Тема 2. Дополнительные характеристики электростатического поля.

П.1. Потенциал.

П.2. Разность потенциалов.

П.3.Поток ЭСП

П.4.Циркуляция ЭСП

П.5.Закон Гаусса для ЭСП

Схема применения закона Гаусса для вычисления напряженности поля

П.1. Потенциал.

Нам известна векторная характеристика электрического поля -напряженность.

ПРОБЛЕМА: есть ли скалярная характеристика электрического поля?

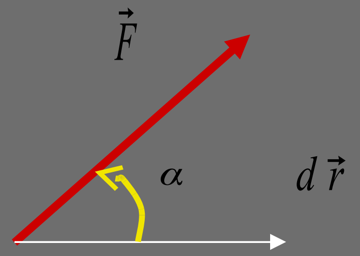
Известно: Скалярную характеристику (потенциальную энергию) можно вводить только для потенциальных взаимодействий.

У них работа силы по перемещению объекта по замкнутой траектории равна нулю.

Работа по перемещению из т.1 в т.2 не зависит от формы пути, по которому произошло перемещение, а зависит только от координат начальной точки (1) и конечной точки (2).

Элементарная работа сил поля имеет вид

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot cos(\alpha)$$



Из механики знаем выражение для потенциальной энергии:

$$E_П = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F}\, d\vec{r}$$

Сила в электрическом поле $\vec{F}_{эл} = \vec{E} \cdot Q_{ПРИ}$.

Подставляем в формулу для потенциальной энергии и делим на заряд:

$$\frac{E_П}{Q_{ПРИ}} = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r})$$ – скалярная характеристика ЭСП, называемая <u>потенциалом</u>.

<u>Потенциалом</u> называется скалярная характеристика ЭСП, численно равная <u>работе</u> сил поля по перемещению “пробного” (единичного и положительного) заряда из <u>данной точки</u>, имеющей радиус-вектор $\vec{r}$, в другую заранее выбранную точку, имеющую радиус-вектор $\vec{r}_0$, в которой $\varphi\left(\vec{r}_0\right)=0$, т.е. потенциал <u>принимается за ноль.</u>

В некоторых случаях $\vec{r}_0 \rightarrow \infty$.

ТЕСТ

ЗАДАЧА: Найти потенциал поля точечного заряда, расположенного в начале координат.

Известно: Сила Кулона для точечных зарядов

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Q_{ПРИ} \cdot Q_{ИСТ}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r .$$

Потенциальная энергия $E_П = \int\limits_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F}\, d\vec{r}.$ $\vec{r}_0 = \infty .$

$$E_П = \int\limits_r^\infty \frac{Q_{ПРИ} Q_{ИСТ}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\vec{e}_r d\vec{r}) = -\frac{Q_{ПРИ} Q_{ИСТ}}{4\pi\varepsilon_0 r}\Big|_r^\infty = \frac{Q_{ПРИ} Q_{ИСТ}}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q_{ИСТ}}{4\pi\varepsilon_0 r} Q_{ПРИ} .$$

Потенциал $\phi(\vec{r}) = \dfrac{E_П}{Q_{ПРИ}}.$ Отсюда $\phi(\vec{r}) = \dfrac{Q_{ИСТ}}{4\pi\varepsilon_0 r}$ - ответ.

ТЕСТ

ЗАДАЧА: Связать работу на конечном перемещении с изменением потенциальной энергии.

$$A_{1\to 2}=\int\limits_{\vec r_1}^{\vec r_2}\vec F\,d\vec r=\int\limits_{\vec r_1}^{\vec r_0}\vec F\,d\vec r+\int\limits_{\vec r_0}^{\vec r_2}\vec F\,d\vec r=E_П(r_1)-E_П(r_2)=-\Delta E_П.$$

Для электростатического поля $E_П=Q\cdot\phi$ и $\Delta E_П=Q\cdot\Delta\phi$.

Поэтому $\Delta\phi=-\dfrac{A_{1\to 2}}{Q}$.

ЗАДАЧА: Выразить напряженность ЭСП через потенциал.

$$d\phi=-\frac{dA}{Q},\quad dA=\vec F\,d\vec r=Q\vec E\,d\vec r\;\Rightarrow\; d\phi=-\vec E\,d\vec r.$$

Если поле меняется только по оси ОХ, тогда $d\phi=-E_X\,dx$,

отсюда $E_X=-\dfrac{d\phi}{dx}$.

Для поля, меняющегося в пространстве, используем векторный оператор «НАБЛА»

$$\vec{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

Проекции этого вектора есть частные производные по координатам.

Для потенциала:

$$\vec{\nabla}\phi = \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial x}; \frac{\partial\phi}{\partial y}; \frac{\partial\phi}{\partial z} \right\}.$$

Искомое уравнение связи: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\overrightarrow{grad}(\phi)$.

П.2. Разность потенциалов.

Удобно использовать не только сам потенциал, но и его приращение (изменение), а также «разность потенциалов».

Используя определение приращения любой характеристики и символ приращения Δ, получим приращение потенциалов

$$\Delta\varphi = \varphi_{кон} - \varphi_{нач}.$$

Определение: *Разность потенциалов (U) – величина, равная приращению потенциала с обратным знаком.*

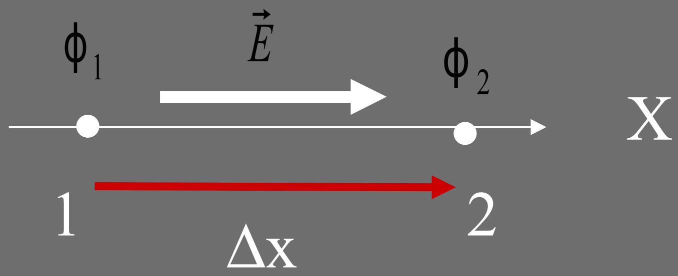
$$U = -\Delta\varphi = \varphi_{нач} - \varphi_{кон}.$$

Разность потенциалов есть функция координат двух точек

$$U_{1,2} = \varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi.$$

Для проекции вектора напряженности ЭСП на ось OX мы уже получили формулу

$$E_X = -\frac{d\phi}{dx}.$$



При таком направлении поля приращение потенциала отрицательно, а разность потенциалов положительна:

$$\Delta\phi < 0, \quad U_{1,2} > 0.$$

<u>Разность потенциалов</u> численно равна работе сил поля по перемещению пробного заряда из первой точки во вторую.

<u>Работа сил поля</u> по переносу заряда q из т.1 в т.2 равна разности потенциалов, умноженной на q:

$$A_{1\to 2}(q) = U_{1,2} \cdot q.$$

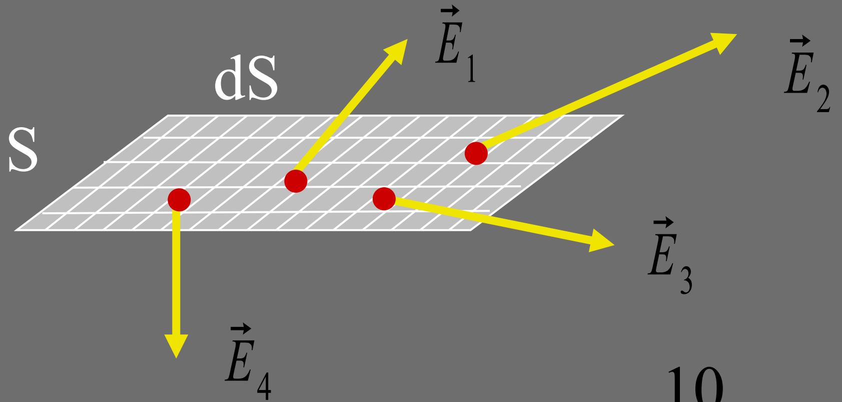
П.3.Поток ЭСП

Следующая очень важная характеристика электрического поля получила название «поток».

Сначала рассмотрим «элементарный поток» $d\Phi_E$.

$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\,\vec{S} = \vec{E}\cdot\vec{n}\cdot dS = E_n\,dS\,.$$

<u>Элементарной площадкой</u> dS называется часть поверхности настолько малая, что по всей этой площадке можно считать, что $\vec{E} = const$ (не меняется ни по величине, ни по направлению).



Поток через поверхность конечных размеров складывается из суммы элементарных потоков $d\Phi$ через все элементарные площадки:

$$\Phi_E = \sum_S d\Phi_E = \int_S d\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

<u>Метод упрощения вычисления Φ_E</u> связан с подбором поверхности интегрирования S так, чтобы она состояла из кусков, по которым интеграл вычисляется особо просто:

1.Кусок поверхности типа 1, для которого $\Phi_{E1} = 0$, это возможно, когда $d\Phi_E = 0$, т.е. когда $E \cdot dS \cdot \mathrm{Cos}(\alpha) = 0$:

а) $E = 0$, или

б) $E_n = 0$, т.е., когда $\vec{E}$ направлен по касательной к поверхности.

ТЕСТ

2.Кусок поверхности типа 2. Для него: $\Phi_{E2} = E \cdot S_2$.

Выясним, когда это выполняется. По определению потока

$$\Phi_E = \int_S E \cdot ds \cdot \cos\alpha ,$$

поэтому на поверхности типа 2 поле должно удовлетворять следующим требованиям:

$$\boxed{E = \text{const} \ \text{ и } \ \cos\alpha = \text{const}.}$$

П.4.Циркуляция ЭСП

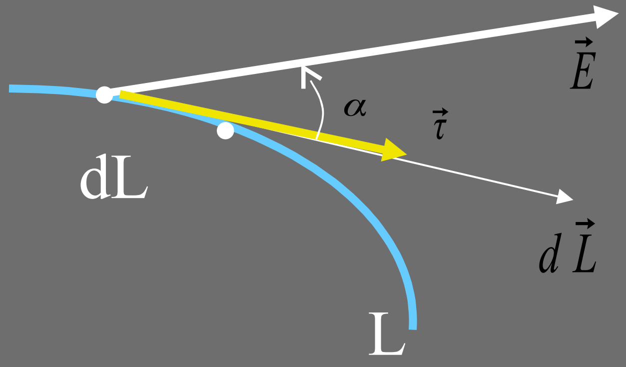
Следующая важная дополнительная характеристика ЭСП получила название «циркуляция» C_E.

Рассмотрение начнем с «элементарной циркуляции» dC_E.

<u>Элементарная циркуляция</u> электрического поля dC_E есть скалярное произведение вектора напряженности электрического поля на вектор элементарного отрезка контура интегрирования.

$$dC_E = \vec{E} \cdot d\vec{L} = E \cdot dL \cdot \cos(\alpha) = \vec{E} \cdot \vec{\tau} \cdot dL = E_\tau dL .$$

Циркуляция <u>по контуру</u> L определяется суммированием (интегрированием) элементарных циркуляций:



$$C_E = \int_L dC_E = \int_L \vec{E}\cdot d\vec{L} = \int_L E\cdot\cos(\alpha)\cdot dL.$$

<u>Циркуляция</u> электрического поля численно равна работе по перемещению пробного заряда на данном участке контура от точки 1 до точки 2.

ТЕСТ

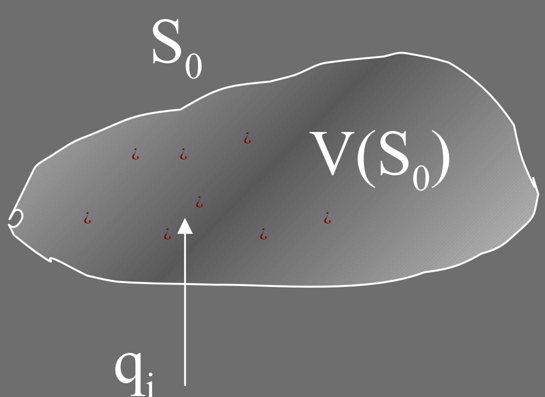
Контур интегрирования L по-возможности разбивают на участки, на которых вычисления <u>особенно просты</u>.

<u>Участок типа 1</u>: $C_{E1} = 0$, что выполняется, если, либо $E_1 = 0$, либо $\vec{E}_1 \perp d\vec{L}$.

<u>Участок типа 2</u>: $C_{E2} = E_2 L_2 \cos(\alpha)$, что выполняется, если на всем участке L_2 напряженность поля <u>не меняется</u> по величине и $\cos(\alpha) = \text{const}$.

П.5.Закон Гаусса для ЭСП

Поток (Φ_{E0}) вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность (S_0) пропорционален суммарному заряду ($\sum q_i$), находящемуся внутри объема $V(S_0)$, ограниченного поверхностью интегрирования S_0.



$$\Phi_{E0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i .$$

ε_0 – электрическая постоянная

ЗАМЕЧАНИЕ: заряды вне объема $V(S_0)$ не учитываются.

Физический смысл: Источниками электрического поля являются заряды.

Линии электрического поля начинаются и заканчиваются на зарядах или уходят в бесконечность.

Подробная запись: $$\oint_{S_0} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V(S_0)} \rho \cdot dV$$

нули говорят о замкнутости поверхности

$\rho = \dfrac{dQ}{dV}$ - объемная плотность заряда.

dV – элементарный объем, dQ – заряд элементарного объема.

ТЕСТ

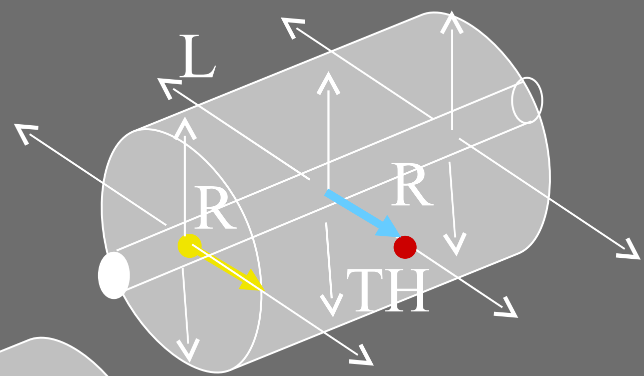
СРС ½ стр.: Доказать справедливость закона Гаусса для точечного заряда q, расположенного в центре сферической поверхности S_0.

Схема применения закона Гаусса для вычисления напряженности поля

Задача. Найти напряженность электрического поля равномерно заряженной бесконечно длинной прямой нити.

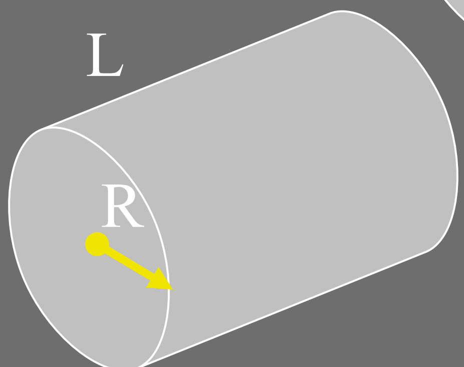
1) Изображается рисунок, на котором располагают объект, линии поля, форма и густота которых определяются «из соображений симметрии объекта».

Например, цилиндрическая симметрия для бесконечной прямой заряженной нити:



2) Выделяется точка наблюдения ТН.

3) Выбирается поверхность интегрирования (цилиндр):



ТЕСТ

Поверхность S_0 удовлетворяет следующим требованиям:

а) проходит через точку наблюдения,

б) замкнутая,

в) по возможности состоит из кусков типа 1 и 2 (см. выше).

4) Вычисляется $Ф_{E0}$ через S_0 : $\Phi_{E0} = E \cdot S_{БОК} = E \cdot 2\pi RL$.

5) Вычисляется суммарный заряд $\sum q_i$ в объеме, ограниченном поверхностью S_0: $\sum q_i = \lambda \cdot L$. λ - линейная плотность заряда.

6) Все подставляется в закон Гаусса: $\Phi_{E0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i$,

$$E \cdot 2\pi RL = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}.$$

7) Решается уравнение и находится напряженность поля E в Т.Н.

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$ - ответ.

ТЕСТ