

## Тесты по курсу “Уравнения в частных производных”

1. Какое из названий правильно характеризует уравнение  $(y^3 + u)u'_x + uu'_y = u$ : а) квазилинейное уравнение с частными производными второго порядка; б) линейное уравнение с частными производными второго порядка; в) квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка; г) линейное уравнение с частными производными первого порядка?

Ответ:

2. Какое из названий правильно характеризует уравнение  $(y^3 + u)u'_x + uu''_y = u$ : а) квазилинейное уравнение с частными производными второго порядка; б) линейное уравнение с частными производными второго порядка; в) квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка; г) линейное уравнение с частными производными первого порядка?

Ответ:

3. Теорема (интегральная поверхность уравнения первого порядка).  $u = u(x, y)$  - интегральная поверхность уравнения  $au'_x + bu'_y = c$ , если и только, если ее можно покрыть семейством .....

Ответ:

4. Как называется задача:

найти такое решение уравнения  $au'_x + bu'_y = c$ , которое принимает заданные значения в точках кривой  $l_0$ ?

Ответ:

5. Какое из названий правильно характеризует уравнение  $\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \text{div}(p(x) \text{grad } u) + F(t, x)$ : а) квазилинейное уравнение с частными производными второго порядка; б) линейное уравнение с частными производными второго порядка; в) квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка; г) линейное уравнение с частными производными первого порядка?

Ответ:

6. Какие из названий подходят для уравнения

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p(x) \operatorname{grad} u) + F(t, x):$$

а) волновое уравнение; б) уравнение теплопроводности; в) уравнение колебаний струны; г) уравнение Пуассона; д) уравнение Гельмгольца; е) уравнение Лапласа?

Ответ:

7. Какое из названий правильно определяет тип уравнения

$$u''_{tt} - 4u''_{xx} = 0: \text{ а) уравнение гиперболического типа; б) уравнение эллиптического типа; в) уравнение параболического типа?}$$

Ответ:

8. Какое из названий правильно определяет тип уравнения  $\Delta u = 0$ : а)

уравнение гиперболического типа; б) уравнение эллиптического типа; в) уравнение параболического типа?

Ответ:

9. Какое из названий правильно определяет тип уравнения  $\Delta u = f$ : а)

уравнение гиперболического типа; б) уравнение эллиптического типа; в) уравнение параболического типа?

Ответ:

10. Какое из названий правильно определяет тип уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f: \text{ а) уравнение гиперболического типа; б) уравнение эллиптического типа; в) уравнение параболического типа?}$$

Ответ:

11. Какое из названий подходит для уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f$ :

а) волновое уравнение; б) уравнение теплопроводности; в) уравнение колебаний струны; г) уравнение Пуассона; д) уравнение Гельмгольца; е) уравнение Лапласа?

Ответ:

12. Какое из названий подходит для уравнения  $\Delta u = f$  :  
а) волновое уравнение; б) уравнение теплопроводности; в) уравнение колебаний струны; г) уравнение Пуассона; д) уравнение Гельмгольца; е) уравнение Лапласа?

Ответ:

13. Множество функций  $\varphi_\varepsilon(x) \in D(R^n)$  образуют ..... , если

а)  $\varphi_\varepsilon(x) \geq 0$  при всех  $x$  ;

б)  $\int \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$  ;

в)  $\varphi_\varepsilon(x) = 0$  при  $|x| \geq \varepsilon$  .

Ответ:

14. Какое из названий подходит для уравнения  $\Delta u + 4u = 0$  :

а) волновое уравнение; б) уравнение теплопроводности; в) уравнение колебаний струны; г) уравнение Пуассона; д) уравнение Гельмгольца; е) уравнение Лапласа?

Ответ:

15. Какое из названий подходит для уравнения  $\Delta u = 0$  :

а) волновое уравнение; б) уравнение теплопроводности; в) уравнение колебаний струны; г) уравнение Пуассона; д) уравнение Гельмгольца; е) уравнение Лапласа?

Ответ:

16. Теорема (единственность для уравнения эллиптического типа).

Пусть выполнены условия:

1)  $G$  - открытая ограниченная область в  $R^n$  с границей  $\partial G$  ;

2)  $L(D)u(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + c(x)u(x) -$  равномерно

эллиптический в области  $G$  оператор, коэффициенты которого ограничены в области  $G$  ;

3) ..... в области  $G$  .

Тогда задача Дирихле  $L(D)u(x) = f(x)$  ,  $u(x) = \varphi(x)$  ,  $x \in \partial G$  , имеет не более одного решения.

Ответ:.

**17. Теорема** (принцип экстремума). Пусть выполнены условия:

1)  $G$  - открытая ограниченная область в  $R^n$  с границей  $\partial G$ ;

2)  $L(D)u(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + c(x)u(x)$  - равномерно

эллиптический в области  $G$  оператор, коэффициенты которого ограничены в области  $G$ ;

3) ..... в области  $G$ .

Тогда для любого регулярного решения  $u(x)$  однородного уравнения  $L(D)u(x) = 0$ , не равного постоянной, верна оценка  $|u(x)| \leq \max_{x \in \partial G} |u(x)|$ .

Ответ:..

**18.** Если  $\nu > -1$ , то какие корни имеет функция  $J_\nu(x)$ : а) чисто мнимые; б) только вещественные; в) любые комплексные?

Ответ:

**19.** Какое свойство функций Бесселя определяется равенством:

$$\int_0^l J_\nu\left(\mu_i \frac{x}{l}\right) J_\nu\left(\mu_j \frac{x}{l}\right) x dx = 0 \quad (i \neq j) .?$$

Ответ:..

**20.** При целом  $n$  функции  $J_n(x)$  и  $J_{-n}(x)$  .....

Ответ:

**21.** Решением какой задачи и для какого уравнения и в какой области является следующий интеграл Пуассона:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\psi - \varphi) + r^2} d\psi \quad ?$$

Ответ:

**22.** Решение какой задачи и для какого уравнения представимо в

виде:  $u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \quad ?$

Ответ:

**23.** Интеграл (формула) Дюамеля

$u(t, x) = \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\tau, \xi) d\xi d\tau$  является решением какой задачи и для какого уравнения?

Ответ:

24. С каким решением оператора теплопроводности при  $t > 0$  совпадает следующая функция:  $E(t, x) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$  ?

Ответ:

25. Чему равен следующий интеграл:  $\frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{R^n} e^{-|x|^2} dx$  ?

Ответ:

26. Как называется уравнение и как оно выглядит, если общее решение имеет вид

$$R(r) = \tilde{A}J_0(\sqrt{\lambda}r) + \tilde{B}Y_0(\sqrt{\lambda}r) ?$$

Ответ:

27. Какая задача и для какого уравнения имеет решение, представимое в виде формулы Даламбера:

$$u(t, x) = \frac{1}{2}\phi(x+at) + \frac{1}{2}\phi(x-at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy ?$$

Ответ:

28. Как называется уравнение и как оно выглядит, если общее решение имеет вид

$$R_n(r) = C_n J_n(2r) + D_n Y_n(2r) ?$$

Ответ:

29. Какая задача и для какого уравнения имеет решение, представимое в виде:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{\pi kat}{l} + B_k \sin \frac{\pi kat}{l} \right) \sin \frac{\pi kx}{l}, \quad A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx,$$

$$B_k = \frac{2}{\pi ka} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx ?$$

Ответ:

30. Какая задача и для какого уравнения имеет решение, представимое в виде:  $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2 t}{l^2}} \sin \frac{\pi nx}{l}$ ,  $A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$  ?

Ответ:

31. Функция  $u(t,x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{32}{(2m+1)^3 \pi^3} e^{-\frac{\pi^2 (2m+1)^2 t}{4}} \sin \frac{\pi (2m+1)x}{2}$  является

решением а) начально-краевой задачи для однородного волнового уравнения на отрезке или б) начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности на отрезке?

Ответ:

32. Функция  $u(t,x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)^4 \pi^4} \sin 2\pi (2m+1)t \sin \pi (2m+1)x$  является

решением а) начально-краевой задачи для однородного волнового уравнения на отрезке или б) начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности на отрезке?

Ответ: а).

33. Какое из названий правильно характеризует уравнение  $y^3 u'_x + y u'_y = u$ : а) квазилинейное уравнение с частными производными второго порядка; б) линейное уравнение с частными производными второго порядка; в) квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка; г) линейное уравнение с частными производными первого порядка?

Ответ:

34. Каким решением и для какого оператора является функция

$$E_n(x) = \begin{cases} \frac{r^{2-n}}{(2-n)\sigma_{n-1}}, & n \geq 3, \\ \frac{\ln r}{2\pi}, & n = 2? \end{cases}$$

Ответ:

35. Выполнено ли условие теоремы единственности для краевой задачи  $X''(x) + \left(\frac{\pi 5}{b}\right)^2 X(x) = 0$ ,  $X(0) = X(b) = 0$ ?

Ответ:

36. Функция  $u(x)$  называется ... решением уравнения

$$L(D)u(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + c(x)u(x) = f, \text{ если}$$

$u(x) \in C^2(G) \cap C(G \cup \partial G)$  и удовлетворяет уравнению  $L(D)u(x) = f$  в каждой точке области  $G$ .

Ответ:

37. Какое из названий правильно характеризует уравнение

$\gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(t, x, y, z)$ : а) квазилинейное уравнение с частными производными второго порядка; б) линейное уравнение с частными производными второго порядка; в) квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка; г) линейное уравнение с частными производными первого порядка?

Ответ:

38. Какое из названий подходит для уравнения

$\gamma \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(t, x, y, z)$ : а) волновое уравнение; б) уравнение теплопроводности; в) уравнение колебаний струны; г) уравнение Пуассона; д) уравнение Гельмгольца; е) уравнение Лапласа?

Ответ:

39. Как называется уравнение и как оно выглядит, если общее решение имеет вид

$$R_n(r) = C_n J_n(5r) + D_n Y_n(5r) ?$$

Ответ:

40. Уравнения характеристик для уравнения

$$u''_{xx} + 2u''_{xy} + 2u''_{yy} + 6u'_x + 6u'_y - 3u = x + y^2 \text{ имеет вид } \dots\dots\dots$$

Ответ:

41. Какие из названий подходят для уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(t, x)$ :

- а) волновое уравнение; б) уравнение теплопроводности; в) уравнение колебаний струны; г) уравнение Пуассона; д) уравнение Гельмгольца; е) уравнение Лапласа?

Ответ:

42. Какое из названий правильно характеризует уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(t, x)$ : а) квазилинейное уравнение с частными производными второго порядка; б) линейное уравнение с частными производными второго порядка; в) квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка; г) линейное уравнение с частными производными первого порядка?

Ответ:

43. Как называется уравнение и как оно выглядит, если общее решение имеет вид

$$R_n(r) = C_n J_n(3r) + D_n Y_n(3r) ?$$

Ответ:

44. Уравнения характеристик для уравнения

$$u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy} + u'_x - u'_y + u = xy \text{ имеет вид } \dots\dots\dots$$

Ответ:



45.  $u''_{\xi\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta)$  - канонический вид какого уравнения?

Ответ:

46.  $u''_{\eta\eta} = F_2(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta)$  - канонический вид какого уравнения?

Ответ:

47.  $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = F_3(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta)$  - канонический вид какого уравнения?

Ответ:

48. Уравнения характеристик для уравнения

$$u''_{xx} - 4u''_{xy} - 21u''_{yy} + 2u'_x - 3u'_y + 5u = x^2 \text{ имеет вид } \dots\dots\dots$$

Ответ:

49. Пусть  $f(x) \in L_2(G)$ ,  $k(x) \geq k_0 > 0$ ,  $k(x) \in C^1(\bar{G})$ ,  $a(x) \in C(\bar{G})$ ,  $a(x) \geq 0$ . Тогда для задачи Дирихле  $Lu = \operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad}u) - a(x)u = f(x)$ ,  $u(x)|_{\partial G} = 0$  единственно ли обобщенное решение в пространстве  $H^1_0(G)$ ?

Ответ:

50. Единственно ли регулярное (классическое) решение задачи Дирихле  $v'' - 25v = \sin 8x$ ,  $v(0) = v(2\pi) = 0$ ?

Ответ: