МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

П.К. Кабков

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по проведению практических занятий
по дисциплине
"ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И
СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ"
для студентов III курса
специальности 130300
дневного обучения

Москва-2003

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РФ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЛУЖБА
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Кафедра технической эксплуатации летательных
аппаратов и авиадвигателей
П.К. Кабков

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по проведению практических занятий
по дисциплине
"ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И
СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ"
для студентов III курса
специальности 130300
дневного обучения

Москва-2003

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Целью проведения практических занятий является привитие студентам практических навыков по методам исследования операций и системного анализа в приложении к задачам, возникающим в практике работы воздушного транспорта и его эксплуатационных предприятий.

1.2. Практические занятия по дисциплине "Исследование операций и системный анализ" включают решение задач по всем основным темам дисциплины: вероятностно-статистическим методам анализа систем и их элементов и некоторым методам исследования операций.

1.3. Методические указания содержат: название темы и цель занятия, краткие теоретические сведения и собственно задание для самостоятельной работы. По каждому занятию предусмотрено несколько вариантов исходных данных. Кроме того, преподаватель может выдать студентам дополнительные темы и дополнительные варианты.

1.4. По результатам выполнения каждого практического задания студентом составляется отчет.

Отчет должен содержать тему занятия, исходные данные выполняемого варианта, необходимые расчетные зависимости, результаты расчетов и выводы. Каждый отчет подписывается студентом и его результаты докладываются преподавателю, который делает отметку о приеме отчета.

2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

2.1. Практическое занятие № 1.

Тема: Определение параметров эмпирической функции распределения случайных характеристик элементов систем методом моментов.

Цель работы: Приобрести навыки расчетов параметров эмпирической функции распределения по экспериментальным данным.

2.1.1. Необходимые теоретические сведения.

Результатом какого-либо статистического эксперимента и исходным пунктом дальнейших статистических исследований случайных характеристик элементов систем является совокупность из n наблюдений некоторой случайной величины X (параметры элемента системы, времена выхода из строя этого элемента и т.п.). Результатом эксперимента является совокупность значений X: X_1, X_2, ... X_n.

Если эти значения охватывают все N возможных однотипных объектов, подлежащих исследованию, т.е. n=N, то это множество объектов называется генеральной совокупностью.

В том случае, если n<N, то эта совокупность называется выборкой (n — объем выборки). Выборка должна быть представительной, т.е. по своим статистическим свойствам должна отражать (представлять) свойства генеральной совокупности.

В настоящей работе предполагается, что мы имеем дело с генеральной совокупностью или с представительной выборкой и требуется определить статистические характеристики объекта, представленные совокупностью чисел X_1, X_2, ... X_n.

Первой операцией статистической обработки результатов является построение вариационного ряда — расположение совокупности чисел в порядке возрастания. Затем статистические данные необходимо сгруппировать в интервалы. Используя сгруппированные данные, строят гистограмму частот, которая дает представление о плотности распределения исследуемой случайной величины. Вид этой гистограммы существенно зависит от принятых масштабов и длины интервала. Длину интервалов следует выбирать такую, чтобы их количество не было большим, но и не искажались особенности распределения, отражаемого гистограммой.

Приближенно длина интервала может быть определена по формуле

$$\Delta x \approx \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3.2\lg n} \qquad (1.1)$$

Рассчитанное значение Δx округляется до значения, удобного для построения гистограммы.

Значение статической плотности распределения в некотором i-ом интервале рассчитывается по формуле

$$f_i^*(x) \approx \frac{\Delta n_i}{n \Delta x} \qquad (1.2)$$

где Δn_i - число значений членов выборки, попавших в i-й интервал.

Частость, отражающая вероятность нахождения величины x в i—ом интервале, равна

$$P_i^* = \frac{\Delta n_i}{n} \qquad (1.3)$$

В настоящей работе определение параметров эмпирической функции распределения производится методом моментов.

Моменты могут быть начальными и центральными. Начальные моменты берутся относительно начала координат соответствующего распределения.

Начальный момент порядка S выражается формулой

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^{k} x_i^s P_i^* \qquad (1.4)$$

где x_i - середина i - го интервала.

При s = 0 α_s = 1, т.е. начальный момент нулевого порядка равен единице.

При s = 1

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^{k} x_i P_i^* = \overline{x^*} \qquad (1.5)$$

Это математическое ожидание исследуемой случайной величины.

Центральные моменты — моменты относительно математического ожидания

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^s P_i^* \qquad (1.6)$$

При s = 0 μ_s = 1, т е. - нулевой центральный момент равен единице .

При s = 1

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x^*}) P_i^* = \sum_{i=1}^{k} x_i P_i^* - \overline{x^*} \sum_{i=1}^{k} P_i^* = \overline{x^*} - \overline{x^*} = 0$$

т.е. первый центральный момент равен нулю.

При s = 2

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x^*})^2 P_i^* = D[X] \qquad (1.7)$$

Второй центральный момент равен дисперсии, которая характеризует разброс случайной величины около математического ожидания.

Как известно

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]} \qquad (1.8)$$

2.1.2. Последовательность выполнения работы.

1. Получение варианта исходных данных.
2. Построение вариационного ряда.
3. Приближенная оценка длины интервала (формула 1.1.).
4. Разбиение вариационного ряда на интервалы.
5. Определение величины Δn_i – количества значений случайной величины, попавшей в i-й интервал.
6. Расчет значений статистической плотности распределения (формула 1.2.) и вероятности попадания в интервал (формула 1.3.).
7. Построение гистограммы.
8. Определение математического ожидания (формула 1.5.), дисперсии (формула 1.7.) и среднего квадратического отклонения (формула 1.8.).
9. Оформление отчета по работе.

2.1.3. Варианты заданий.

Статистические данные сроков службы электрических ламп (в часах)

1-й вариант

100, 1260, 1581, 2800, 1700, 750, 1000, 2072, 1364, 900, 630, 1810, 1080, 825, 1200, 2463, 1412, 950, 2700, 1523, 530, 1040, 1421, 1595, 2281, 1661, 1309, 1130, 905, 660, 760, 845, 990, 1135, 1264, 1799, 1930, 2253, 1190, 905.

2-й вариант

150, 912, 1230, 1678, 2910, 450, 940, 1275, 1719, 1743, 600, 980, 1321, 1372, 1832, 635, 1028, 1384, 1433, 1961, 720, 1035, 1487, 2085, 790, 1090, 1535, 2100, 805, 1125, 1544, 2300, 850, 1160, 1610, 2500, 2820, 895, 1165, 1222.

3-й вариант

200, 960, 1267,ь 1890, 1764, 350, 962, 1335, 1342, 1851, 620, 1010, 1050, 1395, 1990, 675, 735, 1100 1442, 2008, 2142, 775, 1108, 1495, 2341, 2551, 810, 1142, 1500, 1557, 2600, 875, 1175, 1622, 3100, 880, 1210, 1882, 910, 1242.

4-й вариант

250, 930, 1295, 1695, 550,ь 970, 1300, 1783, 1870, 590, 1020, 1357, 1399, 1400, 700, 1060, 1070, 1455, 2040, 2180, 710, 1116, 1468, 1511, 1380, 800, 1151, 1569, 2422, 832, 840, 1182, 1635, 2649, 890, 1218, 1647, 330, 920, 1255.

5-й вариант

300, 940, 1270, 1750, 600, 1120, 1350, 1830, 1920, 640, 1070, 1400, 1450, 1470, 1200, 1110, 1120, 1500, 2090, 2230, 760, 1170, 1520, 1660, 1430, 1300, 1200, 1620, 2470, 880, 890, 1230, 1640, 2700, 940, 1270, 1700, 380, 970, 1300.

2.2. Практическое занятие № 2.

Тема: Определение закона распределения случайной характеристики элементов систем с помощью вероятностной бумаги.

Цель работы: Приобрести навыки проверки гипотез о законе распределения с помощью вероятностной бумаги.

2.2.1. Необходимые теоретические сведения.

Если, используя вариационный ряд, построить гистограмму частот, то по ее виду можно сделать предположение о виде закона распределения исследуемой случайной величины. Вид графиков некоторых теоретических законов распределения и их основные характеристики приведены в таблице 2.1.

Одним из способов проверки гипотезы о виде закона распределения и оценки его параметров является использование специальной вероятностной бумаги.

Вероятностная бумага представляет собой координатную сетку, рассчитанную для определенного закона распределения случайной величины. В настоящей работе используется вероятностные бумаги экспоненциального и нормального распределений и распределения Вейбулла (рис. 2.1., 2.2., и 2.3.).

Для каждого вида закона гипотеза считается подтвержденной, если экспериментальные точки легли на прямую соответствующей вероятностной бумаги.

Кроме подтверждения вида закона распределения с помощью вероятностной бумаги могут быть определены и параметры закона.

Оценка параметров законов распределения производится следующим образом:

а) оценка параметра λ экспоненциального закона распределения производится с помощью вероятностной бумаги экспоненциального распределения (рис. 2.1.).

За величину X_0 принимается абсцисса точки пересечения прямой, проведенной по экспериментальным точкам. Далее находят значение величины X^*, соответствующее ординате 0, 632. Параметр λ оценивается по формуле:

$$\lambda = \frac{1}{x^* - x_0} \qquad (2.1)$$

б) оценка параметра $X_{ср}$ и σ с помощью вероятностной бумаги нормального распределения (рис. 2.2.). Параметр $X_{ср}$ равен абсциссе, соответствующей значению $F^*(x) = 0,5$; параметр σ равен рядности абсцисс со значениями $F^*(x) = 0,5$ и $F^*(x) = 0,159$.

$$\sigma = x_{cp} - x_{0,159} \qquad (2.2)$$

в) оценка параметров а и в распределения Вейбулла (рис. 2.3.).

При оценке параметров *а* и *в* используется специальная точка А с координатами (2,718; 0,632), вертикальная линия Н с абсциссой 1 и специальная шкала m.

Для определения величины параметра *в* следует найти значение ординаты по шкале точки В, полученной на пересечении луча, проведенного через точку А параллельно линии статистических данных (линия Д), с линией Н (на рис. 2.3. *в* = 2).

Для определение величины *а* сначала определяется вспомогательная величина m_0. Для этого находят точку С пересечения линии Н, из точки С проводят линию, параллельную оси абсцисс до пересечения со шкалой m (на рис. 2.3. $m_0 = 4,4$).

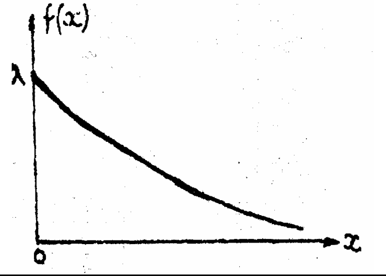
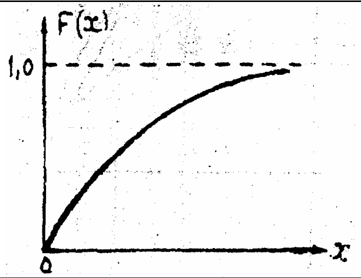
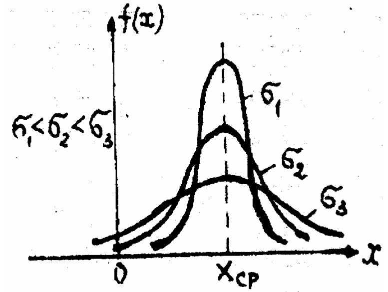
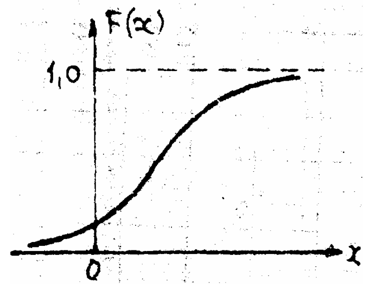
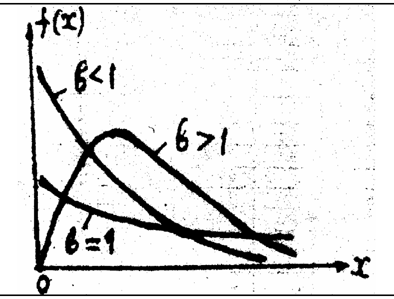
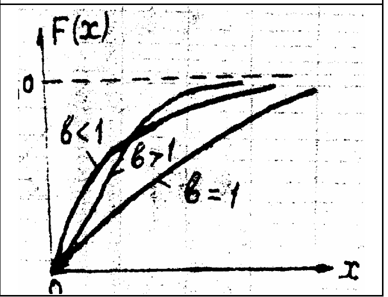
Параметр *а* находится по формуле:

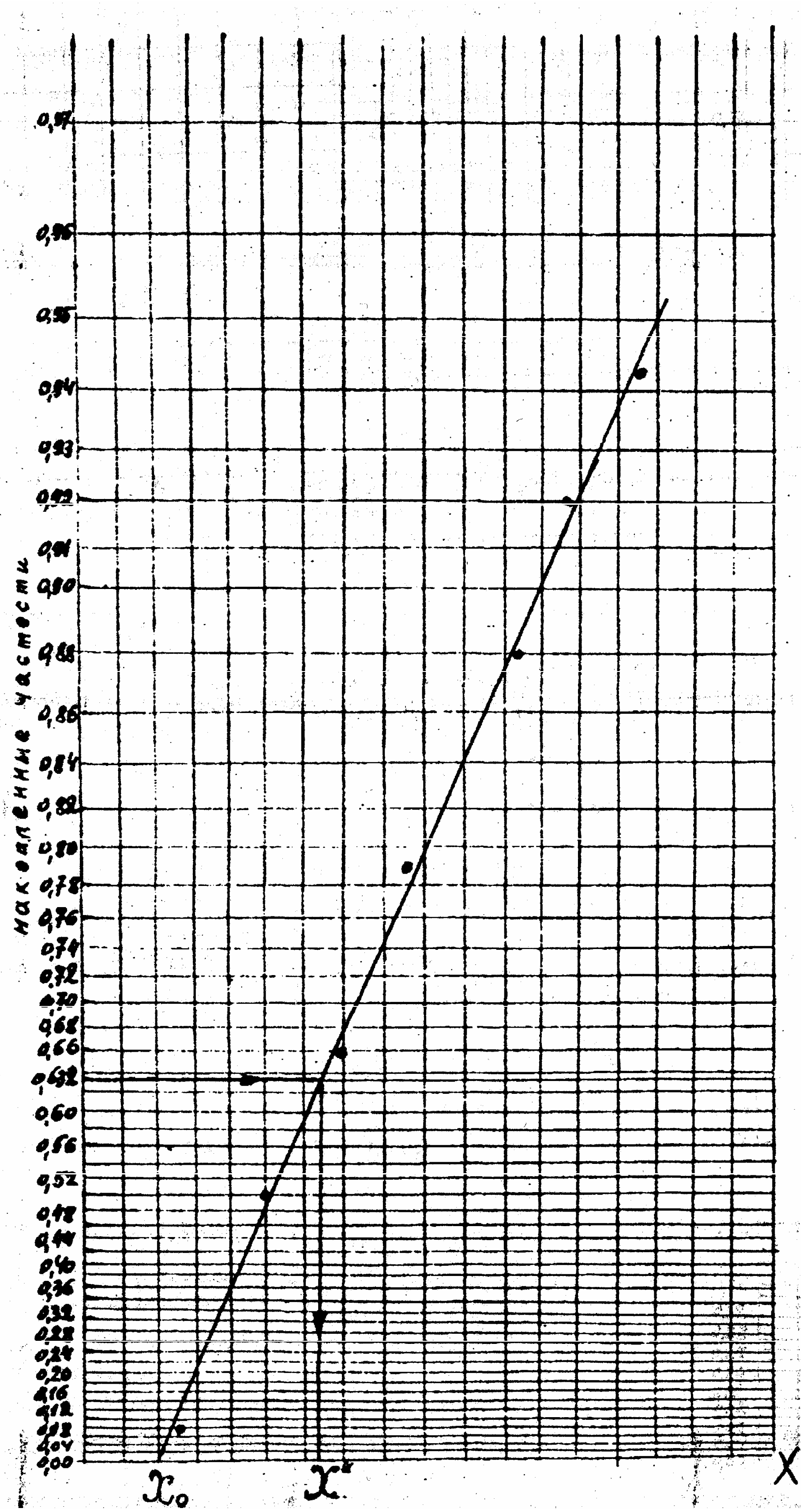
$$a = e^{m_0} 10^{jb} \qquad (2.3)$$

где j – порядок множителя шкалы абсцисс (на рис. 2.3. j = 2, $T_0 = 4,4$, *а* = 10).

Характеристики некоторых законов распределения.

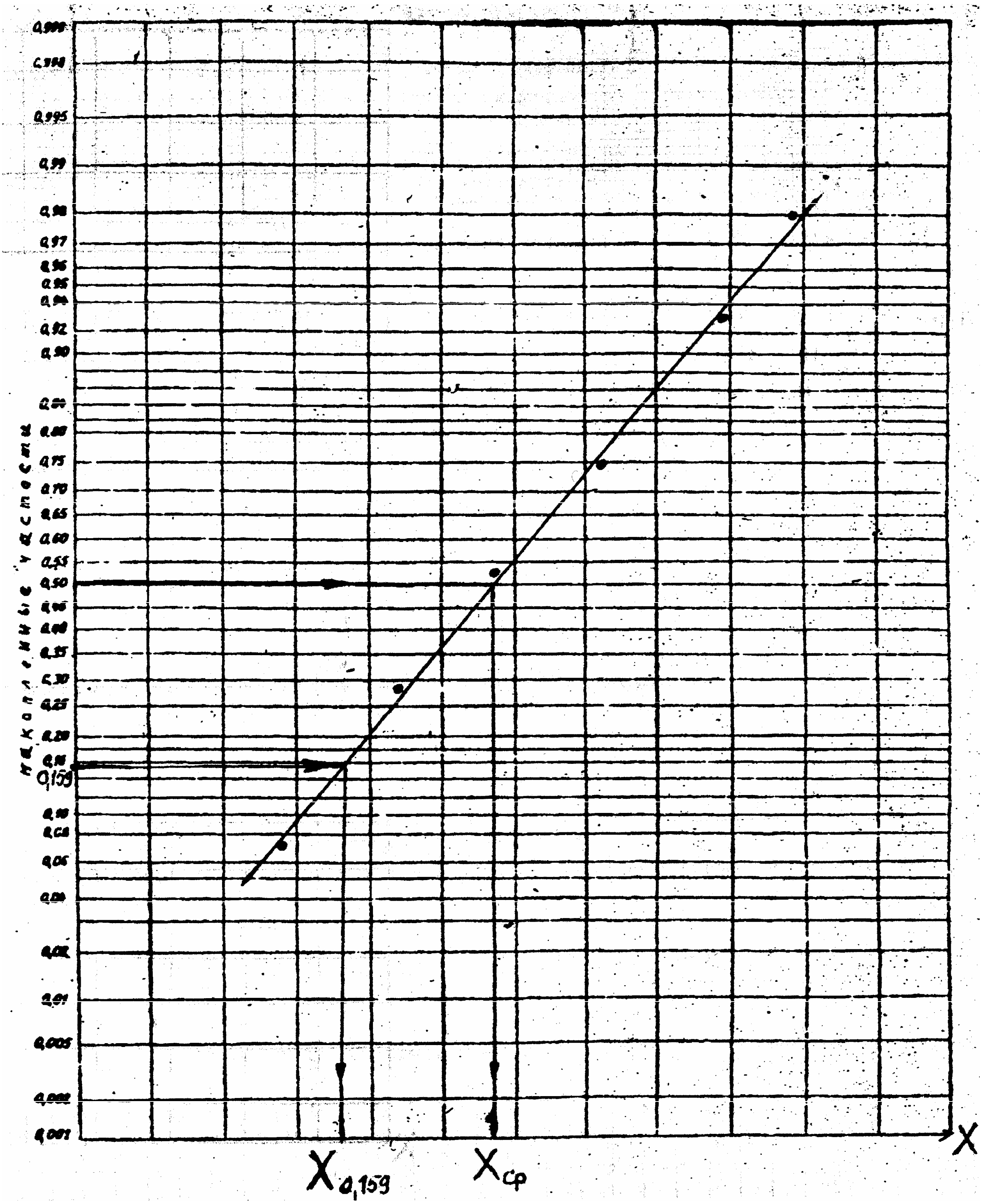
Таблица 2.1.

Наименование закона распределения	Параметры	Математические выражения		График	
		Плотность распределения	Функции распределения	Плотность распределения	Функции распределения
Экспоненциальный	λ	$f(x)=\lambda e^{-\lambda e}$	$F(x)=1-e^{-\lambda x}$		
Нормальный	χ_{cp} σ	$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-x_{cp})^2}{2\sigma^2}}$	$F(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{1}e^{\frac{(1-x_{cp})^2}{2\sigma^2}}dt}$		
Вейбулла	a b	$f(x)=\dfrac{b}{a}x^{b-1}e^{-\frac{1}{a}x^b}$	$F(x)=1-e^{-\frac{1}{a}x^b}$		



накопленные частости
0,97
0,96
0,95
0,94
0,93
0,92
0,91
0,90
0,88
0,86
0,84
0,82
0,80
0,78
0,76
0,74
0,72
0,70
0,68
0,66
0,632
0,60
0,56
0,52
0,48
0,44
0,40
0,36
0,32
0,28
0,24
0,20
0,16
0,12
0,08
0,04
0,00
x_0
x^*
X

рис.2.1.



накопленные частоты
0,999
0,998
0,995
0,99
0,98
0,97
0,96
0,95
0,94
0,92
0,90
0,85
0,80
0,75
0,70
0,65
0,60
0,55
0,50
0,45
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,16
0,159
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0,01
0,005
0,002
0,001
X
$X_{0,159}$
X_{cp}

рис.2.2.

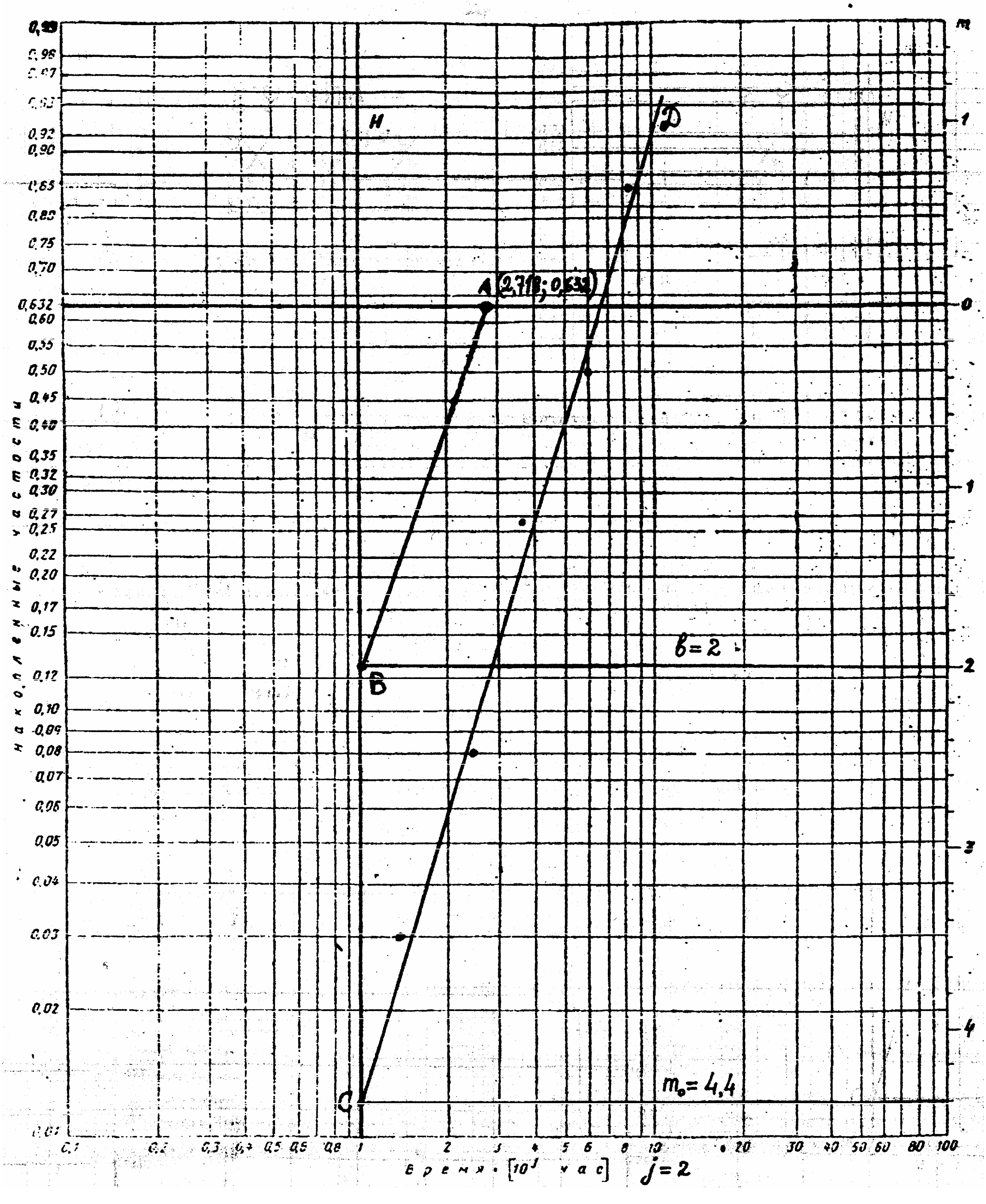

H
D
A (2,718; 0,632)
B
C
b=2
m₀= 4,4
m
накопленные частости
время · [10³ час]
j=2
0,632
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,05
0,02
0,1
1
2
3
4
5
6
8
10
20
30
40
50
60
80
100

рис.2.3.

2.2.2. Последовательность выполнения работы

1. По варианту задания, выданному преподавателем, построить гистограмму распределения случайной величины.
2. Выдвинуть гипотезу о виде закона распределения.
3. Проверить с помощью вероятностной бумаги правильность выдвинутой гипотезы.
4. Определить параметры закона распределения.
5. Оформить отчет по работе.

2.2.3. Варианты задания

Результаты испытаний ударной вязкости $A_к$, кгм/см^2 малоуглеродистой стали

1 вариант	10,4	10,6	10,7	10,8	10,9
	10,9	11,0	11,0	11,0	11,1
	11,1	11,2	11,2	11,2	11,2
	11,3	11,3	11,3	11,3	11,4
	11,4	11,4	11,4	11,4	11,5
	11,5	11,5	11,5	11,5	11,5
	11,5	11,6	11,6	11,6	11,6
	11,6	11,6	11,7	11,7	11,7
	11,8	11,8	11,9	11,9	12,0
	12,0	12,1	12,2	12,3	12,5
2 вариант	10,6	10,8	11,08	11,0	11,0
	11,1	11,1	11,1	11,2	11,2
	11,2	11,3	11,3	11,3	11,3
	11,3	11,3	11,4	11,4	11,4
	11,4	11,4	11,4	11,4	11,4
	11,5	11,5	11,5	11,5	11,5
	11,5	11,5	11,5	11,6	11,6
	11,6	11,6	11,6	11,7	11,7
	11,7	11,7	11,8	11,8	11,8
	11,9	11,9	12,0	12,1	12,2

Статистические данные наработки до отказа (в часах)

3 вариант	31	61	92	121	149	180	209	238	266	295
	322	350	377	400	469	509	554	599	644	688
	700	732	776	790	800	868	936	1003	1069	1136
	1200	1302	1402	1501	1600	1748	1883	2000	2200	2400
4 вариант	46	91	138	181	223	270	313	357	399	442
	483	525	565	600	703	763	831	898	966	1032
	1050	1098	1164	1185	1200	1302	1404	1504	1603	1704
	1800	1953	2103	2251	2400	2622	2824	3000	3300	3600
5 вариант	70	133	178	212	283	317	420	460	500	532
	595	645	742	788	822	856	929	995	1079	1126
	1193	1279	1366	1432	1497	1624	1719	1863	2195	2730
6 вариант	43	127	165	203	278	296	412	449	495	514
	576	638	696	776	803	852	921	995	1072	1124
	1180	1275	1346	1393	1454	1617	1709	1833	1968	2652

2.4. Практическое занятие № 3

Тема: Определение видов законов распределения параметров систем с использованием критериев согласия.

Цель работы: Приобретение навыков использования критериев согласия в статистических задачах.

2.3.1. Необходимые теоретические сведения

Критерии согласия применяются для решения вопросов согласованности теоретического и статистического распределений или принадлежности двух выборок одному распределению.

Наибольшее распространение при определении принадлежности статистических данных теоретическому распределению имеют критерии Пирсона (критерий χ^2) и критерий Колмогорова, а для проверки гипотезы о принадлежности двух выборок одному распределению - критерий Смирнова.

Критерий χ^2 рассчитывается по формуле

$$x^2_{расч.} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - Np_i)^2}{Np_i} \tag{3.1}$$

где: к — количество интервалов (групп), на которые разбиты экспериментальные данные,
m_i - число значений случайной величины в i - ом интервале,
N - общее число значений случайной величины (число независимых опытов);
p_i - вероятность принадлежности случайной величины i - ому интервалу в соответствии с предполагаемым теоретическим законом распределения.

Величину p_i можно определить по формуле

$$p_i = F(x_{i+1}) - F(x_i) \tag{3.2}$$

где $F(x_i)$ и $F(x_{i+1})$ - значения теоретической функции распределения у границ интервала.

Для расчета или определения по таблицам этих значений функции необходимо определить ее параметры: математическое ожидание, дисперсию (среднее квадратическое отклонение), параметры *а* и *в* - для распределения Вейбулла. В первом приближении эти параметры могут быть определены с помощью вероятностной бумаги так, как это описано в методических указаниях по работе №2. Более точно математическое ожидание и дисперсия могут быть определены методом моментов (см. практическое занятие №1).

Для случая экспоненциального закона распределения значения $F(x_i)$ и $F(x_{i+1})$ могут быть определены непосредственно по формуле:

$$F(x_{i+1}) = 1 - e^{-\lambda x_{i+1}} \quad и \quad F(x_i) = 1 - e^{-\lambda x_i}$$

В случае нормального закона распределения величины $F(x_i)$ и $F(x_{i+1})$ должны быть определены с использованием таблицы нормального распределения (таблица 3.1.).

Вход в таблицу для значения случайной величины x, ее математического ожидания m и среднего квадратического отклонения σ производится по значению величины $S = \frac{x - m}{\sigma}$.

Если S < 0, то $F_0(-x) = 1 - F_0(x)$. Если $S \geq 0$, то берется непосредственно табличное значение.

Если предполагается распределение Вейбулла, то значение $F(x_i)$ и $F(x_{i+1})$ рассчитывается по формулам

$$F(x_{i+1}) = 1 - e^{-\frac{x_{i+1}^b}{a}} \quad и \quad F(x_i) = 1 - e^{-\frac{x_i^b}{a}}$$

Определив $\chi^2_{рас.}$, сравниваем его со значением критерия $\chi^2_{теор.}$, определенным по таблице χ^2.

Таблица χ^2 имеет два входа: уровень значимости α (или доверительная вероятность γ) и число степеней свободы r.

$$\alpha = 1 - \gamma \qquad (3.3)$$

$$r = \overline{m} - 1 - l \qquad (3.4)$$

где m - число интервалов, ℓ - число независимых условий (связей), накладываемых на закон распределения.

Для экспоненционального закона ℓ = 1 (один определяющий закон параметр - λ), для нормального закона ℓ = 2 (два определяющих параметра: математическое ожидание и дисперсия), для распределения Вейбулла ℓ *=2* (параметры *а* и *в*).

Значения критерия χ^2 приведены в таблице 3.2.

Гипотеза о согласованности статистического и теоретического распределений принимается, если $\chi^2_{расч.} < \chi^2_{теор.}$ При невыполнении этого условия значение $\chi^2_{расч.}$ попадает в критическую область и гипотеза должна быть отвергнута.

2.3.2. Последовательность выполнения работы:

1. По варианту задания, выданного преподавателем, построить гистограмму распределения случайной величины (в качестве вариантов заданий могут быть использованы варианты предыдущего практического задания).
2. Выдвинуть гипотезу о виде закона распределения случайной величины.
3. Определить параметры закона: λ – для экспоненциального закона, m и σ – для нормального закона, *а* и *в* – для закона Вейбулла, при использовании вариантов предыдущего задания воспользоваться его результатами.
4. Определить вероятности принадлежности случайной величины каждому из интервалов гистограммы в соответствии с предполагаемым теоретическим законом распределения.
5. Подтвердить или опровергнуть гипотезу о виде закона распределения с помощью критерия согласия χ^2.
6. Оформить отчет о работе.

Таблица 3.1.

Значения $F_0(x)$

S		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	0,	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	0,	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	0,	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	0,	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	0,	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	0,	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	0,	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	0,	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	0,	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	0,	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	0,	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	0,	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	0,9	0320	0490	0658	0824	0988	1149	1308	1466	1621	1774
1,4	0,9	1924	2073	2220	2364	2507	2647	2785	2922	3056	3189
1,5	0,9	3319	3448	3574	3699	3822	3943	4062	4179	4295	4408
1,6	0,9	4520	4630	4738	4845	4950	5053	5154	5254	5352	5449
1,7	0,9	5543	5637	5728	5818	5907	5994	6080	6164	6246	6327
1,8	0,9	6407	6485	6562	6637	6712	6784	6856	6926	6995	7062
1,9	0,9	7128	7193	7257	7320	7381	7441	7500	7558	7615	7670
2,0	0,9	7725	7778	7831	7882	7932	7982	8030	8077	8124	8169
2,1	0,9	8214	8257	8300	8341	8382	8422	8461	8500	8537	8574
2,2	0,9	8610	8645	8679	8713	8745	8778	8809	8840	8870	8899
2,3	0,9	8928	8956	8983	9010	9036	9061	9086	9111	9134	9158
2,4	0,99	1802	2024	2240	2451	2656	2857	3053	3244	3431	3613
2,5	0,99	3790	3963	4132	4297	4457	4614	4766	4915	5060	5201
2,6	0,99	5339	5473	5603	5731	5855	5975	6093	6207	6319	6427
2,7	0,99	6533	6636	6736	6833	6928	7020	7110	7197	7282	7365
2,8	0,99	7445	7523	7599	7673	7744	7814	7882	7948	8012	8074
2,9	0,99	8134	8193	8250	8305	8359	8411	8462	8511	8559	8605
3,0	0,99	8650	8694	8736	8777	8817	8856	8893	8930	8965	8999

Продолжение таблицы 3.1.

S		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,99	8650	8694	8736	8777	8817	8856	8893	8930	8965	8999
3,1	$0,9^3$	0324	0646	0957	1260	1553	1836	2112	2378	2636	2886
3,2	$0,9^3$	3129	3363	3590	3810	4024	4230	4429	4623	4810	4991
3,3	$0,9^3$	5166	5335	5499	5658	5811	5959	6103	6242	6376	6505
3,4	$0,9^3$	6631	6752	6869	6982	7091	7197	7299	7398	7493	7585
3,5	$0,9^3$	7674	7760	7842	7922	7999	8074	8146	8215	8282	8347
3,6	0.9^3	8409	8469	8527	8583	8637	8689	8739	8787	8834	8879
3,7	$0,9^3$	8922	8964	9004	9043	9080	9116	9150	9184	9216	9247
3,8	$0,9^4$	2765	3052	3327	3593	3848	4094	4331	4558	4777	4988
3,9	$0,9^4$	5190	5385	5573	5753	5926	6092	6252	6406	6554	6696
4,0	$0,9^4$	6833	6964	7090	7211	7327	7439	7546	7649	7748	7843
4,1	$0,9^4$	7934	8022	8106	8186	8264	8338	8409	8477	8542	8605
4,2	$0,9^4$	8665	8723	8778	8832	8882	8931	8978	9023	9066	9107
4,3	$0,9^5$	1460	1837	2198	2544	2876	3193	3497	3788	4066	4332
4,4	$0,9^5$	4588	4832	5065	5288	5502	5706	5902	6089	6268	6439
4,5	$0,9^5$	6602	6759	6908	7051	7187	7318	7442	7561	7675	7784
4,6	$0,9^5$	7888	7987	8081	8172	8258	8340	8419	8494	8566	8634
4,7	$0,9^5$	8699	8761	8821	8877	8931	8983	9032	9079	9124	9166
4,8	$0,9^6$	2067	2454	2822	3173	3508	3827	4131	4420	4696	4958
4,9	$0,9^6$	5208	5446	5673	5888	6094	6289	6475	6652	6821	6981
5,0	$0,9^6$	7134	7278	7416	7548	7672	7791	7904	8011	8113	8210
5,1	$0,9^6$	8302	8389	8472	8551	8626	8698	8765	8830	8891	8949
5,2	$0,9^7$	004	056	105	152	197	240	280	318	354	388
5,3	$0,9^7$	421	452	481	509	539	560	584	606	628	648
5,4	$0,9^7$	667	685	702	718	734	748	762	775	787	799
5,5	$0,9^7$	810	821	831	840	849	857	865	873	880	886
5,6	$0,9^7$	893	899	905	910	915	920	924	929	933	936
5,7	$0,9^8$	40	44	47	50	53	55	58	60	63	65
5,8	$0,9^8$	67	69	71	72	74	75	77	78	79	81
5,9	$0,9^8$	82	83	84	85	86	87	87	88	89	90
6,0	$0,9^8$	90	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Таблица 3.2.

Значения χ^2 в зависимости от r и γ.

r \ γ	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	10,74	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,73	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	1,59	15,03	16,81	22,5
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	22,1	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	8,90	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3	29,3	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	2,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

2.5 Практическое занятие № 4.

Тема: Определение качества принимаемой продукции выборочным методом контроля.

Цель работы: Приобрести навыки определения характеристик планов контроля принимаемой продукции.

2.4.1. Необходимые теоретические сведения.

На рис. 4.1 приведена схема выборочного контроля

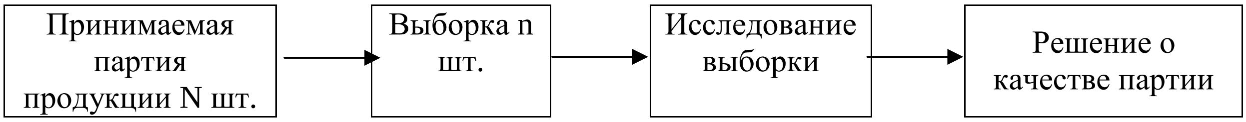


рис. 4.1.

Оценка качества партии изделий проводится по величине доли дефектных изделий в выборке.

Если в партии всего N изделий, а в ней M изделий дефектных, то ее качество (точнее — ее некачественность)

$$q = \frac{M}{N} \qquad (4.1)$$

Судить о качестве всей партии мы должны по качеству выборки, в которой из n изделий m изделий дефектных

$$q_{в} = \frac{m}{n} \qquad (4.2)$$

Оперативная характеристика плана контроля приведена на рис. 4.2.

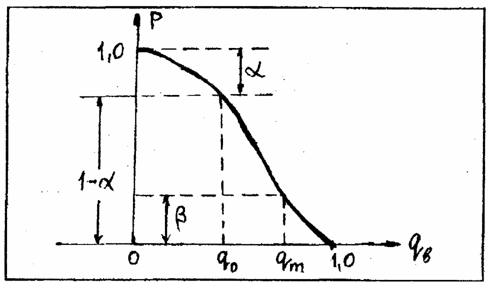


рис. 4.2

На графике P - вероятность приемки.

Если $q_в = 0$, то с вероятностью 1 партия принимается, если $q_в = 1$, то вероятность приема партии равна 0. $q_в = q_0$ - приемлемый уровень качества, $q_в = q_м$ - браковочный уровень качества.

α - риск поставщика - вероятность забраковать партию с приемлемым уровнем качества

$$\alpha = 1 - P(q_0) \qquad (4.3)$$

β - риск заказчика - вероятность принять партию с браковочным уровнем качества

$$\beta = P(q_m) \qquad (4.4)$$

При организации приема партии изделий заблаговременно необходимо установить:

q_0 - приемлемый уровень качества,
q_m - браковочный уровень качества,
β - риск заказчика,
С - допустимое количество брака в партии.

Условие приемки партии m < = с. Принимая партию из N изделий, необходимо определить объем выборки n.

Взаимосвязь перечисленных параметров определяется видами закона распределения. Для биноминального закона имеем следующую совокупность соотношений:

$$P(\mathrm{q}) = \sum_{k=0}^{c} C_n^k \mathrm{q}^k (1-\mathrm{q})^{n-k} \tag{4.5}$$

$$1-\alpha = (1-\mathrm{q}_0)^n \tag{4.6}$$

$$n = \frac{\lg(1-\alpha)}{\lg(1-\mathrm{q}_0)} \tag{4.7}$$

$$\lg\beta = n\lg(1-\mathrm{q}_m) \tag{4.8}$$

$$n = \frac{\lg\beta}{\lg(1-\mathrm{q}_m)} \tag{4.9}$$

Для закона Пуассона

$$P(\mathrm{q}) = \sum_{k=0}^{c} \frac{1}{k!}(n\mathrm{q})^k e^{-n\mathrm{q}} \tag{4.10}$$

получаем следующие соотношения:

$$\alpha = 1 - e^{-n\mathrm{q}_0} \tag{4.11}$$

$$n = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\mathrm{q}_0} \tag{4.12}$$

$$\beta = e^{-n\mathrm{q}_m} \tag{4.13}$$

$$n = -\frac{\ln\beta}{\mathrm{q}_m} \tag{4.14}$$

2.4.2. Задания для самостоятельной работы.

Основная совокупность задач, связанных с выборочным методом контроля состоит в следующем:

заданы q_0, α и β, определяются n и q_m,

заданы q_0, q_m, α и β, определяются n и с.

2.4.3. Варианты заданий

Варианты заданий представляют собой совокупность задач, приводимых ниже.

Задача №1. Проводится одноступенчатый контроль.

Закон распределения - биноминальный, С = О. Для исходных данных вариантов, приведенных в таблице 4.1 определить n и q_m.

Таблица 4.1.

N вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_0	0,01	0,01	0,01	0,001	0,001	0,001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0005	0,0005	0,0005
α	0,05	0,05	0,1	0,05	0,05	0,1	0,05	0,05	0,1	0,1	0,1	0,1
β	0,05	0,1	0,05	0,05	0,1	0,05	0,05	0,1	0,05	0,1	0,1	0,1

Задача №.2. Условия те же, что и для задачи №1.

Закон распределения - пуассоновский.

Таблица 4.2.

N вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_0	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	0,01	0,1	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	0,01	0,1	10^{-5}	10^{-3}
A	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,05	0,1
B	0,05	0,01	0,2	0,1	0,05	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01	0,1	0,05

Задача №3. Для исходных данных вариантов, приведенных в таблице 4.3 при С = 0, определить n и β .

Распределение — пуассоновское.

Таблица 4.3.

N вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_0	10^{-3}	10^{-4}	10^{-3}	0,01	0,1	0.01	0.01	0.01	0,1	0,01	0.1	0.1
q_m	0,1	0,01	10^{-2}	0,2	0,5	0,03	0,1	0,03	0,16	0,01	0,2	0,4
α	0,05	0,05	0,05	0,1	0,2	0,2	0,1	0,05	0,05	0,1	0,2	0,03

Задача №4. Для исходных данных вариантов, приведенных в таблице 4.4 определить n и с.

Распределение — пуассоновское.

Таблица 4.4

N вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_0	0.01	0.02	0.03	0,04	0,05	0.01	0.02	0.04	0,04	0,05	0.01	0.02
q_m	0,02	0,05	0.035	0,045	0,055	0,015	0,04	0,035	0,045	0,055	0,05	0,025
α	0,05	0,05	0,05	0,05	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,05	0,1
β	0.1	0.05	0.2	0.1	0.05	0.1	0.2	0.05	0.1	0.2	0.05	0.1

2.5. Практическое занятие № 5.

Тема: Определение вероятностей состояний марковского случайного процесса с помощью уравнений Колмогорова.

Цель работы: Приобрести навыки численных расчетов параметров марковских случайных процессов.

2.5.1. Необходимые теоретические сведения.

На занятии рассматривается марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывная цепь Маркова).

При рассмотрении случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем, удобно представлять переходы системы S из состояния в состояние как происходящие под влиянием некоторых потоков событий. Плотности вероятностей перехода получают смысл интенсивностей λ_{ij} соответствующих потоков событий (переход скачком из состояния S_i в состояние S_j).

Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем удобно изображать размеченным графом состояний. Пример размеченного графа состояний приведен на рис. 5.1.

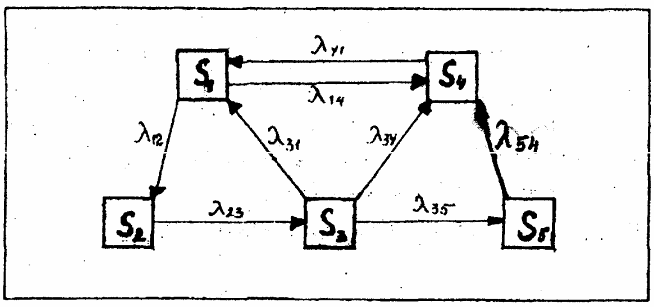


рис. 5.1

Пусть система имеет конечное число состояний S_1, S_2,…, S_n. Вероятности этих состояний:

$$P_1(t), P_2(t), ..., P_n(t) \qquad (5.1)$$

где $P_i(t)$ - вероятность того, что система S в момент t находится в состоянии S_i.

Для любого t

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1 \qquad (5.2)$$

Для нахождения вероятностей (5.1) необходимо решить систему дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова)

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} P_j(t) - P_j(t) \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \qquad (5.3)$$

i = 1,2,…,n

Уравнения (5.3) легко составить с использованием размеченного графа состояний и пользуясь следующим мнемоническим правилом: производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков вероятностей, идущих в данное состояние, минус сумма всех потоков вероятностей, идущих из данного состояния.

Для размеченного графа состояний, приведенного на рис. 5.1, система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dP_1(t)}{dt} &= \lambda_{31}P_3(t) + \lambda_{41}P_4(t) - (\lambda_{12} + \lambda_{14})P_1(t) \\
\frac{dP_2(t)}{dt} &= \lambda_{12}P_1(t) - \lambda_{23}P_2(t) \\
\frac{dP_3(t)}{dt} &= \lambda_{23}P_2(t) - (\lambda_{31} + \lambda_{34} + \lambda_{35})P_3(t) \\
\frac{dP_4(t)}{dt} &= \lambda_{14}P_1(t) + \lambda_{34}P_3(t) + \lambda_{54}P_5(t) - \lambda_{41}P_4(t) \\
\frac{dP_5(t)}{dt} &= \lambda_{35}P_3(t) - \lambda_{54}P_5(t)
\end{aligned}\right\} \quad (5.4)$$

Финальные (конечные) вероятности состояний (если они существуют) могут быть получены решениями системы линейных алгебраических уравнений, которые можно получить, если положить левые части уравнений (5.4) равными нулю.

Для размеченного графа состояний, изображенного на рис. 5.1. уравнения для финальных вероятностей имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda_{12} + \lambda_{14})P_1 = \lambda_{41}P_4 + \lambda_{31}P_3 \\
&\lambda_{23}P_2 = \lambda_{12}P_1 \\
&(\lambda_{31} + \lambda_{34} + \lambda_{35})P_3 = \lambda_{23}P_2 \\
&\lambda_{41}P_4 = \lambda_{14}P_1 + \lambda_{34}P_3 + \lambda_{54}P_5 \\
&\lambda_{54}P_5 = \lambda_{35}P_3
\end{aligned}\right\} \quad (5.5)$$

Если добавить к этой системе нормировочное условие $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1$, то одно из уравнений системы (5.5) можно исключить (целесообразно исключить самое громоздкое) и решать системы известными методами алгебры.

2.5.2. Последовательность выполнения работы.

1. По варианту задания, выданному преподавателем, установить возможные состояния системы и построить размеченный граф состояний.
2. Составить по размеченному графу состояний систему дифференциальных уравнений Колмогорова и затем - систему алгебраических уравнений для финальных вероятностей состояния.
3. Путем решения системы алгебраических уравнении определить финальные вероятности состояний исследуемой системы.

2.5.3. Варианты заданий.

Задача №1.

На борту самолета находится агрегат, который может отказать. Поток отказов - ω. Отказ обнаруживается только в процессе регламентного технического обслуживания. Среднее время между техническими обслуживаниями равно $T_{ср}$. Среднее время обнаружения неисправности равно $T_{он} = \left[T_{ср} - (T_{ср}^{-1} + \omega)^{-1}\right]$, среднее время технического обслуживания $T_{то}$.

Значения указанных параметров для различных вариантов приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1.

$T_{ср}$, лет		$T_{то}$, ч	ω, 1/ч	NN вариантов
0,8	0,4	2,0	10^{-4} 10^{-5} 10^{-6} 10^{-7}	1 2 3 4
0,8	0,4	4,0	10^{-4} 10^{-5} 10^{-6} 10^{-7}	5 6 7 8
1,0	0,5	6,0	10^{-4} 10^{-5} 10^{-6} 10^{-7}	9 10 11 12
2,0	1,0	8,0	10^{-4} 10^{-5} 10^{-6} 10^{-7}	13 14 15 16
2,0	1,0	10,0	10^{-4} 10^{-5} 10^{-6} 10^{-7}	17 18 19 20

Задача №2.

Техническое устройство (ТУ) подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ. Отказ обнаруживается не сразу, а через случайное время, распределенное по показательному закону с параметром υ. Как только отказ обнаружен, производится осмотр ТУ, в результате которого она либо направляется в ремонт (вероятность этого Р), либо списывается и заменяется новым. Время осмотра - показательное с параметром γ, время ремонта - показательное с параметром μ, время замены списанного ТУ новым - показательное с параметром χ. Найти финальные вероятности состояний ТУ и определить, какую долю времени в среднем ТУ будет работать нормально и какую долю времени, в среднем ТУ будет работать с необнаруженным отказом (давать брак).

Значения параметров для различных вариантов указаны в таблице 5.2.

Таблица 5.2.

N вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ, 1/ч	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01
υ, 1/ч	1,0	2,0	1,0	0,2	1,0	2,0	1,0	2,0	1,0	2,0
P	0,8	0,8	0,8	0,8	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8
γ, 1/ч	10,0	10,0	10,0	10,0	5,0	5,0	6,0	66,0	4,0	4,0
μ, 1/ч	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,2	0,2	0,2	0,2
χ, 1/ч	2,0	2,0	0,5	0,5	2,0	2,0	0,5	0,5	1,0	1,0

2.6. Практическое занятие № 6.

Тема: Решение задач с использованием методов теории массового обслуживания.

Цель работы: Приобретение навыков численных расчетов параметров и показателей систем массового обслуживания.

2.6.1. Необходимые теоретические сведения.

Системы массового обслуживания (СМО) классифицируются по характеру входящего потока $П_{вх}$, распределению времени обслуживания $В_{об}$, в зависимости от числа обслуживающих приборов $N_{пр}$ и емкости накопителя (длины очереди) $Е_{нак}$.

В соответствии с наиболее распространенной и общепринятой классификацией Кендалла, любая система массового обслуживания характеризуется этими четырьмя величинами $П_{вх}$/ $В_{об}$ / $N_{пр}$ / $Е_{нак}$.

Для обслуживания характера входящего потока приняты следующие символы:

М - входящий поток пуассоновский (Markovian),

Е - входящий поток эрланговский (Erlangian),

Д - детерминированный (постоянный) поток (Deterministic),

G- произвольный рекурентный поток (General).

Те же символы применяются и для обозначения распределения времени обслуживания:

М - марковское распределение,

Е - распределение по закону Эрланга,

Д - время обслуживания - постоянная величина,

G - произвольное распределение времени обслуживания.

Число обслуживающих приборов $N_{пр}$>= 1.

Значение $Е_{нак}$ = 0 характеризует систему с потерями, значение $0<Е_{нак}<+\infty$ - комбинированную систему с ожиданиями и потерями, а $Е_{нак} = \infty$ - чистую систему с ожиданиями. В этом случае часть обозначения типа системы "/∞" обычно опускается.

Показателями эффективности или показателями производительности СМО являются характеристики СМО, которые представляют интерес для пользователя.

Такими характеристиками являются:

1. вероятность потери заявки (вероятность отказа) - в СМО с конечной емкостью накопителя – $P_{отк}$,
2. относительная и абсолютная пропускная способность системы $\underline{q}$ и A,
3. длина очереди - количество заявок, ожидающих обслуживания $\overline{r}$,
4. общее число заявок в системе $\overline{k}$,
5. время ожидания начала обслуживания заявки $\overline{t_{ож}}$,
6. общее время пребывания заявки в системе $t_{сис}$.

Входящий поток заявок, характеризующий процесс поступления заявок в систему, обозначается буквой λ, а интенсивность обслуживания - μ. Важнейшим параметром СМО является отношение этих величин

$$p = \frac{\lambda}{\mu}$$

Расчетные формулы для определения основных характеристик СМО различных типов приведены в таблице 6.1.

2.6.2 Задания для самостоятельной работы.

По варианту задания, выданному преподавателем, решить ряд задач по определению основных характеристик систем массового обслуживания.

2.6.3. Варианты заданий.

Задача №1.

Авиационная касса имеет два окошка, в каждом из которых продаются авиабилеты в два пункта: в Саратов и в Волгоград. Потоки пассажиров, приобретающих билеты в Саратов и Волгоград, одинаковы по интенсивности, которая равна λ_0. Среднее время обслуживания пассажира (продажа ему билета) $\overline{t_{об}}$. Поступило рационализаторское предложение: для уменьшения длин очередей и времени пребывания в них (в интересах пассажиров) сделать обе кассы специализированными: в первой продавать билеты только в Саратов, а во второй - только в Волгоград. Считая потоки простейшими, проверить разумность такого рацпредложения для значений параметров λ_0 и $\overline{t_{об}}$, приведенных в таблице 6.2.

Значения параметров

Таблица 6.2.

N вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_0, 1/мин	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55
$\overline{t_{об}}$, 1/мин	0,45	0,9	1,3	1,8	2,5	0,5	1,0	1,5	2	2,5

Задача №2.

Авиационная техническая база (АТБ) имеет одно место для технического обслуживания самолетов, которые прибывают на обслуживание случайным образом, и если их не могут сразу обслужить, они становятся в очередь. На длину очереди ограничений нет.

Промежутки времени t между двумя последовательными прибытиями самолетов удовлетворяют экспоненциальному закону с параметром λ. Время обслуживания на АТБ также имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Значения λ и μ приведены в таблице 6.3.

Определить:

вероятность простоя АТБ - P_o,

среднюю длину очереди - $\bar{r}$,

среднее время нахождения в очереди - $\overline{t_{ож}}$,

общее время обслуживания в АТБ.

Значения параметров

Таблица 6.3.

N вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ, 1/сутки	1	2	3	4	5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
μ, 1/час	0,1	0,1	0,15	0,2	0,25	0,15	0,15	0,15	0,2	0,25

Задача № 3.

В АТБ в ангаре имеется n мест для технического обслуживания самолетов и перед ангаром m стоянок для ожидания обслуживания. Поток прибывающих на обслуживание самолетов - пуассоновский с параметром λ, время технического обслуживания - случайная величина, распределенная по экспоненциональному закону с параметром μ.

Для вариантов значений n, m, λ и μ, приведенных в таблице 6.4, определить:

вероятность простоя АТБ – P_0,

вероятность того, что прибывающему самолету будет отказано в обслуживании $P_{отк}$,

среднее число занятых мест обслуживания - $\bar{z}$,

среднее число самолетов, стоящих в очереди на обслуживание - $\bar{r}$,

среднее время ожидания в очереди - $\overline{t_{ож}}$,

общее время, затраченное на обслуживание - $\overline{t_{сис}}$.

Значения параметров

Таблица 6.4

N вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
m	3	4	5	6	2	3	4	5	1	2	3	4
λ, 1/сутки	3,5	4,5	5,5	6,5	2,5	3,5	4,5	5,5	1,5	2,5	3,5	4,5
μ, 1/час	0,15	0,2	0,25	0,3	0,15	0,15	0,2	0,25	0,15	0,15	0,15	0,2

Таблица 6.1.

Расчетные формулы основных характеристик СМО типов М/М.

NN n/n	Характеристики СМО	Типы СМО			
		M/M/1/m	M/M/1/∞ (p<1)	M/M/n/m	M/M/n/0
1	2	3	4	5	6
1	Вероятность простоя (СМО свободна) – P_0	$\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$	$1-\rho$	$\left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}*\frac{\frac{\rho}{n}-(\frac{\rho}{n})^{m+1}}{1-\frac{\rho}{n}}\right]^{-1}$	$\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}$
2	Вероятность отказа – $P_{отк}$	$\frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$ при $\rho=1;\frac{\rho^{m+1}}{m+2}$	0	$\frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}P_0$	$\frac{\rho^n}{n!}P_0$
3	Относительная пропускная способность – q	$\frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}$	1	$1-P_{отк}$	$1-P_{отк}$
4	Абсолютная пропускная способность – A	λq	λ	λq	λq
5	Среднее число занятых каналов - $\bar{z}$	-	-	$\rho\left(1-\frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}P_0\right)=\frac{A}{\mu}$	$\frac{A}{\mu}=\frac{\lambda(1-P_{отк})}{\mu}=\rho(1-P_{отк})$

Продолжение таблицы 6.1.

1	2	3	4	5	6
6	Длина очереди - $\bar{r}$	$\frac{\rho^2\left[1-\rho^m(m+1-m\rho)\right]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}$	$\frac{\rho^2}{1-\rho}$	$\frac{\rho^{n+1}}{nn!}P_0\left[1+2\frac{\rho}{n}+3\left(\frac{\rho}{n}\right)^2+\ldots+m\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m-1}\right]$	0
7	Среднее число заявок под обслуживанием - $\bar{\omega}$	$\frac{\rho-\rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}$	ρ	$\bar{z}$	$\bar{z}$
8	Общее число заявок в системе - k	$\bar{r}+\bar{\omega}$	$\frac{\rho}{1-\rho}$	$\bar{z}+\bar{r}$	$\bar{z}$
9	Среднее время ожидания в системе - $\overline{t_{ож}}$	$\frac{\bar{r}}{\lambda}$	$\frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1-\rho}$	$\frac{\bar{r}}{\lambda}$	0
10	Общее время пребывания в системе - $t_{сис}$	$\frac{\bar{r}}{\lambda}+\frac{q}{\mu}$	$\frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1-\rho}$	$t_{ож}+\frac{q}{\mu}$	$\frac{q}{\mu}$