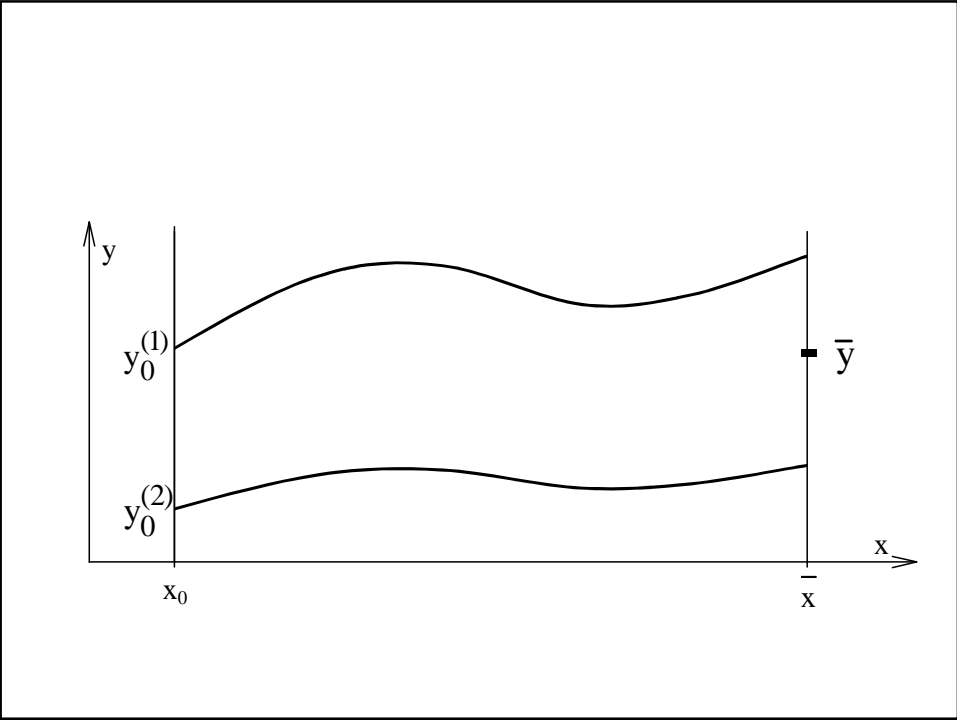
### Общий принцип построения метода прогонки

- 1) введение новых неизвестных  $u_k = \alpha_k y_k + \beta_k y_{k-1} \dots$ ;
- 2) запись системы уравнений через  $u_k$ ;
- 3) подбор вида замены переменных (набора коэффициентов  $\alpha_k, \beta_k \dots$ ) для возможности их определения последовательно от  $\alpha_1, \beta_1 \dots$  до  $\alpha_n, \beta_n \dots$  (*прямая прогонка*);
- 4) (*обратная прогонка*) определение  $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1$ .

### Метод стрельбы (пристрелки)

(сведение решения краевой задачи к решению задачи Коши)





### Алгоритм метода стрельбы

- 1) По исходному приближению начального условия  $y_0^{(1)}$  решается *задача Коши* до  $y(\bar{x})$ .
- 2) Исходя разности  $y(\bar{x}) - \bar{y}$ , выбирается следующее приближение начального условия  $y_0^{(2)}$  для процедуры отделения корней.
- 3) Одним из *итерационных методов* решения нелинейных алгебраических уравнений находят очередные приближения:  $y_0^{(3)}$  ...

### Ж) Интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными

Методы: *разностные схемы* для отыскания *сеточных функций*

Предостережение: необходимо учитывать **физическую** суть отдельных членов уравнений и проблему **корректности** задания граничных и начальных условий.

**ПОЯСНЕНИЕ.** 1) Импульс  $mV \Leftrightarrow$  энергия  $\frac{mV^2}{2}$ .

2)  $y(t, x_0)|_{t=t_0} = y(t_0, x_0) = y(t_0, x)|_{x=x_0}$

# Математические методы ОПТИМИЗАЦИИ

[Часть I, стр. 80 - 96]

*Задача оптимизации – один из видов обратных задач*

Терминология

$\mathbf{x}(t)$  – вектор фазовых координат;

$\mathbf{u}(t)$  – вектор управлений (управляющих функций);

$\mathbf{a}$  – вектор **параметров** объекта;

$t$  – время;

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{a}, t) = 0$  – уравнения связей (уравнения движения);

$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}, t) \leq 0$  – ограничения;

$H = H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_0, t_1)$  – критерий оптимальности (целевая функция).

Общая формулировка задачи оптимизации:

при заданных *уравнениях связей* (*уравнениях движения*) требуется найти такое оптимальное управление  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  и соответствующее ему оптимальное решение (оптимальную траекторию)  $\hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{a}, t)$ , которые в *области допустимых управлений* доставляют минимум *критерию оптимальности*:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_0, t_1) \rightarrow \min \mathbf{H} = \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}, t, t_0, t_1).$$

**ПРИМЕР.** Механическая система

уравнение движения:  $x = ut$ ;

область допустимых управлений:

$$-1 \leq u \leq 1;$$

условие оптимальности:

$$x(t=1) \rightarrow \max$$



**ПРИМЕР. Механическая система**

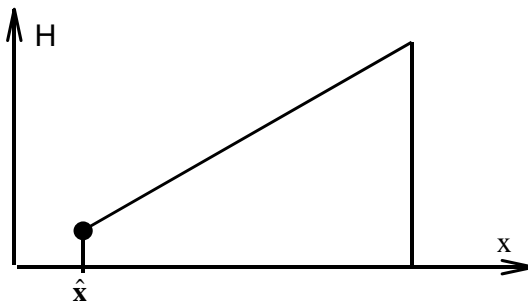
уравнение движения: $x = ut$ ;	уравнение движения: $x - ut = 0$ ;
область допустимых управлений: $-1 \leq u \leq 1$ ;	ограничения: $\begin{cases} u-1 \leq 0, \\ -u-1 \leq 0, \end{cases}$
условие оптимальности: $x(t=1) \rightarrow \max$	критерий оптимальности: $H = -x(t=1) \rightarrow \min H \rightarrow H(\hat{x}, \hat{u}, t)$
Найти оптимальное управление $\hat{u}$ и оптимальную траекторию $\hat{x}(\hat{u}, t)$	

**ПРИМЕР. Механическая система**

уравнение движения: $x = ut$ ;	уравнение движения: $x - ut = 0$ ;
область допустимых управлений: $-1 \leq u \leq 1$ ;	ограничения: $\begin{cases} u-1 \leq 0, \\ -u-1 \leq 0, \end{cases}$
условие оптимальности: $x(t=1) \rightarrow \max$	критерий оптимальности: $H = -x(t=1) \rightarrow \min H \rightarrow H(\hat{x}, \hat{u}, t)$
Найти оптимальное управление $\hat{u}$ и оптимальную траекторию $\hat{x}(\hat{u}, t)$	

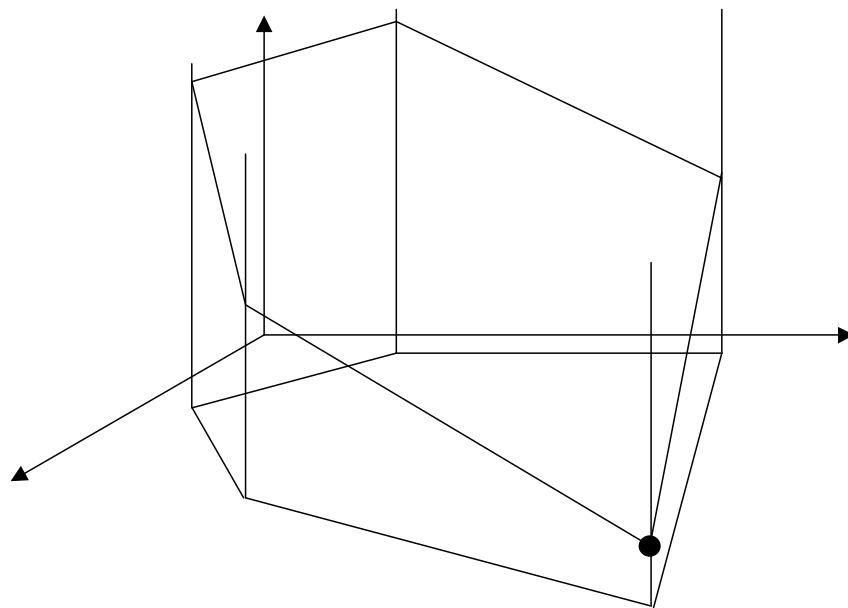
Наглядная интерпретация:  $u$  – скорость,  $x$  – расстояние. Решение:  
оптимальное управление  $\hat{u} = 1$ , оптимальная траектория  $\hat{x}(\hat{u}, t) = t$ .

А) Задача линейного программирования:  $f, g, H$  – **линейные** алгебраические функции (т.е., имеющие вид  $a_0 + a_1x + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ ), **не** зависящие от времени.



Простейший пример

Задача линейного программирования решается *симплекс-методом*



Геометрическая интерпретация случая двух переменных

## Описание симплекс-метода

1) Общий вид задачи линейного программирования:

для  $s$  переменных  $X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$

минимизировать  $z = \sum_{k=1}^s \Gamma_k X_k$

при ограничениях-равенствах  $\sum_{k=1}^s d_{ik} X_k = D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ )

и ограничениях-неравенствах  $\sum_{k=1}^s z_{jk} X_k \geq Z_j$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ).

2) Стандартная форма задачи линейного программирования  
(может быть получена из общего вида с помощью **введения дополнительных** (вспомогательных) переменных):

для  $n$  переменных  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$

минимизировать  $z = \sum_{k=1}^n c_k x_k$

при ограничениях-равенствах  $\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m < n$ )

и ограничениях-неравенствах  $x_k \geq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Особенности:  $b_k \geq 0$  и тривиальный вид ограничений-неравенств  $x_k \geq 0$ .

### Термины

Допустимое решение – всякая точка  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющая заданным ограничениям

Базисное допустимое решение – допустимое решение, в котором  $n - r$  **свободных** неизвестных равны 0 (где  $r$  – ранг системы линейных алгебраических уравнений-ограничений,  $r \leq m$ )

### 3) Каноническая форма задачи линейного программирования

(пусть все  $m$  уравнений связей линейно **независимы**:  $r = m$ )

при ограничениях-равенствах:  $x_i + \sum_{k=m+1}^n \alpha_{ik} x_k = \beta_i \geq 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ),

(где  $r = m$  **базисных** неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_m$  с **коэффициентом 1**, а остальные  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$  – **свободные** неизвестные)

и ограничениях-неравенствах:  $x_k \geq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

минимизировать  $z = z_0 + \sum_{k=m+1}^n \gamma_k x_k$ .

Особенности: в каждом ограничении-равенстве представлено **единственное** базисное неизвестное с коэффициентом 1, все  $\beta_i \geq 0$ , тривиальный вид ограничений-неравенств  $x_k \geq 0$  и выражение критерия только через **свободные** неизвестные.

По канонической форме можно составить базисное допустимое решение:

$$x_i = \begin{cases} \beta_i & i = 1, 2, \dots, m \text{ – базисные,} \\ 0 & i = m + 1, \dots, n \text{ – свободные.} \end{cases}$$

*Базисное допустимое решение вырождено*, если хотя бы одно  $\beta_i = 0$ ; и *невырождено*, если все  $m$   $\beta_i > 0$ ;

*Базисное допустимое решение – оптимально*, если оно минимизирует критерий оптимальности.

Анализ базисного допустимого решения по критерию  $z = z_0 + \sum_{k=m+1}^n \gamma_k x_k$  :

– **все**  $\gamma_k \geq 0 \Rightarrow$  базисное допустимое решение *оптимально* (задача решена), но не единственно, так как критерий принимает одно и то же значение при любом значении  $x_k$ , соответствующем  $\gamma_k = 0$ ;

– **все**  $\gamma_k > 0 \Rightarrow$  *оптимальное* решение **единственно** (задача решена);

– существуют  $\gamma_k < 0 \Rightarrow$  базисное допустимое решение не оптимально ( $z \downarrow$  при  $x_k \uparrow$ ) и преобразования канонических форм надо продолжить.

**ПРИМЕР.** Доход от 1 пасс. на 1 км – 5 рублей (цены условные), а расходы на 1 км – 200 рублей. Пассажировместимость:  $N \leq 150$ ;  $N(L = 1500 \text{ км}) = 150$ ;  $N(L = 3000 \text{ км}) = 0$ .  $N = ?$ ,  $L = ?$

$x_1$  – дальность  $L$ ,  $x_2$  – число пассажиров  $N$ . Ограничения:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_2 \leq 150, x_1 + 10x_2 \leq 3000;$$

критерий оптимальности (минимизировать потери, т.е. затраты минус доход):  $z = 200 \cdot x_1 - 5 \cdot x_1 \cdot x_2 \rightarrow \min$ .

**ПРИМЕР.** Доход от 1 пасс. на 1 км – 5 рублей (цены условные), а расходы на 1 км – 200 рублей. Пассажировместимость:  $N \leq 150$ ;  $N(L = 1500 \text{ км}) = 150$ ;  $N(L = 3000 \text{ км}) = 0$ .  $N = ?$ ,  $L = ?$

$x_1$  – дальность  $L$ ,  $x_2$  – число пассажиров  $N$ . Ограничения:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_2 \leq 150, x_1 + 10x_2 \leq 3000;$$

критерий оптимальности (минимизировать потери, т.е. затраты минус доход):  $z = 200 \cdot x_1 - 5 \cdot x_1 \cdot x_2 \rightarrow \min$ .

$$\Rightarrow \text{Потери на 1 км: } z_1 = 200 - 5 \cdot x_2$$

Получанная запись может считаться *общим видом задачи линейного программирования*:

минимизировать потери на 1 км:  $z_1 = 200 - 5 \cdot x_2$

при ограничениях-неравенствах

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 150 - x_2 \geq 0, 3000 - x_1 - 10x_2 \geq 0$$

(ограничения-равенства отсутствуют).

Для *стандартной формы* (в которой все ограничения-равенства должны иметь тривиальный вид) **введем дополнительные переменные**  $x_3 = 150 - x_2$  и  $x_4 = 3000 - x_1 - 10x_2$ , тогда:

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 + x_4 = 3000 \geq 0 \\ x_2 + x_3 = 150 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

$$z_1 = 200 - 5 \cdot x_2$$

Для канонической формы: ранг  $r = 2 \Rightarrow 2$  свободных и 2 базисных неизвестных.

Так как  $x_2$  и  $x_3$  не могут быть одновременно свободными или базисными в силу второго уравнения, то примем:  $x_1$  и  $x_2$  за свободные:

$$\begin{cases} x_3 + x_2 = 150 > 0, \\ x_4 + x_1 + 10x_2 = 3000 > 0. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Критерий оптимальности через свободные неизвестные:

$$z_1 = 200 - 5 \cdot x_2.$$

Базисное допустимое решение не оптимально, так как  $(-5) < 0$ .

Другая каноническая форма: свободные  $x_1$  и  $x_3$ :

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 150 > 0, \\ x_4 + x_1 - 10x_3 = 1500 > 0. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Тогда критерий оптимальности запишется:  $z_1 = -550 + 5 \cdot x_3$ .

В этой форме базисное допустимое решение принимает вид:

$$x_1 = 0, x_2 = 150, x_3 = 0, x_4 = 1500,$$

которое оптимально ( $\gamma_1 = 0, \gamma_3 = 5 > 0$ ).

Решение: затраты на 1 км минимальны при  $x_1 = 0, x_2 = 150$ .

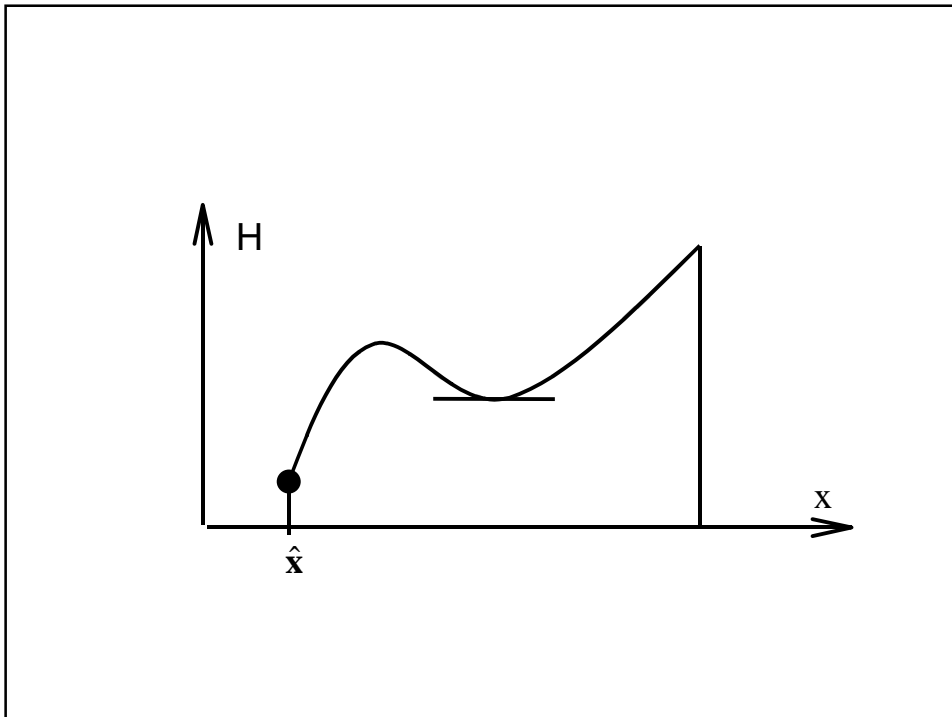


Б) *Задача нелинейного программирования*:  $f$ ,  $g$ ,  $H$  – алгебраические **нелинейные** функции, **не зависящие от времени**.

1) "Классический" случай: вид  $H$  позволяет **решить систему**:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0. \end{cases} \Rightarrow \text{точки } \min H \text{ внутри допустимой области.}$$

Требуется дополнительно найти наименьшее значение  $H$  и **на границе** допустимой области.



Замечание 1. Связь между задачами

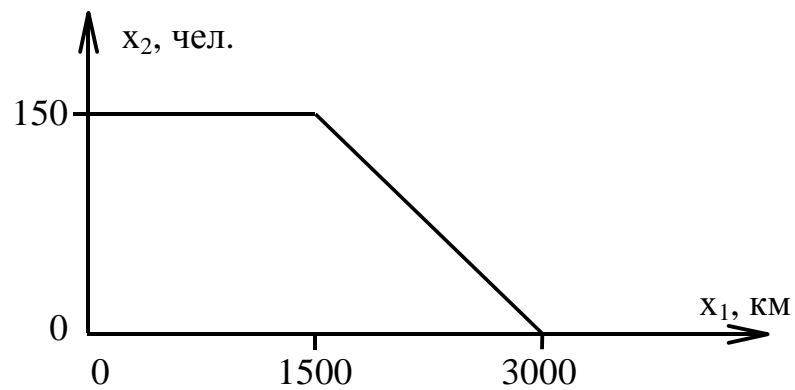
$\min\{H(\mathbf{x})\}$	$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$
$H(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^2(\mathbf{x})$ внутри допустимой области	$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial H}{\partial x_i} \right)$

Замечание 2. Учет границ допустимой области –  
– метод штрафных функций:

$$H_1 = H + S, \text{ где } S = \begin{cases} 0 & \text{внутри ограничений,} \\ |H| \cdot 10^9 & \text{вне ограничений.} \end{cases}$$

**ПРИМЕР.** Предыдущая задача в нелинейной постановке.

**Граница допустимой области:**



Возможные экстремумы критерия оптимальности

$z = 200 \cdot x_1 - 5 \cdot x_1 \cdot x_2$  внутри допустимой области:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x_1} = 200 - 5x_2 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} = -5x_1 = 0. \end{cases}$$

Решение единственное:  $x_1 = 0, x_2 = 40$  (на границе),  
 $\underline{z_0(0; 40) = 0}$ .

Для верхней границы  $x_2 = 150$ , и  $z = -550 \cdot x_1$ . Так как  $0 < x_1 < 1500$ , то наименьшее значение  $z$  принимает в правой крайней точке этой границы:  $z_{\text{в}}(1500; 150) = -550 \cdot 1500 = -825000$ .

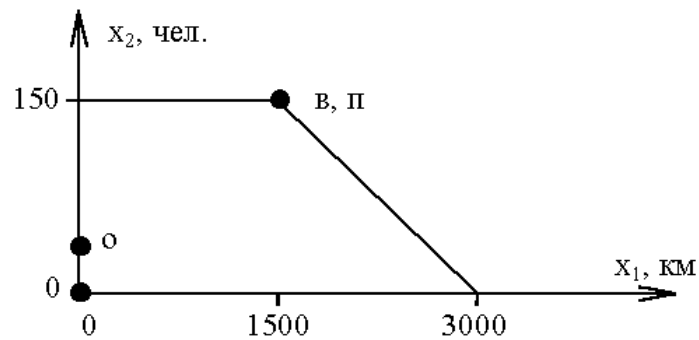
Для нижней границы  $x_2 = 0$ , и  $z = 200 \cdot x_1$ . Так как  $0 < x_1 < 3000$ , то наименьшее значение  $z$  принимает в левой крайней точке этой границы:  $z_{\text{н}}(0; 0) = 0$ .

Для левой границы  $x_1 = 0$ , и  $z_{\text{л}} = 0$  при любом  $x_2$ .

Для правой, наклонной границы  $x_1 = 3000 - 10 \cdot x_2$ :  
$$z_{\text{п}} = (3000 - 10x_2)(200 - 5x_2) = 600000 - 17000x_2 + 50x_2^2 .$$

$z_{\text{п}}$  принимает единственное наименьшее значение в точке, где  $z'_{\text{п}} = -17000 + 100x_2 = 0$ , лежащей на продолжении границы, при  $x_2 = 170$ , т.е. вне области допустимых значений переменных. Однако  $z_{\text{п}}$  на этой прямой ведет себя монотонно по обе стороны от точки минимума  $x_2 = 170$ . Поэтому наименьшее значение  $z_{\text{п}}$  на интервале  $0 < x_2 < 150$  будет в точке, ближайшей к  $x_2 = 150$ :  $z_{\text{п}}(1500; 150) = -550 \cdot 1500 = -825000$ .

Оптимальное решение задачи:



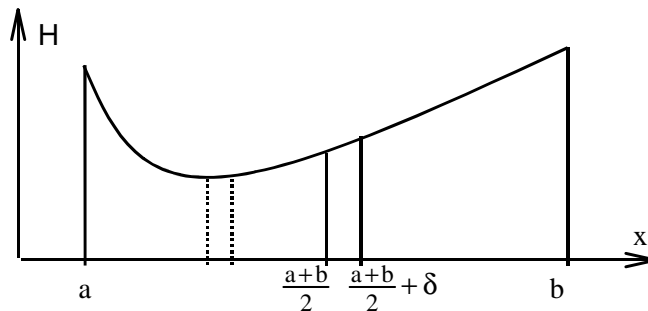
наибольший доход (наименьшие затраты) от эксплуатации данного самолета обеспечат перевозки полной коммерческой нагрузки 150 пассажиров на наибольшую возможную при этом (расчетную) дальность 1500 км.

2)  $H$  представляет собой **унимодальную функцию** одного переменного  $x$ , что означает **существование** минимального значения  $H(x)$  в **единственной** точке внутри области допустимых значений. Поэтому прежде, чем применять следующие методы, необходимо каким-либо способом убедиться в том, что  $H$  обладает именно этим свойством.

Если аналитическая запись производной  $H$  возможна, то это – частный случай рассмотренного выше п. 1. В противном случае можно воспользоваться одним из *методов последовательных приближений*.

Метод деления отрезка пополам  
( $a \leq x \leq b$ , на котором  $H$  унимодальна)

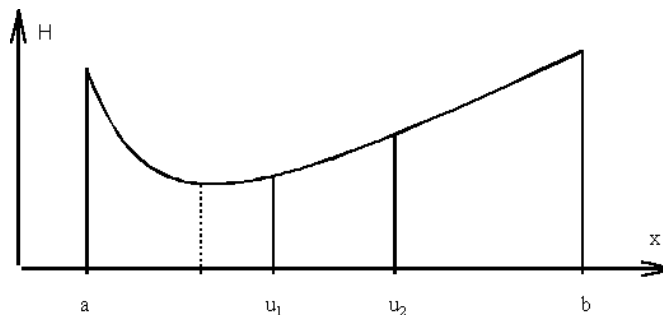
1. В средней точке этого отрезка вычисляется значение  $H[\frac{1}{2}(a+b)]$ .
2. Вычисляется значение  $H[\frac{1}{2}(a+b)+\delta]$ .
3. Выбирается та из половин отрезка, в сторону которой  $H$  уменьшается, что можно определить по внутренним точкам:



4. Для выбранной половины отрезка повторяются процедуры 1 – 3.

Метод золотого сечения  
( $a \leq x \leq b$ , на котором  $H$  унимодальна)

1. Производится **золотое сечение** отрезка  $[a, b]$  точками:  $u_1, u_2$ .
2. Вычисляются значения  $H(u_1)$  и  $H(u_2)$ .
3. Выбирается одна из бóльших частей отрезка: если  $H(u_1) \leq H(u_2)$ , то – левая:  $[a, u_2]$ , если  $H(u_1) > H(u_2)$ , то – правая:  $[u_1, b]$ .



4. Для выбранной части отрезка повторяются процедуры 1 – 3.

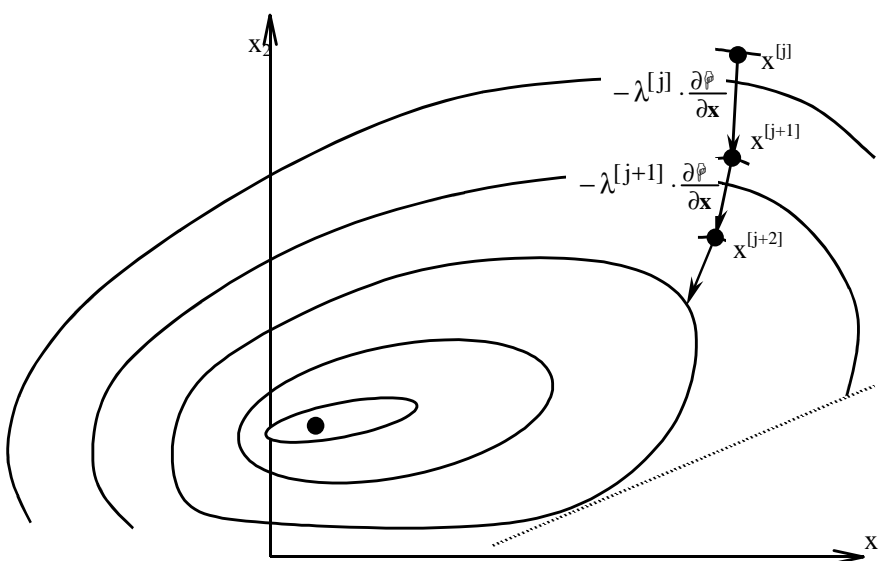
3) Общий случай вида  $N$  требует применения градиентных методов.

Суть всех градиентных методов состоит в построении *метода последовательных приближений* по формуле:

$$\mathbf{x}^{[j+1]} = \mathbf{x}^{[j]} - \lambda^{[j]} \cdot \frac{\partial N}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{по } i\text{-ой координате: } x_i^{[j+1]} = x_i^{[j]} - \lambda^{[j]} \cdot \frac{\partial N}{\partial x_i}),$$

где  $\mathbf{x}^{[j]}$  – точка в допустимой области, а  $\lambda^{[j]}$  каждого  $j$ -ого шага подбирается из соображений, свойственных конкретному методу, но так, чтобы  $\mathbf{x}^{[j+1]}$  тоже была бы допустимой точкой.

Градиентные методы имеют геометрический смысл пошагового спуска по направлению антиградиента  $-\frac{\partial N}{\partial \mathbf{x}}$ .



Условия выбора длины каждого шага:

– нельзя "заступать" за границы допустимой области изменения параметров ( $\Rightarrow$  метод штрафных функций);

– не следует "перешагивать" через область минимума и попадать на противоположный склон ( $\Rightarrow$  учет предыстории, что еще и экономит время расчетов).



В) *Задача вариационного исчисления*: нахождение функции  $x(t)$  (траектории), реализующей оптимум  $H$ :  $f$  – не зависит явно от управлений, и содержит производные от фазовых координат:  $f(x, \dot{x}, a, t) = 0$ ; **ограничения** области допустимых управлений отсутствуют, но зато есть **граничные условия** вида:

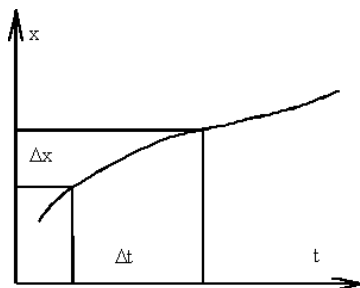
$$\mathbb{G}[x(t_0), x(t_1), a, t_0, t_1] + \int_{t_0}^{t_1} \mathbb{F}[x(t), \dot{x}(t), a, t] dt = 0,$$

где  $\mathbb{G}$  и  $\mathbb{F}$  – векторные функции; критерий оптимальности  $H$  имеет вид **функционала, независящего явно от управлений**:

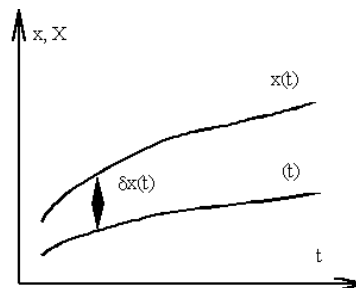
$$H = \Phi[x(t_0), x(t_1), a, t_0, t_1] + \int_{t_0}^{t_1} F[x(t), \dot{x}(t), a, t] dt \Rightarrow \min.$$

В этой задаче могут вообще отсутствовать управления  $u(t)$  в явном виде.

Математический анализ:  
приращения значений функций  
 $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$



Вариационное исчисление:  
вариации функций  
 $\delta x(t) = X(t) - x(t)$



Функционал  $H$  определяется не отдельными значениями аргумента, а **поведением** функции, и связан с отысканием **целой функции – экстремали**, минимизирующей  $H$ .

1) *Непрямые* методы основаны на решении дифференциальных уравнений необходимых условий экстремальности Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} = 0,$$

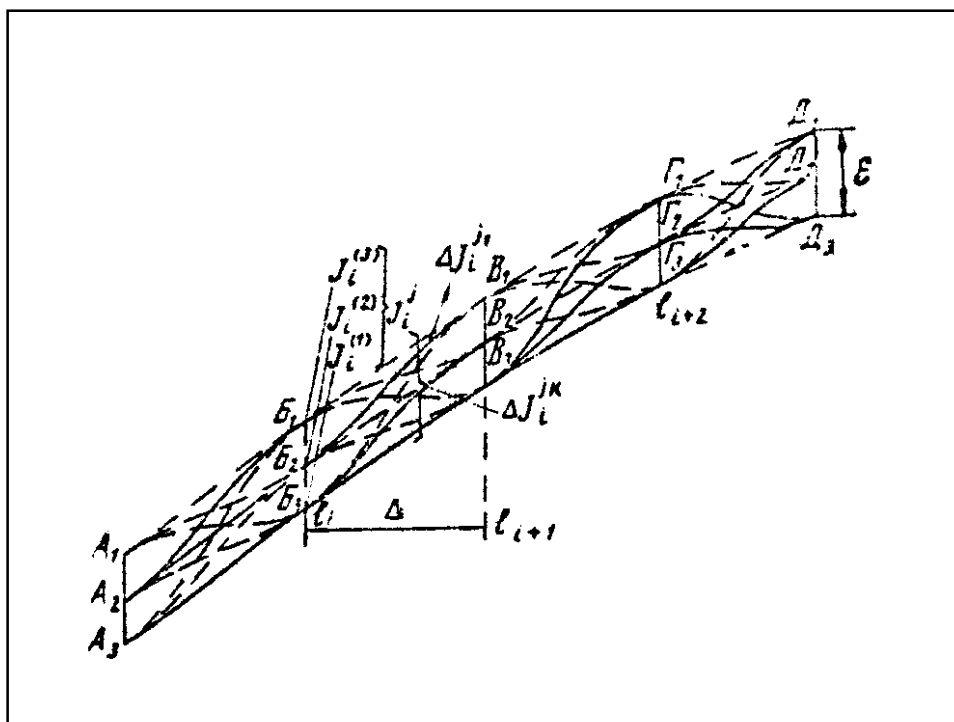
(где  $\mathcal{F}$  – определенная линейная комбинация из функций  $f$ ,  $\mathbb{F}$  и  $F$ ) – аналога условия экстремумов.

Это – **необходимые**, но не достаточные условия экстремальности. Поэтому требуется проверять еще и дополнительные условия второго порядка – условия Лежандра – аналог равенства нулю вторых производных в математическом анализе.

Если в задаче вариационного исчисления не фиксированы граничные условия (*задача со свободными концами*), то приходится использовать дополнительные условия *транскверсальности* – дифференциальные соотношения на границах.

2) *Прямые* методы решения вариационных задач – подбор последовательными приближениями *аппроксимирующей* сеточной функции оптимальной траектории, удовлетворяющей уравнениям связей.

Это очень громоздкая задача, требующая больших объемов памяти ЭВМ. Кроме того, нельзя математически строго **обосновать**, что найденное таким способом решение действительно является оптимальным – оптимальность необходимо проверить какими-либо дополнительными приемами и методами.



Г) Задача оптимального управления:  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  – функции, **зависящие явно от управлений  $\mathbf{u}(t)$** , уравнения связей **разрешены** относительно производной:  $\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{f}}$ ; критерий оптимальности  $H$  – **функционал** вида:

$$H = \Phi[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1), \mathbf{a}, t_0, t_1] + \int_{t_0}^{t_1} F[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{a}, t] dt \Rightarrow \min,$$

тоже в общем случае **явно зависящий от управлений  $\mathbf{u}(t)$** .

Задачи оптимального управления решаются с помощью *принципа максимума* или *методом динамического программирования*.

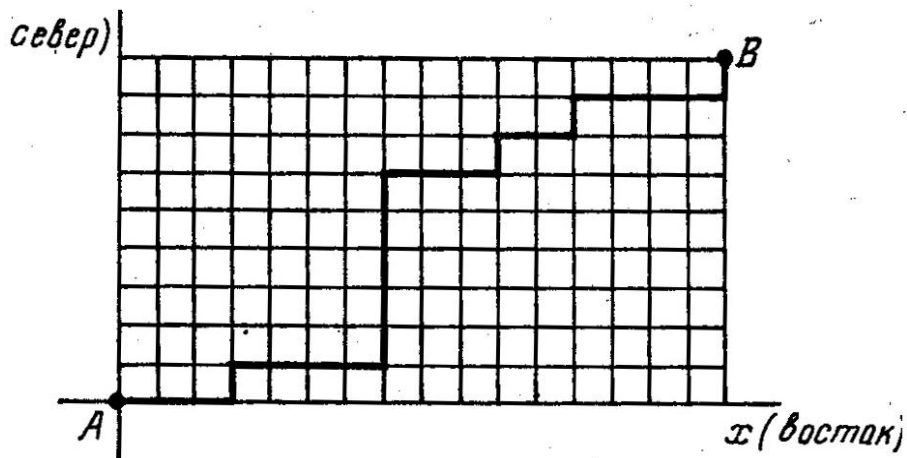
1) Принцип максимума Льва Семеновича Понтрягина – обобщение уравнений необходимых условий экстремальности Эйлера-Лагранжа и условий трансверсальности вариационных задач с помощью особой функции Гамильтона, построенной из исходных уравнений связей.

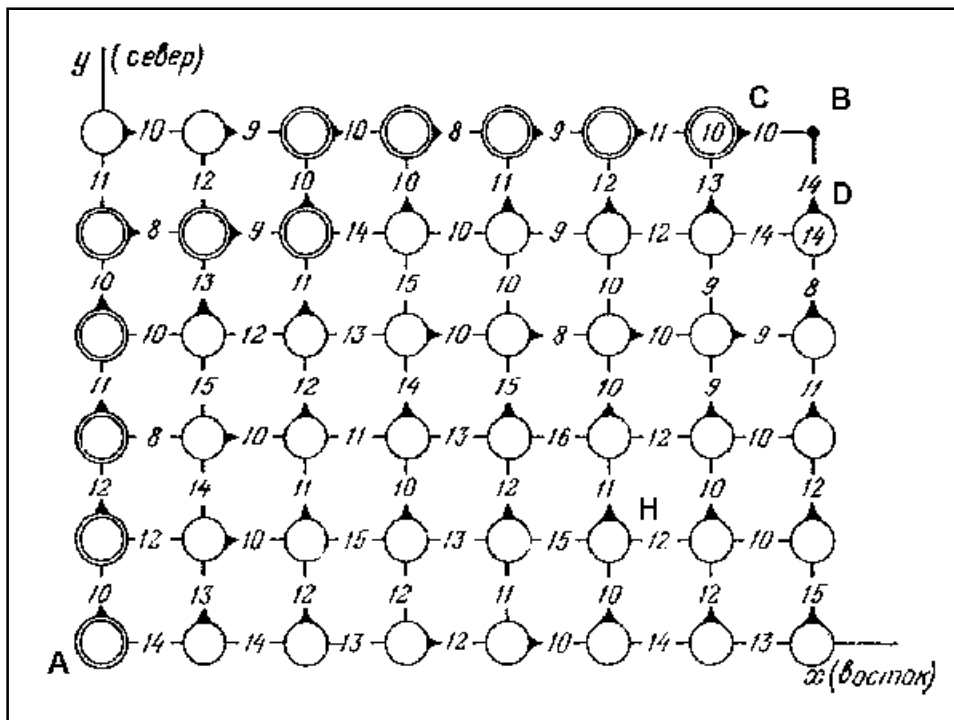
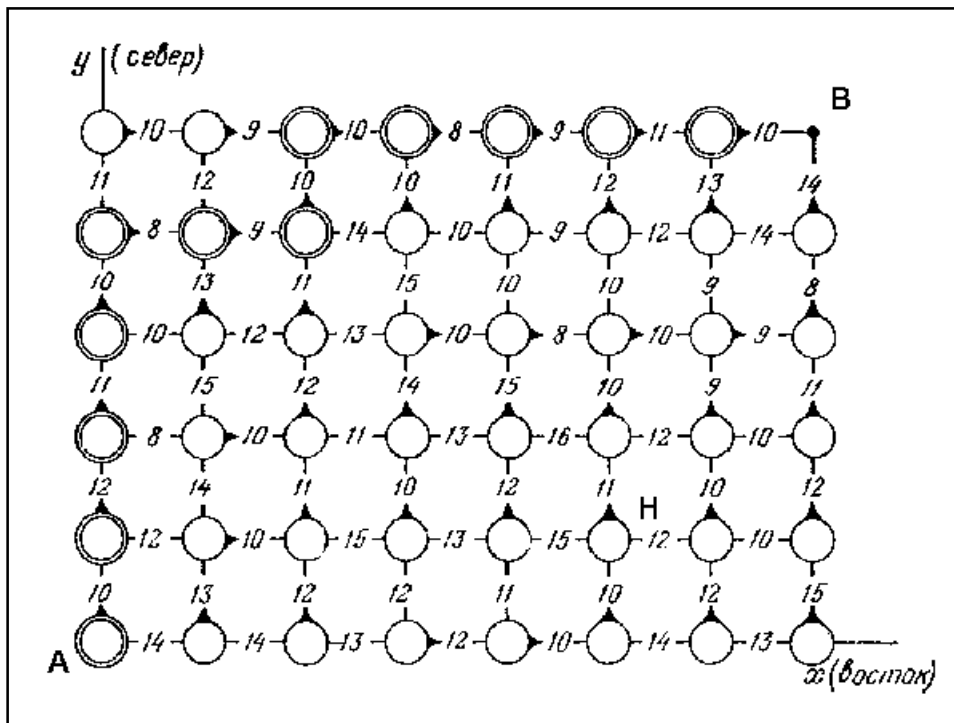
Позволяет прямым образом учитывать **ограничения** на фазовые координаты и управления.

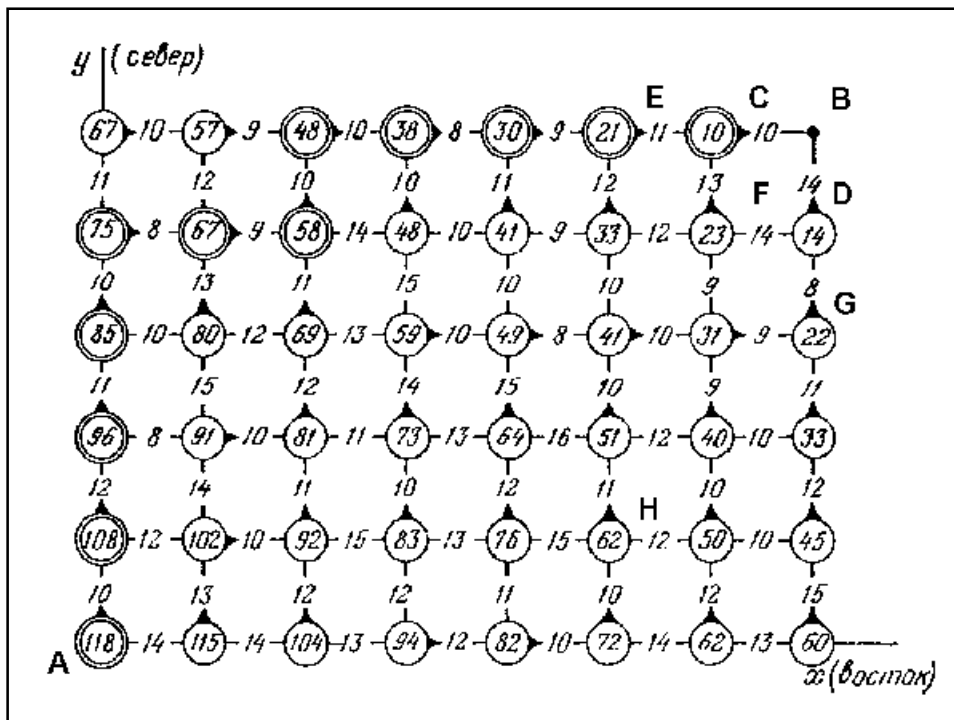
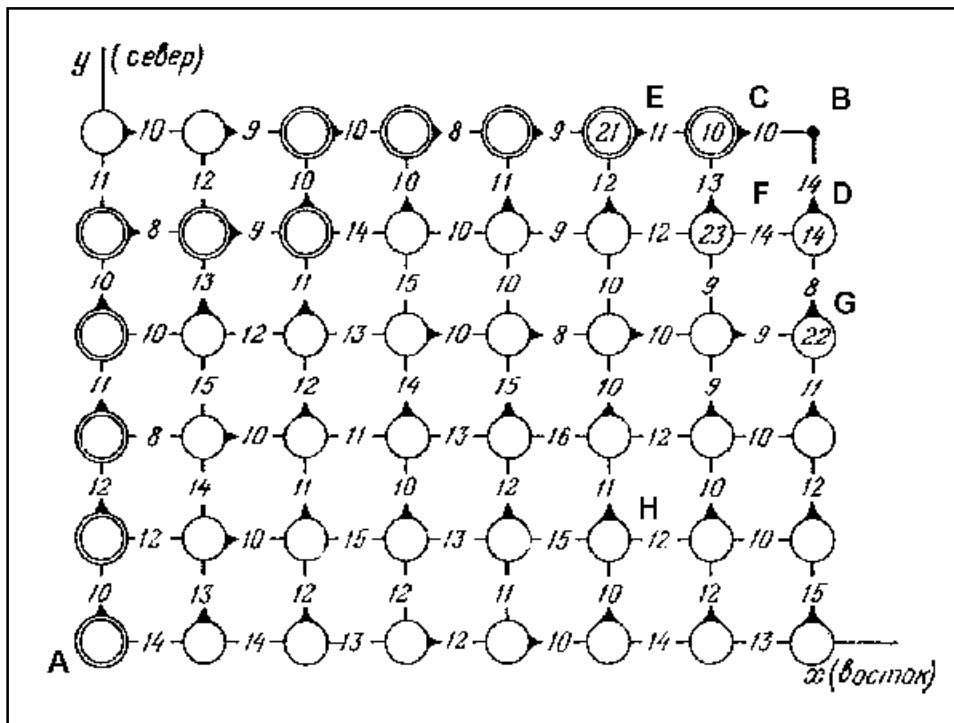
2) Метод динамического программирования  
Р. Беллмана для решения так называемых  
"многоступенчатых" задач оптимального управления.

Принцип динамического программирования:  
планируя многоступенчатую операцию, надо выбирать  
управление на каждом шаге с **учетом всех его**  
**будущих** последствий на еще предстоящих шагах.

**ПРИМЕР 1.** Прокладка наивыгоднейшего (по минимуму затрат) пути из пункта А в пункт В. (Задача о кратчайшем пути из теории графов.)







**ПРИМЕР 2.** Распределение парка воздушных судов по авиалиниям наивыгоднейшим (по максимуму доходов) способом. (Задача оптимального назначения или распределения ресурсов из теории графов.)

Доход на линиях от количества самолетов

x	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$	$\varphi_5(x)$
1	0,5	0,1	0,6	0,3	1,0
2	1,0	0,5	1,1	0,6	1,2
3	1,4	1,2	1,2	1,3	1,3
4	2,0	1,8	1,4	1,4	1,3
5	2,5	2,5	1,6	1,5	1,3
6	2,8	2,9	1,7	1,5	1,3
7	3,0	3,5	1,8	1,5	1,3
8	3,0	3,5	1,8	1,5	1,3

Порядок заполнения расчетной таблицы: по столбцам слева направо.

Условно оптимальные доходы по авиалиниям

Q	i = 5		i = 4		i = 3		i = 2		i = 1	
	$x_5(Q)$	$W_5(Q)$	$x_4(Q)$	$W_4(Q)$	$x_3(Q)$	$W_3(Q)$	$x_2(Q)$	$W_2(Q)$	$x_1(Q)$	$W_1(Q)$
1	*1	1,0	*0	1,0	0	1,0	0	1,0		
2	2	1,2	1	1,3	1	1,6	0	1,6		
3	3	1,3	2	1,6	*2	2,1	0	2,1		
4	4	1,3	3	2,3	2	2,4	0	2,4		
5	5	1,3	3	2,5	1	2,9	0	2,9		
6	6	1,3	4	2,6	2	3,4	5	3,5		
7	7	1,3	5	2,7	2	3,6	5	4,1		
8	8	1,3	5	2,8	4	3,7	*5	4,6		
9	9	1,3	6	2,8	5	3,9	7	5,1		
10	10	1,3	7	2,8	5	4,1	7	5,6	*2	*5,6

Q – располагаемый остаток самолетов для распределения на шаге,

$x_i(Q)$  – условно оптимальное управление (распределение части остатка самолетов на данную авиалинию),

$W_i(Q)$  – условно оптимальный доход (от распределения самолетов на всех авиалиниях от i-й до пятой).



**Вспомогательная таблица всевозможных вариантов**  
 распределения остатка самолетов  $Q = 7$  на 3-ей авиалинии  $i = 3$

$x$	$7 - x$	$\varphi_3(x)$	$W_4(7 - x)$	$\varphi_3(x) + W_4(7 - x)$
7	0	1,8	0	1,8
6	1	1,7	1,0	2,7
5	2	1,6	1,3	2,9
4	3	1,4	1,6	3,0
3	4	1,2	2,3	3,5
<b>*2</b>	5	1,1	2,5	<b>*3,6</b>
1	6	0,6	2,6	3,2
0	7	0	2,7	2,7

$x$  – для распределения на 3-ю линию,

$7 - x$  – для распределения на 4-ю и 5-ю линии,

$W_4(7 - x)$  – оптимальный доход от 4-й и 5-й авиалиний (из 5-го столбца  $i = 4$  посчитанной части предыдущей таблицы),

$\varphi_3(x) + W_4(7 - x)$  – суммарный доход от 3-й, 4-й и 5-й авиалиний.

# Модели механики

## Структура механики

### МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

#### Гидромеханика

Теория жидкости  
(в основном  
несжимаемой,  
тяжелой):

- гидродинамика,
- гидростатика

#### Аэромеханика

Теория газа  
(в основном  
сжимаемого,  
невесомого):

- аэродинамика,
- аэростатика,
- газодинамика  
(течение газа,  
сверхзвук, много-  
фазные среды,  
горение)

#### Теория упругости и пластичности

Теория  
напряженно-  
деформированного  
состояния  
твердого тела

## **В МГТУ ГА**

**Гидравлика + гидropневмосистемы** (расчет по интегралу Бернулли с эмпирическими поправками)

**Аэромеханика** (расчет коэффициентов аэродинамических сил по эмпирическим методикам)

**Сопротивление материалов** (расчет пределов упругости, пластичного и текучего состояний)

**Конструкция и прочность** (строительная механика для конструкций, расчет на прочность)

## **Кинематика сплошной среды**

[Аэродинамика и динамика полета, стр. 6 - 13]

**Механика сплошной среды** –

согласованная система непротиворечивых моделей движения газообразных, жидких и твердых деформируемых тел, основанных на методах теоретической механики и некоторых дополнительных гипотезах.

Механика сплошной среды использует *феноменологический* подход, основанный на эмпирических **гипотезах**, подтвержденных человеческим опытом.

1) Гипотеза сплошности, предложенная Бернулли, постулирует тело или среду как **непрерывную** среду, заполняющую некоторый объем, и необходима для применения математического аппарата дифференциального и интегрального исчисления.

2) Гипотезу непрерывности метрического пространства, тесно связанную с предыдущей, вводят для определения координат и расстояний.

3) Гипотеза возможности введения единой  
для всех точек пространства декартовой  
системы координат.

В декартовой системе координат каждая точка пространства имеет свои действительные координаты. Эта гипотеза позволяет применять аппарат аналитической геометрии.

4) Гипотеза абсолютности времени для  
всех систем отсчета.

Не учитываются эффекты теории  
относительности.

**Скорость** – поле вектора в каждой точке пространства, задаваемой радиус-вектором  $\vec{r}$  этой точки с координатами  $x, y, z$ , в каждый момент времени  $t$ :

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$V_x(\vec{r}, t) = \frac{dx}{dt}; \quad V_y(\vec{r}, t) = \frac{dy}{dt}; \quad V_z(\vec{r}, t) = \frac{dz}{dt}.$$

Решение:  $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z, t)$  – траектория движения частицы среды.

непрерывность метрического пространства
-----------------------------------------

сплошность среды
------------------

единая декартова система координат
------------------------------------

абсолютность времени

Если поле вектора скорости сплошной среды  $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r})$  не зависит от времени в каждой точке пространства, то движение называется стационарным или установившимся.

В общем случае поле вектора скорости сплошной среды  $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$  зависит от времени и движение называется нестационарным или неустановившимся.

Линии тока в каждый фиксированный момент времени имеют в каждой своей точке касательные, совпадающие с направлением вектора скорости.

$$\frac{dx}{V_x(\bar{\mathbf{r}}, t)} = \frac{dy}{V_y(\bar{\mathbf{r}}, t)} = \frac{dz}{V_z(\bar{\mathbf{r}}, t)}.$$

Частицы среды, попавшие на линию тока, не имеют составляющей скорости поперек нее и не могут ее пересечь.

Трубчатая поверхность, образованная линиями тока, проходящими через некоторую замкнутую кривую, называется трубкой тока.

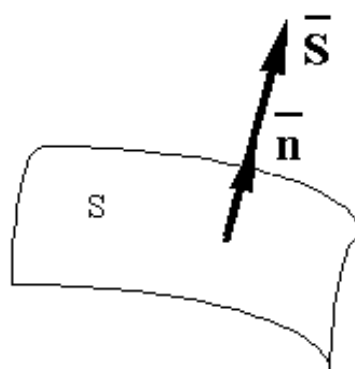
Частицы сплошной среды не пересекают стенок трубки тока, не имея нормальных к ним составляющих скорости.



Если  $V_x(\mathbf{r},t) \neq 0$ ,  $V_y(\mathbf{r},t) \neq 0$ ,  $V_z(\mathbf{r},t) \neq 0$  и вместе со своими первыми производными однозначны и не имеют разрывов, то решение уравнения линии тока существует и единственно.

В противоположном случае существование или единственность может нарушаться, т.е. в некоторых точках пространства линии тока могут ветвиться или вырождаться в точку. Такие точки называются особыми или критическими.

Вектором  $\vec{S}$  будем обозначать поверхность с указанным направлением нормали  $\vec{n}$ , выражающимся через единичные векторы осей координат:  
 $\vec{n} = \cos(\vec{n},x)\vec{i} + \cos(\vec{n},y)\vec{j} + \cos(\vec{n},z)\vec{k}$ ,  
 а скаляром  $S$  – только площадь этой поверхности.



**Поток скорости** через поверхность  $\bar{S}$ :

$$\begin{aligned} \int_S \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} &= \int_S \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{n}} dS = \int V_n dS = \\ &= \int_S [V_x \cos(\bar{\mathbf{n}}, x) + V_y \cos(\bar{\mathbf{n}}, y) + V_z \cos(\bar{\mathbf{n}}, z)] dS, \end{aligned}$$

где  $V_n$  проекция скорости на вектор нормали  $\bar{\mathbf{n}}$  к поверхности  $\bar{S}$ .

**Градиент**:  $\overline{\text{grad}A} = \frac{\partial A}{\partial x} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial A}{\partial y} \bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial A}{\partial z} \bar{\mathbf{k}}$ .

**Дивергенция скорости**:  $\text{div} \bar{\mathbf{V}} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$ .

**Ротор скорости (вихрь):**

$$\overline{\text{rot}}\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \bar{\mathbf{i}} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \bar{\mathbf{j}} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \bar{\mathbf{k}} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right).$$

**Циркуляция скорости** по замкнутому контуру

L с определенным направлением обхода:

$$\oint_L \overline{\mathbf{V}} \cdot d\overline{\mathbf{r}} = \oint_L V_x dx + V_y dy + V_z dz .$$

**Теорема Стокса:**

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{V} \cdot d\vec{r} &= \oint_L V_x dx + V_y dy + V_z dz = \\ &= \int_S \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_S \text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_S (\text{rot } \vec{V})_n dS,\end{aligned}$$

справедлива при ориентации обхода контура  $L$  и нормали к натянутой на него поверхности  $\vec{S}$  по правилу правого винта.

**Теорема Остроградского-Гаусса:**

$$\begin{aligned}\int_S \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \int_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_S V_n dS = \\ &= \int_S [V_x \cos(\vec{n}, x) + V_y \cos(\vec{n}, y) + V_z \cos(\vec{n}, z)] dS = \\ &= \int_W \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dW = \int_W \text{div } \vec{V} dW\end{aligned}$$

при условии, что замкнутая поверхность  $\vec{S}$  ограничивает объем  $W$ .

Полная производная по времени от скаляра  $A(\vec{r}, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} V_x + \frac{\partial A}{\partial y} V_y + \frac{\partial A}{\partial z} V_z = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} A. \end{aligned}$$

Производная  $\frac{d}{dt} \int_W f(\vec{r}, t) dW$  от интеграла по произвольному подвижному объему  $W$ , где от  $t$  зависит не только подынтегральная функция, но и объем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_W f(\vec{r}, t) dW &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{W'} f(\vec{r}, t + \Delta t) dW - \int_W f(\vec{r}, t) dW}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_W [f(\vec{r}, t + \Delta t) - f(\vec{r}, t)] dW + \int_{W' - W} f(\vec{r}, t + \Delta t) dW}{\Delta t} = \\ &= \int_W \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} dW + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{W' - W} f(\vec{r}, t + \Delta t) dW}{\Delta t}. \end{aligned}$$

$W'-W$  образуется сдвигом  $dS$  на расстояние  $V_n dS$ , кроме того  $f(\bar{\mathbf{r}}, t+\Delta t) \rightarrow f(\bar{\mathbf{r}}, t)$  и  $S' \rightarrow S$ , поэтому

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{W'-W} f(\bar{\mathbf{r}}, t+\Delta t) dW}{\Delta t} = \int_S f V_n dS = \int_S f \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \int_W \operatorname{div}(f \bar{\mathbf{V}}) dW$$

где последнее равенство – по теореме Остроградского-Гаусса.

Откуда, используя выражение полной производной по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_W f(\bar{\mathbf{r}}, t) dW &= \int_W \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} f \bar{\mathbf{V}} \right] dW = \\ &= \int_W \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + f \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \overline{\operatorname{grad} f} \right] dW = \int_W \left[ \frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} \right] dW. \end{aligned}$$

Плотность вещества:  $\rho = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta W}$ .

Закон сохранения массы  $\frac{dm}{dt} = 0$  для произвольного подвижного

объема сплошной среды, для которого  $m = \int_W \rho dW$ :

$$0 = \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_W \rho dW = \int_W \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{\mathbf{V}} \right] dW = \int_W \left[ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} \right] dW,$$

или в силу произвольности объема  $W$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{\mathbf{V}} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \cdot \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = 0.$$

Это – уравнение неразрывности (непрерывности) сплошной среды.

Частный случай уравнения неразрывности для *стационарного (установившегося)* движения сплошной среды:

$$\operatorname{div} \rho \bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = 0,$$

а если, кроме того, среда несжимаемая ( $\rho(x, y, z) = \text{const}$ , в том числе и неоднородная), то:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = 0.$$

Тогда по теореме Остроградского-Гаусса

$$0 = \int_W \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} dW = \int_{S_0+S_1+s} \bar{\mathbf{V}} d\bar{\mathbf{S}},$$

где  $S_0$ ,  $S_1$  – входное и выходное поперечное сечение трубки тока,  $s$  – боковая поверхность трубки тока, через которую по определению нет потока скорости, то:

$$\int_{S_0} \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \int_{S_1} \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = Q,$$

где  $Q$  – объемный **расход** сплошной среды через трубку тока.

Вывод: при *установившемся* движении *несжимаемой* сплошной среды трубки тока (а также линии тока) не могут ни начинаться, ни заканчиваться.

Движение сплошной среды в некоторой области называется **безвихревым**, если в ней  $\overline{\operatorname{rot} \mathbf{V}} = 0$ , и **вихревым**, если  $\overline{\operatorname{rot} \mathbf{V}} \neq 0$  хотя бы в части этой области, называемой **вихрем**.



Вихревое движение характеризуется наличием **вращения** **каждой** **частицы.**

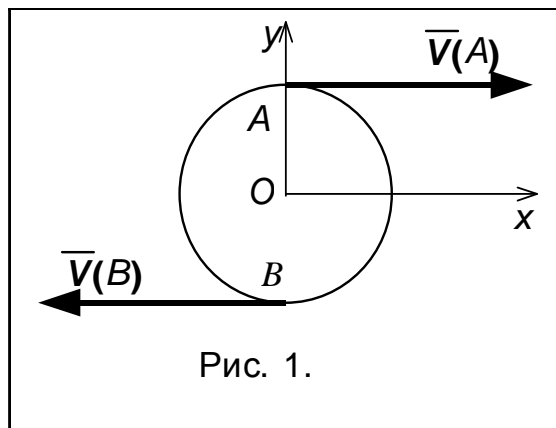
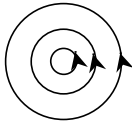


Рис. 1.

Примеры **безвихревого** движения:

состояние покоя среды	•
поступательное движение	
<i>источник</i> и <i>сток</i> (когда частицы среды выходят из точки или входят в нее строго по лучам)	
движение среды вокруг некоторого кругового цилиндра по концентрическим окружностям со скоростью, обратной пропорциональной расстоянию от оси цилиндра	 $v \sim \frac{1}{r}$

Примеры **вихревого** движения:

плоский сдвиг (когда скорость частиц вдоль некоторой плоскости пропорциональна расстоянию от этой плоскости)	
вращение среды вокруг некоторой оси, как твердого тела (в отличие от потенциального движения аналогичной геометрии в этом случае скорость с удалением от оси линейно возрастает!)	 <p data-bbox="1027 853 1102 882"><math>V \sim r</math></p>

## Динамика сплошной среды

[Аэродинамика и динамика полета, стр. 13 - 19]

Силы  $\bar{\mathbf{F}}$ , распределенные по объему  $W$ , называются объемными или массовыми.

Они относятся к элементу массы  $\Delta m = \rho \Delta W$ .

Сила, действующая на элемент массы, равна  $\bar{\mathbf{F}} \Delta m = \bar{\mathbf{F}} \rho \Delta W$ .

Размерность  $\bar{\mathbf{F}}$  совпадает с размерностью ускорения.

Примеры массовых сил: гравитационные, электромагнитные, инерционные.

Силы  $\bar{\mathbf{p}}$ , распределенные по поверхности  $S$ , называются поверхностными.

Поверхностные относятся к элементу поверхности  $\Delta S$  сплошной среды.

$\bar{\mathbf{p}}$  имеет размерность давления.

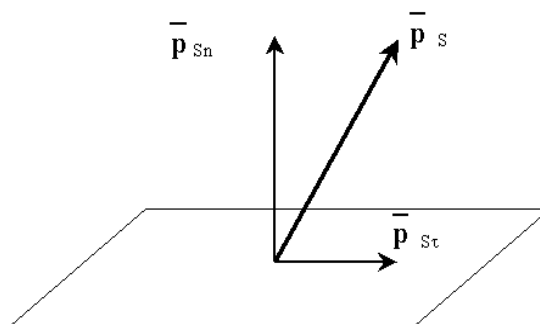
Такие силы возникают, например, на свободной поверхности среды, при взаимодействии среды с твердыми телами, а также внутри среды (внутренние поверхностные силы).

Внутренние поверхностные силы обозначают  $\bar{\mathbf{p}}_s$ , так как они зависят от ориентации нормали  $\bar{\mathbf{n}}$  выбранной площадки  $\bar{\mathbf{S}}$ .

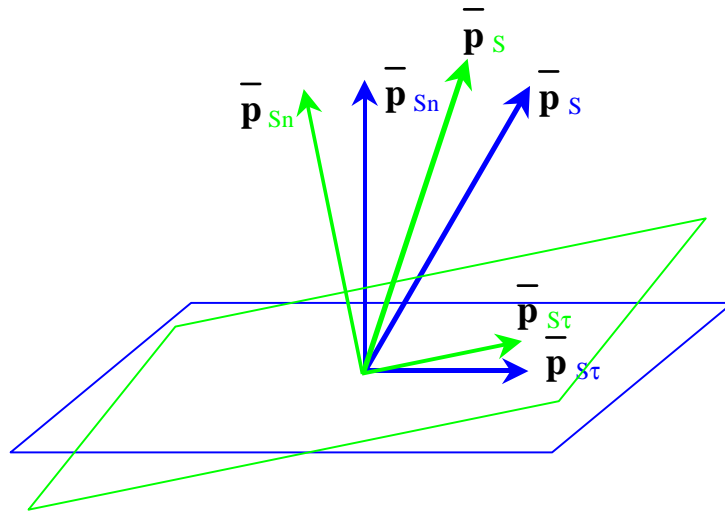
В силу третьего закона Ньютона на одну из пары соприкасающихся частиц действует сила  $\bar{\mathbf{p}}_s dS$ , на другую  $-\bar{\mathbf{p}}_s dS$ .

$$\bar{\mathbf{p}}_s dS = \bar{\mathbf{p}}_{Sn} \bar{\mathbf{n}} dS + \bar{\mathbf{p}}_{S\tau} \bar{\boldsymbol{\tau}} dS$$

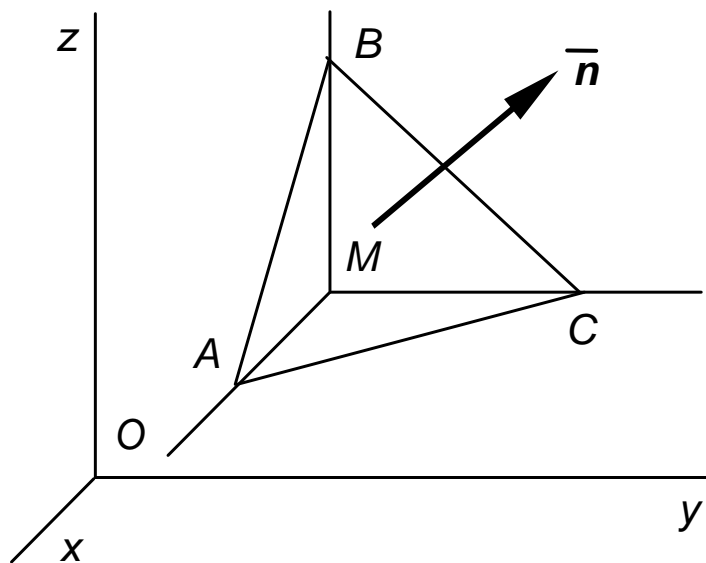
$\bar{\mathbf{p}}_{Sn}$  – нормальная составляющая, нормальное напряжение или нормальное давление,  $\bar{\mathbf{p}}_{S\tau}$  – тангенциальная составляющая, касательное напряжение или внутреннее трение.



$\bar{\mathbf{p}}_S$  не простой вектор, так как  $\bar{\mathbf{p}}_{S_n}$  и  $\bar{\mathbf{p}}_{S_\tau}$  зависят не только от  $\bar{\mathbf{n}}$  и  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ , но и от выбора  $\bar{\mathbf{S}}$ :



Бесконечно малая частица с  $\hbar \rightarrow 0$



Все нормали к граням тетраэдра направим **наружу**, тогда векторные площади граней равны:  $\bar{S}, -S \cdot \cos(\bar{\mathbf{n}}, x), -S \cdot \cos(\bar{\mathbf{n}}, y), -S \cdot \cos(\bar{\mathbf{n}}, z)$ .

Внутренние поверхностные силы (напряжения) на гранях обозначим:  $\bar{\mathbf{p}}_S, \bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_3$ .

Объем частицы:  $W = hS/3$ .

Начало Даламбера (закон Ньютона):

$$\left( \bar{\mathbf{F}} - \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} \right) \rho \frac{hS}{3} + \left[ \bar{\mathbf{p}}_S \cdot \bar{\mathbf{n}} - \bar{\mathbf{p}}_1 \cos(\bar{\mathbf{n}}, x) \cdot \bar{\mathbf{i}} - \bar{\mathbf{p}}_2 \cos(\bar{\mathbf{n}}, y) \cdot \bar{\mathbf{j}} - \bar{\mathbf{p}}_3 \cos(\bar{\mathbf{n}}, z) \cdot \bar{\mathbf{k}} \right] S = 0,$$

откуда, сократив на  $S$ , и перейдя к пределу при  $h \rightarrow 0$ , получаем **инвариантное** к выбору площадки равенство:

$$\bar{\mathbf{p}}_S \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{p}}_1 \cos(\bar{\mathbf{n}}, x) \cdot \bar{\mathbf{i}} + \bar{\mathbf{p}}_2 \cos(\bar{\mathbf{n}}, y) \cdot \bar{\mathbf{j}} + \bar{\mathbf{p}}_3 \cos(\bar{\mathbf{n}}, z) \cdot \bar{\mathbf{k}}$$

**Тензор внутренних напряжений**

$$P = (\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_3) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$$

Уравнение количества движения материальной точки:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{\mathbf{V}}) = \bar{\mathbf{F}}$$



Уравнение количества движения конечного объема  
сплошной среды

$$\frac{d}{dt} \int_W \bar{\mathbf{V}} \rho dW = \int_W \bar{\mathbf{F}} \rho dW + \int_S \bar{\mathbf{p}}_S d\bar{\mathbf{S}}.$$

Из инвариантного выражения для внутренних поверхностных сил с помощью теоремы Остроградского-Гаусса последнее слагаемое примет вид:

$$\begin{aligned} \int_S \bar{\mathbf{p}}_S d\bar{\mathbf{S}} &= \int_S [\bar{\mathbf{p}}_1 \cos(\bar{\mathbf{n}}, x) + \bar{\mathbf{p}}_2 \cos(\bar{\mathbf{n}}, y) + \bar{\mathbf{p}}_3 \cos(\bar{\mathbf{n}}, z)] dS = \\ &= \int_W \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_3}{\partial z} \right) dW. \end{aligned}$$



Левую часть уравнения количества движения конечного объема сплошной среды вычислим, как производную от интеграла:

$$\frac{d}{dt} \int_{\bar{w}} \bar{\mathbf{V}} \rho dW = \int_{\bar{w}} \left[ \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} \rho + \bar{\mathbf{V}} \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} \right] dW,$$

тогда все члены уравнения будут выражены через интегралы по объему:

$$\int_{\bar{w}} \left[ \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} \rho + \bar{\mathbf{V}} \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} \right] dW = \int_{\bar{w}} \bar{\mathbf{F}} \rho dW + \int_{\bar{w}} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_3}{\partial z} \right) dW.$$

Левое подинтегральное выражение преобразуется с помощью уравнения неразрывности:

$$\frac{d\bar{V}\rho}{dt} + \bar{V}\rho \operatorname{div} \bar{V} = \rho \frac{d\bar{V}}{dt} + \bar{V} \frac{d\rho}{dt} + \rho \bar{V} \operatorname{div} \bar{V} = \rho \frac{d\bar{V}}{dt} + \bar{V} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{V} \right) = \rho \frac{d\bar{V}}{dt}.$$

### Основное дифференциальное уравнение

движения сплошной среды:

$$\rho \frac{d\bar{V}}{dt} = \rho \bar{F} + \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_3}{\partial z},$$

или в проекциях:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dV_x}{dt} &= \rho F_x + \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dV_y}{dt} &= \rho F_y + \frac{\partial p_{21}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{23}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dV_z}{dt} &= \rho F_z + \frac{\partial p_{31}}{\partial x} + \frac{\partial p_{32}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z}, \end{aligned} \right\}$$

где  $F_x, F_y, F_z$  – компоненты массовой силы  $\bar{F}$ .

Основное дифференциальное уравнение движения сплошной среды получено на основе всех гипотез механики сплошной среды и дополнительных предположений:

- непрерывность и дифференцируемость векторов напряжений  $\bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, \bar{\mathbf{p}}_3$ ,
- неразрывность среды,
- непрерывность характеристик движения.

Система уравнений движения сплошной среды

уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{\mathbf{V}} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = 0,$$

уравнение движения:

$$\begin{cases} \rho \frac{dV_x}{dt} = \rho F_x + \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dV_y}{dt} = \rho F_y + \frac{\partial p_{21}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{23}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dV_z}{dt} = \rho F_z + \frac{\partial p_{31}}{\partial x} + \frac{\partial p_{32}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z}. \end{cases}$$

В этой системе 4 уравнений 16 неизвестных:

$$\rho$$
$$\bar{\mathbf{F}} (F_x, F_y, F_z)$$
$$\bar{\mathbf{V}} (V_x, V_y, V_z)$$
$$\bar{\mathbf{p}}_1(p_{11}, p_{21}, p_{31}), \bar{\mathbf{p}}_2(p_{12}, p_{22}, p_{32}), \bar{\mathbf{p}}_3(p_{13}, p_{23}, p_{33})$$

## Модели сплошной среды

Если свойства среды в разных направлениях одинаковы, то она называется изотропной, в противном случае – анизотропной.

1) Компоненты тензора внутренних напряжений можно, например, рассматривать как функции от деформации частицы: в этом случае среда называется упругой.

В частном случае линейности это соотношение приобретает вид закона Гука.

Изучением таких сред занимается теория упругости.

2) Предположим:

а)  $\bar{\mathbf{p}}_{S\tau} = 0$  – невязкая среда;

б)  $|\bar{\mathbf{p}}_1| = |\bar{\mathbf{p}}_2| = |\bar{\mathbf{p}}_3|$  – изотропная среда.

Изотропная невязкая среда называется идеальной жидкостью или идеальным газом.

а)  $\Rightarrow \bar{\mathbf{p}}_S = \bar{\mathbf{p}}_{Sn} \perp$  любой  $dS$ , а  $\bar{\mathbf{p}}_1 \parallel \bar{\mathbf{i}}$ ;  $\bar{\mathbf{p}}_2 \parallel \bar{\mathbf{j}}$ ;  $\bar{\mathbf{p}}_3 \parallel \bar{\mathbf{k}}$ .

а) + б)  $\Rightarrow \bar{\mathbf{p}}_S \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{p}}_1 \bar{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{p}}_2 \bar{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{p}}_3 \bar{\mathbf{k}} = -p$ ,

где  $-p$  – общее значение скалярных произведений.

Величину  $p$  называют давлением.

Давление:

- не зависит от направления взаимодействия частиц;
- при  $p > 0$  среда в сжатом состоянии.

Тензор внутренних напряжений в *идеальной жидкости (газе)*:

$$P = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Для замыкания системы уравнений остается необходимым еще одно уравнение для  $p$ .

3) **Вязкая жидкость** предполагает связь тензора внутренних напряжений с частными производными скорости по координатам. В частном случае линейности связь представляется в виде закона Навье-Стокса (или обобщенного закона вязкости Ньютона):

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\sum_{\mu} \sum_{\nu} B_{ij\mu\nu} e_{\mu\nu} =$$

$$= -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\sum_{\mu} \sum_{\nu} B_{ij\mu\nu} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Матрица размерности  $3 \times 3$ , обозначенная  $e_{\mu\nu}$ , называется **тензором скоростей деформации**.

В изотропной среде  $V_{ij\mu\nu}$  – симметричная матрица, все компоненты которой выражаются через два независимых параметра  $\lambda$  и  $\mu$ , называемых **коэффициентами Ламе**, поэтому закон Навье-Стокса для вязкой *изотропной* жидкости имеет вид:

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\operatorname{div}\bar{\mathbf{V}} + 2\mu\sum_{\mu}\sum_{\nu}\delta_{\mu\nu}\delta_{j\nu}e_{\mu\nu}.$$

$\mu$  – коэффициент внутреннего трения или динамический коэффициент вязкости,

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ – кинематический коэффициент вязкости}$$

(коэффициент линейной вязкости),

$$\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu \text{ – второй коэффициент вязкости}$$

(коэффициент объемной вязкости).

Размерность  $\mu$ ,  $\lambda$  и  $\zeta$  в СИ:  $\left[ \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \right]$ , а  $\nu$ :  $\left[ \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right]$ .

4) **Баротропная** среда имеет связь:  $\rho = \Phi(p)$ .

1.  $\Phi(p) = \text{const}$  – **несжимаемая жидкость**, или  $\frac{dp}{dt} = 0$ .

2.  $\Phi(p) = Cp$ , где  $C$  – постоянная – **изотермический процесс**.

3.  $\Phi(p) = Cp^{1/n}$ , где  $C$  и  $n$  – постоянные – **политропический процесс**;  
 $n$  называется **показателем политропы**.

4.  $\Phi(p) = \frac{p\mu}{RT}$  – уравнение Клапейрона-Менделеева для **совершенного газа**, где  $R = 8314,32 \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль} \cdot \text{град}}$  – **универсальная газовая постоянная**,  $\mu \left[ \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}} \right]$  – масса вещества в кг, численно равная молекулярному весу,  $T$  – абсолютная температура, которую необходимо задавать еще одним дополнительным соотношением.

## Задачи механики сплошной среды

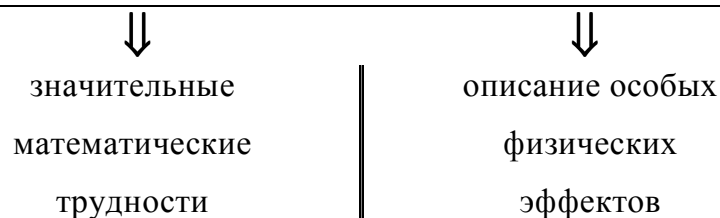
[Аэродинамика и динамика полета, стр. 30 - 34]



### Задачи механики сплошной среды

Теория упругости и пластичности	расчет конструкций (грунтов, мостов, строений, машин и механизмов → в авиации: лонжеронов, стрингеров, обшивки, рулевых приводов...)
Гидромеханика	расчет волнения, пирсов, дна водоемов, водных транспортных средств, гидравлических механизмов
Аэромеханика	расчет движения газов и тел в газах (движение летательных аппаратов в воздухе, распространение звука и ударных волн, процессы горения газов и борьбы с ними...)

### Нелинейность дифференциальных уравнений механики сплошной среды



Основная задача аэродинамики –

определение механического

взаимодействия газа и тела,

находящегося в нем:

$$\bar{\mathbf{R}} = - \int_S \bar{\mathbf{p}}_s d\bar{\mathbf{S}}, \quad \bar{\mathbf{M}} = - \int_S [\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{p}}_s] d\bar{\mathbf{S}}$$

Начальные условия: значения всех параметров среды и тела в начальный момент  $t_0$ , от которого можно производить отсчет времени.

Начальные условия имеют вид функций, заданных во всех точках описываемой области, например,  $V_x = f(x, y, z, t_0)$ ,  $(x, y, z) \in R$ .

**Граничные условия:** значения всех параметров среды на ее границе (на стенках сосуда, на свободной поверхности, на поверхности обтекаемых тел).

Граничные условия имеют вид функций от координат граничных точек и всего рассматриваемого времени, например,  $V_x = f(x,y,z,t)$ ,  $(x,y,z) \in \Gamma$ .

Виды граничных условий:

– условия прилипания (для неидеальных сред):

$$\bar{\mathbf{V}}_{\text{среды}} = \bar{\mathbf{V}}_{\text{границы}};$$

– условия непроникания:

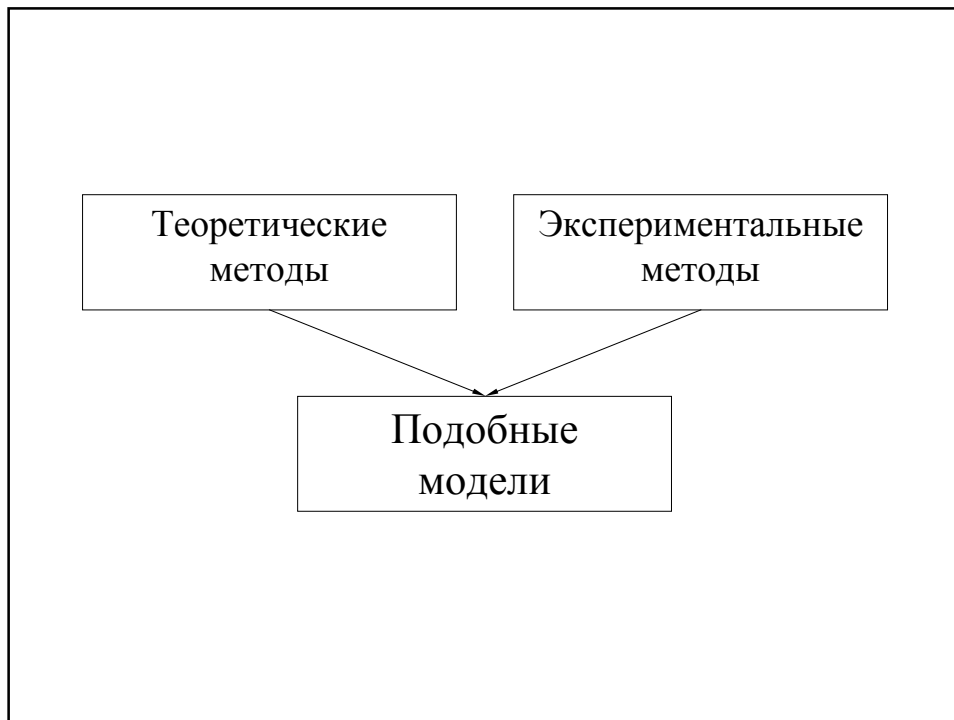
$$V_n \text{ среды} = V_n \text{ границы};$$

– условия на свободной поверхности:

$$\bar{\mathbf{p}}_S = \bar{\mathbf{f}}(x,y,z,t)|_{\text{границы}},$$

(для идеальных жидкостей:  $p = p_{\text{границы}}$ );

– условия в бесконечности (например:  $V_{x\infty} = 0$ ).



### Теоретические методы

- частные решения уравнений МСС (теорема Н.Е. Жуковского, интеграл Д. Бернулли),
- пограничный слой,
- ударная волна,
- идеальная среда,
- модель  $c_{ха} = c_{х0} + \frac{c_{ya}^2}{\pi\lambda} \dots$

## Экспериментальные методы

- летные испытания,
- аэродинамические трубы,
- катапульты,
- гидроканалы и трубы,
- испытательные стенды...

## Критерии подобия в МСС

<u>Число Маха</u>	$M = \frac{V}{a}$
<u>Число Рейнольдса</u>	$Re = \frac{\rho V l}{\mu} = \frac{V l}{\nu}$
<u>Число Струхала</u>	$Sh = \frac{V t}{l}$
<u>Число Фруда</u>	$Fr = \frac{V^2}{lg}$
<u>Число Эйлера</u>	$Eu = \frac{p}{\rho V^2}$
<u>Число Ньютона</u>	$Ne = \frac{F}{\rho V^2 l^2}$
...	

### Численные методы решения уравнений МСС

- метод характеристик (С.А. Христианович),
- метод конечных разностей (разностные схемы),
- метод конечных элементов,
- панельный метод,
- метод дискретных вихрей (С.М. Белоцерковский),
- метод дискретных особенностей...

### Упрощение уравнений МСС

(уменьшение размерности задачи)

установившееся движение	$t, t_0$
плоскопараллельное движение	$z$
осесимметричное движение	$\varphi$
одномерное движение	$y, z$
одномерное установившееся движение	$y, z, \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dx}$
автомодельное движение	$\frac{x}{t^\alpha}, \frac{y}{t^\alpha}, \frac{z}{t^\alpha}$

# Фундаментальные основы аэродинамики

[Аэродинамика и динамика полета, стр. 20 - 24, 35 - 37]

Система уравнений движения сплошной среды

уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{\mathbf{V}} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = 0,$$

уравнение движения:

$$\begin{cases} \rho \frac{dV_x}{dt} = \rho F_x + \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dV_y}{dt} = \rho F_y + \frac{\partial p_{21}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{23}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dV_z}{dt} = \rho F_z + \frac{\partial p_{31}}{\partial x} + \frac{\partial p_{32}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z}. \end{cases}$$

Рассмотрим движение *изотропной вязкой сжимаемой среды* (газа), подчиняющейся закону Навье-Стокса:

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\operatorname{div}\bar{\mathbf{V}} + 2\mu\sum_{\mu}\sum_{\nu}\delta_{i\mu}\delta_{j\nu}e_{\mu\nu}.$$

Тогда последние слагаемые в уравнении движения по оси  $x$  примут вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\operatorname{div}\bar{\mathbf{V}}}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial e_{11}}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial e_{12}}{\partial y} + 2\mu\frac{\partial e_{13}}{\partial z}. \end{aligned}$$



Подставляя сюда выражения компонент тензора скоростей деформации и используя оператор Лапласа

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \overline{\operatorname{grad} \varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

получим выражение последней части уравнения движения:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}}{\partial x} + \mu \Delta V_x + \mu \frac{\partial \operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{(\lambda + \mu) \frac{\partial \operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}}{\partial x}} + \mu \Delta V_x. \end{aligned}$$

В итоге, после деления на  $\rho$  и раскрытия полной производной по времени, получаем систему дифференциальных уравнений движения изотропной вязкой сжимаемой жидкости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \operatorname{div} \bar{V}}{\partial x} + \nu \Delta V_x, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \operatorname{div} \bar{V}}{\partial y} + \nu \Delta V_y, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial \operatorname{div} \bar{V}}{\partial z} + \nu \Delta V_z, \end{aligned} \right\}$$

или в векторном виде:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{V} + \nu \Delta \bar{V},$$

называемых уравнениями Навье-Стокса.

Уравнения движения идеальной жидкости получаются из уравнений Навье-Стокса – достаточно опустить в них слагаемые с коэффициентами вязкости  $\mu$  и  $\lambda$ :

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

или в координатной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения называются уравнениями Эйлера.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в справедливости равенства:

$$\frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overline{\text{grad } \mathbf{V}^2} - \bar{\mathbf{V}} \times \overline{\text{rot } \mathbf{V}},$$

что позволяет записать уравнения Эйлера в форме Громеки-Лемба:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overline{\text{grad } \mathbf{V}^2} - \bar{\mathbf{V}} \times \overline{\text{rot } \mathbf{V}} = \bar{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho} \overline{\text{grad } p}.$$

**Ищем частное решение уравнений движения: установившееся движение идеальной жидкости в поле потенциальных внешних сил.**

Предположение 1. Движение установившееся:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} = 0.$$

Предположение 2. Внешние массовые силы допускают *потенциал*  $U$ , т.е.  $\bar{\mathbf{F}} = \overline{\text{grad } U}$ .

При этих предположениях рассмотрим проекции уравнения Эйлера в форме Громеки-Лемба произвольную линию  $L$  с текущим направлением  $l$ :

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{\overline{\mathbf{V}}^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} - \frac{\partial U}{\partial l} = (\overline{\mathbf{V}} \times \overline{\mathbf{rot} \mathbf{V}})_l.$$

**Вдоль линии  $L$  можно ввести функцию давления:**

$$P(p, L) = \int \frac{dp}{\rho(p, L)}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial P}{\partial l},$$

определенную только на данной линии, тогда предыдущее уравнение приобретает удобный для анализа вид:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[ \frac{\overline{\mathbf{V}}^2}{2} + P(p, L) - U \right] = (\overline{\mathbf{V}} \times \overline{\mathbf{rot} \mathbf{V}})_l.$$

Правая часть этого уравнения обращается в нуль, если линия  $L$  в каждой своей точке имеет направление  $l$ , **совпадающее с  $\overline{V}$  или  $\overline{\text{rot } V}$ .**

Таковыми линиями служат: в первом случае линии тока, совпадающие при установившемся движении с траекториями частиц, а во втором случае вихревые линии.

Этот факт позволяет получить первый интеграл уравнения установившегося движения идеальной жидкости в поле потенциальных внешних сил вдоль линии тока или вихревой линии:

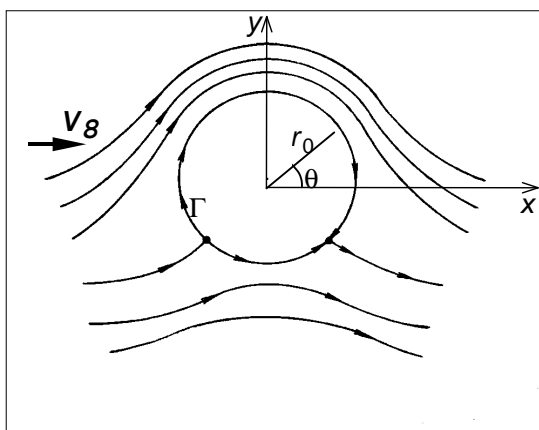
$$\frac{\overline{V}^2}{2} + P(p, L) - U = \text{const}(L),$$

называемый интегралом Бернулли.

**Ищем частное решение уравнений движения: силы взаимодействия при безвихревом обтекании кругового цилиндра равномерным потоком идеальной однородной несжимаемой жидкости (газа).**

Для вычисления сил  $\bar{\mathbf{R}} = -\int_S \bar{\mathbf{p}}_s d\bar{\mathbf{S}}$  необходимо знать распределение поверхностных сил (в данном частном случае – давления) на поверхности обтекаемого тела.

Такая постановка задачи – плоскостная. Будем также предполагать, что обтекание происходит с циркуляцией скорости  $\Gamma < 0$ , т.е. по окружности круга течение в основном организовано по часовой стрелке – в противоположную сторону от положительного направления отсчета циркуляции.



Для цилиндра общую силу можно представить в поординатной форме и использовать *интеграл Бернулли*:

$$R_x = - \int_0^{2\pi} p r_0 \cos \theta d\theta = -r_0 \int_0^{2\pi} \left( p_0 - \frac{\rho V^2}{2} \right) \cos \theta d\theta,$$

$$R_y = - \int_0^{2\pi} p r_0 \sin \theta d\theta = -r_0 \int_0^{2\pi} \left( p_0 - \frac{\rho V^2}{2} \right) \sin \theta d\theta,$$

Можно показать, что рассматриваемое течение описывается следующим распределением цилиндрических координат скоростей:

$$V_r = V_\infty \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta,$$

$$V_\theta = -V_\infty \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что такое распределение скоростей обеспечивает выполнение основных требований задачи: при  $r = \infty$ :  $V = V_\infty$ , при  $r = r_0$ :  $V_r = 0$ ,

а циркуляция

$$\oint_L \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} = \int_0^{2\pi} V_\theta r d\theta = - \int_0^{2\pi} \left[ V_\infty \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \right] r d\theta = \Gamma;$$

а также удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = \\ &= \frac{1}{r} \left[ V_\infty \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos\theta + rV_\infty 2 \frac{r_0^2}{r^3} \cos\theta - V_\infty \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos\theta \right] = 0 \end{aligned}$$

и требованию безвихревого течения:

$$\begin{aligned} (\overline{\operatorname{rot} \mathbf{V}})_z &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] = \\ &= -V_\infty \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} + rV_\infty 2 \frac{r_0^2}{r^3} \sin\theta - r \frac{\Gamma}{2\pi r^2} + V_\infty \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin\theta = 0. \end{aligned}$$



В этом случае на поверхности цилиндра:

$$V_{\theta} = -2V_{\infty}\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0},$$

и можно вычислить составляющие главного вектора сил воздействия жидкости на тело:

$$R_x = -\int_0^{2\pi} \left[ \rho_0 - \frac{\rho}{2} \left( 4V_{\infty}^2 \sin^2\theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} - 2\frac{V_{\infty}}{\pi r_0} \Gamma \sin\theta \right) \right] r_0 \cos\theta d\theta,$$

$$R_y = -\int_0^{2\pi} \left[ \rho_0 - \frac{\rho}{2} \left( 4V_{\infty}^2 \sin^2\theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} - 2\frac{V_{\infty}}{\pi r_0} \Gamma \sin\theta \right) \right] r_0 \sin\theta d\theta.$$

После раскрытия скобок и вынесения постоянных за знак интеграла в этих выражениях останутся нулевые интегралы от нечетных степеней тригонометрических функций, и только интеграл от  $\sin^2\theta$  ненулевой и равен  $\pi$ . В итоге получим:

$$R_x = 0; \quad R_y = -\rho V_\infty \Gamma.$$

Эта основная формула в аэродинамике носит название *формулы Н.Е. Жуковского*.

*Теорема Жуковского:*

**если круговой цилиндр обтекается под прямым углом к его оси  
установившимся,  
безвихревым,  
циркуляционным  
поток  
идеального,  
баротропного  
газа,  
то на цилиндр действует сила, равная произведению  
плотности газа, скорости набегающего потока и  
циркуляции скорости. Направление этой силы определяется поворотом вектора скорости набегающего потока на прямой угол против направления циркуляции.**

**Приемы упрощения и контроля  
математических моделей**  
Приемы упрощения математических  
моделей

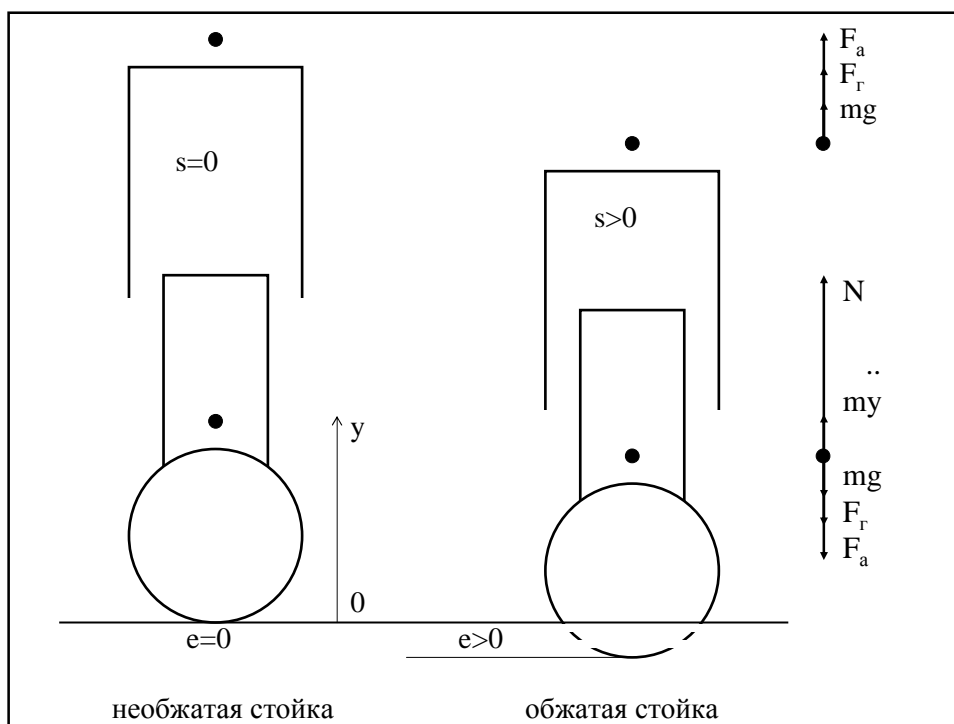
[Часть I, стр. 72 - 76]

**А) Упрощение моделей**

На этапе *феноменологического описания* –  
уменьшение количества переменных.

## Б) Упрощение уравнений

- переход к *безразмерным* величинам (с помощью замены  $F = f \cdot f_0$ , где  $f_0$  – характерное значение размерной величины  $F$ ,  $f$  – безразмерная переменная);
- **приближенная замена** переменных величин постоянными значениями;
- *пренебрежение малыми членами.*



Наиболее общий подход к описанию вертикального движения стойки:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = N - F_a - F_r - mg$$

допускает описание колебаний.

$N \approx F_a \gg F_r$  (на передней стойке Ил-96-300 при спокойном движении  $F_a \approx 20$  тс, а  $F_r < 0,2$  тс).

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} \ll mg, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} \ll F_r.$$

Упрощенное уравнение (без учета инерционного члена)

$$\frac{dy}{dt} = f(N - F_a - mg),$$

где  $f(\bullet)$  является функцией, обратной к  $F_r(\frac{dy}{dt})$ ,

не описывает колебания.

Пренебрегая двумя слагаемыми, можно записать:

$$N - F_a - mg = 0,$$

описывает не движение шасси, а лишь статическое положение его равновесия.

### **В) Линеаризация**

Преимущества линейных моделей:

- наиболее простые,
- методы решения хорошо разработаны,
- решения обладают свойством **суперпозиции**.

⇒ Упрощения на стадии *феноменологического описания*, которые приводят к линейным уравнениям.

⇒ **Линеаризация** модели – приближенная замена нелинейных соотношений на линейные.

**ПРИМЕР.**  $y'' + (1+y^2)\sin y' + y = 1$  имеет очевидное частное решение  $y_0(x) = 1$ .

Пусть нас интересует **близкое** к нему решение:  $y(x) = 1 + \eta(x)$ , где  $\eta(x) \ll 1$ . Подставим это выражение в исходное уравнение:

$$\eta'' + (1+1+2\eta+\eta^2)\sin\eta' + 1+\eta = 1,$$

$$\eta'' + 2\sin\eta' + \eta(2+\eta)\sin\eta' + \eta = 0.$$

$\eta(2+\eta)\sin\eta' \ll \eta, \eta', \eta''$ ;  $\sin\eta' \approx \eta'$ :

$$\eta'' + 2\eta' + \eta = 0,$$

решение которого имеет вид:  $\eta(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x}$ .

Другой пример линеаризации – метод Ньютона для численного решения нелинейного алгебраического уравнения, основанный на линейном приближении разложения функции в ряд Тейлора:  $f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ .

### Г) Метод малого параметра (метод возмущений)

(применяется при **аналитическом** виде математического описания и основывается на разложении в ряд Тейлора)

1) Анализ вида аналитической зависимости и выявление малых членов:

Пусть исходное уравнение имеет вид:  $\varphi + \psi = 0$ , где  $\varphi$  значительно меньше  $\psi$ .

2) Нахождение невозмущенного решения  $y_0$  из  $\psi = 0$ .

3) Поиск возмущенного решения  $y = y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2 + \dots$ , где  $\alpha$  – **малый** параметр в замене  $\varphi = \alpha \gamma$  или при подстановке  $\alpha \varphi$  вместо  $\varphi$ . (Невозмущенное решение соответствует  $\alpha = 0$ ).

### Получение коэффициентов $y_n$ при степенях $\alpha$

Способ I. Подстановка разложения  $y$  в исходное уравнение и группировка члены с **одинаковыми степенями  $\alpha$** .

Способ II. Для коэффициентов  $y_n$  ряда Тейлора:

$y_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$  производные  $y^{(n)}(0)$  находятся

последовательным дифференцированием исходного уравнения по  $\alpha$ .



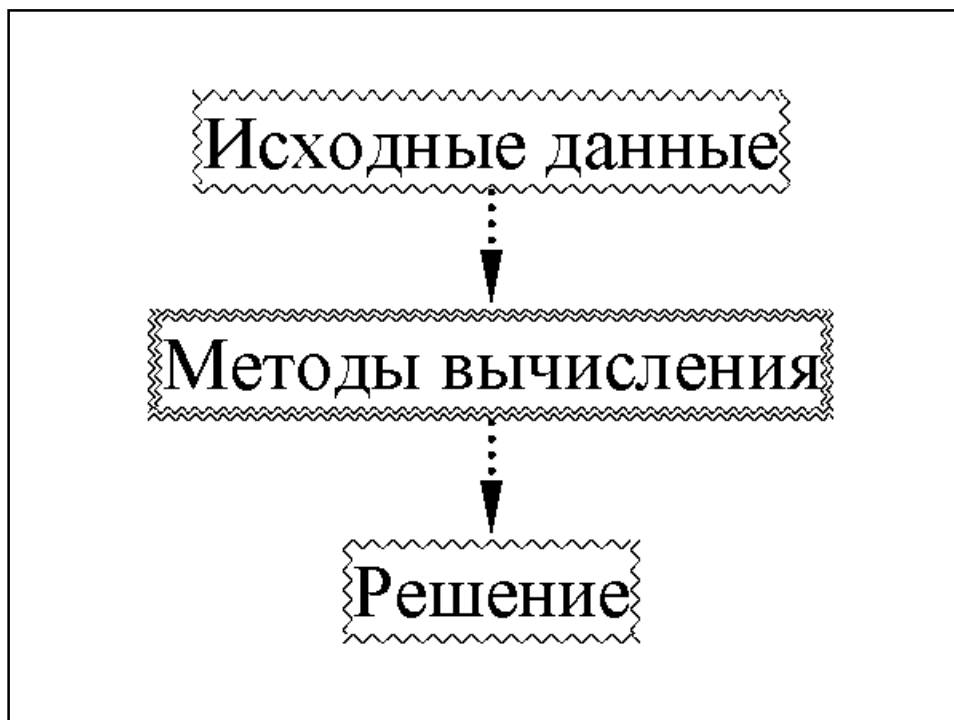
## Математические свойства методов вычислений

[Часть I, стр. 77 - 80]

Методы вычисления построены на **замене исходной задачи на упрощенную, приближенную, дискретную** расчетную схему.

Основные потребительские качества методов вычисления:

- насколько **близко** полученное решение к истине – оригиналу,
- насколько **удобно** пользоваться методом.



#### **А) Устойчивость**

Такое свойство решения, при котором **малое** изменение исходных данных не может вызвать **больших** изменений решения, называется **устойчивостью решения**.

Устойчивость рассматривают по коэффициентам, по слагаемым, по начальным и граничным условиям.

**ПРИМЕР.** Работа стойки шасси самолета на основе простейшей **линейной** модели динамики шасси:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} + by = F(t),$$

где  $m \frac{d^2 y}{dt^2}$  – инерционный член,  $-a \frac{dy}{dt}$  – сила сопротивления ( $a > 0$ ),  $-by$  – упругая восстанавливающая сила,  $F(t)$  – внешняя возмущающая сила.

Метод вычисления – аналитический.

Общее решение неоднородного уравнения = общее решение однородного уравнения + частное решение неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения записывается в виде *собственных* колебаний:

$$y(t) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, & \text{если } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ вещественные,} \\ e^{\lambda_1 t} (C_1 + C_2 t), & \text{если } \lambda_1 = \lambda_2, \\ e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t), & \text{если } \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta. \end{cases}$$

Это решение имеет замечательную "точку" покоя  $y(t) \equiv 0$ .

Возмущающая сила в виде колебаний  $F(t) = Ae^{\chi t}(\cos \omega t + \sin \omega t)$  добавляет частное решение:

$e^{\chi t}(B \cos \omega t + D \sin \omega t)$ , если  $\chi + i\omega$  – не характеристический корень,

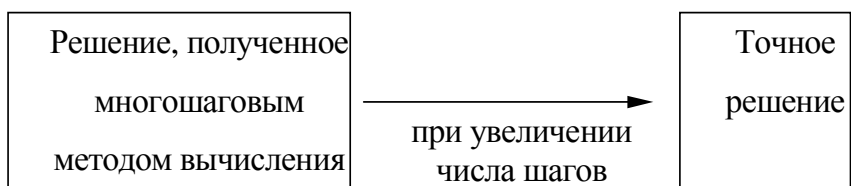
$t^r e^{\chi t}(B \cos \omega t + D \sin \omega t)$ , если  $\chi + i\omega$  – характеристический корень кратности  $r$ .

При численном решении задач на «точное» решение **накладывается** «паразитное».

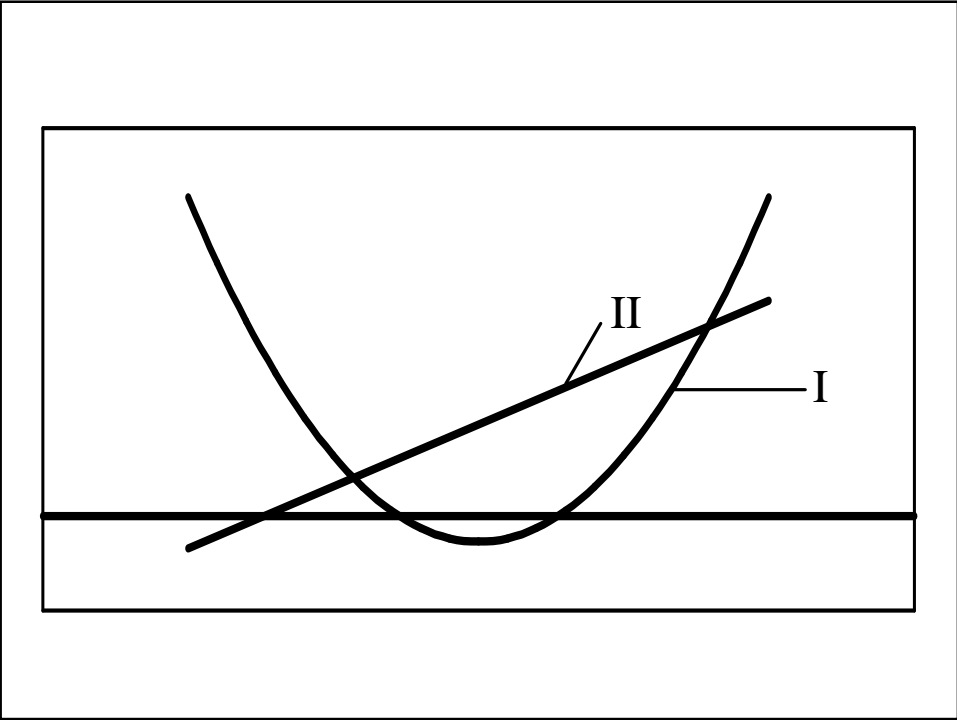
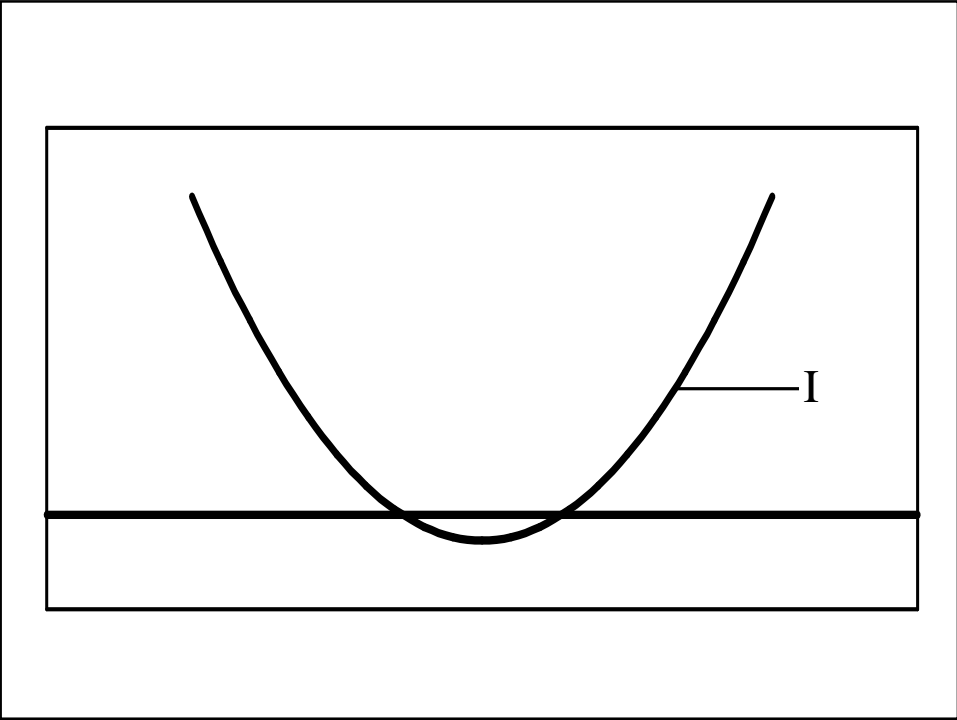
Поэтому судить об устойчивости можно только по результатам вычислений.

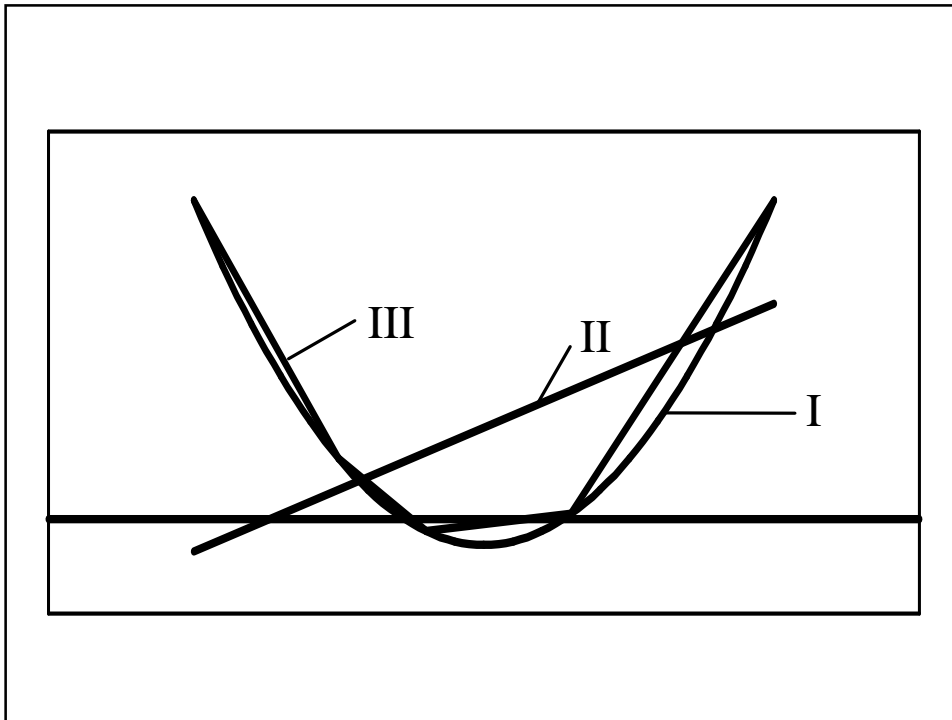
Такая проблема может усугубиться еще и собственной неустойчивостью «паразитного» решения - «жесткие» системы.

**Б) Сходимость (близость расчетной схемы к решаемой задаче)**



Если многошаговый метод вычисления обеспечивает при определенном процессе дробления стремление приближенного решения задачи к точному, то метод сходится.





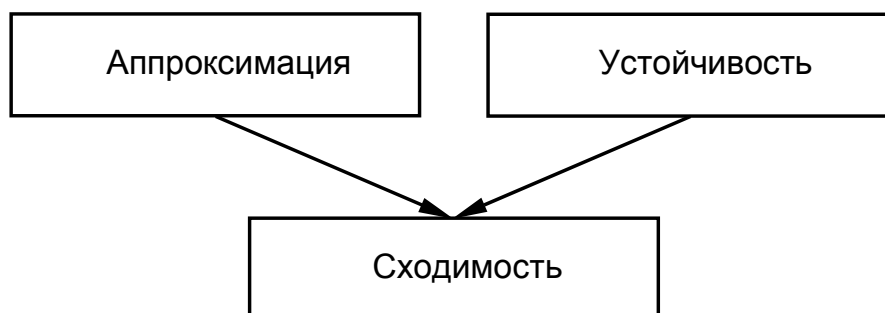
### В) Свойство аппроксимации



Если рассогласование (невязка), получаемое при **подстановке** в расчетную схему точных значений решения, стремится к нулю при определенном процессе дробления, то схема аппроксимирует исходную задачу.

Если невязка ограничена по модулю величиной  $Ch^k$ , где  $C$  и  $k$  – некоторые постоянные,  $h$  – шаг схемы, стремящийся к нулю при определенном процессе дробления, то имеет место аппроксимация  $k$ -го порядка, а схема имеет  $k$ -й порядок точности.

Г) Связь свойств





## Приемы контроля математических моделей

[Часть I, стр. 96 - 97]

### *А) Контроль размерностей:*

– знаки  $+$ ,  $-$ ,  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $=$  могут связывать величины только **одной** размерности;

– аргументами трансцендентных функций должны быть **безразмерные** величины;

– во всех расчетных формулах следует применять **одну** систему единиц измерения.

В функции  $e^{-at} \Rightarrow$  безразмерно  $at$

**Б) Контроль основных законов природы**

**В) Контроль качественного поведения  
зависимостей**

**Г) Контроль математической  
замкнутости задачи**

**Д) Проверка на контрольных примерах**