Тема 2. Энергия, мощность, работа.

П.1. Энергия. Мощность.

П.2. Кинетическая энергия.

П.3. Изменение кинетической энергии. Работа

П.4. Потенциальная энергия.

П.5. Расчет потенциальной энергии для тела в гравитационном поле.

П.6. Механическая энергия. Ее изменение.

П.7. Столкновения

П.1. Энергия. Мощность.

Проблема: найти скалярную динамическую характеристику.

Решение: Ищем то, что сохраняется в отсутствие внешнего воздействия.

Энергия есть скалярная динамическая характеристика, пропорциональная массе.

$E = mc^2$ - релятивистская (полная релятивистская) энергия.

Коэффициентом пропорциональности служит квадрат мировой константы - скорости света.

Он обеспечивает нужную размерность энергии «Джоуль».

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$ - зависимость энергии от скорости.

m_0 – масса покоя, являющаяся константой для данного тела.

$m = \gamma m_0 = m_0 + \Delta m$, где приращение массы $\Delta m \geq 0$.

<u>Следствие:</u> Энергия тела состоит из двух совершенно разных частей – энергии покоя и энергии движения:

$$E = \underbrace{m_0 c^2}_{ЭН.ПОК} + \underbrace{\Delta m c^2}_{ЭН.ДВИЖ} = E_0 + E_K$$

$$\frac{dE}{dt} = W$$ - динамическое уравнение для энергии.

<u>Мощность</u> W есть скалярная характеристика внешнего воздействия, определяющая быстроту изменения энергии со временем.

П.2. Кинетическая энергия.

Задача: исследовать энергию, связанную с движением тела.

Определение: *Кинетической называется энергия тела, связанная с его механическим движением и обращающаяся в ноль в отсутствие этого движения* (при v = 0).

$\boxed{E_K = E - E_0\,,}$ где $E_0 = m_0c^2$, $E = mc^2$.

Эта формула справедлива при любых скоростях движения.

Задача: Получить динамическое уравнение для кинетической энергии.

Используем ДУ для полной релятивистской энергии $\dfrac{dE}{dt} = W \Rightarrow$

$$\frac{d\left(E_0 + E_K\right)}{dt} = W \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_K}{dt} = W\,.$$

ТЕСТ

Задача: Получить выражение кинетической энергии, известное из школьного курса.

Решение: пусть v << c. Тогда

$$E_K = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0c^2 =$$

$$= m_0c^2[(1-v^2/c^2)^{-1/2} - 1]$$

Используем $(1 \pm x)^a = 1 \pm a \cdot x$ для $x << 1$, тогда

$$E_K = m_0c^2[(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}) - 1] = \frac{m_0v^2}{2}$$

и индекс «0» около массы можно не писать.

ТЕСТ

Задача: Установить связь мощности с силой.

Пусть V « c. Тогда m = const.

Дифференцирование кинетической энергии по времени дает:

$$W = \frac{dE_K}{dt} = \frac{m}{2} \cdot \frac{d(V^2)}{dt} = \frac{m}{2} \cdot 2\vec{V} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{V}}{dt}}_{=\vec{a}} = (m \cdot \vec{a}) \cdot \vec{V} = \vec{F} \cdot \vec{V}.$$

$W = (\vec{F} \cdot \vec{V})$ - искомое уравнение связи.

ТЕСТ

ТЕСТ

П.3. Изменение кинетической энергии. Работа

Проблема: Чем определяется изменение кинетической энергии?

Если масса покоя тела остается неизменной, то динамическое уравнение для энергии превращается в ДУ кинетической энергии:

$$\frac{dE_K}{dt} = (\vec{F} \cdot \vec{v}) = (\vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt}).$$

Отсюда изменение кинетической энергии равно:

$$dE_K = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) \equiv dA,$$

где $dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$ называется элементарной работой силы.

Элементарная работа – скалярная характеристика внешнего воздействия, определяющая элементарное изменение кинетической энергии: $dE_К = dA$.

Для перехода от бесконечно малых к конечным величинам применяется процедура интегрирования (суммирование бесконечно малых, количество слагаемых = ∞).

$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} dE_K = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} dA .$$

Работа на конечном участке движения: $A_{12} = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} (\vec F \cdot d\,\vec r).$

Конечное изменение кинетической энергии это

$$\Delta E_K = E_K^{ПОСЛЕ} - E_K^{ДО}$$

Учитывая эти обозначения, получим ***теорему об изменении кинетической энергии тела*** $\Delta E_K = A_{12}.$

$$E_K^{ПОСЛЕ} - E_K^{ДО} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Изменение кинетической энергии равно работе внешних сил.

Замечание: Кинетическая энергия сохраняется когда dA = 0, т.е. когда:

1) $\vec{F} \perp \vec{v}$,

2) в отсутствие внешних воздействий,

3) когда сумма всех сил равна нулю.

ТЕСТ ТЕСТ

П.4. Потенциальная энергия.

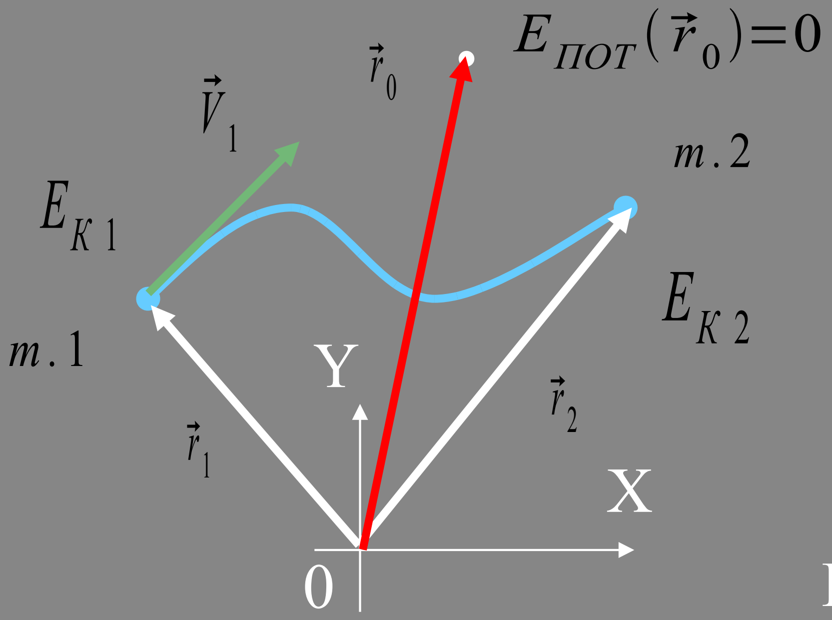
Проблема: Найти способ описания внешнего воздействия на тело с помощью скалярной характеристики, имеющей размерность энергии.

Решение: Для некоторых внешних воздействий можно ввести скалярную характеристику воздействия – потенциальную энергию.

Такие воздействия (взаимодействия) называют потенциальными.

Воздействие (сила, поле) будет потенциальным, если для него работа силы по замкнутому контуру равна 0.

Для потенциальных воздействий работа силы не зависит от формы траектории, по которой тело перемещалось из точки $\vec{r}_1$ в точку $\vec{r}_2$, а зависит только от координат этих точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$.



$$E_{ПОТ}(\vec{r})=\int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0}\vec{F}(r')\cdot d\vec{r}\,'.$$

Замечания:

$$E_{ПОТ}(\vec{r})\equiv U(\vec{r})$$

Если можно, то $\vec{r}_0=\infty.$

Потенциальная энергия есть скалярная характеристика внешнего воздействия, численно равная работе сил поля по перемещению тела из данной точки с координатой $\vec{r}$ *в фиксированную точку с координатой* $\vec{r}_0$ *, в которой потенциальная энергия принята за нуль.*

ТЕСТ ТЕСТ ТЕСТ

П.5. Расчет потенциальной энергии для тела в гравитационном поле.

Задача: Вычислить потенциальную энергию тела массы m, находящегося на расстоянии r от центра сферически симметричной планеты массы M.

Используем закон всемирного тяготения: $F_{ГР} = G\dfrac{mM}{(r)^2}.$

Здесь G – гравитационная постоянная.

По определению потенциальной энергии:

$$E_{ПОТ}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F}\cdot d\vec{r}\,'.$$

Используем формулу для скалярного произведения и учтем, что гравитационная сила направлена против перемещения $d\vec{r}$:

$$E_{ПОТ}^{ГР}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} F_{ГР} \cdot dr' \cdot \underbrace{\cos\phi}_{=-1} =$$

$$= \int_{\vec{r}}^{\infty} G \frac{mM}{(r')^2} \cdot dr'(-1) = GmM(-1)(-1) \cdot \left[\frac{1}{r'}\right]_r^{\infty} = -G\frac{mM}{r}.$$

$$E_{ПОТ}^{ГР} = -G\frac{mM}{r}$$

- искомое выражение для потенциальной энергии тела (МТ массы m) в гравитационном поле, создаваемом материальной точкой или сферически симметричным телом массы М, центр которого совпадает с началом координат.

ТЕСТ

Потенциальная энергия некоторых воздействий.

Для упругого воздействия, подчиняющегося закону Гука $F_{УПР.X} = - kX$:

$$E_{УПР} = \frac{kx^2}{2}.$$

Для электростатического воздействия: $$E_{ЭЛ} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Замечание: $E_{ПОТ}$ нельзя вводить для силы трения и других диссипативных (рассеивающих энергию, непотенциальных) сил.

ТЕСТ

П.6. Механическая энергия. Ее изменение.

<u>Проблема:</u> Как использовать потенциальную энергию?

Пусть воздействие описывается с помощью потенциальной энергии. Тогда <u>изменение</u> потенциальной энергии

$$\Delta E_{ПОТ} = E_{ПОТ}^{КОН} - E_{ПОТ}^{НАЧ} = \int\limits_{\vec{r}_{КОН}}^{\vec{r}_0} \vec{F}\,d\vec{r} - \int\limits_{\vec{r}_{НАЧ}}^{\vec{r}_0} \vec{F}\,d\vec{r} =$$

$$= \int\limits_{\vec{r}_{КОН}}^{\vec{r}_o} \vec{F}\,d\vec{r} + \int\limits_{\vec{r}_o}^{\vec{r}_{КОН}} \vec{F}\,d\vec{r} = \int\limits_{\vec{r}_{КОН}}^{\vec{r}_{НАЧ}} \vec{F}\,d\vec{r} = -\int\limits_{\vec{r}_{НАЧ}}^{\vec{r}_{КОН}} \vec{F}\,d\vec{r} = -A(\vec{r}_{НАЧ} \to \vec{r}_{КОН}).$$

Но эта работа определяет изменение кинетической энергии:

$$\Delta E_К = A_{12} .$$

Тогда $\Delta E_К = - \Delta E_{ПОТ}$ или $\Delta\underbrace{(E_К + E_{ПОТ})}_{E_{МЕХ}} = 0.$

Получили новую характеристику $\boxed{E_{МЕХ} = E_К + E_{ПОТ}}$,

сохраняющуюся <u>при наличии</u> внешнего воздействия, которое описано (учтено) с помощью этой потенциальной энергии (т.е. является потенциальным).

<u>Механическая энергия</u> равна сумме потенциальной и кинетической энергий.

ТЕСТ ТЕСТ

Замечание: При наличии нескольких внешних воздействий, часть из них можно включить в потенциальную энергию (если они потенциальны), а другую часть использовать в виде работы внешних сил, которая будет определять изменение механической энергии:

$$\boxed{\Delta E_{\text{МЕХ}} = A_{12}(\text{остальных воздействий})\ .}$$

Динамическое уравнение для механической энергии:

$$\frac{dE_{МЕХ}}{dt} = W_{ОСТАЛЬНЫХ\ \ ВОЗДЕЙСТВИЙ}\,.$$

П.7. Столкновения

Проблема: Как использовать новые характеристики? Удобно ли их применять?

ПРИМЕР: Столкновением (ударом) называется мгновенное взаимодействие двух или нескольких тел.

Применяется для описания реальных взаимодействий, длительностью которых можно пренебречь в условиях данной задачи.

Реальные взаимодействия, удовлетворяющие указанным требованиями, также называются столкновениями или ударами.

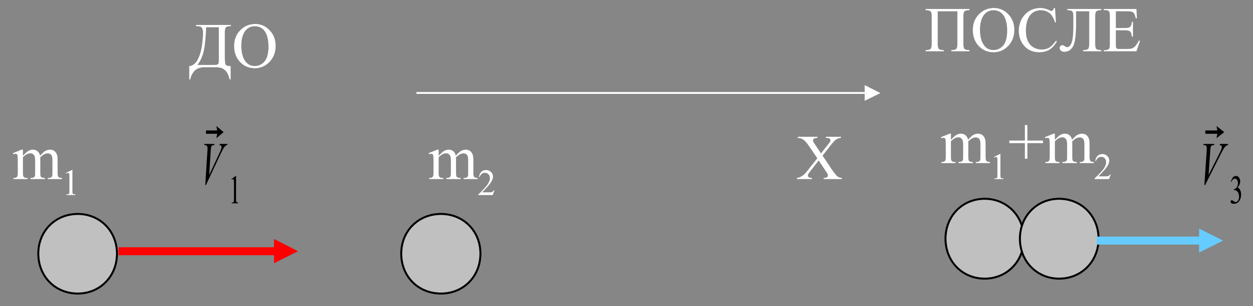
ТЕСТ

<u>Абсолютно неупругим</u> называется столкновение, после которого тела слипаются, т.е. движутся с одной скоростью:

$$\vec{V}_1^{\,ПОСЛЕ} = \vec{V}_2^{\,ПОСЛЕ}.$$

<u>Задача:</u> Найти изменение $E_к$ при абсолютно неупругом столкновении?

<u>Решение:</u> Рассмотрим для упрощения столкновение движущегося тела с неподвижным.



Импульс всегда сохраняется $\vec{P}_{СУМ}^{\,ПОСЛЕ} = \vec{P}_{СУМ}^{\,ДО}.$

Записываем для проекций на OX: $m_1V_1 = (m_1 + m_2)V_3$.

Отсюда $$V_3 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1.$$

Относительное изменение кинетической энергии

$$\beta = \frac{\Delta E_K}{E_K^{ДО}} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^2 - 1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} - 1 \quad ,$$

или $$\beta = -\frac{m_2}{m_1 + m_2},$$ т.е. $\beta \le 0$.

<u>Замечание:</u> При столкновении с бесконечно тяжелой стенкой ($m_2 >> m_1$) $\beta = -1$, т.е. <u>вся</u> энергия «куда-то исчезает».

ТЕСТ

Итог: при абсолютно неупругом ударе часть кинетической энергии переходит в тепловую.

СРС (1 стр.): Рассмотрите и законспектируйте решение задачи о нахождении скорости тел после абсолютно упругого удара (столкновение тела массы m_1, движущегося со скоростью V_1 , с неподвижным телом массы m_2).

ТЕСТ

ТЕСТ