Тема 2. Момент инерции. Сохранение момента импульса.

П.1. Момент инерции тела

П.2.Моменты инерции некоторых тел.

П.3.Теорема Штейнера.

П.4.Закон сохранения момента импульса.

П.5.Примеры использования законов сохранения момента импу

П.1. Момент инерции тела

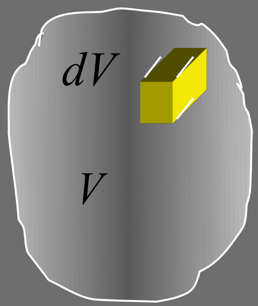
Проблема: Как вычислять характеристику инертных свойств при вращательном движении – момент инерции АТТ?

Известно: Для одной МТ: $I_i = m_i r_i^2$.

Тело есть СМТ, для которой: $I = \sum_{i=1}^{N} I_i = \sum m_i r_i^2$.

Для тела макроскопических размеров удобно использовать другую модель - «сплошная среда» - и представлять это тело в качестве совокупности физически малых объемов dV.

ТЕСТ



$$V = \sum_{V} dV\,, \quad V = \int_{V} dV \qquad \rho = \frac{dm}{dV}.$$

dm = ρ·dV – элементарная масса (масса элементарного т.е. физически малого объема).

Плотность есть отношение элементарной массы к величине элементарного объема, в котором эта масса содержится.

Замечание 1. Физически малый объем не бесконечно мал, он мал физически. Он мал настолько, что внутри объема можно считать плотность вещества неизменной (ρ = const), но не слишком мал, в нем должно быть очень много атомов.

Замечание 2. При вращении АТТ все точки элементарного объема должны двигаться по окружностям одного радиуса.

Элементарный момент инерции равен массе элементарного объема, умноженной на квадрат радиуса окружности, по которой движется элемент.

$\boxed{dI = dm \cdot r^2.}$

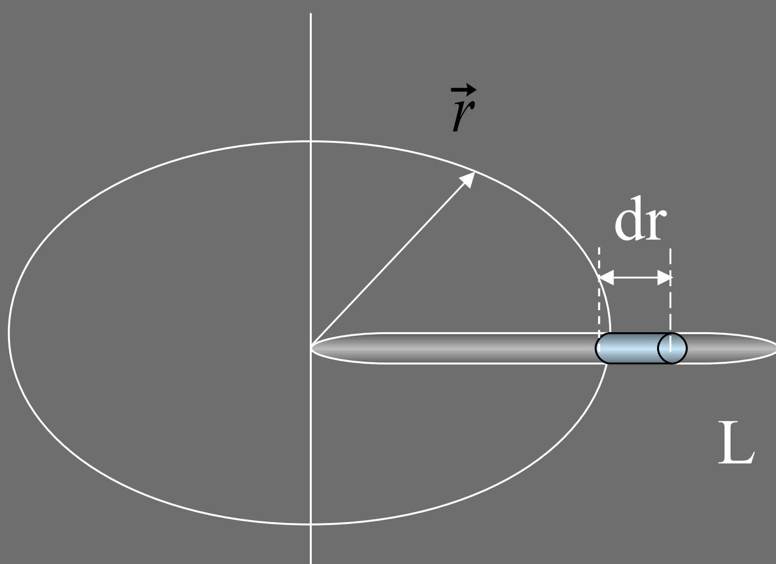
Для тела

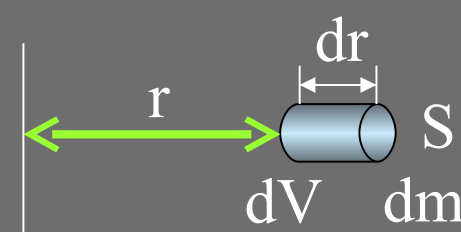
$$I = \int_V \rho r^2 \, dV$$ - формула расчета момента инерции тела.

П.2.Моменты инерции некоторых тел.

Задача 1. Найти момент инерции тонкого однородного стержня с осью, проходящей через его конец, причем ось $\perp$ стержню.

Длина стержня – L, масса – m, плотность ρ=const .





$dV = S\,dr$, $dm = \rho\,dV$.

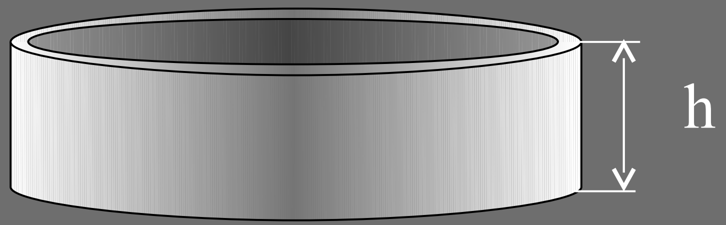
Т.к. ρ = const, то $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{SL}$.

Вычисляем:

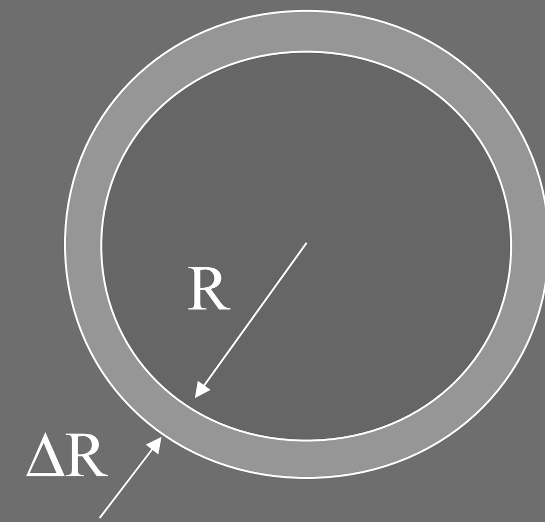
$$I=\int\limits_V dI=\int\limits_V dm\cdot r^2=\int\limits_0^L \rho\, S dr\cdot r^2=\rho S\int\limits_0^L r^2 dr=\rho S\,\frac{r^3}{3}\Big|_0^L=$$

$$=\rho S\left(\frac{L^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)=\rho S\,\frac{L^3}{3}\;\Rightarrow\quad I=\frac{mL^2}{3}$$ - ответ.

Задача 2. Найти момент инерции однородного обруча (тонкого кольца) массы m, радиуса R.



Вид сверху



Ширина кольца $\Delta R \ll R$.

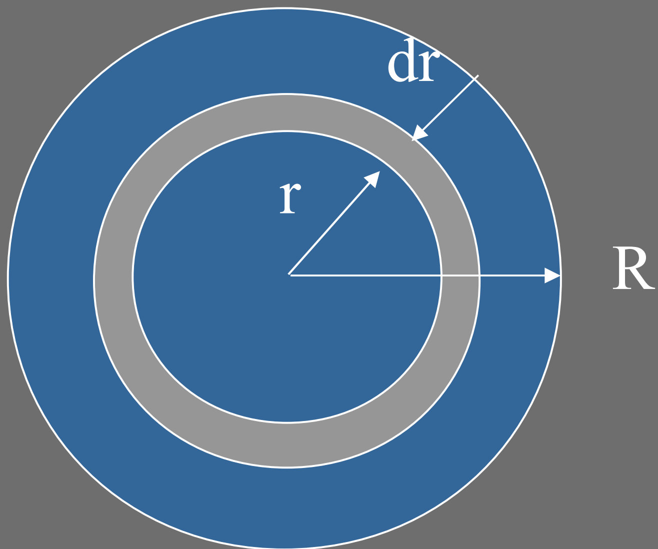
Элементарный объем есть объем кольца (все его элементы движутся по окружностям одного и того же радиуса):

$$dV = V_{кольца}\ ,\ dm = m_{кольца}\ ,\ r = R\ ,$$

$$\boxed{I = m_{кольца} R^2}$$ - ответ.

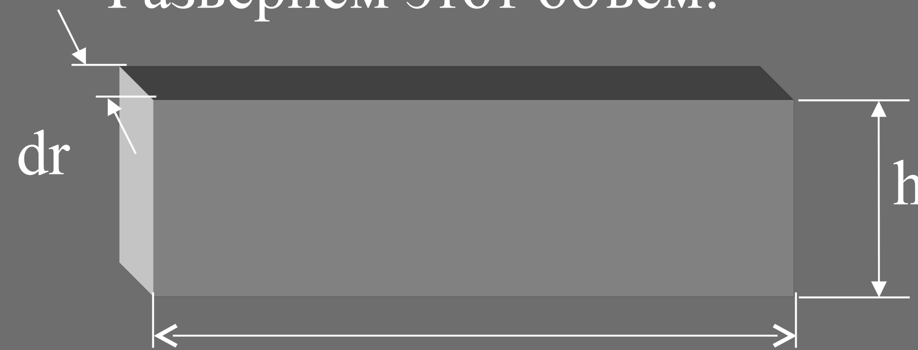
Задача 3. Найти момент инерции однородного цилиндра (диска) массы m , радиуса R.

Плотность ρ=const.



Элементарный объем – кольцо.

Развернем этот объем:



$L = 2\pi r$

$dV = 2\pi r \cdot h dr.$

$$I = \int_0^R \rho\, dV\left(r^2\right) = \rho \int_0^R dV\left(r^2\right) = \rho \int_0^R 2\pi r \cdot h dr\left(r^2\right)$$

$$= \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = 2\pi h\rho \frac{R^4}{4}.$$

Учтем, что $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h}$, тогда $I = \frac{mR^2}{2}$ - ответ.

<u>Задача 4.</u> Найти момент инерции однородной трубы массы m с внешним радиусом R_1 и внутренним – R_2.

$$I = \int_{R_2}^{R_1} \rho \cdot dV(r^2) = 2\pi h\rho \int_{R_2}^{R_1} r^3 dr = 2\pi h\rho \left(\frac{R_1^4}{4} - \frac{R_2^4}{4} \right).$$

Учтем, что $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi h \left(R_1^2 - R_2^2\right)}$, тогда $I = \frac{m}{2} \frac{R_1^4 - R_2^4}{R_1^2 - R_2^2}$ - ответ.

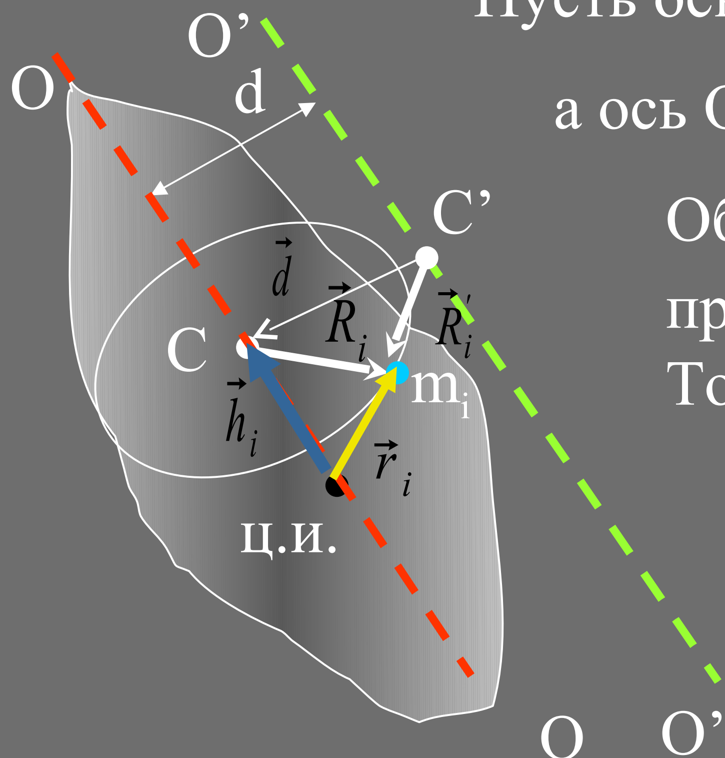
ТЕСТ ТЕСТ

П.3.Теорема Штейнера.

Проблема: Как связаны моменты инерции относительно разных осей вращения?

Пусть ось ОО проходит через центр инерции,

а ось О\`О\` сдвинута на расстояние d.



Обозначим I_0 момент инерции тела при его вращении вокруг этой оси. Тогда

$$I_0 = \sum m_i R_i^2 .$$

Найдем момент инерции тела I\` при его вращении вокруг оси O'O' , сдвинутой на d.

$$\vec{d} \perp \vec{h}_i .$$

$$\vec{R}'_i = \vec{d} + \vec{R}_i , \quad (\vec{R}'_i)^2 = (\vec{R}_i + \vec{d}\,)^2 .$$

$$I' = \sum m_i \left(R_i'\right)^2 = \sum m_i R_i^2 + \sum \left(2\vec{d} \cdot m_i \vec{R}_i\right) + d^2 \sum m_i .$$

$$\vec{d} \cdot \vec{R}_i = \vec{d}\left(\vec{r}_i - \vec{h}_i\right) = \vec{d} \cdot \vec{r}_i - \underbrace{\vec{d} \cdot \vec{h}_i}_{=0,\ т.к.\ \vec{d} \perp \vec{h}_i} = \vec{d} \cdot \vec{r}_i \quad \Rightarrow$$

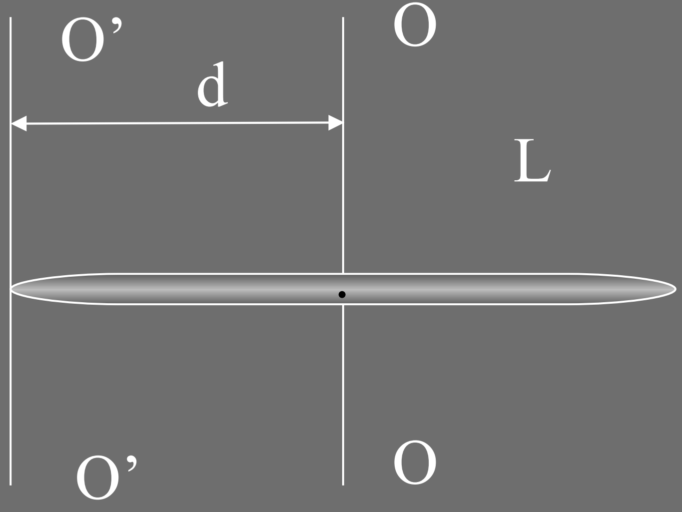
$$\sum \left(2\vec{d} \cdot m_i \vec{R}_i\right) = 2\vec{d} \sum m_i \vec{r}_i = 2\vec{d} \cdot m \vec{R}_{Ц.И.} = 0, \qquad т.к.\ \vec{R}_{Ц.И.} = 0$$

Окончательно

$$I' = I_0 + d^2 m$$ - теорема Штейнера.

ТЕСТ

<u>Задача:</u> Найти момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр инерции.



Известно: $I' = \frac{mL^2}{3}.$

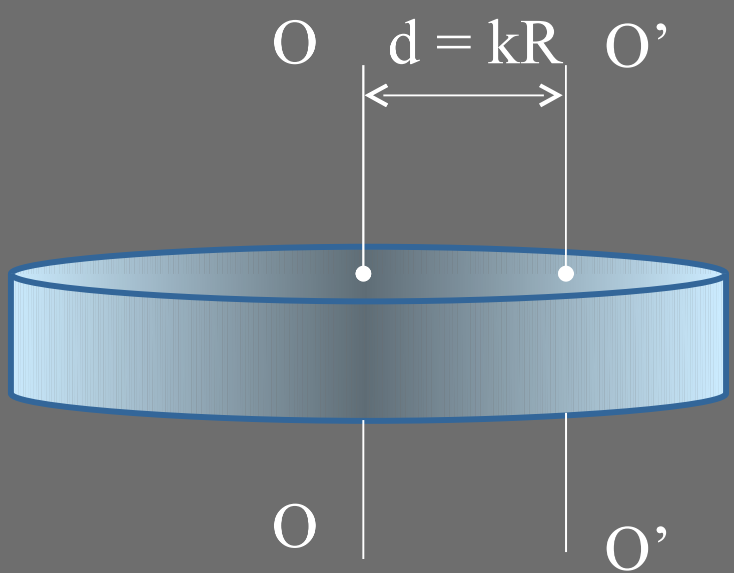
По теореме Штейнера:

$$I' = I_0 + d^2 \cdot m.$$

Т.к. $d = \frac{L}{2},$ то $I_0 = I' - d^2 m = \frac{mL^2}{3} - \frac{L^2}{4} m = \frac{mL^2}{12}$ - ответ.

ТЕСТ

Задача 2. Найти момент инерции диска относительно оси, параллельной оси симметрии и отстоящей от нее на некоторую часть радиуса: d = kR.



Известно: $I_0 = \frac{mR^2}{2}.$

$$I' = I_0 + d^2 m = \frac{mR^2}{2} + k^2 R^2 m = \left(\frac{1}{2} + k^2\right) mR^2$$ - ответ.

ТЕСТ

П.4.Закон сохранения момента импульса.

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{сум}$ - динамическое уравнение для момента импульса (вращательного движения АТТ). Здесь

$$\vec{M}_{сум} = \left[\vec{r}\,;\vec{F}_{сум}\right]$$

Закон сохранения момента импульса:

Момент импульса сохраняется, если сумма моментов всех внешних сил равна 0.

$$\sum \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots\ldots = 0\,.$$

ТЕСТ

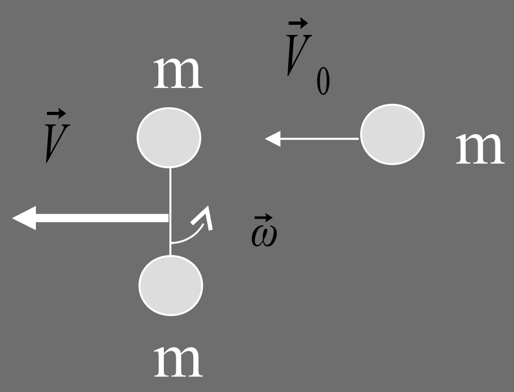
ТЕСТ

Частный случай

Проекция на Z: *L_Z сохраняется (L_Z=const), если $\sum(M_i)_Z = 0$.*

Проекция момента импульса тела на некоторую ось сохраняется, если равна нулю сумма проекций на эту ось моментов всех сил.

*СРС ½ стр. Найти скорость поступательного и вращательного движения изначально покоящейся гантели, с которой упруго сталкивается шар, движущийся со скоростью V_0 и имеющий ту же массу, что и один шар гантели.

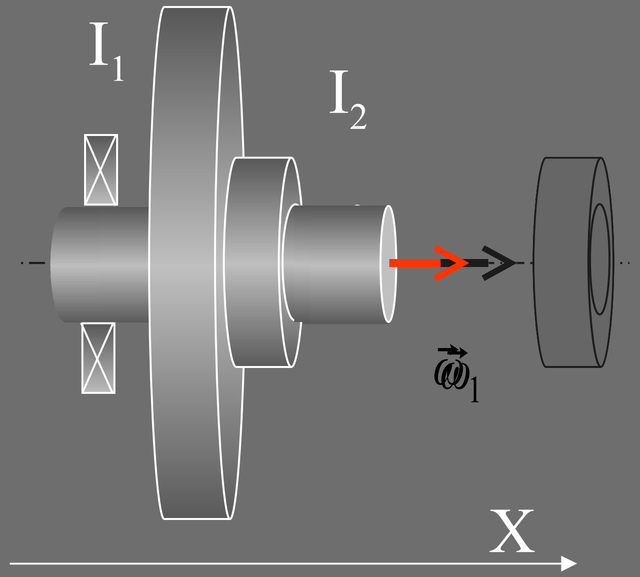


ТЕСТ

П.5.Примеры использования законов сохранения момента импульса.

Задача 1.

На закрепленной оси вращается с угловой скоростью ω_1 диск, имеющий момент инерции I_1. По оси без трения скользит шайба, имеющая момент инерции I_2. Найти угловую скорость ω, после того, как шайба прилипнет к диску.



Объекты: диск, с закрепленный осью (АТТ), шайба (АТТ).

Процесс: столкновения шайбы с диском (модель – абсолютно неупругий удар).

Окружение – гравитационное поле Земли (однородное) и подшипники (идеальные, без трения).

Выбор основных законов:

Используем закон сохранения проекции момента импульса для оси X: $L_X = const$, т.к. $M_X = 0$.

$$L_{1X}^{ДО} + L_{2X}^{ДО} = L_{1X}^{ПОСЛЕ} + L_{2X}^{ПОСЛЕ}$$

Для данной задачи: $I_1 \omega_1 + 0 = I_1 \omega + I_2 \omega,$

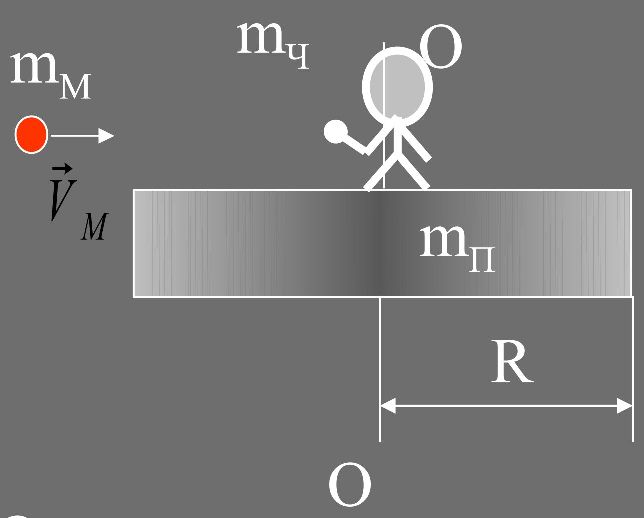
отсюда $\omega = \omega_1 \frac{I_1}{I_1 + I_2}$ - ответ в общем виде.

ВЫВОД: Угловая скорость вращения уменьшится и часть кинетической энергии выделится в виде тепла.

ТЕСТ

Задача 2.

Человек массы $m_ч$ стоит на краю неподвижной платформы радиуса R и массы $m_П$, которая имеет форму диска и может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси. Человек ловит мяч массы $m_М$, летящий горизонтально со скоростью $v_М$, перпендикулярно оси диска (платформы) по касательной. Найти ω системы после задержания мяча.

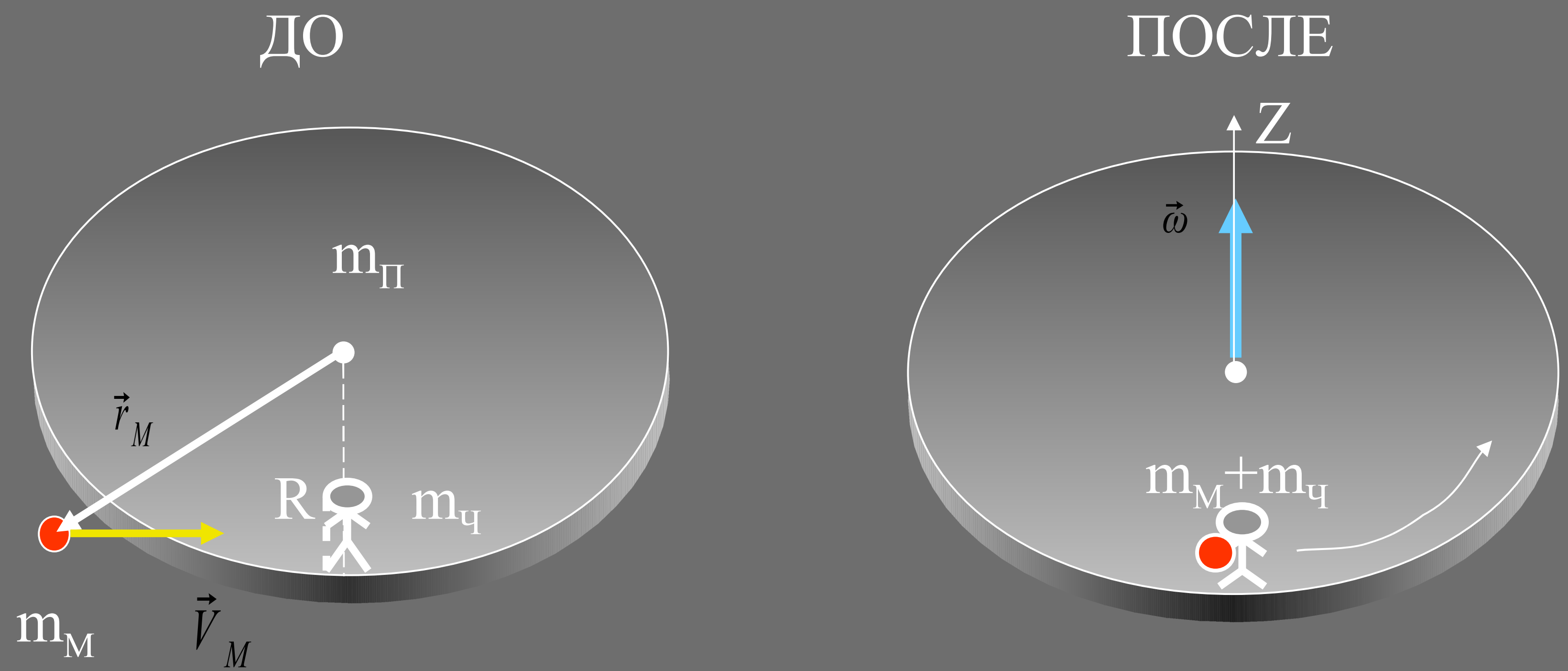


Объекты:

1) Платформа – АТТ, 2) Мяч – МТ.

Процесс: человек ловит мяч (абсолютно неупругий удар).

Окружение: гравитационное поле Земли (однородное) и подшипник, который удерживает ось платформы (идеальный).


ДО
ПОСЛЕ
$m_П$
$\vec{r}_M$
R
$m_Ч$
$m_М$
$\vec{V}_M$
Z
$\vec{\omega}$
$m_М+m_Ч$

Выбор основных законов:

закон сохранения проекции момента импульса $L_Z^{ДО} = L_Z^{ПОСЛЕ}$.

определение $\vec{L}_i = [\vec{r}_i; \vec{p}_i] = I_i \vec{\omega}_i$, $I_{ДИС} = \dfrac{m_{ДИС} R^2_{ДИС}}{2}$.

Для нашей задачи: $L_{1Z}^{до} + L_{2Z}^{до} + L_{3Z}^{до} = L_{1Z}^{после} + L_{2Z}^{после} + L_{3Z}^{после}$

$$\begin{array}{cccccc} \| & \| & \| & \| & \| & \| \\ [\vec{r}_м; \vec{p}_м] & \boxed{+\ 0} & \boxed{+\ 0\ =} & \boxed{\mathrm{I}_1\omega} & \boxed{+\ \mathrm{I}_2\omega} & \boxed{+\ \mathrm{I}_3\omega} \end{array}$$

$$[\vec{r}_M; \vec{p}_M] = m_м [\vec{r}_M; \vec{v}_M] = \omega \cdot \left(m_M R^2 + m_Ч R^2 + \frac{m_П R^2}{2} \right) = mRv_M.$$

После вычислений получаем ответ

$$\omega = \frac{m_M v_M}{R\left(m_M + m_Ч + \frac{m_П}{2}\right)}.$$

ТЕСТ