Раздел 5. Система материальных точек. Движение абсолютно твердого тела

Тема 1. Кинематика и динамика абсолютно твердого тела

Тема 2. Момент инерции. Сохранение момента импульса

Тема 3. Энергия движущегося АТТ. Качение. Гироскоп

Для работы с тестами скорректируйте Word:
Сервис→Макрос→Безопасность→Низкая

Тема 1. Кинематика и динамика абсолютно твердого тела

П.1. Модели тел.

П.2. Типы движений АТТ. Кинематика АТТ.

П.3. Динамика поступательного движения.

П.4.Динамика вращательного движения АТТ.

П.5. Момент импульса и момент инерции тела.

П.1. Модели тел

<u>Телами</u> называются объекты, размерами которых нельзя пренебрегать.

<u>Частицы</u> это объекты, <u>размерами</u> которых можно <u>пренебречь</u>, их моделируют с помощью <u>модели МТ</u>.

Для описания движения тел существует 2 группы моделей:

1) Система материальных точек (СМТ)

2) Сплошная среда (сплошное тело).

В первой модели считается, что тело состоит из частиц, между которыми <u>пустота</u>.

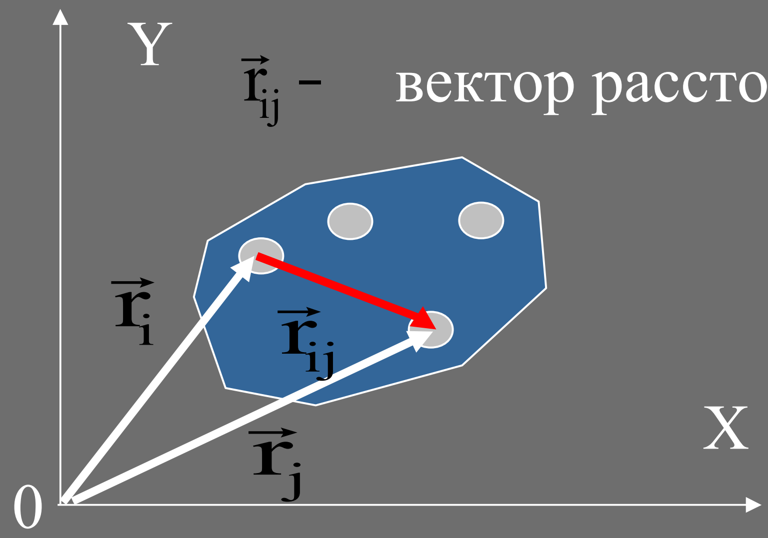
Во второй модели считается, что материя заполняет объем тела <u>непрерывно</u>.

<u>Система материальных точек</u> – это модель, являющаяся совокупностью нескольких материальных точек (2-х и больше).

Расстояние между точками является конечным. Каждая МТ в такой СМТ моделирует частицу тела.

<u>Абсолютно твердое тело</u> (АТТ) – это такая СМТ, взаимное расположение которых не меняется, или сплошное тело, форма и размеры которого не изменяются.

$\vec{r}_{ij}$ – вектор расстояния.



$$\left|\vec{r}_{ij}\right| = \text{const} \quad \text{или} \quad \Delta \vec{r}_{ij} = 0.$$

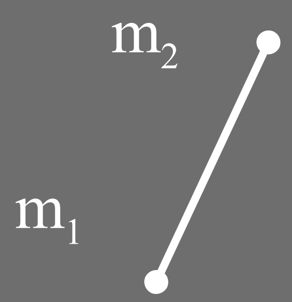
Математическая запись данных свойств <u>реальных</u> твердых тел $\Delta r_{ij} << r_{ij}$.

Модель АТТ, применяется для описания реальных тел, у которых изменением расстояния между частицами можно пренебречь.

<u>Абсолютно упругое тело</u> (АУТ) это СМТ, у которой взаимное расположение МТ (форма тела) полностью восстанавливается после снятия воздействия.

До	Во время	После воздействия
$\vec{r}_{ij}$	$\vec{r}_{ij} + \Delta\,\vec{r}_{ij}$	$\vec{r}_{ij}$

<u>«Гантель»</u> (простейшая визуальная модель АТТ) – это система из двух частиц, соединенных идеальным (невесомым и абсолютно твердым) стержнем.



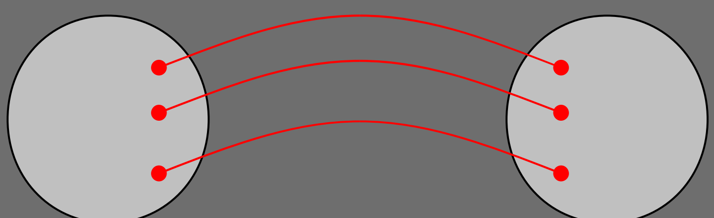
Абсолютно упругие шары («частицы») имеют размеры много меньше, чем расстояния между их центрами (длина стержня).

П.2. Типы движений АТТ. Кинематика АТТ.

<u>Проблема:</u> Анализ движения АТТ является весьма сложной задачей. Как его упростить?

<u>Решение:</u> экспериментальные и теоретические исследования показали, что существуют основные движения, из которых можно «составить» любое движение АТТ.

1) ***<u>Поступательное</u>* движение – движение, при котором траектории всех точек одинаковы и параллельно смещены.**



$$\vec{v}_i = \vec{v}_j = \vec{v}.$$

Тогда можно анализировать движение только одной точки, остальные движутся точно так же.

2) *<u>Вращательное</u> движение – все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, а угловые скорости одинаковые:*

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_j = \vec{\omega}.$$

<u>Осью вращения</u> называется прямая, на которой лежат центры всех окружностей, по которым движутся все точки тела.

Для МТ, движущейся по окружности: $\vec{v}_i = \left[\vec{\omega}_i; \vec{r}_i\right].$

Произвольное движение АТТ можно представить как совокупность поступательного и вращательного движения вокруг оси, которая тоже может двигаться.

ТЕСТ

Скорость МТ при произвольном движении АТТ:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^{\text{поступ}} + \vec{v}_i^{\text{вращ}} = \vec{v} + \left[\vec{\omega}\,;\vec{r}_i\right].$$

Кинематическими характеристиками АТТ будет совокупность <u>кинематических характеристик поступательного движения</u>

$$\vec{R}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

$\vec{R}$ - радиус–вектор некоторой точки, связанной с телом,

и <u>кинематических характеристик вращательного движения</u>

$$\varphi(t), \quad |\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

φ – угол поворота некоторой прямой, связанной с телом, относительно фиксированной оси *x*.

ТЕСТ ТЕСТ

П.3. Динамика поступательного движения

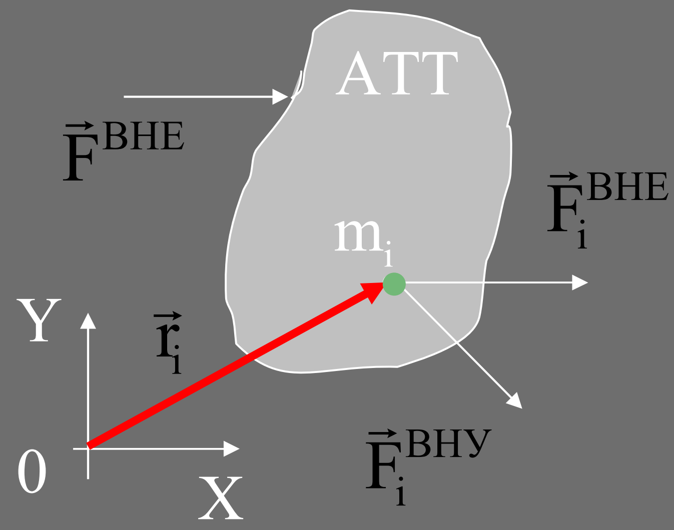
Динамика связывает характеристики движения (динамические) с характеристиками внешних воздействий.

Рассмотрим некоторую «выделенную» точку, связанную с телом.

Потребуем, чтобы она двигалась так, как будто в ней сосредоточена вся масса, и к ней приложены все внешние силы, действующие на тело.

Ее будем называть центром инерции.

Рассмотрим одну из точек тела, имеющую массу m_i и радиус-вектор $\vec{r}_i$.



Используем II закон Ньютона для одной МТ:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{ВНЕ} + \vec{F}_i^{ВНУ}.$$

Учтем, что для внутренних сил взаимодействия выполняется III-й закон Ньютона: $\vec{F}_{ij}^{ВНУ} = -\vec{F}_{ji}^{ВНУ}$.

Для точек тела все скорости и ускорения одинаковы, и их можно вынести за знак суммирования:

$$\sum \left(m_i \frac{d\vec{v}_{Ц.И.}}{dt}\right) = \vec{F}_{ВНЕ} \Rightarrow \frac{d\vec{v}_{Ц.И.}}{dt} \sum m_i = \vec{F}_{ВНЕ} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}_{Ц.И.}}{dt} = \vec{F}_{ВНЕ}.$$

Где $m = \sum m_i$.

Использовав определение ускорения, получим $m\vec{a}_{Ц.И.} = \vec{F}_{ВНЕ}$

- II-й закон Ньютона для поступательного движения АТТ.

Динамической характеристикой поступательного движения АТТ является импульс $\vec{P}_{ТЕЛА} = m\vec{V}_{Ц.И.}$

Итог: *Центр инерции – это точка, связанная с телом и движущаяся так, как будто в ней сосредоточена вся масса тела и к ней приложены все силы.*

Задача: Получить формулу связи координаты центра инерции тела с координатами точек тела.

Импульс тела есть сумма импульсов всех его точек

$$\vec{P}_{\text{ТЕЛА}} = \sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{v}_i).$$

Для поступательного движения $\sum (m_i \vec{v}_i) = (\vec{v}_{\text{Ц.И.}}) \sum m_i.$

Делим на сумму масс слева и справа: $\vec{v}_{\text{Ц.И.}} = \dfrac{\sum (m_i \vec{v}_i)}{\sum m_i}.$

Используем определение скорости:

$$\vec{v}_{\text{Ц.И.}} = \frac{d\vec{R}_{\text{Ц.И.}}}{dt} = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right).$$

Массу вносим в скобки и под знак дифференцирования, меняем местами операции дифференцирования и суммирования, сумму масс вносим под знак дифференцирования и под знак суммирования. Получаем

$$\frac{d\vec{R}_{\text{Ц.И.}}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum \frac{m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}.$$

Если равны производные, то равны и сами функции (с точностью до константы, которую можно считать равной 0):

$$\vec{R}_{\text{Ц.И.}} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}$$

- формула для вычисления координаты центра инерции АТТ (системы МТ).

<u>Задача решена.</u> Получено уравнение связи координаты центра инерции с координатами точек тела.

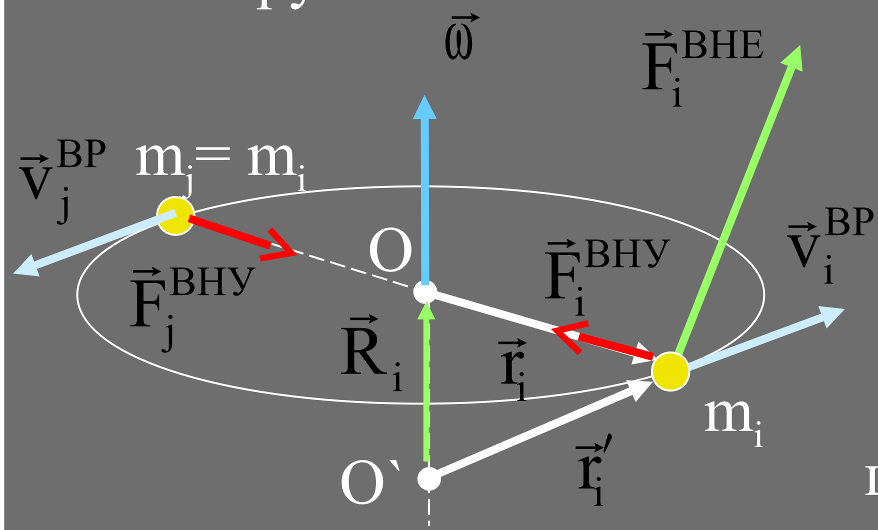
ТЕСТ

П.4.Динамика вращательного движения АТТ.

Проблема: Какова динамическая характеристика и каково динамическое уравнение для вращательного движения АТТ?

Пусть поступательного движения нет, а есть только вращательное, и каждая точка тела движется по окружности.

Задача: Получить динамическое уравнение для движения МТ по окружности.



$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{R}_i, \quad \frac{d\vec{r}_i'}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i.$$

У симметричного тела есть $m_j = m_i$,

$$\vec{r}_j = -\vec{r}_i, \quad \vec{v}_j^{ВР} = -\vec{v}_i^{ВР}$$

центр инерции в т.О и неподвижен,

$$\vec{F}_j^{ВНУ} = -\vec{F}_i^{ВНУ}.$$

Пусть $\vec{F}_i^{ВНЕ} = 0$. Импульс МТ $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \neq const$.

Не меняется момент импульса относительно О: $\vec{L}_i = [\vec{r}_i; \vec{p}_i]$,

относительно О`: $\vec{L}'_i = [\vec{r}'_i; \vec{p}_i]$.

Динамическое уравнение для произвольного движения МТ: $\dfrac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{СУМ}$.

Умножаем векторно на $\vec{r}_i$ слева и справа. Получаем:

$$\left[\vec{r}_i; \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right] = \left[\vec{r}_i; \vec{F}_i^{СУМ}\right].$$

Умножаем векторно на $\vec{r}'_i$ слева и справа. Получаем:

$$\left[\vec{r}'_i; \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right] = \left[\vec{r}'_i; \vec{F}_i^{СУМ}\right].$$

Используем правила дифференцирования произведения:

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_i;\vec{p}_i] = \left[\vec{r}_i;\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right] + \cancel{\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt};\vec{p}_i\right]}.$$

Поскольку m_i - скаляр, то $\vec{v}_i \parallel m_i\vec{v}_i$, и второе слагаемое равно 0.

Следовательно $$\frac{d}{dt}[\vec{r}_i;\vec{p}_i] = [\vec{r}_i;\vec{F}_i^{\text{СУМ}}].$$

В свою очередь $$\frac{d}{dt}[\vec{r}_i';\vec{p}_i] = [\vec{r}_i';\vec{F}_i^{\text{СУМ}}].$$

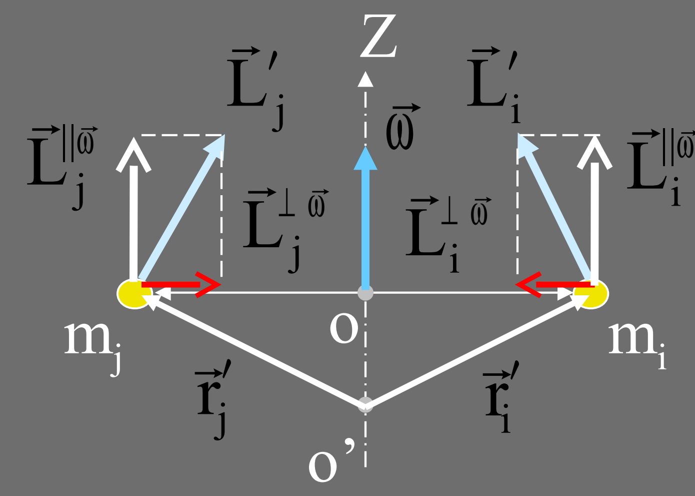
ВЫВОД

$\left[\vec{r}_i'; \vec{p}_i\right] = \vec{L}_i'$ - есть динамическая характеристика движения МТ, по окружности, называемая ***моментом импульса МТ*** ***относительно точки О’***.

$\left[\vec{r}_i'; \vec{F}_i^{СУМ}\right] = \vec{M}_i^{СУМ}$ - есть характеристика воздействия при движении МТ по окружности, называем ее ***моментом силы*** ***относительно О’***.

$\frac{d\vec{L}_i'}{dt} = \vec{M}_i^{СУМ}$ - есть ***динамическое уравнение*** для движения МТ по окружности.

Разложим $\vec{L}'_i = \vec{L}_i^{\|\vec{\omega}} + \vec{L}_i^{\perp\vec{\omega}}$.



Если ось вращения есть ось <u>симметрии</u> (рис.), то для любой точки с номером i найдется точка тела с номером j, для которой

$$\vec{L}_j^{\perp\vec{\omega}} = -\vec{L}_i^{\perp\vec{\omega}},\ \vec{L}_j^{\perp\vec{\omega}} + \vec{L}_i^{\perp\vec{\omega}} = 0.$$

Найдем сумму моментов импульса $\vec{L} = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{L}'_i = \sum\limits_{i=1}^{N} (\vec{L}_i^{\|\vec{\omega}} + \cancel{\vec{L}_i^{\perp\vec{\omega}}})$.

В этом случае $\vec{L} = \sum \vec{L}_i^{\|\vec{\omega}} = \sum [\vec{r}_i; \vec{p}_i] = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{L}'_{iZ}$ и $\vec{L} \,\|\, \vec{\omega}$

Если ось вращения не является осью симметрии, тогда момент импульса и угловая скорость <u>не коллинеарны</u>. Такие случаи мы не будем исследовать.

При вращательном движении АТТ $\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_j = \vec{\omega}, \ \vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$.

Для одной точки АТТ, вращающегося вокруг оси симметрии

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i; \vec{p}_i] = [\vec{r}_i; m_i \vec{v}_i^{\text{вр.}}] = m_i [\vec{r}_i [\vec{\omega}; \vec{r}_i]] \rightarrow$$

двойное векторное произведение: $[\vec{A}[\vec{B}; \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$.

Т.к. $\vec{r}_i \perp \vec{\omega}$, то $(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) = 0$.

Окончательно $\vec{L}_i = m_i \{\vec{\omega}(\vec{r}_i \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}_i \vec{\omega})\} = m_i \vec{\omega} r_i^2$.

Обозначим $I_i = m_i r_i^2$ – коэффициент пропорциональности

между кинематической $\vec{\omega}_i$ и динамической характеристикой $\vec{L}_i$.

$\vec{L}_i = I_i \vec{\omega}_i$. I_i отражает инертные свойства МТ, движущейся по окружности, и называется <u>моментом инерции</u> МТ.

Находим $\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} I_i \vec{\omega}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} I_i \vec{\omega} = \vec{\omega} \sum\limits_{i=1}^{N} I_i = I \cdot \vec{\omega} \equiv \vec{L}.$

Мы получили выражение для момента импульса всего тела:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = I \cdot \vec{\omega}.$$

Рассмотрим силы $\vec{F}_i^{СУМ} = \vec{F}_i^{ВНУ} + \vec{F}_i^{ВНЕ}$.

Умножим векторно слева и справа на $\vec{r}_i$: $\left[\vec{r}_i;\vec{F}_i^{СУМ}\right] = \left[\vec{r}_i;\vec{F}_i^{ВНУ}\right] + \left[\vec{r}_i;\vec{F}_i^{ВНЕ}\right]$.

$\left[\vec{r}_i;\vec{F}_i^{ВНУ}\right] = 0$, т.к. векторы коллинеарны. Тогда

$$\left[\vec{r}_i;\vec{F}_i^{СУМ}\right] = \left[\vec{r}_i;\vec{F}_i^{ВНЕ}\right], \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i;\vec{p}_i\right] = \left[\vec{r}_i;\vec{F}_i^{ВНЕ}\right].$$

Умножим векторно слева и справа на $\vec{r}_i'$: $\left[\vec{r}_i';\vec{F}_i^{СУМ}\right] = \left[\vec{r}_i';\vec{F}_i^{ВНУ}\right] + \left[\vec{r}_i';\vec{F}_i^{ВНЕ}\right]$.

Учтем, что $\left[\vec{r}_j';\vec{F}_j^{ВНУ}\right] = -\left[\vec{r}_i';\vec{F}_i^{ВНУ}\right]$,

$$\sum\left[\vec{r}_i';\vec{F}_i^{СУМ}\right] = \sum\left[\vec{r}_i';\vec{F}_i^{ВНЕ}\right], \text{ и } \sum\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i';\vec{p}_i\right] = \sum\left[\vec{r}_i';\vec{F}_i^{ВНЕ}\right].$$

Для симметричного тела

$$\sum\left[\vec{r}_i';\vec{p}_i\right] = \sum\left[\vec{r}_i;\vec{p}_i\right], \qquad \sum\left[\vec{r}_i';\vec{F}_i^{ВНЕ}\right] = \sum\left[\vec{r}_i;\vec{F}_i^{ВНЕ}\right].$$

Для симметричного тела $\vec{M}_{\text{СУМ}}^{\text{ВНЕ}} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i ; \vec{F}_i^{\text{ВНЕ}}\right]$

есть характеристика <u>внешнего воздействия</u>, определяющая <u>быстроту изменения</u> момента импульса АТТ, которую можно называть <u>***суммарным моментом силы***</u>.

Просуммируем динамические уравнения для всех точек АТТ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{СУМ}}^{\text{ВНЕ}}$$

- ***динамическое уравнение для вращательного движения АТТ.***

П.5. Момент импульса и момент инерции тела.

Задача: Связать момент импульса АТТ с угловой скоростью для вращения вокруг оси симметрии.

Решение: $\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum I_i \vec{\omega} = \vec{\omega} \sum I_i = \vec{\omega} I,$ где

$$I = \sum I_i = \sum m_i r_i^2 .$$

Момент инерции тела есть аддитивная характеристика инертных свойств тела при вращении.

Момент импульса есть векторная динамическая характеристика вращательного движения, пропорциональная угловой скорости.

$$\vec{L} = I\vec{\omega} .$$

ТЕСТ

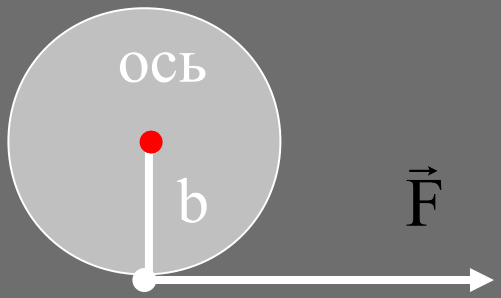
Если вращение происходит вокруг оси симметрии, то $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$.

Замечание 1. Для одного и того же тела момент инерции зависит от расположения оси вращения относительно тела.

Замечание 2: Если ось не закреплена (свободна), то возможно вращение, при котором $\vec{L}$ не параллелен $\vec{\omega}$ и тогда I – это тензор (матрица из девяти чисел).

Замечание 3. Модуль вектора момента силы есть произведение силы на плечо.

Плечо – это кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы.



$M = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot b$, где $b = r \cdot \sin\alpha$ - плечо силы.

Задача: Получить II-закон Ньютона для вращательного движения.

Используем ДУ для вращательного движения АТТ:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{СУМ}.$$

Определение момента импульса: $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

Пусть I=const, тогда из динамического уравнения для момента импульса можно получить $\frac{d}{dt}\left(I\vec{\omega}\right) = \vec{M}_{СУМ}$.

Выносим I за знак дифференцирования: $I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_{СУМ}$.

Угловое ускорение: $\vec{\varepsilon} \equiv \vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. Окончательно $I \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}_{СУМ}$.

Это есть II-закон Ньютона для вращательного движения.