ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИАНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ»

Кафедра прикладной математики

М.С. Аль-Натор, Ю.Ф. Касимов, В.Л. Кузнецов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ

ЧАСТЬ I

АВТОНОМНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Москва-2007

ББК
К

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. В.А. Кокотушкин

Аль-Натор М.С., Касимов Ю.Ф., Кузнецов В.Л.
Основы теории систем. Учебное пособие. – М.: МГТУ ГА, 2007. – 110 с.

Пособие издается в соответствие с учебным планом для студентов IV курса специальности 230401 дневного обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 28.08.2007 г. и методического совета 23.11.2007 г.

Глава 1
Автономные системы с дискретным временем

1.1. Системы и движения

Определение 1.1.1. *Автономной динамической системой* с дискретным временем называется пара $D = \langle M, A \rangle$, где M – *фазовое пространство* (множество всех состояний системы); A – оператор перехода (локальный), представляющий собой отображение (рис. 1.1.1) $A: M \to M$, $x \xrightarrow{A} x'$. Оператор A указывает, в какое состояние x' перейдет система за один шаг (такт), если первоначально она находилась в состоянии x:

$$x' = Ax. \tag{1.1.1}$$

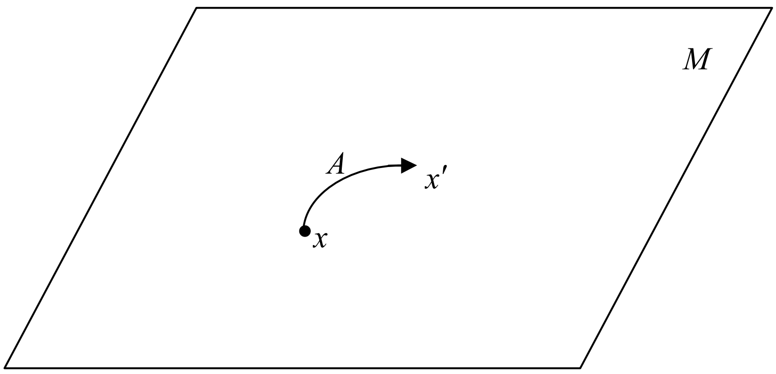


Рис. 1.1.1

Формула (1.1.1) есть *операторная запись* этого перехода. Обычно интересуются всеми состояниями, в которых окажется система в будущем. Для того, чтобы описать такое поведение системы, необходимо явно указать *временную шкалу* T. Обычное представление о времени как одномерном континууме с формальной точки зрения уточняется соглашением, что этот континуум есть множество всех вещественных чисел R. В теории систем с непрерывным временем это приводит к отождествлению $T = R$. Для систем с дискретным временем временная шкала отождествляется с некоторым дискретным (счетным) подмножеством множества R. Мы будем пользоваться, в основном, двумя типами шкал: *односторонней* и *двусторонней*.

Односторонняя шкала T характеризуется наличием выделенного начального момента времени t_0. Все остальные моменты шкалы считаются следующими за начальным моментом, таким образом, шкала ориентирована вправо: от настоящего к будущему.

Основное соглашение о структуре односторонней и двусторонней шкалы состоит в возможности занумеровать в возрастающем порядке моменты времени такой шкалы натуральными числами (включая 0). А именно, существует биективное отображение

$$v : N \to T, \quad v(k) = t_k \tag{1.1.2}$$

такое, что $v(0) = t_0$ и $t_i < t_j \ \ \forall i < j$, т.е. $T = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_n, ...\}$ (рис. 1.1.2)

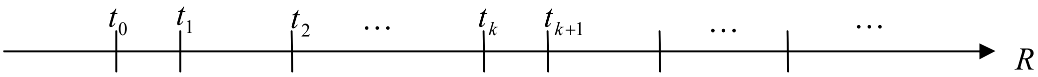


Рис. 1.1.2

При этом не предполагается, что моменты t_k – равномерно распределены, т.е., что $t_{k+1} - t_k$ – постоянно для всех k. Однако в приложениях случай равномерной шкалы встречается достаточно часто, особенно при моделировании систем на ЭВМ. Опишем кратко такую шкалу.

Односторонняя равномерная шкала задается однозначно начальным моментом времени $t_0 \in R$ и шагом $h > 0, h \in R$. Тогда k-й момент времени изображается числом $t_k = t_0 + kh$ (рис. 1.1.3). Используя нумерацию v из (1.1.2),

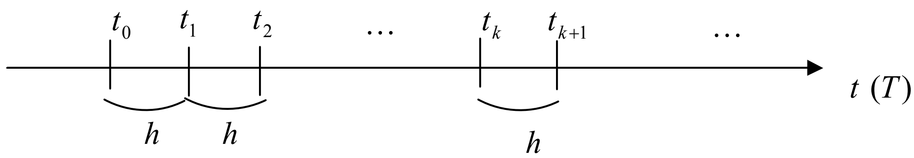


Рис. 1.1.3

мы в дальнейшем будем отождествлять T со множеством натуральных чисел N. Таким образом, момент времени t_k изображается натуральным числом k. Ниже произвольный момент времени будет обозначаться t, где $t \in T = N = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$. Непосредственно следующий за t момент времени есть момент $t+1$, а предыдущий момент (при $t \neq t_0$) есть $t-1$. Заметим, что для односторонней шкалы T нумерация v, о которой говорилось выше, единственна.

Двусторонняя шкала T, вообще говоря, не имеет выделенного начального момента времени. Она характеризуется тем, что любой момент времени t имеет непосредственно следующий за ним момент t^+ и непосредственно предшествующий момент времени t^- (T не содержит моментов времени между t и t^+ и между t^- и t). Однако обычно, при изучении поведения систем некоторый момент времени условно считают начальным, например, момент начала наблюдения за системой. Его будем обозначать t_0. Начальный момент времени (настоящее) t_0 разбивает всю шкалу на две полушкалы: положительную $T^+ = \{t \in T \mid t \geq 0\}$ – «настоящее – будущее» и отрицательную $T^- = \{t \in t \mid t \leq 0\}$ - «прошлое – настоящее». Будем считать, что выбор начального момента t_0 позволяет однозначно занумеровать (в возрастающем порядке) все моменты целыми числами, т.е. существует биективное отображение

$v : Z \to T, \quad v(k) = t_k$ такое, что из $i < j$ следует $t_i < t_j$.

Как и в случае односторонней шкалы, легко определить равномерную двустороннюю шкалу. Она однозначно задается шагом $h > 0$ и любым моментом времени $t_0 \in T$. Если считать t_0 начальным моментом, то легко задать нумерацию моментов времени шкалы

T: $v(k) = t_k = t_0 + kh$, где $k \in Z$.

Отображение v позволяет отождествить T с Z: $T = Z$. При таком отождествлении: $T^+ = N, \quad T^- = -N$. Таким образом, выбор начального момента времени $t_0 \in T$ позволяет считать одностороннюю шкалу N частью (положительной) шкалы T.

Мы будем пользоваться обоими типами шкал. Выбор шкалы будет либо оговариваться специально, либо указываться равенством $T = N$ или $T = Z$. Если в данном определении нет упоминания о типе шкалы значит, оно годится для обоих типов, однако в случае двусторонней шкалы получается еще специальный односторонний эквивалент, обозначаемый приставкой «полу» (полутраектория, полупоток и т.д.). В этом параграфе используется, в основном, односторонняя шкала $T = N$.

Кроме отдельных моментов времени нас будут интересовать также временные интервалы (промежутки). Временной интервал однозначно определяется своими *начальными* t_1 и *конечными* t_2 моментами времени. Сам интервал записывается в виде $[t_1, t_2] = \{t \in T \mid t_1 \le t \le t_2\}$. Кроме того, мы будем использовать и другие виды промежутков времени $[t_1, t_2) = \{t \in T \mid t_1 \le t < t_2\}$, $(t_1, t_2) = \{t \in T \mid t_1 < t < t_2\}$ и т.д.

Заметим, что в случае дискретного времени интервал $[t_1, t_2]$ содержит конечное число (а именно $t_2 - t_1 + 1$) моментов времени. Число $(t_2 - t_1)$ будет называться *длиной* интервала $[t_1, t_2]$ (и всех других типов интервалов с такими концами).

Приступим теперь к описанию динамики (поведения) системы. Описание динамики системы сводится к указанию состояний, в которых система находится для всех моментов шкалы T, т.е. к заданию ***отображения*** φ из T в пространство состояний M, указывающего для каждого момента времени $t \in T$ состояние $\varphi(t) \in M$. Если φ отображение, описывающее поведение системы $D = \langle M, A \rangle$, то оно, очевидно, удовлетворяет соотношению:

$$\varphi(t+1) = A\varphi(t) \text{ для всех } t \in T. \tag{1.1.3}$$

В самом деле, если в момент времени t система находилась в состоянии $x = \varphi(t)$, то в следующий момент времени $t+1$ она будет находиться в состоянии

$$\varphi(t+1) = x' = Ax = A\varphi(t).$$

Определение 1.1.2. *Движением* динамической системы $D = \langle M, A \rangle$ называется отображение $\varphi : T \to M$, удовлетворяющее соотношению (1.1.3).

Движение φ данной системы – это уже некоторое глобальное (относительно времени) описание системы. В определении динамической системы задается лишь оператор (локальный) перехода из данного состояния в следующее. Поэтому возникает задача нахождения возможных движений системы. Условимся обозначать состояние системы (известное или нет) в момент времени t через $x(t)$ или x_t. Тогда (1.1.3) можно переписать в виде:

$$x(t+1) = Ax(t). \tag{1.1.4}$$

Равенство (1.1.4) можно рассматривать как *уравнение движения* системы.

Замечание 1.1.1. Форма уравнения (1.1.4) обусловлена нашим соглашением об отождествлении T с N. В общем случае уравнение (1.1.4) для произвольной дискретной шкалы $T = \{t_0, t_1, ..., t_n, \dots\}$ можно записать в виде:

$$x(t_{n+1}) = Ax(t_n), \quad n \in N \tag{1.1.4'}$$

или в случае равномерной шкалы с шагом h

$$x(t + h) = Ax(t), \quad t \in T. \tag{1.1.4''}$$

Мы, в основном, будем придерживаться соглашения $T = N\,(Z)$, все необходимые изменения в случае непосредственного использования исходной шкалы T могут быть легко сделаны читателем самостоятельно.

Каждое решение уравнения движения (1.1.4) есть некоторое конкретное движение φ системы с оператором перехода A. Все решения в совокупности составляют класс возможных движений системы.

Предложение 1.1.1 (принцип детерминированности). *Если φ_1 и φ_2 два движения системы $\langle M, A \rangle$, которые проходят одно и то же состояние в некоторый момент времени s, то все, проходимые при этих движениях состояния в моменты $t \ge s$ совпадают, т.е. из $\varphi_1(s) = \varphi_2(s)$ следует $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ для всех $t \ge s$. В частности, если $s = 0$, то $\varphi_1 = \varphi_2$, т.е. движения, начинающиеся в одном и том же состоянии, совпадают.*

Это предложение очевидно и легко доказывается индукцией по $t \in N$.

Согласно предложению 1.1.1, уравнение движения при **заданном начальном состоянии** $x_0 \in M$ в момент времени $t = 0$ имеет **не более одного** решения. Однако справедливо

Предложение 1.1.2. *Для любого начального состояния $x_0 \in M$ существует одно и только одно движение $\varphi : T \to M$, удовлетворяющее уравнению* (1.1.3) *и данному начальному условию* (рис. 1.1.4).

Доказательство. Существование решения следует из определенности оператора A на всем пространстве состояний. Если начальное состояние x_0 задано, то положим $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = A\varphi(0) = Ax_0 = x_1$ и т.д. Короче говоря, мы имеем дело с **индуктивным определением**:

$$\begin{cases} \varphi(0) = x_0, \\ \varphi(k+1) = A\varphi(k). \end{cases}$$

Легко видеть, что $\varphi(t)$ определено для любого $t \in N$, причем определенное отображение будет движением. Это доказывает существования. Единственность решения следует из предложения 1.1.1 □

$$\underset{x_0=\varphi(0)}{\cdot}\xrightarrow{A}\underset{x_1=\varphi(1)}{\cdot}\xrightarrow{A}\underset{x_2=\varphi(2)}{\cdot}\xrightarrow{A}\cdots\longrightarrow\underset{x_t=\varphi(t)}{\cdot}\xrightarrow{A}\cdots\longrightarrow$$

Рис. 1.1.4

Заметим, что движение указывает состояния, проходимые системой, и соответствующие им моменты времени.

Определение 1.1.3. Пару (t, x_t), состоящую из момента времени t и состояния x_t, в котором система находится в этот момент времени, называют *событием*, множество $T \times M = \{(t,x) \mid t \in T,\, x \in M\}$ – *пространством событий*, а множество $\widehat{\varphi} = \{(t, \varphi(t)) \in T \times M \mid t \in T\}$ – *мировой линией* системы (или ее *интегральной кривой*). Образ отображения φ, т.е. множество $\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(t) \in M \mid t \in T\}$ называется *траекторией* (движения системы).

Заметим, что движение φ есть **отображение**, тогда как мировая линия и траектория – **множества** (рис. 1.1.5 а), б))

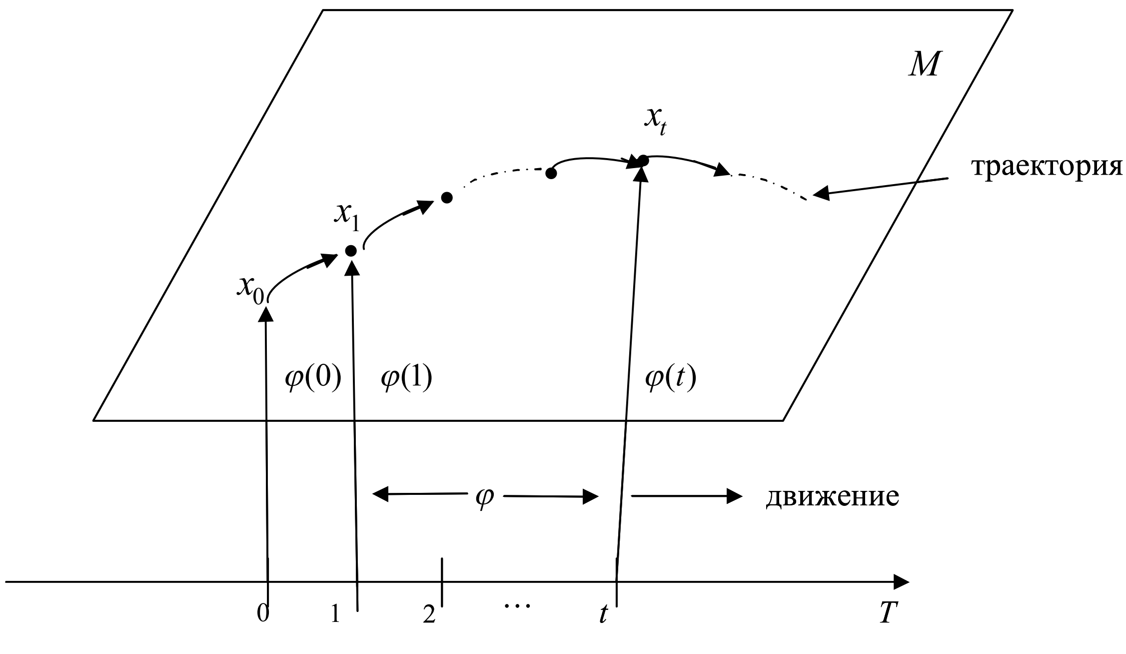


Рис. 1.1.5 а)

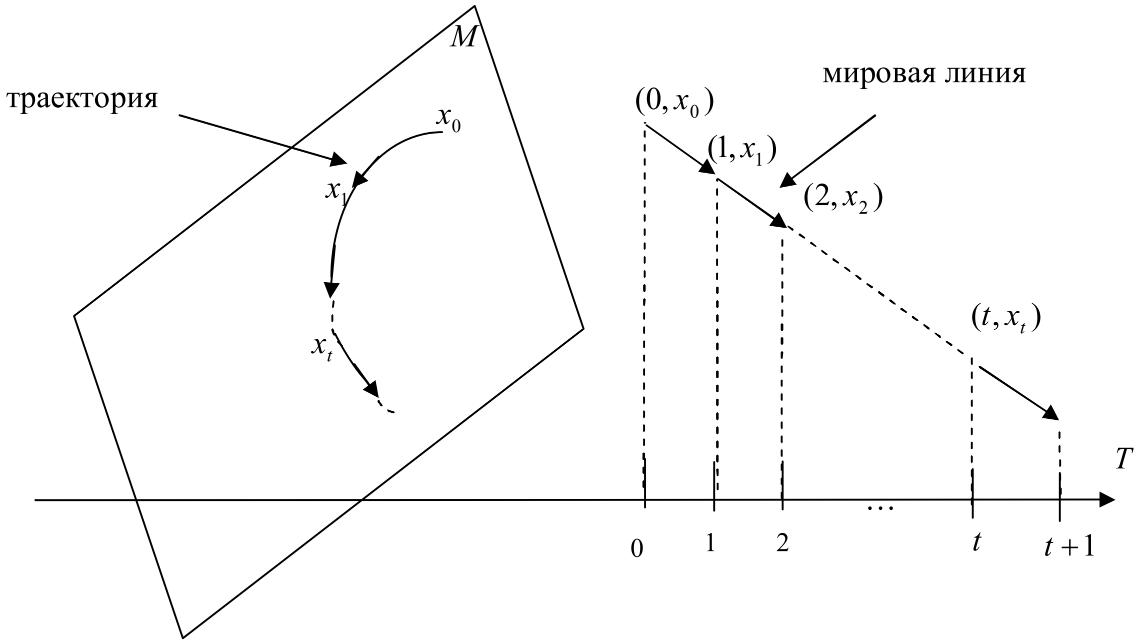


Рис. 1.1.5 б)

Мировая линия **полностью** определяет движение системы, тогда как траектория представляет собой просто множество состояний, проходимых системой без указания соответствующих моментов времени.

Пример 1.1.1. Пусть

$$M = R,\ Ax = x + a,$$

тогда $D = \langle M, A \rangle$ – пример простейшей динамической системы (рис. 1.1.6):

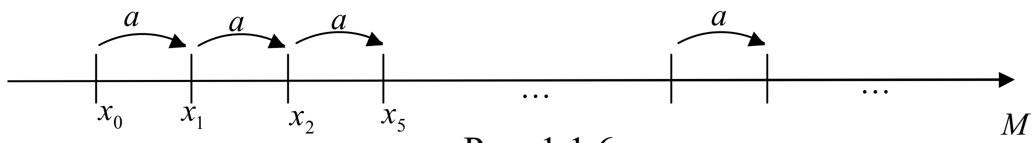


Рис. 1.1.6

Уравнение движения системы есть $x(t+1) = x(t) + a, \quad a, x(t) \in R$, решение которого для данного начального состояния x_0 имеет вид $x(t) = x_0 + t \cdot a, \quad t \in N$. Таким образом, система, начиная с начального состояния, делает за каждый шаг сдвиг на a (вправо, если $a > 0$ и влево, если $a < 0$). Для частного случая $a = 0$ система не меняет своего начального состояния, т.е. $\varphi(t) = x_0 \quad \forall t \in T$. Мировая линия системы изображается на плоскости дискретным набором точек (событий), лежащих на прямой $x = x_0 + t \cdot a$ (рис. 1.1.7).

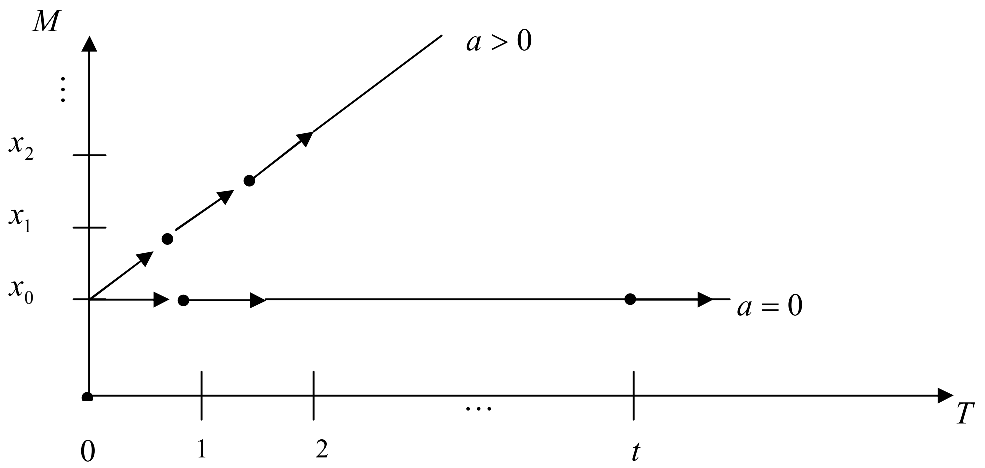


Рис. 1.1.7

Пример 1.1.2. $M = R \times R$. Оператор перехода A задается соотношениями

$$A = \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

Пара $\langle M, A \rangle$ образует динамическую систему на плоскости. Каждое состояние системы изображается точкой z на плоскости с координатами (x, y), т.е. пространство состояний представляет собой двумерную плоскость. Уравнение движения имеет вид: $z(t+1) = Az(t)$ или

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) + y(t), \\ y(t+1) = x(t) - y(t). \end{cases}$$

Если начальное состояние задается, скажем, парой $(x_0, y_0) = (1, 1)$, то начальный отрезок движения легко найти прямым вычислением (рис. 1.1.8).

$$(1, 1) \to (2, 0) \to (2, 2) \to (4, 0) \to (4, 4) \to (8, 0) \to \ldots$$

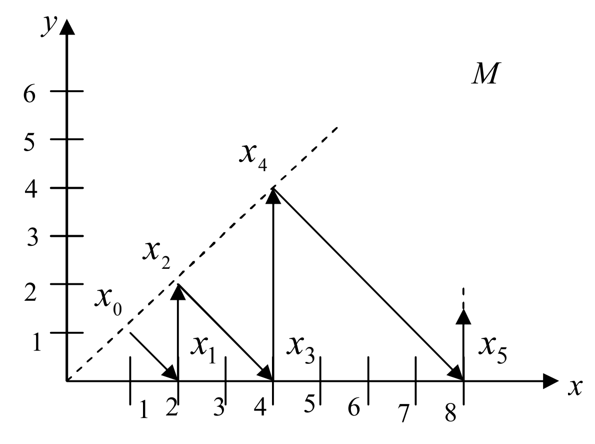


Рис. 1.1.8

Легко доказать, что движение с этим начальным условием задается соотношениями:

$$\begin{cases} x_n = 2^{\frac{n+1}{2}} \\ y_n = 0 \end{cases} \text{ если } n \text{ – нечетно,}$$

$$\begin{cases} x_n = 2^{n/2} \\ y_n = 2^{n/2} \end{cases} \text{ если } n \text{ – четно.}$$

Таким образом, система за каждый шаг переходит поочередно с биссектрисы координатного угла на ось абсцисс и обратно, при этом амплитуда перехода за каждый шаг увеличивается, и система уходит с течением времени бесконечно далеко от своего начального состояния. Для **нулевого** начального состояния $(0, 0)$ оператор системы не изменяет этого состояния (т.к. $A(0, 0) = (0, 0)$).

Определение 1.1.4. Состояние x динамической системы $\langle M, A\rangle$ называется *положением равновесия* (*точкой покоя*), если x является неподвижной точкой оператора A, т.е.

$$Ax = x. \tag{1.1.5}$$

Движение системы φ, начинающееся в положении равновесия x_0, является постоянным отображением, т.е.

$$\operatorname{Im}\varphi = \{x_0\} \ \ \forall\, t \in T.$$

Траектория такого движения состоит только из одной точки покоя (рис. 1.1.9). Мировая линия изображается «дискретной прямой» в пространстве событий (рис. 1.1.10).

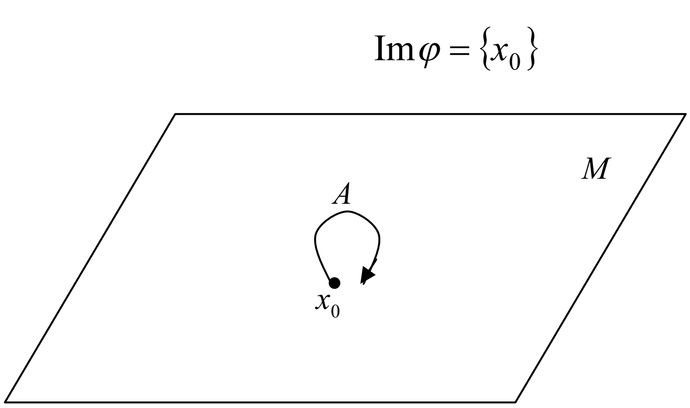


Рис. 1.1.9

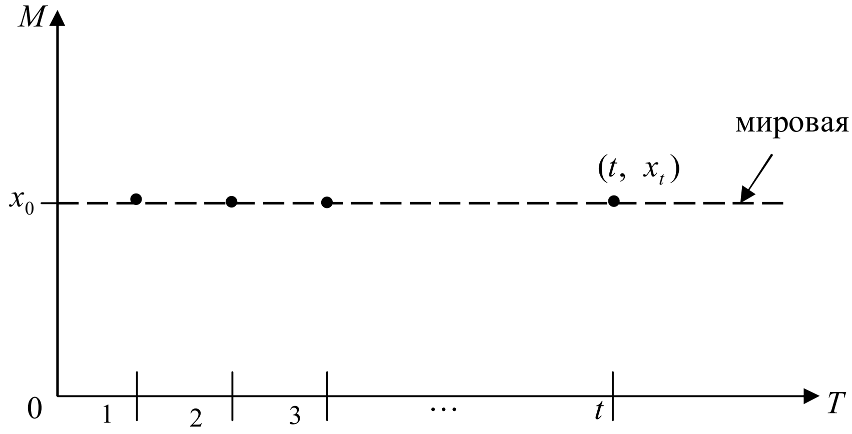


Рис. 1.1.10

Определение 1.1.5. Движение φ называется *периодическим с периодом* $\tau > 0$, если $\varphi(t+\tau) = \varphi(t)$ для всех $t \in T$. Движение φ называется *квазипериодическим* с периодом τ, если, начиная с некоторого момента $\bar{t}$ движение становится периодическим с периодом τ, т.е. $\varphi(t+\tau) = \varphi(t)$ для всех $t \geq \bar{t}$.

Периодическое движение есть частный случай квазипериодического, когда $\bar{t} = 0$. Такое движение характеризуется одним временным параметром – периодом (рис. 1.1.11 а), б)).

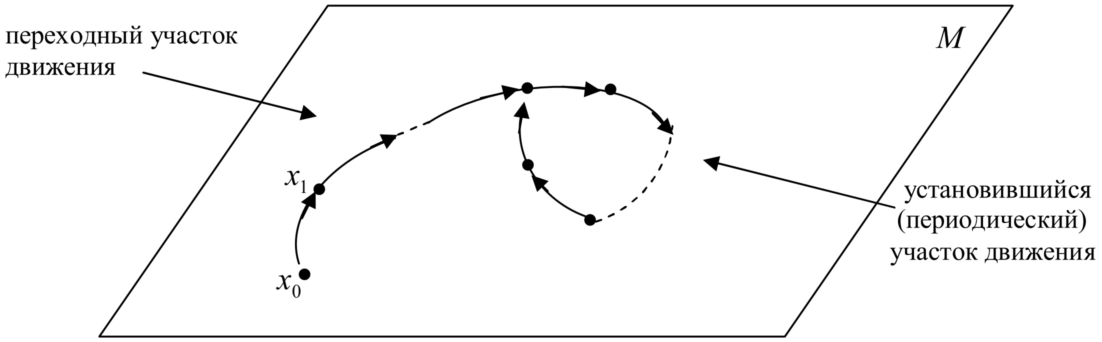


Рис. 1.1.11 а) квазипериодическое движение

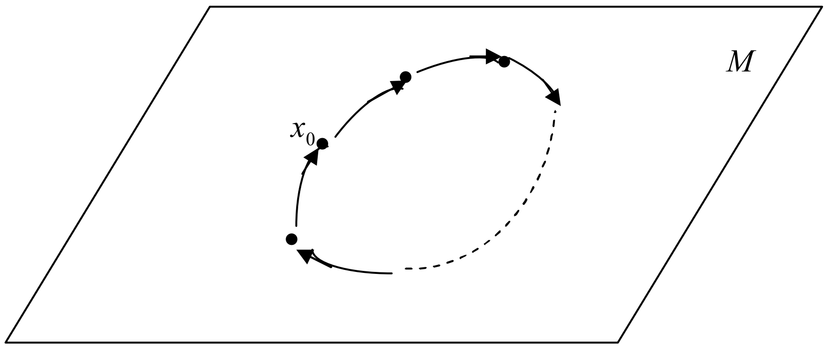


Рис. 1.1.11 б) периодическое движение

Траектория квазипериодического, а следовательно, и периодического движения конечна, т.е. состоит из конечного числа состояний:

$$\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(0), ..., \varphi(\bar{t}), \varphi(\bar{t}+1), ..., \varphi(\bar{t}+\tau-1)\}, \qquad (1.1.6)$$

$$|\mathrm{Im}\varphi| = \bar{t} + \tau , \qquad (1.1.7)$$

где $|\mathrm{Im}\varphi|$ – число состояний в траектории; $\bar{t}$ – начальный момент периода; τ – период (наименьший).

Если φ периодическое движение, то

$$\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(0), ..., \varphi(\tau-1)\}, \qquad (1.1.6')$$

$$|\mathrm{Im}\varphi| = \tau . \qquad (1.1.7')$$

Квазипериодическое движение может иметь «вырожденный» период, когда периодический участок траектории состоит всего из одной точки – положения равновесия (рис. 1.1.12).

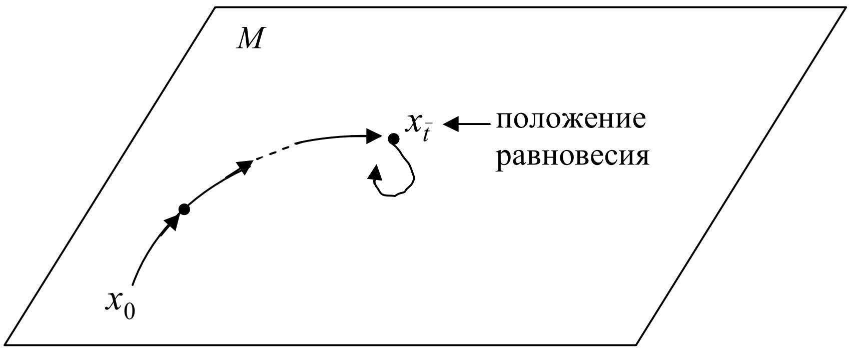


Рис. 1.1.12

Пример 1.1.3. Пусть $M = \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Оператор перехода A задается соотношением $x' = ax \bmod 10$. Уравнение движения есть $x_{t+1} = ax_t \bmod 10,\ t \in N$. Вид движения зависит от параметра a и от начального состояния. Приведем ряд примеров движений для различных a и x_0.

1. $a = 2, x_0 = 1$: $1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 6$

2. $a = 3, x_0 = 4$: $4 \to 2 \to 6 \to 8$

3. $a = 5, x_0 = 1$: $1 \to 5$

4. $a = 4, x_0 = 1$: $1 \to 4 \to 6$

Заметим, что все движения квазипериодические.

Пример 1.1.4. Пусть

$$M = [0,1) = \{ x \in R \mid 0 \le x < 1 \}.$$

Оператор перехода A зададим соотношением

$$x' = Ax = \{10x\},$$

где $\{c\}$ – дробная часть числа c.

Легко описать действие этого оператора, если использовать представление вещественного числа $x \in [0,1)$ в виде бесконечной десятичной дроби $x = 0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n, \ldots$. Тогда $Ax = 0, a_2\, a_3 \ldots a_n, \ldots$ Действие оператора сводится к переносу десятичной запятой на один разряд вправо с отбрасыванием целой части. Например: если $x_0 = 0{,}314597\ldots$, то

$$x_1 = Ax_0 = 0{,}14597\ldots,\ x_2 = Ax_1 = 0{,}4597\ldots,\ x_3 = Ax_2 = 0{,}597\ldots \text{ и т.д.}$$

Характер движения для любого начального состояния легко определить, если знать тип числа, которое представляет начальное состояние. Если x_0 – рациональное число, то его десятичное представление есть периодическая с некоторого места дробь, т.е.

$$x_0 = 0, a_1 a_2 \ldots a_k \overbrace{(a_{k+1} \ldots a_{k+m})}^{\textit{период}}.$$

Тогда движение с начальным состоянием x_0 будет периодическим с момента $t = k + 1$ и с периодом $\tau = m$. Например, для

$$x_0 = 0{,}371(2634):\ x_1 = 0{,}71(2634),\ x_2 = 0{,}1(2634),\ x_3 = 0,(2634),$$

$$x_4 = 0,(6342),\ x_5 = 0,(3426),\ x_6 = 0,(4263),\ x_7 = 0,(2634) = x_3.$$

На рис. 1.1.13 представлена схематически траектория движения:

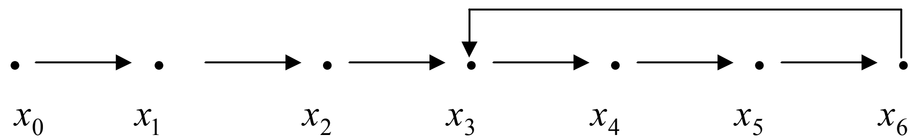


Рис. 1.1.13

Такое изображение не учитывает реального расположения состояний $x_0, x_1, \ldots, x_6$ в фазовом пространстве. На рис. 1.1.14 изображена мировая линия этого движения. Его траектория представляется проекцией этой линии на пространство состояний.

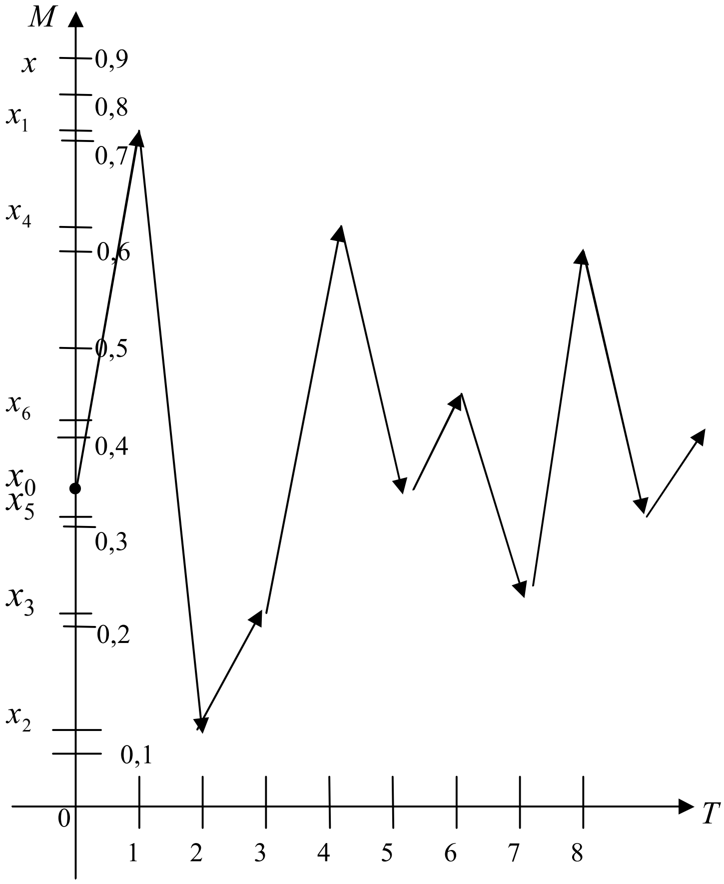


Рис. 1.1.14

Однако, если x_0 – иррациональное число, то оно представляется непериодической десятичной дробью, и, следовательно, движение с таким начальным состоянием не может стать периодическим ни с какого момента. Траектория такого движения имеет вид, изображенный на рис. 1.1.15. При этом траектория

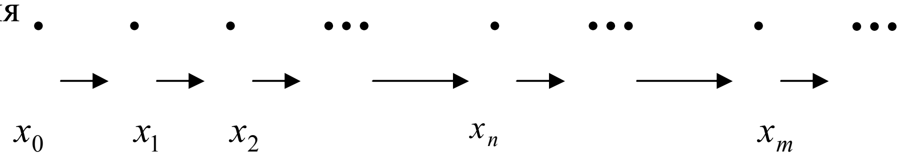


Рис. 1.1.15

будет бесконечной.

Определение 1.1.6. Движение φ называется *невозвратным*, если отображение $\varphi : T \to M$ – инъективно, т.е. $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ для всех $t_1 \neq t_2$.

Невозвратное движение φ проходит каждое состояние не более одного раза. Оно устанавливает взаимно-однозначное соответствие между моментами времени из шкалы T и проходимыми состояниями $\mathrm{Im}\,\varphi$. Таким образом, $\mathrm{Im}\,\varphi$ – счетное множество.

Итак, мы познакомились с двумя типами движений: квазипериодическим, имеющим конечную траекторию, и невозвратным, с бесконечной траекторией. Ниже будет показано, что других типов движений для случая дискретного времени не существует.

Напомним, что движение φ есть отображение, определенное на всей временной шкале T. Часто интересуются движением на каком-либо временном промежутке (интервале) I. Соответствующая часть (участок, отрезок) движения есть сужение отображения φ на I и обозначается через $\varphi|_I$, $\varphi|_I : I \to M$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, "\varphi"] & & M \\
& I \arrow[ur, "\varphi|_I"'] \arrow[ul, hook] &
\end{tikzcd}$$

Например, если φ – квазипериодическое движение с параметрами $(\bar{t}, \tau)$, то в нем можно выделить два участка: **переходное** движение на промежутке $[0, \bar{t})$ и **периодическое** движение на промежутке $[\bar{t}, \infty)$.

Сужение движения есть операция локализации его на заданный временной промежуток. Другой операцией является временной сдвиг движения (рис. 1.1.16).

Пусть $f : T \to M$ – произвольное отображение и $s \in T$. s*-сдвигом* отображения f называется отображение

$$E^s f : T \to M, \ (E^s f)(t) = f(t+s). \qquad (1.1.8)$$

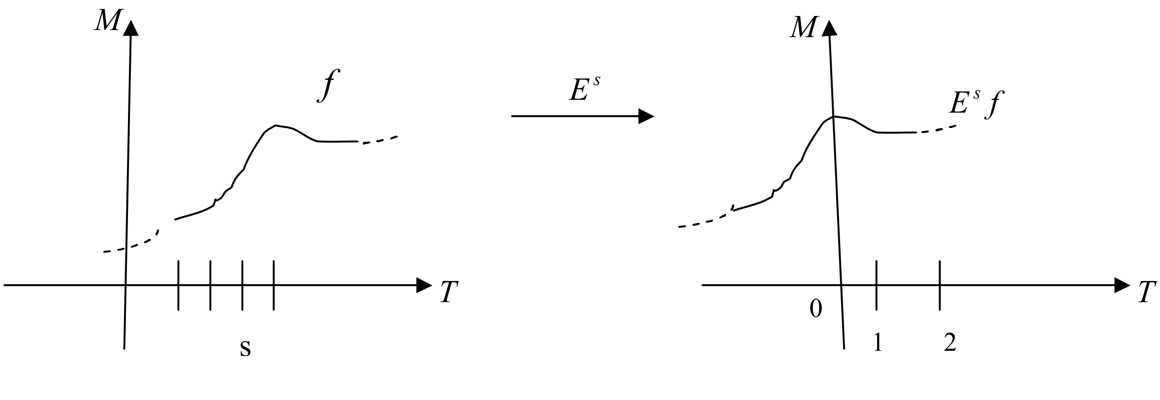


Рис. 1.1.16

Замечание 1.1.2. В определении сдвига отображения существенным является возможность сложения момента времени t и величины сдвига s. Поскольку

$T = N$, то для натуральных чисел такое сложение, конечно, определено. В случае произвольной шкалы T, для корректности определения сдвига, необходимо определение суммы для произвольных $t, s \in T$ или, как еще говорят, наличие *аддитивной структуры* на T. При этом операция сложения на шкале должна удовлетворять условию ассоциативности:

$$(t + s_1) + s_2 = t + (s_1 + s_2). \tag{1.1.9}$$

Тогда шкала T с такой операцией сложения представляет собой *аддитивную полугруппу*, т.е. полугруппу относительно операции сложения.

Используя нумерацию v дискретной шкалы, можно всегда задать такую операцию сложения на любой дискретной шкале T. В этом случае

$$t_k + t_l = t_{k+l} \quad k, l \in N, t_k = v(k), t_l = v(l).$$

В случае равномерной шкалы это приводит к следующему соотношению:

$$kh + lh = (k + l)h,\ h - \text{ шаг шкалы } T.$$

Операция сложения на T, в общем случае, должна быть коммутативной. Это означает, что $T -$ коммутативная (абелева) полугруппа по сложению, т.е. $t_1 + t_2 = t_2 + t_1$ для всех $t_1, t_2 \in T$. Для $T = N -$ это, конечно, очевидно.

Сдвиг E^s представляет собой **оператор**, действующий на отображения из T в M. Меняя s, будем получать различные операторы сдвига. При этом выполнены следующие условия:

$$1) \quad E^{s_1+s_2} = E^{s_1} \cdot E^{s_2}, \tag{1.1.10}$$

$$2) \quad E^0 = Id. \tag{1.1.11}$$

В самом деле, для любого $t \in T$ имеем:

1) $\left(E^{s_1+s_2} f\right)(t) = f\left(t + (s_1 + s_2)\right) = f\left((t_1 + s_1) + s_2\right) = E^{s_2} f(t_1 + s_1) = E^{s_1}\left(E^{s_2} f\right)(t)$,

2) $\left(E^0 f\right)(t) = f(t + 0) = f(t)$.

Определение сдвига относилось к произвольному отображению $f : T \to M$. Если в качестве такого отображения взять движение φ системы $\langle M, A\rangle$, то окажется, что сдвиг движения также является движением.

Предложение 1.1.3. *Пусть $\varphi -$ движение системы $\langle M, A\rangle$, $s \in T$. Тогда $E^s\varphi$ также движение этой системы.*

Доказательство. Нужно показать, что отображение $\varphi' = E^s\varphi$ удовлетворяет уравнению движения (1.1.3), т.е. $\varphi'(t+1) = A\varphi'(t)$ для всех $t \in T$. Имеем $\varphi'(t+1) = E^s\varphi(t+1) = \varphi(t+1+s) = \varphi\big((t+s)+1\big)$, $\quad A\varphi'(t) = A\big(E^s\varphi(t)\big) = A\varphi(t+s)$. Так как φ – движение, то оно удовлетворяет уравнению движения $A\varphi(t) = \varphi(t+1)$ для любого $t \in T$. Поскольку t – произвольно, то, заменяя t на $t+s$ в последнем соотношении, получим $\varphi\big((t+s)+1\big) = A\varphi(t+s)$ □

Выясним смысл предложения 1.1.3. Движение $E^s\varphi$ начинается с состояния $\big(E^s\varphi\big)(0) = \varphi(s)$, т.е. такого состояния, в котором система окажется при движении φ лишь s тактов спустя (рис. 1.1.17). Но, начиная с этого состояния, т.е. с $\varphi(s)$, оба движения по существу неразличимы, т.е. проходят одну

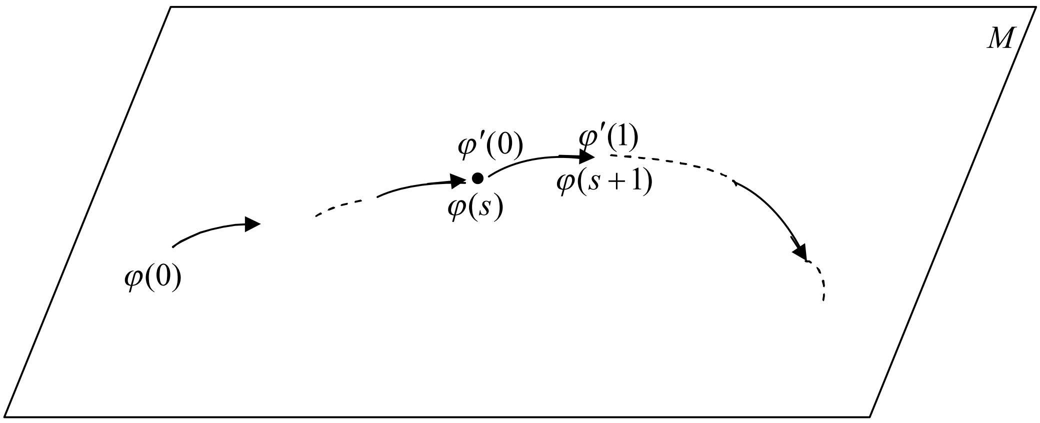


Рис. 1.1.17

и ту же последовательность состояний, только движение $E^s\varphi$ «опережает» движение φ на s тактов. Формально неразличимость участков движения можно определить следующим образом.

Определение 1.1.7. Пусть I_1, I_2 – два промежутка шкалы T и $f_1 : I_1 \to M$, $f_2 : I_2 \to M$ – два произвольных отображения. Будем говорить, что эти отображения *эквивалентны*, если существует биекция $h : I_1 \to I_2$, сохраняющая порядок (т.е. из $t_1 \le t_2$ следует $h(t_1) \le h(t_2)$), причем диаграмма:

$$\begin{tikzcd} I_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f_1"'] & & I_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $f_1 = f_2 \circ h$.

Смысл эквивалентности отображений заключается в следующем: если отображение f_1 принимает значение $x = f_1(t)$, то отображение f_2 принимает это же значение при $t' = h(t)$, т.к. $f_1(t) = f_2(h(t)) = f_2(t')$. Верно и обратное, так что f_1 и f_2 принимает на промежутках I_1, I_2, соответственно, **одинаковые значения**, т.е. их **образы** $f_1(I_1)$ и $f_2(I_2)$ совпадают: $f_1(I_1) = f_2(I_2)$. Более того, эквивалентность f_1 и f_2 означает не только совпадение соответствующих значений, но и сохранение порядка, в котором эти значения принимаются, т.к. из $x_1 = f_1(t_1), x_2 = f_1(t_2)$ и $t_1 \le t_2$ следует, что $t'_1 = h(t_1) \le h(t_2) = t'_2$ и $x_1 = f_2(t'_1)$, $x_2 = f_2(t'_2)$. Поэтому отображения f_1, f_2 принимают одни и те же значения в одном и том же порядке.

Определение 1.1.8. Пусть $f_1, f_2 : T \to M$ – два отображения. Будем говорить, что они *финально эквивалентны*, если существуют такие $t_1, t_2 \in T$, что сужения $\widetilde{f}_1 = f_1|_{[t_1, \infty)}$ и $\widetilde{f}_2 = f_2|_{[t_2, \infty)}$ эквивалентны. При этом, если $t_1 = t_2 = \bar{t}$, то будем говорить, что f_1 и f_2 эквивалентны, начиная с $\bar{t}$.

Рассмотрим подробнее смысл этого определения. Эквивалентность сужений $\widetilde{f}_1 = f_1|_{I_1}$ и $\widetilde{f}_2 = f_2|_{I_2}$, где $I_1 = [t_1, \infty)$, $I_2 = [t_2, \infty)$ означает наличие биекции $h : I_1 \to I_2$, сохраняющей порядок и такой, что $f_1 = f_2 \circ h$. Поскольку t_1 и t_2 наименьшие элементы промежутков I_1 и I_2 соответственно, то $h(t_1) = t_2$, т.к. h сохраняет порядок. По этим же причинам $h(t_1 + 1) = t_2 + 1$, т.к. $t_1 + 1$ и $t_2 + 1$ непосредственно следуют за t_1 и t_2 соответственно. Индукцией легко доказать, что $h(t_1 + k) = t_2 + k$ для любого $k \in N$. Учитывая соотношение $f_1 = f_2 \circ h$, получим равенство $f_2(t + k) = f_2(h(t_1 + h)) = f_1(t + k)$. Таким образом, финальная эквивалентность отображений f_1, f_2 означает выполнение равенства

$$f_1(t_1 + s) = f_2(t_2 + s) \text{ для всех } s \in T. \quad (1.1.12)$$

Это равенство можно записать и в виде:

$$E^{t_1} f_1 = E^{t_2} f_2. \quad (1.1.12')$$

Если φ_1, φ_2 – два финально эквивалентных движения, то начиная с некоторых моментов времени, t_1, t_2 движения φ_1 и φ_2 проходят соответственно одну и ту же последовательность состояний (рис. 1.1.18).

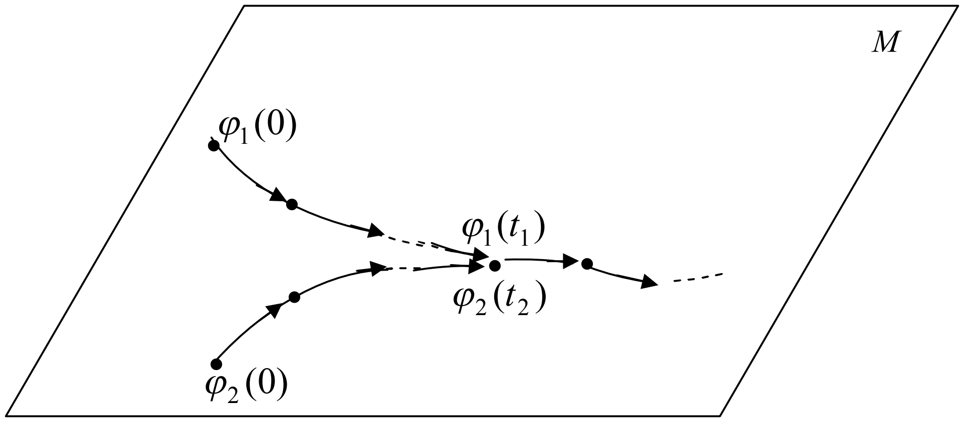


Рис. 1.1.18

Если $I_1 = [t_1, \infty)$ и $I_2 = [t_2, \infty)$, то имеем $\varphi_1(I_1) = \varphi_2(I_2)$, таким образом, траектория движения φ_1 с момента t_1 совпадает с траекторией φ_2 с момента t_2:

$$\varphi_1(t_1 + s) = \varphi_2(t_2 + s), \quad s \geq 0.$$

Важно понимать, что при $t_1 \neq t_2$ движения φ_1, φ_2 проходят одни и те же состояния (начиная с состояния $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$, однако в **разные** моменты времени. Таким образом, если «запустить» две идентичные системы в состояниях $\varphi_1(0)$ и $\varphi_2(0)$ соответственно, то они в движении не «столкнутся», общий участок траекторий одна из систем будет проходить с запаздыванием на $|t_2 - t_1|$ тактов относительно другой. Лишь при $t_1 = t_2 = \bar{t}$, т.е. когда движения эквивалентны, начиная с момента $\bar{t}$, движения систем будут просто совпадать с этого момента.

На рис. 1.1.18 изображены два финально эквивалентных движения. Из вышеприведенных рассуждений, в частности, следует однотипность двух финально эквивалентных движений.

Предложение 1.1.4. *Два финально эквивалентных движения одновременно либо невозвратны, либо квазипериодичны с одинаковым периодом и с общим циклическим участком траекторий.*

Доказательство. Если φ_1 и φ_2 финально эквивалентны, то для некоторых t_1, t_2 при всех $s \ge 0$: $\varphi_1(t_1 + s) = \varphi_2(t_2 + s)$. Пусть одно из движений, скажем φ_1, периодично с момента времени $\bar{t}_1$ и имеет период τ_1. Тогда $\varphi_1(t + \tau_1) = \varphi_1(t)$ для всех $t \ge \bar{t}_1$. Если $t_1 \ge t_2$, то положим $a = t_1 - t_2 \ge 0$ (в противном случае, положим $a = t_2 - t_1$). Тогда

$$\varphi_1(t + a) = \varphi_2(t) \text{ для всех } t \ge t_1 \text{ и } \varphi_1(t + \tau_1) = \varphi_1(t), \quad t \ge \bar{t}_1.$$

Выберем любое $\bar{t} \ge t_1, \bar{t}_2$. Тогда имеем

$$\varphi_2(t + \tau_1) = \varphi_1(t + \tau_1 + a) = \varphi_1(t + a) = \varphi_2(t) \text{ при } t \ge \bar{t}.$$

Так что φ_2 периодично при $t \ge \bar{t}$ с периодом τ_1. Ясно, что

$$\{\varphi_1(t) \mid t \ge \bar{t}\} = \{\varphi_2(t) \mid t \ge \bar{t}\},$$

т.е. циклические участки этих движений совпадают □

Можно задать вопрос, а может ли пересечение траекторий иметь вид, изображенный на рис. 1.1.19, т.е. могут ли траектории «расходиться» после пересечения. Как будет показано ниже, для автономных (стационарных) систем такой тип пересечения траекторий не встречается.

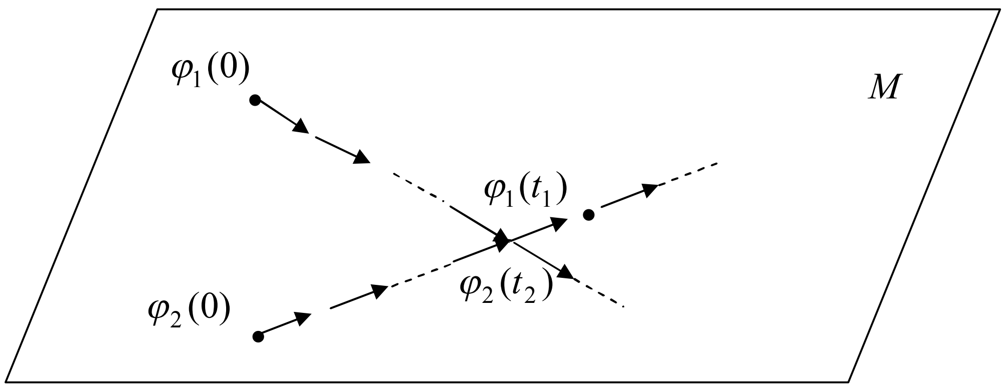


Рис. 1.1.19

Определение 1.1.9. Пусть φ_1, φ_2 – два движения. Будем говорить, что они *пересекаются*, если существуют такие $t_1, t_2 \in T$, что $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$. Если при этих условиях $t_1 = t_2 = \bar{t}$, то будем говорить, что движения *встречаются* в момент времени $\bar{t}$.

Предложение 1.1.5. *Если φ_1, φ_2 – два пересекающихся движения, то они финально эквивалентны. Если φ_1, φ_2 встречающиеся в момент времени $\bar{t}$ движения, то они эквивалентны, начиная с $\bar{t}$.*

Доказательство. Если φ_1, φ_2 пересекаются, то существуют t_1, t_2 такие, что $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$. Из всех таких пар выберем пару $(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ с наименьшими возможными t_1, t_2. Тогда $\varphi_1(\bar{t}_1) = \varphi_2(\bar{t}_2)$ и $\varphi_1(t'_1) \neq \varphi_2(t'_2)$ для $t'_1 < \bar{t}_1, t'_2 < \bar{t}_2$. Рассмотрим теперь отображения $\varphi'_1 = E^{\bar{t}_1}\varphi_1$ и $\varphi'_2 = E^{\bar{t}_2}\varphi_2$. В силу предложения 1.1.3 эти отображения являются также движениями, при этом

$$\varphi'_1(0) = E^{\bar{t}_1}\varphi_1(0) = \varphi_1(\bar{t}_1) = \varphi_2(\bar{t}_2) = E^{\bar{t}_2}\varphi_2(0) = \varphi'_2(0),$$

т.е. начальные состояния этих движений совпадают. Но тогда в силу принципа детерминированности (предложение 1.1.1) сами движения также совпадают, т.е. $E^{\bar{t}_1}\varphi_1(s) = E^{\bar{t}_2}\varphi_2(s)$ для любого $s \geq 0$. Это означает, что

$$\varphi_1(\bar{t}_1 + s) = \varphi_2(\bar{t}_2 + s) \text{ для всех } s \geq 0.$$

Следовательно, φ_1, φ_2 – финально эквивалентны. Если $\bar{t}_1 = \bar{t}_2 = \bar{t}$, то получаем эквивалентность, начиная с момента $\bar{t}$ □

Итак, для **движений** справедливо следующее важное свойство:

$$\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2) \Rightarrow \varphi_1(t_1 + s) = \varphi_2(t_2 + s) \tag{1.1.13}$$

или равносильное ему:

$$\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2) \Rightarrow E^{t_1}\varphi_1 = E^{t_2}\varphi_2. \tag{1.1.13'}$$

Теперь сформулируем и докажем важнейшую теорему о возможных типах движений автономной системы с дискретным временем.

Теорема 1.1.1. *Каждое движение системы либо невозвратно, либо квазипериодично.*

Доказательство. Пусть φ – произвольное движение. Если φ невозвратно, то доказывать нечего. В противном случае некоторое состояние проходится более одного раза. Возьмем первое (по времени) такое состояние y. Тогда оно будет первый раз пройдено в момент времени $\bar{t}$, а затем второй раз через τ шагов, т.е.

$$\varphi(\bar{t} + \tau) = \varphi(\bar{t}).$$

В силу предложения 1.1.5 из

$$\varphi(\bar{t} + \tau) = \varphi(\bar{t})$$

следует, что

$$\varphi(\bar{t} + \tau + s) = \varphi(\bar{t} + s) \text{ для любого } s \geq 0,$$

т.е.

$$\varphi(t+\tau)=\varphi(t) \text{ для } t \ge \bar{t} .$$

Последнее равенство говорит, что φ периодическое с момента $\bar{t}$ движение и с периодом τ □

Из этой теоремы можно получить описание всех движений **конечной** динамической системы.

Следствие 1.1.1. *Пусть* $D=\langle M, A\rangle$ *– конечная динамическая система, т.е.* M *– конечное множество. Тогда все движения системы являются квазипериодическими.*

Доказательство. Так как невозвратные движения имеют бесконечную траекторию, то конечная система не может иметь таких движений. Следовательно, в силу теоремы 1.1.1 конечная система может иметь только квазипериодические движения □

Доказанные выше свойства движений автономных систем с дискретным временем существенно опирались на **независимость** оператора перехода системы A от **времени**. Иными словами, независимо от того, в какой момент времени система попадет в состояние x, ее переход в следующее состояние x' будет всегда одним и тем же. Это свойство иногда называют *стационарностью* системы. С точки зрения принятого в этой главе определения системы (определение 1.1.1), понятия автономности и стационарности совпадают. Однако в дальнейшем мы будем изучать и неавтономные стационарные системы. С содержательной точки зрения автономная система – это система, изолированная от внешних воздействий. Другими словами, это система **без входов** или, по крайней мере, входы системы постоянны, т.е. **не зависят** от времени. Строго говоря, этого еще недостаточно для того, чтобы считать систему стационарной. Нужно пренебречь также внутренними эффектами, связанными собственно со временем, например, «старением» системы. Формально, конечно, можно отнести эти эффекты к некоторым, еще неучтенным, внешним воздействиям.

С физической точки зрения систему не всегда удается полностью изолировать от внешней среды, например, от различных полей (электромагнитного, гравитационного). Поэтому понятие автономной системы есть идеализация реальных систем. Математически это приводит к тому определению (в случае дискретного времени), которое было дано в начале главы. Стационарность же системы не обязательно предполагает изолированность от внешних воздействий, т.е. автономность. Такие воздействия (входы) могут быть, однако **характер поведения** системы не зависит от выбранного начального момента наблюдения за системой (момента «запуска»). С формальной точки зрения эта независимость выражается инвариантностью движения относительно временных сдвигов.

Например, можно было бы дать такое определение стационарности: «Система D (необязательно автономная) называется стационарной, если для любого движения φ его сдвиг $E^s\varphi$ есть также движение этой системы для любого $s \in T$. Здесь не указано, что понимается под неавтономной системой. Точные определения будут даны в соответствующих главах. Цель вышеприведенных замечаний состояла в указании на возможный способ определения понятия стационарности для **любых** систем и подчеркнуть различие понятий стационарности и автономности.

Выше мы определили оператор сдвига по времени E^s для отображений $f : T \to M$. Используя операторы на пространстве состояний, мы можем определить «сдвиги» таких отображений **по состояниям**. Точнее говоря, имеется в виду следующее. Пусть

$$B : M \to M$$

– некоторый оператор на M. Тогда можно определить оператор $\widehat{B}$, действующий на отображения f:

$$\left(\widehat{B}f\right)(t) = B(f(t)) \text{ для всех } t \in T. \qquad (1.1.15)$$

Оператор $\widehat{B}$ действует на множестве $Map(T, M)$ – всех отображений из T в M. Действия операторов сдвига по времени и по состояниям можно изобразить следующими коммутативными диаграммами

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "(+s)"] \arrow[dr, "E^s f"'] & {} \arrow[d, phantom, "E^s"] & T \arrow[dl, "f"] \\ & M & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "\widehat{B}f"] & \\ M \arrow[rr, "B"'] & {} \arrow[u, phantom, "\widehat{B}"] & M \end{tikzcd}$$

Используя эти операторы, можно записать уравнение движения в операторной форме:

$$E^1\varphi = \widehat{A}\varphi. \tag{1.1.16}$$

В самом деле

$$\left(E^1\varphi\right)(t) = \varphi(t+1) = \varphi(t+1),$$

$$\left(\widehat{A}\varphi\right)(t) = A\left(\varphi(t)\right),$$

следовательно (1.1.16) равносильно равенству

$$\varphi(t+1) = A\varphi(t).$$

1.2. Обратимые системы

До сих пор мы в основном интересовались «будущим» поведением системы. Принцип детерминированности утверждает однозначность будущего поведения системы. Формально все это выражается заданием движения как отображения $\varphi : T \to M$, определенного на **односторонней** шкале $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$.

Такой подход имеет две интерпретации. В первом случае, мы «запускаем» систему в некоторый начальный момент времени, причем система заранее «настраивается» на некоторое начальное состояние. В последующие моменты времени мы лишь наблюдаем за ее поведением (движением). В этом случае ни о какой предыстории движения говорить не приходится. Система как бы «рождается» в момент t_0, в некотором начальном состоянии x_0. Во втором случае начальный момент времени есть лишь момент **начала наблюдения,** т.е. предполагается, что система «существовала» и в предыдущие моменты времени, и до начала наблюдения двигалась определенным образом, хотя, возможно, об этом «прошлом» движении нам ничего не известно. В этом случае выбор односторонней шкалы диктуется лишь условием однозначности будущего поведения (если известно начальное состояние системы).

Можно поставить вопрос о том, как вела себя система до начала наблюдения. Чтобы иметь возможность говорить о прошлом системы, т.е. о ее состояниях в моменты времени, предшествующие началу наблюдения, необходимо расширить одностороннюю шкалу $T = \{t_k \mid k \in N\}$ до двусторонней $T = \{t_k \mid k \in Z\}$, включив в нее предшествующие моменты

$$T^- = \{\ldots, t_{-n}, \ldots t_{-2}, t_{-1}\}.$$

Теперь описание движения должно содержать и информацию о «прошлом» движения. Поэтому движение φ нужно определять как отображение $\varphi : T \to M$ (T – двусторонняя шкала), удовлетворяющее уравнению движения:

$$\varphi(t+1) = A\varphi(t) \text{ для всех } t \in T. \tag{1.2.1}$$

Здесь мы сталкиваемся с одной трудностью. Если состояние системы в момент t_0 задано, то движение для $t \ge t_0$ определено, причем однозначно. Это нам гарантирует принцип детерминированности. Однако ничто не гарантирует ни возможности продолжения φ назад, т.е. на T^-, ни однозначности такого продолжения. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Будем считать $T = Z$, $T^+ = N$, и что φ движение системы $D = \langle M, A \rangle$, определенное на T^+ с начальным состоянием $\varphi(0) = x_0 \in M$. Будем строить продолжение φ на T^- последовательно, т.е. сначала определим $\varphi(-1)$, затем $\varphi(-2), \varphi(-3)$ и т.д. Состояние $x_{-1} = \varphi(-1)$ должно удовлетворять уравнению движения при $t = -1$: $\varphi(0) = A\varphi(-1)$, т.е.

$$x_0 = Ax_{-1}. \tag{1.2.2}$$

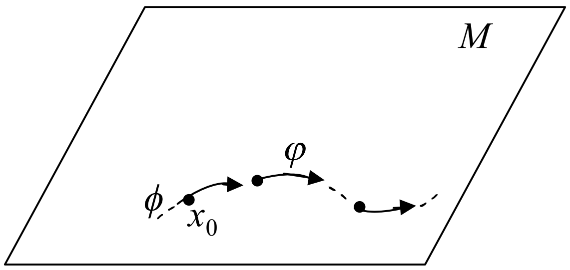
Таким образом, в качестве x_{-1} можно взять любое решение уравнения

$$Ay = x_0. \tag{1.2.3}$$

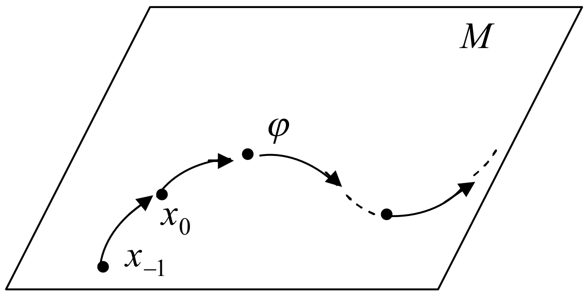
При этом имеются три возможности: уравнение (1.2.3) вообще не имеет решений и значит движение φ непродолжаемо назад (рис. 1.2.1 а)); уравнение имеет только одно решение, и следовательно, $\varphi(-1)$ однозначно определено (рис. 1.2.1 б)); уравнение имеет более одного решения, т.е. движение φ имеет различные продолжения до $t = -1$ (рис. 1.2.1 в)). В последних двух случаях получаем какое-либо продолжение φ до $t = -1$. Теперь можно строить продолжение еще на один шаг назад, т.е. до $t = -2$. Это приводит к необходимости решать уравнение

$$Ax_{-2} = x_{-1},$$

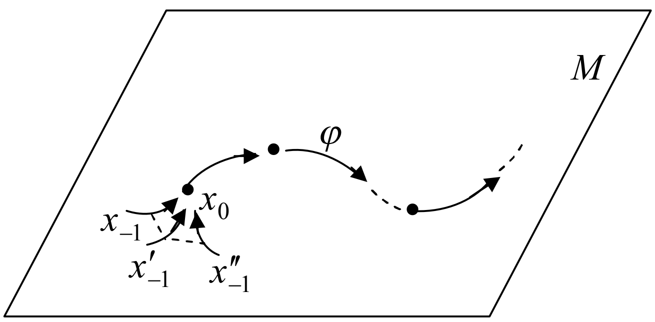
аналогично (1.2.2).



а)



б)



в)

Рис. 1.2.1

При этом снова реализуется одна из трех возможностей. Затем все повторяется для $t=-3$ и т.д. Каждый шаг такого процесса дает совокупность конечных продолжений, т.е. продолжений для некоторого $t=-k \quad (k>0)$, которые мы будем называть фрагментами продолжений. Каждый фрагмент, получающийся в результате продолжения по $t=-k$, определен для всех $t \geq -k$ и удовлетворяет уравнению движения на этом промежутке, т.е. реализует некоторое возможное движение, проходящее состояние x_0 в момент $t=0$. Такой фрагмент может иметь одно или более чем одно продолжение до $t=-k-1$, т.е. еще на один шаг назад, а может и не иметь таких продолжений вовсе. Эти непродолжаемые фрагменты представляют собой движения, начинающиеся в момент $t=-k$ в состояниях – «истоках», т.е. таких состояниях, которые не имеют «предшествующих» состояний, что равносильно неразрешимости уравнения $Ay=x_{-k}$. В таком состоянии система может начать движение, но никогда не может попасть в него из какого-либо другого состояния. Наконец, траектория такого движения **максимальна**, т.е. не содержится в какой-либо отличной от нее самой траектории. Наоборот, если фрагмент φ', определенный при $t = -k$, имеет продолжение φ'' до $t = -k - 1$, то траектория $\operatorname{Im}\varphi''$ содержит траекторию $\operatorname{Im}\varphi'$, при этом, если $x_{-k-1} \neq x_{-k}$, то $\operatorname{Im}\varphi''$ содержит на одно состояние «больше», чем $\operatorname{Im}\varphi'$, т.е.

$$\operatorname{Im}\varphi'' = \operatorname{Im}\varphi' \cup \{x_{-k-1}\}, \quad x_{-k-1} \notin \operatorname{Im}\varphi'.$$

Некоторые фрагменты могут иметь **бесконечные продолжения**, т.е. их можно продолжить (однозначно или нет) на все Z. Ясно, что продолжение любого фрагмента либо обрывается на некотором конечном шаге, в результате которого получается непродолжаемый (максимальный) фрагмент, либо такое продолжение может быть выполнено для всех моментов времени, а значит, получаем всюду определенное продолжение, также удовлетворяющее уравнению движения. Эти продолжения максимальны в том же, указанном выше смысле, и, конечно, по самому своему смыслу, непродолжаемы.

Таким образом, если рассматривать возможные продолжения данного движения $\varphi : N \to M$, то можно указать два класса максимальных продолжений. Это либо конечные максимальные продолжения, определенные на промежутках $T_{-k} = \{t \in Z \,|\, t \geq -k\}$, представляющие движения, начинающиеся в состояниях – истоках, либо бесконечные продолжения, определенные на всей шкале $T = Z$. Для данного движения каждый из этих классов может быть пуст, конечен или бесконечен. Таким образом, имеется, вообще говоря, бесконечное число возможных вариантов продолжения данного движения. Все эти движения в момент $t = 0$ сливаются и имеют единственное продолжение вперед, совпадающее с данным движением $\varphi|_N$.

В общем случае состояние системы x_0 в момент $t = 0$ не несет никакой информации о прошлом движении. Система как бы «забывает» свое прошлое поведение. И лишь в том случае, когда данное движение имеет единственное максимальное продолжение можно с уверенностью восстановить предысторию данного движения φ. Если такое продолжение конечно, то система имеет предысторию лишь до некоторого момента $t = -k < 0$, о более далеком прошлом сказать вообще ничего невозможно. Система «рождается» в момент времени $t = -k$ в состоянии $x_{-k} = \varphi(-k)$. Если же это продолжение бесконечно, то движение однозначно восстанавливается до любого момента, предшествующего начальному. Такое движение в полном смысле обратимо, т.к. однозначно известно не только будущее, но и прошлое движение, причем для всех моментов времени $t \in Z$. Систему, каждое движение которой обратимо, естественно назвать *обратимой*. Как мы видели, для обратимости необходима и достаточна однозначная решимость уравнения $Ay = x$ для любого $x \in M$. Это означает обратимость оператора A, т.е. существование обратного оператора A^{-1}, такого, что

$$AA^{-1} = Id_M = A^{-1}A.$$

Таким образом, можно дать следующее определение.

Определение 1.2.1. Система $D = \langle M, A \rangle$ *обратима*, если оператор $A : M \to M$ – обратим.

В силу всего вышесказанного, естественной временной шкалой для обратимых систем является двусторонняя шкала $T = Z$. В случае рассмотрения обратимых систем мы всегда будем использовать эту шкалу. Движение обратимой системы считается определенным для всех моментов двусторонней шкалы $T = Z$, т.е. $\varphi : T \to M$ удовлетворяет уравнению движения (1.2.1).

Приложение 1.2.1 (Принцип детерминированности). *Пусть* φ_1, φ_2 *– два движения обратимой системы. Если для некоторого* $t_0 \in T, \varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, *то* $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ *для всех* $t \in T$.

Доказательство. Пусть

$$S = \{t \mid \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}.$$

Если $t \in S$, то $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, но тогда

$$\varphi_1(t+1) = A\varphi_1(t) = A\varphi_2(t) = \varphi_2(t+1),$$

т.е. $\varphi_1(t+1) = \varphi_2(t+1)$. Значит $(t+1) \in S$. С другой стороны

$$\varphi_1(t) = A\varphi_1(t-1) = \varphi_2(t) = A\varphi_2(t-1), \text{ т.е. } A\varphi_1(t-1) = A\varphi_2(t-1).$$

Из обратимости A следует, что

$$\varphi_1(t-1) = \varphi_2(t-1), \text{ т.е. } (t-1) \in S.$$

Таким образом, множество S с каждым t содержит $t+1$ и $t-1$. Так как $t_0 \in S$, то $S = T$ □

Как и в случае односторонней шкалы, легко доказать следующее утверждение:

Для любых $t_0 \in Z$ *и* $x_0 \in M$ *существует одно и только одно движение* $\varphi : Z \to M$ *, удовлетворяющее начальному условию* $\varphi(t_0) = x_0$.

Все данные в параграфе 1.1 определения переносятся на случай обратимых систем, с учетом $T = Z$. Отметим, что сужение $\varphi|_{T^+} = \varphi|_N$ называется *положительным участком* движения φ, а его образ $\varphi(N)$ *положительной полутраекторией*. Аналогично сужение $\varphi|_{T^-} = \varphi|_{-N}$ называется *отрицательнм участком*, а его образ *отрицательной полутраекторией*.

Обратимость системы налагает ограничения на возможные типы движений. Так, для произвольных систем мы получили разбиение всех движений на два типа: невозвратные и квазипериодические. Для случая обратимых систем квазипериодические движения могут быть только периодическими. Точнее, имеет место следующее:

Предложение 1.2.2. *Пусть* $\varphi : T \to M$ *периодическое с момента* $\bar{t}$ *движение обратимой системы с периодом* τ. *Тогда* φ *– периодическое движение с периодом* τ.

Доказательство. Пусть

$$S = \{t \in T = Z \mid \varphi(t + \tau) = \varphi(t)\}.$$

По условию, каждое $t \geq \bar{t}$ принадлежит S. Покажем, что $S = T$, что равносильно периодичности φ. Если $s \in S$, то $s + 1 \in S$, т.к.

$$\varphi(s + 1 + \tau) = A\varphi(s + \tau) = A\varphi(s) = \varphi(s + 1).$$

Аналогично, из $s \in S$ следует $s - 1 \in S$, т.к.

$$\varphi(s + \tau) = A\varphi(s - 1 + \tau) = \varphi(s) = A\varphi(s - 1),$$

т.е.

$$A\varphi(s - 1 + \tau) = A\varphi(s - 1)$$

и в силу обратимости A имеем

$$\varphi(s - 1 + \tau) = \varphi(s - 1).$$

Итак, множество S с каждым s содержит $(s + 1)$ и $(s - 1)$. Так как $\bar{t} \in S$, то $S = T$ □

Из предложения 1.2.2 следует, что обратимая система может совершать либо невозвратные движения (с неповторяющимися состояниями), либо периодическое движение по конечной траектории (орбите), длина которой (т.е. число проходимых состояний) равна периоду движения.

Следствие 1.2.3. *Конечная обратимая система может совершать только периодические движения.*

Доказательство следует из того факта, что конечная система может совершать лишь квазипериодические движения. Поскольку система обратима, то каждое такое движение, согласно предложению 1.2.2, – периодическое.

Пример 1.2.1. Система $D = \langle R, A \rangle$, где $Ax = x + 1$, очевидно, обратима, причем $A^{-1}x = x - 1$. Все движения этой системы невозвратны.

Пример 1.2.2. Система $D = \langle Z_8, A \rangle$, где $Ax = 2x \bmod 8$, необратима, т.к. оператор A необратим. Например, уравнение $Ax = 0$ имеет два решения $x = 0$ и $x = 4$, тогда как уравнение $Ax = 1$ вообще не имеет решений. Эта система имеет четыре состояния – истока 1, 2, 4, 7, в которых система может только начинать движения.

Пример 1.2.3. Система

$$D = \langle Z_8, A \rangle, \text{ где } Ax = 3x \bmod 8,$$

обратима, т.к. оператор A обратим. Это следует из того, что уравнение $Ay = x\ (3y = x)$ однозначно разрешимо для любого x. Система имеет одну точку покоя $x = 0$, и три цикла $\{1, 3\}$, $\{2, 6\}$, $\{5, 7\}$, по которым система совершает периодические движения с периодом $\tau = 2$.

1.3. Фазовые потоки и портреты систем

До сих пор мы имели дело лишь с отдельными движениями динамических систем. Часто, однако, интересуются всей совокупностью возможных движений системы. Математически представление всего класса движений и их траекторий осуществляется с помощью понятий **фазового потока** и **фазового портрета** системы. Перейдем сейчас к подробному обсуждению этих понятий. Вначале мы рассмотрим случай односторонней шкалы $T = N$ для произвольных систем, а затем случай двусторонней шкалы $T = Z$ для обратимых систем.

Пусть $D=\langle M, A\rangle$ – система и x_0 некоторое начальное состояние. Начиная с этого состояния, система за один шаг окажется в состоянии $x_1 = Ax_0$, за два шага в состоянии $x_2 = Ax_1 = A(Ax_0) = A^2 x_0$, и т.д. Вообще за n шагов система перейдет в состояние

$$x_n = A(A(...(Ax_0)...) = A^n x_0,$$

где A^n – n-ая степень оператора A, определяемая соотношениями

$$\begin{cases} A^0 = Id_M, \\ A^n = A \circ A^{n-1}, \quad n \in N, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

где Id_M – тождественный оператор на M.

Оператор A^n задает **все** n-шаговые переходы $(n \geq 0)$ системы из **любого** начального состояния x_0: $A^n : M \to M$, $x_0 \mapsto x_n = A^n x_0$. Тем самым, семейство $\{A^n\}_{n \in N}$ операторов описывает всевозможные (односторонние) движения системы. Так, если φ движение, начинающееся в x_0, то

$$\varphi(t) = A^t x_0,\ t \in T(= N). \tag{1.3.2}$$

Часто удается вычислить степень A^n сразу для всех n, т.е. установить вид оператора A^n, где n будет просто параметром. В этом случае n-шаговый переход системы из начального состояния находится сразу, т.е. **однократным** применением оператора A^n к состоянию x_0. Это начальное состояние произвольно, сам оператор от него не зависит. Именно поэтому мы можем говорить о том, что оператор A^n описывает **все** n-шаговые переходы. Если же нам известны **все степени** A^n, то, тем самым, известны все возможные переходы из любого начального состояния, т.е., по существу, известны **все** движения системы.

Семейство $\{A^t\}_{t \in N}$ обладает полугрупповым свойством:

$$A^{t+s} = A^t \circ A^s \text{ для всех } t, s \in N. \tag{1.3.3}$$

Свойство (1.3.3) означает, что если система за s шагов перешла из состояния x в состояние y, за следующие t шагов из состояния y в состояние z, то за $t+s$ шагов система перейдет из состояния x в состояние z:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "A^s"] \arrow[dr, "A^{t+s}"'] & y \arrow[d, "A^t"] \\ & z \end{tikzcd}$$

т.е. $A^{t+s}x = A^t(A^s x)$.

Если A – обратимый оператор, то кроме прямых (положительных) переходов $A^n (n \geq 0)$, можно рассматривать обратные (отрицательные) переходы $A^{-n} (n \geq 0)$. Для этого достаточно положить $A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n$, для любого $n \geq 0$. Следовательно, можно определить семейство $\left\{A^n\right\}_{n \in Z}$ такое, что

$$A^n = \begin{cases} \underbrace{A \cdots A}_{n \text{ раз}}, & \textit{если } n \geq 0, \\ \underbrace{A^{-1} \cdots A^{-1}}_{n \text{ раз}}, & \textit{если } n < 0. \end{cases} \tag{1.3.4}$$

Если x_0 некоторое начальное состояние обратимой системы, то $A^n x_0$, для $n \geq 0$ есть состояние, в котором система **окажется** через n тактов, тогда как $A^{-n} x_0$ есть состояние, в котором система **была** за n тактов до начального момента. Таким образом, семейство $\left\{A^n\right\}_{n \in Z}$ описывает все движения (как будущие, так и прошлые) обратимой системы.

Определение 1.3.1. Пусть T дискретная временная шкала (односторонняя или нет). *Фазовым потоком* системы $D = \langle M, A \rangle$ называется однопараметрическая полугруппа $\left\{A^t\right\}_{t \in T}$, действующая на пространстве состояний M.

Термин однопараметрическая полугруппа означает, во-первых, что семейство операторов $\left\{A^t\right\}_{t \in T}$ зависит от одного параметра времени t; во-вторых, это семейство обладает полугрупповым свойством (1.3.3), т.е. представляет собой полугруппу относительно операции умножения (композиции) операторов.

Замечание 1.3.1. Традиционно фазовый поток для односторонней шкалы $T = N$ называют *полупотоком*, тогда как термин «поток» используют в случае двусторонней шкалы. Кроме того, для дискретной шкалы часто говорят не о потоке, а о *каскаде*, оставляя термин поток (и полупоток) для случая непрерывного времени.

Как было сказано выше, для двусторонней шкалы $T = Z$ поток определяется лишь для системы с обратимым оператором A. В этом случае говорят об *однопараметрической группе* операторов, т.к. все операторы семейства $\left\{A^t\right\}_{t\in T}$ будут обратимы:

$$\left(A^t\right)^{-1} = A^{-t} \text{ для всех } t \in T. \qquad (1.3.5)$$

В принципе, обратимость сразу следует из определения потока, если считать $T = Z$, т.к., полагая $s = -t$, получаем

$$A^t \circ A^{-t} = A^{-t} \circ A^t = A^0 = Id_M.$$

Итак, идет речь о полугруппе или группе операторов, становится сразу ясным по выбору шкалы.

Фазовый поток определяет общую (полную, глобальную) функцию перехода системы:

$$\phi : T \times M \to M, \ \phi(t, x) = A^t x.$$

Эта функция указывает, в какое состояние перейдет (если $t > 0$) и в каком состоянии была (если $t < 0$) система за время t, если в начальный момент времени она находится в состоянии x. Полугрупповое свойство для этой функции записывается следующим образом:

$$\phi(0, x) = x, \quad x \in M,$$
$$\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x)), \quad t, s \in T.$$

Различие между семейством $\left\{A^t\right\}_{t\in T}$ и общей переходной функцией ϕ чисто формальное. Одно из них полностью определяет другое. В силу этого чисто фазовым потоком называют именно функцию ϕ.

Согласно данному выше определению фазового потока его нахождение сводится к вычислению степеней оператора перехода. Вообще говоря, это трудная задача и лишь в отдельных случаях такое вычисление может быть проведено до конца. Однако, явный вид фазового потока и не всегда нужен. Часто достаточно знать лишь некоторые его свойства, позволяющие описать возможные типы движений, их устойчивость и т.п. Такой подход называют часто качественным, в противоположность количественному подходу, основанному на явном вычислении фазового потока. Противоположность этих подходов, конечно, весьма условна. Реально стремятся получить, если это возможно, полное описание поведения системы, включающее и количественные, и качественные характеристики движений. Но именно трудности вычислительного характера заставляют ограничиваться качественным описанием.

Найдем фазовые потоки для некоторых систем из примеров, приведенных выше.

Пример 1.3.1. Для системы из примера 1.1.1 с $M = R$ и $Ax = x + a$ вычислить фазовый поток явно очень легко $\phi(t, x) = A^t x = x + ta, \quad t \in Z$.

Легко также найти явное выражение для потока системы $M = \{0,1,...9\}$, $Ax = ax \bmod 10$ (примера 1.1.3.) Имеем $\phi(t, x) = a^t x \bmod 10, \quad t \in N$, где a^t – степень числа. При этом, если a взаимно просто с 10, то система обратима и $t \in Z$.

Для примера 1.1.4 имеем $M = [0,1)$, $Ax = \{10x\}$. Индукцией по $t \in N$ получим $\phi(t, x) = \{10^t x\}$.

Фазовый поток есть семейство операторов. Оператор, в свою очередь, частный случай отображения, функции. Отображение, а тем более семейство отображений не очень наглядный объект. Это справедливо, особенно в тех случаях, когда отображение задается аналитическим выражением, т.е. формулой. В математическом анализе для более наглядного представления функций пользуются графиками. Если считать, что имеется наглядный образ пространства состояний, то отдельное движение системы в этом пространстве изображается траекторией, т.е. множеством проходимых состояний. В случае непрерывного времени траектория есть линия в пространстве состояний, ее называют также *фазовой кривой*.

Для дискретного времени образ непрерывной кривой заменяется дискретным набором точек – состояний. Совокупность всех фазовых кривых для непрерывного времени и совокупность всех дискретных траекторий для дискретного времени представляет собой наглядный образ возможных движений системы. Пространство состояний при этом как бы расслаивается на отдельные «кривые» (непрерывные или дискретные), по которым происходит движение системы. Это «расслоение» называют *фазовым портретом* системы. Фазовый портрет – это наглядный образ фазового потока.

Хотя интуитивное понятие фазового портрета весьма просто, формальное его определение немного сложнее. Самое существенное в понятии фазового портрета – это разбиение пространства состояний на отдельные части, причем возможные движения в пределах каждой части легко описываются. Таким образом, полный портрет системы как бы складывается из отдельных, независимых частей – фрагментов. Когда пространство состояний наделено некоторой структурой, например, топологической, возможен еще учет взаимного расположения этих фрагментов относительно данной структуры. Поскольку, как мы уже сказали, речь идет о разбиении пространства состояний, то нужно указать способ получения такого разбиения. Конечно, проще всего было бы разбивать пространство состояний на отдельные траектории, т.к. они представляют собой очень простой и наглядный образ – множества проходимых состояний. Этому, однако, препятствует одно обстоятельство. Дело в том, что совокупность всех траекторий не образует разбиение пространства состояний, т.к. отдельные траектории могут пересекаться, например, одна из траекторий может целиком содержаться в другой (рис. 1.3.1).

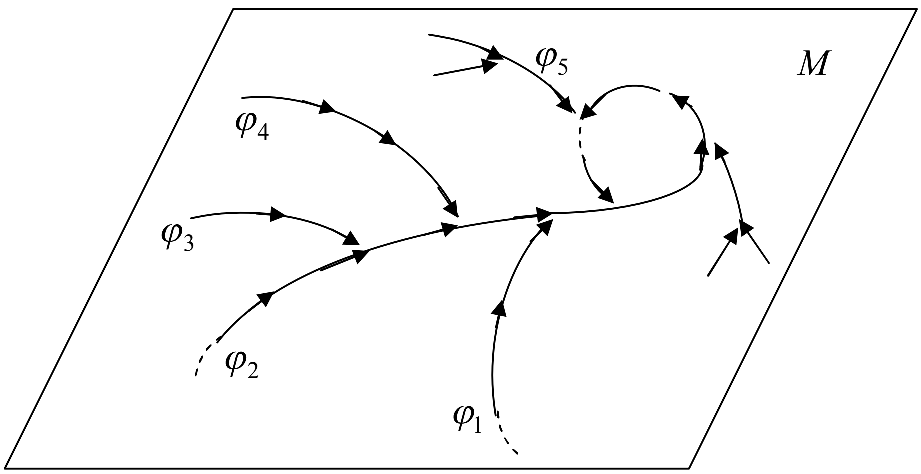


Рис. 1.3.1

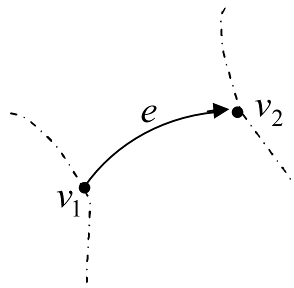
Траектория сдвинутого движения $E^s\varphi$ целиком содержится в траектории исходного движения φ: $\operatorname{Im} E^s\varphi \subset \operatorname{Im}\varphi$.

Так как движение целиком определяется начальным состоянием, то и траектория также определяется начальным состоянием. Выбрав в качестве начального состояния любое состояние, лежащее на какой-либо траектории, мы получим новое движение, траектория которого будет, вообще говоря, частью исходной траектории. Можно было бы попытаться взять в качестве фрагмента портрета максимальную траекторию. Однако и максимальные траектории могут пересекаться, так что их совокупность также не дает разбиения пространства состояний. Вышеприведенные рассуждения наводят на мысль о том, что в качестве фрагмента фазового портрета следует брать не отдельные траектории, а совокупность всех пересекающихся траекторий. Такая совокупность представляет собой пучок траекторий, т.к. мы знаем, что пересечение траекторий ведет к слиянию (совпадению их участков) с некоторого места.

Различные пучки траекторий не пересекаются и, в целом, образуют разбиение пространства состояний системы. Для уточнения приведенных выше соображений нам потребуется ряд понятий.

Определение 1.3.2. *Графом динамической системы* $D = \langle M, A \rangle$ называется ориентированный граф $G(D) = \langle V, E \rangle$, в котором $V = M$ – множество вершин графа (все состояния системы), $E = \{(x, Ax) \mid x \in M\}$ – множество дуг графа (возможные одношаговые переходы).

Формально, множество дуг E есть просто график оператора A, состоящий из всех пар смежных вершин состояний (рис. 1.3.2).



$$v_1 = x \in M$$
$$v_2 = x' \in M$$
$$x' = Ax$$

Рис. 1.3.2

Пример 1.3.2. $D = \langle M, A \rangle$, $M = \{0,1,...,9\}$, $Ax = 3x \bmod 10$, т.е. $(a = 3)$. В этом графе (рис. 1.3.3) 10 вершин, обозначающих состояния $0,1,...,9$, а дуги обозначают одношаговые переходы. Граф состоит из четыре непересекающихся частей, так называемых *связных компонент* графа:

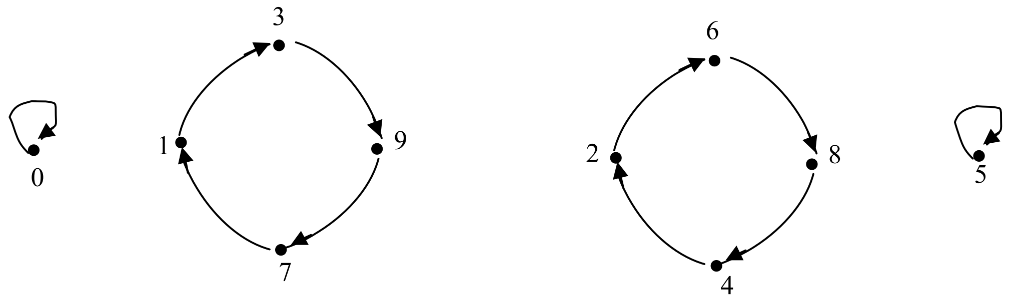


Рис. 1.3.3

Каждая такая компонента представляет собой цикл и изображает одну из четырех возможных траекторий движения. **Разбиение** графа на четыре компоненты связности и дает представление о фазовом портрете этой системы.

Легко видеть, что задание графа системы полностью определяет оператор перехода, а следовательно и саму систему. Конечно, не любой граф является графом какой-либо системы. Для этого он должен обладать следующим очевидным свойством: из каждой вершины графа выходит в **точности одна дуга**.

Состояния **истоки** на графе системы изображаются вершинами, не имеющими входящих дуг. Особую роль имеют также вершины, изображающие положения равновесия, такие вершины имеют лишь одну выходящую дугу – **петлю**, так что из этого состояния нельзя попасть ни в какое другое состояние. Такие вершины состояния естественно назвать *стоками*.

Пример 1.3.3. Пусть $M = Z_8 = \{0,1,...,7\}$, $Ax = 2x \bmod 8$. Тогда граф системы имеет вид, изображенный на рис. 1.3.4.

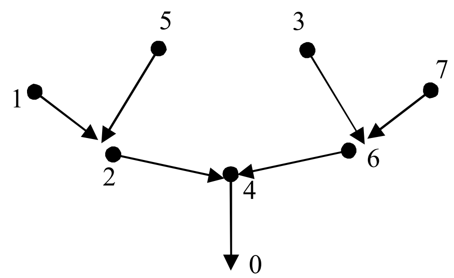


Рис. 1.3.4

Имеется четыре состояния – истока: $1, 5, 3, 7$ и одно состояние – сток: 0. Граф имеет ровно одну компоненту связности. Фазовый портрет этой системы и сводится к этой компоненте.

На графе системы легко интерпретируются основные понятия, введенные для систем. Так, движение изображается **путем** в графе, начинающимся в начальном состоянии (начальной вершине пути). Строго говоря, такой путь должен быть бесконечным, т.к. движение определяется для **всех** моментов времени из шкалы $T(=N \text{ или } Z)$. При этом траектория движения представляет собой множество вершин, лежащих на этом пути. Периодическое движение (и его траектория) представляется **циклом** графа, а положения равновесия изображаются, как уже было сказано, вершиной с петлей.

Замечание 1.3.2. Граф системы дает наглядное описание системы лишь в случае конечного пространства состояний. В этом случае граф также конечен, т.е. имеет конечное множество вершин и дуг. Формально все определения годятся для произвольных систем, так что, в принципе, граф системы может иметь бесконечное множество вершин (и дуг).

Как известно, любой граф можно представить в виде объединения его **связных компонент**. Каждая связная компонента есть максимальный связный подграф данного графа. **Различные компоненты связности не пересекаются**. Это разбиение и дает нам желаемое представление фазового портрета системы. Каждая компонента в этом случае будет фрагментом портрета, представляющим пучок попарно пересекающихся траекторий системы.

Определение 1.3.3. *Фазовым портретом* системы D называется разбиение графа системы $G(D)$ на (слабо) связные компоненты.

Таким образом, в фазовом портрете столько фрагментов, сколько различных связных компонент в графе системы.

Разбиение графа на связные компоненты означает, во-первых, разбиение его множества вершин состояний на сумму непересекающихся подмножеств. Во-вторых, эти подмножества оказываются несвязанными между собой, т.е. не существуют дуг графа, соединяющих какие-либо две вершины различных подмножеств. Это означает, что не существует переходов из состояний одного подмножества в состояния другого подмножества. Отсюда сразу следует, что траектория любого движения либо не пересекает компоненту связности, либо целиком принадлежит ей. Таким образом, множество состояний, составляющих одну компоненту связности, замкнуто относительно действия оператора перехода. Такое свойство называют *инвариантностью* относительно оператора A.

Определение 1.3.4. Подмножество $X \subseteq M$ пространства состояний называется *инвариантным* относительно оператора A, если

$$AX \subseteq X \tag{1.3.6}$$

или из $x \in X$ следует $Ax \in X$.

Таким образом, оператор перехода не выводит систему из состояний инвариантного множества за его пределы (рис. 1.3.5).

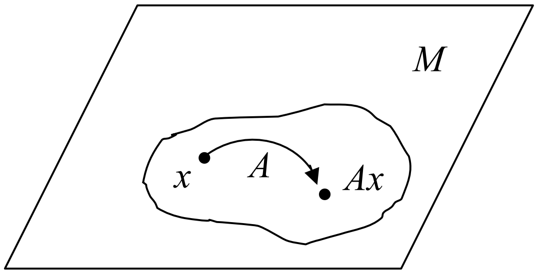


Рис. 1.3.5

Например, каждая точка покоя образует одноэлементное инвариантное множество. Все пространство состояний M и пустое множество $\varnothing$ также дают примеры инвариантных множеств. Эти два инвариантные подмножества часто называют несобственным или тривиальными. Следующее утверждение дает большой класс инвариантных множеств.

Предложение 1.3.1. *Траектория любого движения системы есть инвариантное множество.*

Доказательство. Пусть φ – некоторое движение, а $X = \operatorname{Im}\varphi$ – его траектория. Если $x \in X$, то $x = \varphi(t)$ для некоторого $t \in T$. Так как φ движение, то $A\varphi(t) = \varphi(t+1) = Ax$, следовательно, $Ax \in X$ т.к. $\varphi(t+1) \in \operatorname{Im}\varphi$ □ Инвариантность множества относительно оператора A является частным случаем инвариантности относительно потока.

Определение 1.3.5. Подмножество $X \subseteq M$ называется *инвариантным* относительно потока $\{A^t\}_{t\in T}$, если

$$A^t X \subseteq X \text{ для всех } t \in T. \tag{1.3.7}$$

Из инвариантности относительно потока следует, очевидно, инвариантность относительно оператора A. Для доказательства этого достаточно в (1.3.7) взять $t = 1$.

В случае односторонней шкалы $T = N$ из инвариантности относительно оператора следует инвариантность относительно потока. В самом деле при

$t=0$, $A^0 X = Id\, X \subseteq X$. При $t=1$, $A^1 X = AX \subseteq X$. Далее из $AX \subseteq X$ следует $A^2 X = A(AX) \subseteq AX \subseteq X$, т.е. $A^2 X \subseteq X$. Далее, $A^3 X = A(A^2 X) \subseteq AX \subseteq X$ и т.д. Следовательно (по индукции) $AX \subseteq X$ влечет $A^n X \subseteq X$ для всех $n \in N$.

В случае двусторонней шкалы $T = Z$ и обратимой системы инвариантность относительно потока равносильна условиям:

$$AX \subseteq X \text{ и } A^{-1} X \subseteq X. \tag{1.3.8}$$

Эти условия, в свою очередь, равносильны одному равенству

$$AX = X. \tag{1.3.9}$$

Равносильность (1.3.8) и (1.3.9) устанавливается легко. Из (1.3.7) соотношение $A^{-1} X \subseteq X$ следует при $t = -1$. Обратно, из $AX \subseteq X$ как было показано, следует $A^n X \subseteq X$ для $n \geq 0$. Аналогично, из $A^{-1} X \subseteq X$ следует $(A^{-1})^n X \subseteq X$ для $n \geq 0$. Учитывая, что $A^{-n} = (A^{-1})^n$, получаем, что $A^n X \subseteq X$ для всех n, т.е. инвариантность X относительно потока $\{A^t\}_{t \in Z}$.

Множество X, удовлетворяющее условию (1.3.9) (необязательно для обратимого A) называется сильно *инвариантным* (*стабильным*, *неподвижным* и т.п.).

Замечание 1.3.3. Обычно под инвариантностью мы будем понимать инвариантность относительно потока. В случае двусторонней шкалы и обратимой системы инвариантность множества совпадает с его сильной инвариантностью. В этом случае, инвариантность относительно оператора равносильна инвариантности относительно полупотока и называется также *положительной инвариантностью*.

Инвариантность относительно потока дает следующее свойство:

Предложение 1.3.2. *Если X инвариантное множество системы и ϕ_x – движение с начальным состоянием $x \in X$, то $\operatorname{Im}\phi_x \subseteq X$, т.е. траектория движения целиком принадлежит X.*

Доказательство очевидно: $\phi_x(t) = A^t x \in X$ для всех t и $x \in X$ □

Замечание 1.3.4. В дальнейшем мы часто будем использовать обозначение ϕ_x для движения с начальным состоянием x. Напомним, что $\phi : T \times M \to M$ полная переходная функция. Эта функция зависит от двух аргументов t, x:

$\phi(t, x) = A^t x$. Если зафиксировать x, то получим функцию $\phi(\cdot, x)$ одного аргумента, которую будем обозначать ϕ_x. Так как $\phi_x(t) = \phi(t, x)$ и $\phi_x(0) = x$, то ясно, что ϕ_x действительно движение с начальным состоянием x.

Мы определили фазовый портрет как разбиение графа системы на компоненты связности. Автономный характер каждой компоненты выражается в том, что множество состояний вершин, принадлежащих этой компоненте, образует инвариантное подмножество системы. Это сразу следует из того, что различные компоненты не имеют дуг (переходов), их соединяющих. Разбиение пространства состояний на фрагменты портрета было определено с помощью графа системы. Однако можно дать определение такого разбиения, независящее от графа. Как известно, каждое разбиение можно задать с помощью отношения эквивалентности. Тогда классы разбиения представляют собой множества попарно эквивалентных между собой элементов.

Определение 1.3.6. Два состояния $x_1, x_2 \in M$ называются *связанными*, если движения ϕ_{x_1} и ϕ_{x_2} финально эквивалентны.

Это определение означает, что связанные состояния лежат на пересекающихся, а значит, сливающихся с некоторого места траекториях.

Мы не будем доказывать ни того, что отношение связанности есть отношение эквивалентности, ни того, что разбиение, порождаемое таким отношением, совпадает с разбиением на связанные компоненты относительно графа. Это интуитивно ясно, так как совокупность связанных состояний образует в точности пучок попарно пересекающихся траекторий.

Выше был пояснен содержательный смысл **разбиения** пространства состояний на фрагменты – множества состояний, принадлежащих связной компоненте графа состояний. Для завершения описания фазового портрета достаточно выяснить структуру отдельного фрагмента портрета. Оставшаяся часть параграфа и будет этому посвящена.

Разобьем все возможные компоненты графа на два класса: содержащие (хотя бы один) цикл и не содержащие (ни одного) цикла. Фрагменты первого типа назовем циклическими, фрагменты второго типа – линейными. Рассмотрим сначала линейные фрагменты.

Каждый линейный фрагмент представляет собой связный ориентированный граф без циклов. Такой граф, на языке теории графов, называется ориентированным деревом. Вершины дерева можно упорядочить следующим образом. Будем говорить, что вершина x_1 предшествует вершине x_2 и писать $x_1 \leq x_2$, если существует ориентированный путь из x_1 в x_2. Отметим, что в этом случае такой путь определяется единственным образом – это характеристическое свойство дерева. С точки зрения системы, состояний x_1 и x_2 связанные соотношением $x_1 \leq x_2$ лежат на одной траектории некоторого движения, при этом, состояние x_1 проходится **раньше** если $(x_1 \neq x_2)$ состояния x_2. Поскольку линейные фрагменты не содержат циклов, в них невозможны квазипериодические движения, так что каждая траектория движения в такой компоненте связности изображается линейным графом, т.е. графом дискретного линейно упорядоченного множества без последнего элемента (рис. 1.3.6). Именно

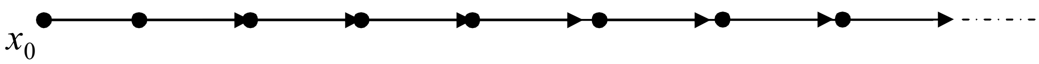


Рис. 1.3.6

поэтому мы и назвали такие фрагменты линейными. Любые два состояния x_1 и x_2 такого фрагмента связаны, т.е. движения ϕ_{x_1} и ϕ_{x_2} финально эквивалентны, так что траектории этих движений совпадают с некоторого места. Отсюда следует, что для любых двух состояний x, y найдется такое состояние z, которое следует за x и y, т.е. $x \leq z$ и $y \leq z$. Это свойство частичного порядка на множестве состояний фрагмента называется *направленностью*. Кроме того, для любого состояния x следующее за ним состояние Ax должно быть отлично от него, т.е. $Ax > x$ в силу отсутствия квазипериодических движений. Таким образом, линейный фрагмент представляет собой граф частично упорядоченного направленного (вправо) множества без последнего элемента. Кроме того, для каждого элемента этого множества существует единственный, непосредственно следующий за ним элемент. Вид линейного фрагмента изображен на рис. 1.3.7.

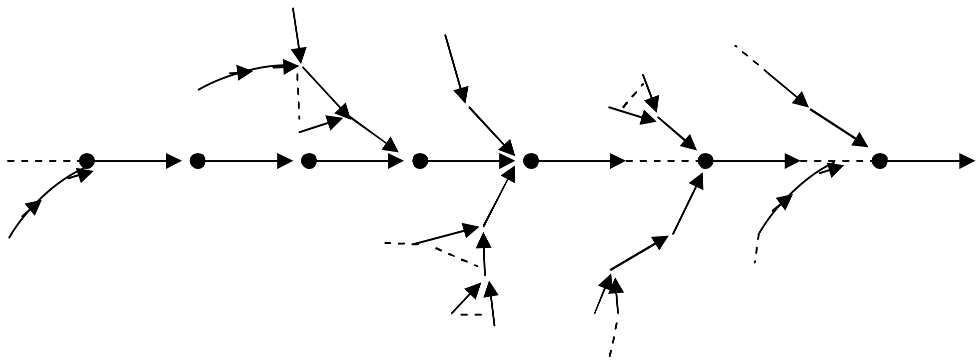


Рис. 1.3.7

Циклический фрагмент содержит хотя бы один цикл. Но тогда он содержит в точности один цикл. Это следует из того, что циклы представляют собой траектории движений, а в силу предложения 1.1 каждые два таких движения имеют общий цикл (точнее циклический участок траектории). Остальная часть фрагмента содержит состояния, лежащие на переходных участках траекторий. Такие различные участки либо имеют разные «точки входа» в цикл, и тогда они не пересекаются, либо имеют такую общую точку. В последнем случае объединение всех переходных участков траекторий с общим входом в цикл представляет собой ориентированное дерево с корнем в точке входа в цикл. Весь фрагмент есть (связное) объединение единственного цикла с семейством непересекающихся ориентированных деревьев с корнями, лежащими на этом цикле. Вид циклического фрагмента изображен на рис. 1.3.8.

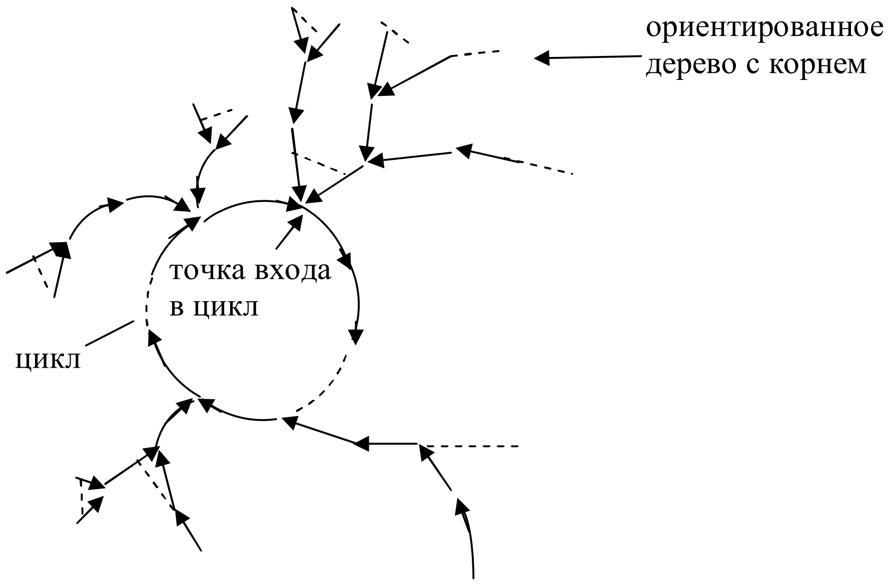


Рис. 1.3.8

Мы рассмотрели фазовые портреты произвольных систем с дискретным временем. Детали структуры портрета, несмотря на простоту «общего плана строения», могут быть достаточно сложны. В общем случае деревья, которые, как мы видели, играют большую роль в строении фазовых портретов, могут иметь произвольное строение и их трудно естественным образом классифицировать. В некоторых специальных случаях фазовый портрет может иметь весьма простую структуру. Например, для конечных систем невозможны линейные фрагменты, так что их портрет состоит из конечного числа циклических фрагментов. Кроме того, каждый фрагмент конечен, т.е. представляет собой конечный граф, из этого следует конечность деревьев, представляющих переходные участки траекторий.

Особенно проста структура фазового портрета обратимых систем. Граф обратимой системы обладает тем свойством, что для каждой вершины существует в точности одна выходящая и одна входящая дуга. Следовательно, линейный фрагмент состоит из единственного линейного графа бесконечного в обе стороны (рис. 1.3.9).

Рис. 1.3.9

Циклический фрагмент состоит из единственного конечного цикла. Тем самым, фрагмент портрета всегда состоит из единственной траектории. Слияние различных траекторий невозможно, т.к. в точках слияния нарушалась бы обратимость системы (в такую вершину входили бы, по крайней мере, две дуги). Итак, фазовый портрет обратимой системы есть семейство непересекающихся линейных графов и циклов. Наконец, фазовый портрет конечной обратимой системы есть конечный набор непересекающихся циклов.

Совокупность состояний циклического фрагмента образует *область притяжения цикла* из этого фрагмента, а сам цикл называется *притягивающим* (или *предельным*) циклом, так как любое движение, начинающееся в данном фрагменте, достигает за конечное число шагов этот цикл.

1.4. Операции, отношения и динаморфизмы систем

Предыдущие параграфы были посвящены изучению отдельных систем. Теперь мы перейдем к изучению отношений и операций для систем.

Пусть $D = \langle M, A \rangle$ – некоторая система, а $M_1 \subseteq M$ инвариантное множество. Пусть A_1 – сужение оператора A на M_1: $A_1 = A|_{M_1}$. Ввиду инвариантности M_1: $A(M_1) \subseteq M_1$ можно считать A_1 оператором на M_1:

$$A_1 : M_1 \to M_1 .$$

Тогда можно образовать систему $D_1 = \langle M_1, A_1 \rangle$. Операция получения D_1 с помощью инвариантного множества M_1 называется *сужением* (*редукцией*) системы D на M_1: $D_1 = D|_{M_1}$.

Определение 1.4.1. Система $D_1 = \langle M_1, A_1 \rangle$ называется *подсистемой* системы $D = \langle M, A \rangle$, если $M_1 \subseteq M$ и $A_1 = A|_{M_1}$. В этом случае будем писать $D_1 \subseteq D$. Если $M_1 \neq M$,то подсистема D называется *собственной*: $D_1 \subset D$.

Каждая подсистема получается сужением исходной системы на некоторое инвариантное подмножество (рис. 1.4.1).

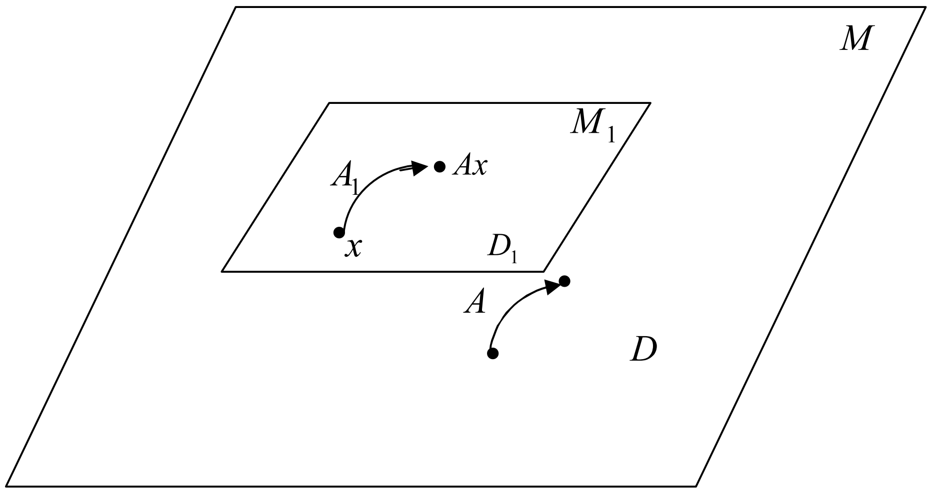


Рис. 1.4.1

Отметим, что в силу нашего соглашения об инвариантности для обратимых систем в качестве инвариантных множеств берутся сильно инвариантные, т.е. такие, на которых сужение оператора также обратимо. Поэтому подсистема обратимой системы будет **обязательно** обратимой. Граф подсистемы представляет собой, очевидно, полный подграф графа всей системы. Фазовый поток подсистемы представляет собой сужение фазового потока системы:

$$\phi_1(t,x) = A_1^t x = A^t x = \phi(t,x) \text{ для } x \in M_1,$$

т.е.

$$\phi_1 = \phi|_{T\times M_1}. \qquad (1.4.2)$$

Фазовый портрет подсистемы представляет собой часть портрета всей системы, точнее, он состоит из тех компонент (фрагментов), которые содержатся в подграфе подсистемы. Важно отметить, что при переходе к подсистеме лишь сокращается число фрагментов, но сами фрагменты портрета не изменяются.

Переход к подсистеме позволяет заменить изучение всей системы изучением ее отдельной части. Отношение $D_1 \subseteq D$ задает некоторое упорядочение множества систем, по существу, совпадающее с теоретико-множественным отношением включения фазовых пространств этих систем: $M_1 \subseteq M$. Предельным (и тривиальным) случаем подсистемы является пустая система $\varnothing = \langle\varnothing,\varnothing\rangle$, с пустым фазовым пространством. Более содержателен другой «предельный» тип подсистем, получающихся с помощью сужения систем на минимальные (непустые) инвариантные множества.

Определение 1.4.2. Непустое подмножество M_1 системы $D = \langle M, A\rangle$ называется *минимальным инвариантным* подмножеством, если оно инвариантно и не содержит других (непустых и отличных от себя) инвариантных подмножеств; т.е.: $\varnothing \ne M_1^{'} \subseteq M_1$, $M_1^{'}$ – инвариантно $\Rightarrow M_1^{'} = M_1$.

Подсистема $D_1 = \langle M_1, A_1\rangle$ с минимальным инвариантным множеством называется *минимальной*.

Пример 1.4.1. Пусть x_0 – точка покоя системы D, тогда $\{x_0\} = M_0$ минимальное инвариантное множество.

Пример 1.4.2. Пусть

$$Z_n = \{0,1,\ldots,n-1\},\ Az = x + 1 \bmod n .$$

Граф этой системы представляет собой цикл длины n (рис. 1.4.2). Легко видеть, что система $\langle Z_n, A\rangle$ не имеет собственных подсистем. Эту систему будем называть *стандартной циклической системой* порядка n и обозначать D_n.

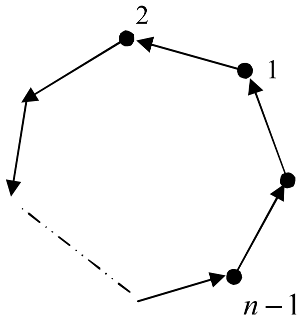


Рис. 1.4.2

Следующее предложение устанавливает структуру минимальных инвариантных множеств.

Предложение 1.4.1. *Пусть* M_0 *минимальное инвариантное множество относительно потока* $\{A^t\}_{t\in T}$. *Тогда* $M_0 = \mathrm{Im}\,\phi_{x_0}$ *для любого* $x_0 \in M_0$. *При этом, если* $T = N$, *то* ϕ_{x_0} *– периодическое движение.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in M_0$, а $\varphi(t) = \phi_{x_0}(t)$ – движение с начальным состоянием x_0. В силу предложения 1.3.2 $\mathrm{Im}\,\varphi \subseteq M_0$, а так как траектория движения сама есть инвариантное множество, то в силу минимальности M_0: $\mathrm{Im}\,\varphi = M_0$. Таким образом, минимальные множества представляют собой траектории движений.

Пусть теперь $T = N$. Положим $I = [1,\infty)$. Тогда $\varphi(I)$ также инвариантное множество, содержащееся в M_0. В силу минимальности M_0 снова получаем $M_0 = \varphi(I)$. Т.к. $x_0 \in M_0$, то последнее соотношение означает, что существует $\tau > 0$ такое, что $\varphi(0) = \phi_{x_0}(0) = \varphi(\tau)$. Отсюда сразу следует, что $\varphi(t) = \varphi(t+\tau)$ для всех $t \in N$, т.е. φ – периодическое движение. Таким образом, минимальное инвариантное (относительно оператора) множество есть траектория периодического движения, т.е. цикл □

Изучение аналогий в поведении систем очень важно, так как позволяет создавать искусственные устройства, имитирующие поведение достаточно сложных реальных систем. Поэтому достаточно полная теория систем должна давать средства для описания аналогий в их поведении. Поскольку теория, излагаемая здесь, чисто поведенческая, т.е. мы интересуемся лишь последовательностью проходимых состояний, то сходство должно выражаться в аналогии движений, совершаемых системой, т.е. каждому движению одной системы должно отвечать **соответствующее** движение другой. Следовательно, аналогия в поведении состоит в возможности установить такое соответствие между состояниями систем, чтобы оно сохранялось при всех возможных одновременных переходах. Это приводит к следующему определению.

Определение 1.4.3. *Динаморфизмом* или *морфизмом* систем $D_1 = \langle M_1, A_1 \rangle$ и $D_2 = \langle M_2, A_2 \rangle$ называется такое отображение $h: M_1 \to M_2$, что выполняется следующее соотношение:

$$h(A_1^t x) = A_2^t (hx) \text{ для всех } t \in T. \qquad (1.4.3)$$

Это равенство можно изобразить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "A_1^t"] \arrow[d, "h"'] & M_1 \arrow[d, "h"] \\ M_2 \arrow[r, "A_2^t"] & M_2 \end{tikzcd}$$

Для переходных функций соотношение (1.4.3) перепишется в виде

$$h(\phi_1(t, x)) = \phi_2(t, hx), \qquad (1.4.4)$$

а диаграмма примет вид:

$$\begin{tikzcd} T \times M_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "Id_T"', "h"] & M_1 \arrow[d, "h"] \\ T \times M_2 \arrow[r] & M_2 \end{tikzcd}$$

В дальнейшем динаморфизм систем обозначается через $h: D_1 \to D_2$.

Рассмотрим подробнее, что означает вышеприведенное определение. Пусть $\varphi_1 = \phi_1(t, x_0)$ движение системы D_1 с начальным состоянием x_0. Положим $y_0 = h(x_0)$ и рассмотрим движение $\varphi_2 = \phi_2(t, y_0)$ системы D_2 с этим начальным состоянием. Из равенства (1.4.4) следует, что $h(\phi_1(t, x_0)) = \phi_2(t, y_0)$, т.е. отображение h «переводит» движение φ_1 в движение φ_2. Это выражается следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[rr, "h"] & & M_2 \\ & T \arrow[ul, "\varphi_1"] \arrow[ur, "\varphi_2"'] & \end{tikzcd} \qquad \varphi_2 = h \circ \varphi_1 = \widehat{h}(\varphi_1). \qquad (1.4.5)$$

Движение φ_2 называется в этом случае *образом* движения φ_1. Отсюда сразу следует, что траектория $\mathrm{Im}\varphi_1$ при отображении (морфизме) h перейдет в траекторию $\mathrm{Im}\varphi_2$ (рис. 1.4.3): $h(\mathrm{Im}\varphi_1) = \mathrm{Im}\varphi_2$.

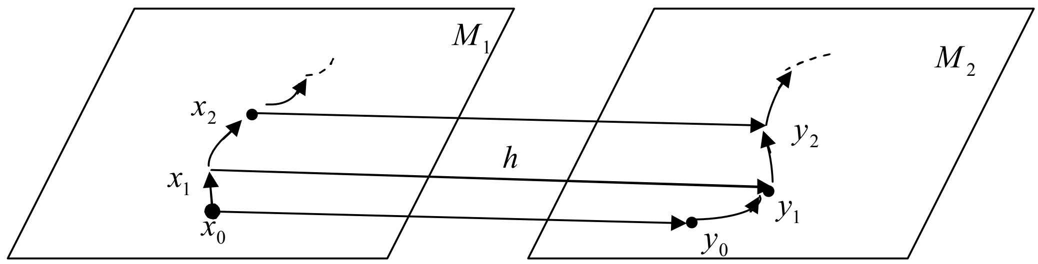


Рис. 1.4.3

Для систем с дискретным временем условие (1.4.3) равносильно условию:

$$h(A_1 x) = A_2(hx) \text{ для всех } x \in M_1 \qquad (1.4.6)$$

или коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "A_1"] \arrow[d, "h"'] & M_1 \arrow[d, "h"] \\ M_2 \arrow[r, "A_2"] & M_2 \end{tikzcd}$$

Равенство (1.4.6) следует из (1.4.3) подстановкой $t = 1$, обратное легко доказывается индукцией по $t \in T$.

Динаморфизм $h: D_1 \to D_2$ систем порождает гомоморфизм графов этих систем $G(h): G(D_1) \to G(D_2)$, при котором вершинам и дугам одного графа соответствуют вершины и дуги второго, причем сохраняется соотношение инцидентности между вершинами и дугами. И наоборот, гомоморфизм графов систем задает динаморфизм этих систем.

Пример 1.4.3. Пусть $M_1 = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, $A_1 n = n + 1$ $M_2 = \{0,1\}$, $A_2 0 = 1$, $A_2 1 = 0$. Положим $h(n) = 0$, если n – четное, и $h(n) = 1$, если n – нечетное, тогда h – морфизм систем (рис. 1.4.4).

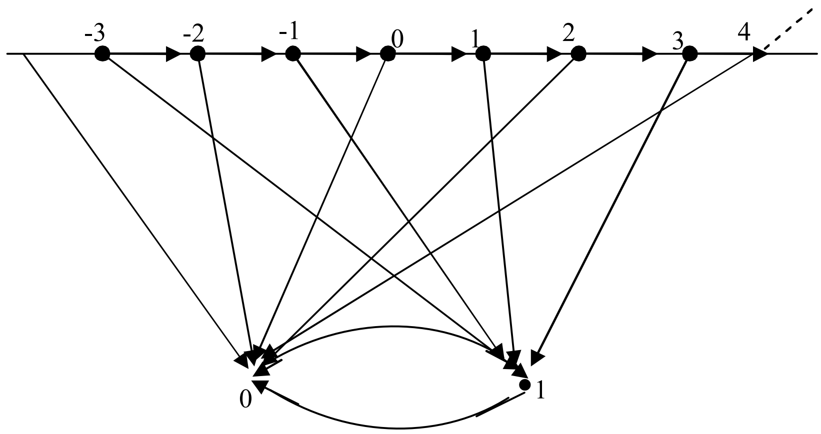


Рис. 1.4.4

Пример 1.4.4. Пусть системы D_1 и D_2 заданы своими графами, (рис. 1.4.5). Тогда соответствие $h(x_i) = y_i, i = 1,2,3,4$ есть морфизм из D_1 в D_2.

Из двух морфизмов композицией можно получить снова морфизм.

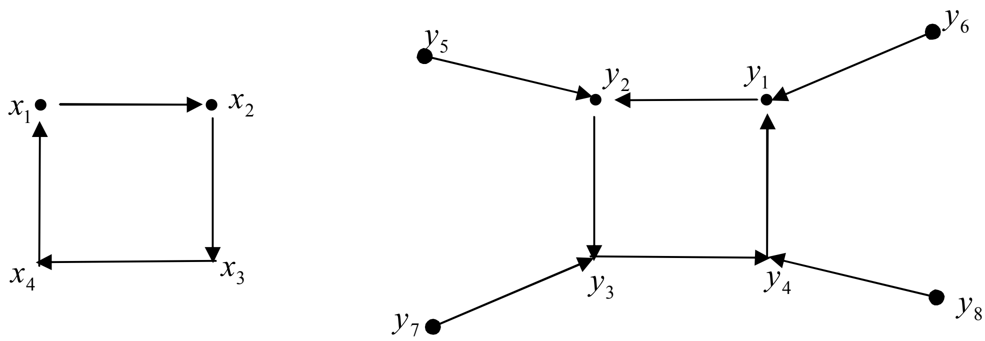


Рис. 1.4.5

Предложение 1.4.2. *Композиция морфизмов* $h_1 : D_1 \to D_2$ *и* $h_2 : D_2 \to D_3$ *есть морфизм:* $h_2 \circ h_1 : D_1 \to D_3$.

Доказательство. Так как h_1, h_2 морфизмы, то для $x \in M_1$ и $y \in M_2$ имеем $h_1(A_1 x) = A_2(h_1 x)$, $h_2(A_2 y) = A_3(h_2 y)$. Полагая $y = h_1(x)$, получим

$$(h_2 \circ h_1)(A_1 x) = h_2(h_1(A_1 x)) = h_2(A_2(h_1 x)) = A_3(h_2(h_1 x)) = A_3(h_2 \circ h_1(x)) \square$$

Морфизм систем может отождествлять (склеивать) различные состояния, как в примере 1.4.3, и может переводить различные состояния первой системы в различные состояния второй. В первом случае морфизм не инъективен, во втором случае – инъективен. Инъективный морфизм называется *мономорфизмом* или *вложением*. В этом случае первая система как бы вкладывается во вторую. Сюръективный морфизм называется *эпиморфизмом* (*наложением*, *накрытием*). В этом случае каждое состояние второй системы является образом некоторого состояния первой. Наконец, биективный, т.е. инъективный и сюръективный морфизм называется *изоморфизмом*.

Определение 1.4.4. Пусть $h: D_1 \to D_2$ морфизм систем. Тогда

1. h – *мономорфизм*, если $x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$;
2. h – *эпиморфизм*, если $h(M_1) = M_2$;
3. h – *изоморфизм*, если h – мономорфизм и эпиморфизм.

Композиция морфизмов не только дает в результате морфизм, но и сохраняет тип морфизма произведения, если оба морфизма были одного типа (т.е. моно–, эпи– или изоморфизмами).

Предложение 1.4.3. *Пусть* h_1, h_2 *– морфизмы и* $h = h_2 \circ h_1$ *– их композиция, тогда*

1. *если* h_1, h_2 *– мономорфизмы, то* h *– мономорфизмы*;
2. *если* h_1, h_2 *– эпиморфизмы, то* h *– эпиморфизм*;
3. *если* h_1, h_2 *– изоморфизмы, то* h *– изоморфизм*.

Доказательство следует из того, что композиция инъективных, сюръективных или биективных отображений соответственно инъективна, сюръективна, биективна □

Морфизм систем переводит инвариантные множества одной системы в инвариантные множества другой. Точнее, имеет место

Предложение 1.4.4. *Пусть* $h: D_1 \to D_2$ *морфизм. Тогда образ* $h(X_1)$ *инвариантного в* D_1 *множества* X_1 *инвариантен в* D_2. *Соответственно прообраз* $h^{-1}(X_2)$ *инвариантного в* D_2 *множества* X_2 *инвариантен в* D_1.

Доказательство. Докажем второе утверждение. Первое доказывается аналогично. Пусть $x_1 \in h^{-1}(X_2)$. Тогда $h(x_1) \in X_2$ и $h(A_1^t x_1) = A_2^t h(x_1) \in X_2$ в силу инвариантности X_2. Следовательно, $A_1^t x_1 \in h^{-1}(X_2)$ для всех $t \in T$, т.е. $h^{-1}(X_2)$ – инвариантно в D_1 □

В частности, $h(M_1)=M_2^{'}$ – инвариантное подмножество в D_2. Получающаяся сужением D_2 на это множество подсистема называется образом системы D_1 при отображении h и обозначается $h(D_1)$: $h(D_1)=D_2\,|_{h(M_1)}$.

Если D_2 подсистема системы D_1, т.е. $D_2 \subseteq D_1$, то существует так называемое каноническое вложение D_2 в D_1, т.е. мономорфизм:

$$u: D_2 \to D_1, u(x)=x, x \in M_1.$$

В общем случае **мономорфизм** $h: D_1 \to D_2$ дает **изоморфизм** D_1 на подсистему $h(D_1) \subseteq D_2$, являющуюся образом морфизма h.

Если существует изоморфизм h системы D_1 на D_2, то говорят, что системы D_1 и D_2 изоморфны, и пишут $D_1 \overset{h}{\approx} D_2$ или просто $D_1 \approx D_2$.

Изоморфизм систем означает полную тождественность их поведений (движений). Такие системы с абстрактной точки зрения неразличимы и отличаются, возможно, лишь природой состояний. Графы таких систем изоморфны, а, следовательно, изоморфны и их фазовые портреты. Каждому данному движению системы соответствует совершенно аналогичное (по типу) движение изоморфной системы. Изоморфны, например, любые две системы, графы которых состоят из единственного цикла длины n. Все эти системы изоморфны стандартной циклической системе D_n.

Отношение изоморфности систем есть отношение эквивалентности, т.е. оно удовлетворяет трем свойствам:

1. $D \approx D$ (рефлексивность);
2. $(D_1 \approx D_2) \Rightarrow (D_2 \approx D_1)$ (симметричность);
3. $(D_1 \approx D_2)$ и $(\mathrm{D}_2 \approx D_3) \Rightarrow (D_1 \approx D_3)$ (транзитивность).

Первое свойство следует из того, что тождественное отображение $Id_M : M \to M$, $Id_M(x)=x, x \in M$ есть морфизм. Его мы обозначим Id_D.

Симметричность следует из того, что каждый изоморфизм $h: D_1 \to D_2$ имеет обратный $h^{-1}: D_2 \to D_1$, т.е. такой, что $h \circ h^{-1} = Id_{D_2}$ и $h^{-1} \circ h = Id_{D_1}$. Действительно, т.к. изоморфизм h есть биекция M_1 на M_2, то существует обратное отображение $h^{-1}: M_2 \to M_1$, удовлетворяющее соотношениям

$h \circ h^{-1} = Id_{M_2}$ и $h^{-1} \circ h = Id_{M_1}$. Это отображение есть также морфизм. В самом деле, т.к. h морфизм, то $h(A_1 x) = A_2(hx)$. Положим $y = hx$. Тогда $x = h^{-1} y$ и, следовательно, $h(A_1(h^{-1} y)) = A_2(y)$, откуда $A_1(h^{-1} y) = h^{-1}(A_2(y))$, т.е. h^{-1} – морфизм.

Наконец, транзитивность следует из того, что композиция изоморфизмов есть изоморфизм.

Как уже было отмечено, изоморфизм сохраняет тип движения, т.е. изоморфный образ движения данного типа (невозвратное, периодическое и т.д.) есть движение такого же типа. Это же, естественно, справедливо и для мономорфизмов, т.к. они представляют собой изоморфизмы на подсистему. Произвольный морфизм, как мы видели в примере 1.4.3, не сохраняет, вообще говоря, тип движения. Это, однако, касается лишь невозвратных движений, т.к. морфизм может отождествлять различные состояния, превращая невозвратное движение в возвратное. Если же исходное движение φ было возвратным, т.е. $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ для некоторых t_1, t_2, то его образ $h \circ \varphi$ есть также возвратное движение, потому что $h(\varphi(t_1)) = h(\varphi(t_2))$. Отсюда следует, что образ квазипериодического движения есть квазипериодическое движение.

Предложение 1.4.5. *Пусть* $h : D_1 \to D_2$ *– морфизм. Если* φ *– периодическое с момента* $\bar{t}_1$ *движение с периодом* τ_1, *то* $\varphi_2 = h \circ \varphi_1$ *есть периодическое с момента* $\bar{t}_2$ *движение с периодом* τ_2, *причем* $\bar{t}_2 \le \bar{t}_1$ *и* τ_2 *делитель* τ_1.

Доказательство. По предложению $\varphi_1(t + \tau_1) = \varphi_1(t)$ для $t \ge \bar{t}_1$, отсюда следует: $h(\varphi_1(t + \tau_1)) = h\varphi_1(t)$ для $t \ge \bar{t}_1$ или $\varphi_2(t + \tau_1) = \varphi_2(t)$ для $t \ge \bar{t}_1$. Таким образом, φ_2 будет периодическим, по крайней мере, с $\bar{t}_1$ и τ_1 будет одним из периодов φ_2. Следовательно, если $\bar{t}_2$ начало периодического участка движения, то $\bar{t}_2 \le t_1$, а если τ_2 есть наименьший период φ_2, то φ_2 будет делителем τ_1. Здесь использован тот факт, что все периоды периодической функции кратны ее наименьшему периоду □

Понятие динаморфизма играет очень большую роль в теории систем. Динаморфизм дает «внешнюю» характеристику системы, сопоставляя ее с другими системами. В современной математике существует принцип, требующий одновременного изучения объекта и его связей с другими однотипными объектами. Такой подход называется категорным. Изучаемые объекты определенного типа образуют объекты категории, а «связи» между объектами – морфизмы этой категории. Так все динамические (автономные) системы с временной шкалой (дискретной) T вместе с динаморфизмами образуют категорию систем, которую мы будем обозначать $Dyn(T)$. Например, при $T = Z$, $Dyn(Z)$ – категория обратимых систем. Строго говоря, указание лишь объектов и морфизмов между объектами еще недостаточно для определения категории. Требуется выполнение ряда свойств. Так, должна быть определена операция умножения морфизмов, причем это умножение должно быть, в естественном смысле, ассоциативным; должны существовать так называемые единичные (тождественные) морфизмы из объекта в себя. Все эти свойства выполнены в категории систем, где под умножением морфизмов понимается их обычная композиция (как отображений), а под единичными морфизмами понимаются тождественные отображения систем в себя.

Важным частным случаем изоморфизма является **автоморфизм** системы.

Определение 1.4.5. Изоморфизм $h: D \to D$ системы в себя называется автоморфизмом.

Простейшим примером автоморфизма является тождественный изоморфизм Id_D. Этот автоморфизм называется тривиальным.

Пример 1.4.5. Пусть $D_n = \langle Z_n, A \rangle$, $Ax = x + 1$ – стандартная циклическая система порядка n.

Определим для любого $k, 0 \le k < n$ отображение $h_k : Z_n \to Z_n$, $h_k(x) = x + k \bmod n$. Легко видеть, что каждое такое отображение взаимнооднозначно и является морфизмом:

$$h_k(Ax) = h_k(x+1) = (x+1) + k = (x+k) + 1 = h_k(x) + 1 = Ah_k(x).$$

Следовательно, все h_k – автоморфизмы и мы получили n таких автоморфизмов. При этом h_0 – тождественный морфизм, а h_k является k-ой степенью морфизма h_1: $h_k = (h_1)^k = \underbrace{h_1 \circ \cdots \circ h_1}_{k}$. И, вообще, выполняется соотношение $h_k \circ h_l = h_{(k+l)}$, где $(k+l)$ – сумма по модулю n. Можно показать, что любой автоморфизм системы D_n равен некоторому h_k, т.е. представляет собой сдвиг на k шагов по модулю n. В самом деле, пусть h – произвольный автоморфизм и

$h(0)=k$. Отсюда сразу следует, что $h(1)=Ah(0)=Ak=k+1$, точно также $h(2)=Ah(1)=A(k+1)=k+2$ и т.д. Значит $h(x)=x+k$ и, следовательно, $h=h_k$.

Наличие нетривиальных автоморфизмов говорит о некоторой симметрии системы. Каждый автоморфизм системы дает автоморфизм ее графа. Поэтому наглядно симметрия системы представляется симметрией ее графа. Множество автоморфизмов системы D, обозначаемое $Aut(D)$, образует группу относительно операции композиции (умножения) морфизмов. Чем «больше» эта группа, тем «более» симметрична система. Так, рассуждения из примера 1.4.2 показывают, что группа автоморфизмов стандартной циклической системы D_n есть циклическая группа порядка n: $Aut(D_n)\approx\langle Z_n,+\rangle$, где $\langle Z_n,+\rangle$ обозначает аддитивную циклическую группу порядка n. Последний изоморфизм дается соответствием: $k\to h_k, 0\le k<n$.

Замечание 1.4.1. Мы используем знак Z_n в нескольких различных смыслах. В качестве пространства состояний, например, системы D_n, Z_n означает просто множество $\{0,1,...,n-1\}$. Однако, это множество обычно считается наделенным двумя алгебраическими операциями: «+» – сложением по модулю n, и «•» – умножением по модулю n. Тогда пара $\langle Z_n,+\rangle$ означает множество $\{0,1,...,n-1\}$ вместе с операцией сложения, т.е. представляет собой некоторую алгебру. Эта алгебра, как известно, есть аддитивная (т.е. по сложению) циклическая группа порядка n. Пара $\langle Z_n,\bullet\rangle$ образует алгебру, являющуюся **кольцом**. Это кольцо имеет полное название «кольцо (наименьших неотрицательных) вычетов по модулю n». В дальнейшем мы будет так строго проводить различия между всеми этими случаями. Как правило, мы будем использовать просто знак Z_n, если его смысл ясен из контекста.

Выше мы изучили операцию сужения (редукции) системы до подсистемы. Эта операция из исходной системы выделяла некоторую ее часть. Следующие две операции позволяют из двух данных систем получить одну «большую» систему, в некотором смысле «содержащую в себе» исходные системы. Речь идет об операциях «прямого сложения» и «прямого умножения».

Определение 1.4.6. Пусть $D_1=\langle M_1, A_1\rangle$ и $D_2=\langle M_2, A_2\rangle$ – две системы. *Прямой суммой* этих систем называется система $D=\langle M, A\rangle$, в которой

1. $M = M_1 \coprod M_2$ – прямая сумма (непересекающиеся объединения) фазовых пространств M_1, M_2;

2. $A = A_1 \coprod A_2$ – прямая сумма операторов A_1, A_2.

Напомним, что

$$(A_1 \coprod A_2)(x) = \begin{cases} A_1 x, \text{если } x \in M_1 \\ A_2 x, \text{если } x \in M_2 \end{cases}.$$

Прямую сумму систем D_1 и D_2 будем обозначать $D_1 \coprod D_2$.

Содержательно можно сказать, что мы просто «кладем рядом» обе системы, но наблюдение каждый раз ведем за какой-нибудь одной из них в зависимости от того, в какой системе выбиралось начальное состояние. Иными словами, за системами ведется **последовательное** наблюдение. На рис. 1.4.6 изображена прямая сумма систем.

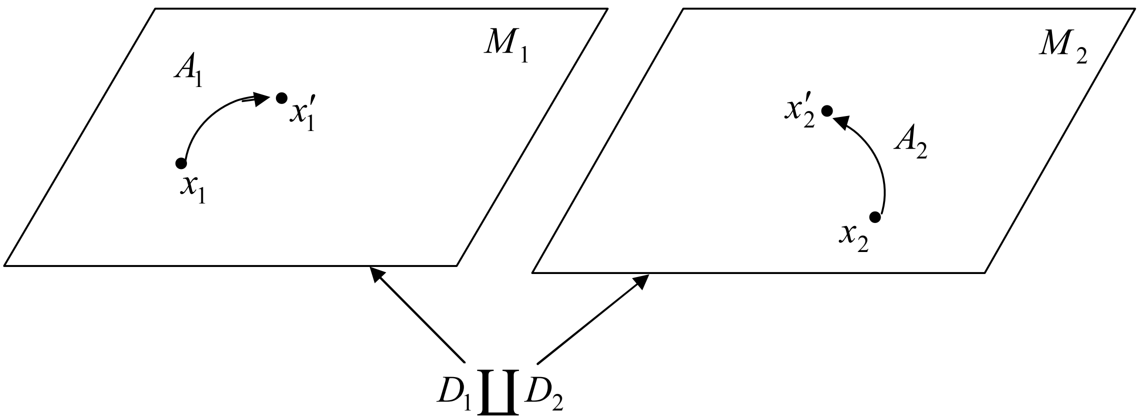


Рис. 1.4.6

Из определения прямой суммы следует, что существуют канонические **вложения** u_1 и u_2 систем D_1, D_2 в прямую сумму:

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[dr, "u_1"'] & & D_2 \arrow[dl, "u_2"] \\ & D & \end{tikzcd} \qquad \begin{cases} u_1(x) = x & x \in M_1 \\ u_2(x) = x & x \in M_2 \end{cases}$$

Вложения u_1, u_2 представляют собой **мономорфизмы**, причем каждая из систем D_1, D_2 изоморфно отображается на соответствующую подсистему в $D_1 \coprod D_2$. Таким образом, система $D_1 \coprod D_2$ содержит D_1 и D_2 в качестве своих подсистем. Фазовые пространства M_1, M_2 этих подсистем образуют **инвариантное разбиение** суммарного пространства $M_1 \coprod M_2$. В частности, граф $G(D)$ прямой суммы систем представляет собой объединение несвязанных между собой подграфов $G(D_1)$ и $G(D_2)$. Отсюда следует, что фазовый портрет суммы есть просто объединение портретов подсистем D_1 и D_2. Наконец, фазовый поток прямой суммы есть прямая сумма потоков, т.к.

$$(A_1 \coprod A_2)^t = A_1^t \coprod A_2^t \text{ для любого } t \in T.$$

Отметим, что сумма $D_1 \coprod D_2$ будет обратимой, если и только если каждая из систем D_1 и D_2 обратима.

Пример 1.4.6. Пусть $D_1 = D_4$, $D_2 = D_3$, тогда $D = D_1 \coprod D_2$ – система, состоящая из двух циклов (рис. 1.4.7):

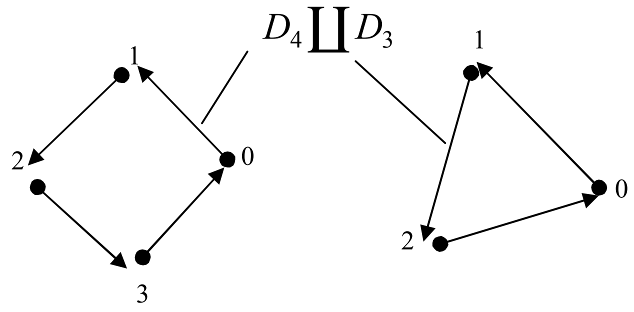


Рис. 1.4.7

Перейдем к операции умножения систем.

Определение 1.4.7. *Прямым произведением* систем $D_1 = \langle M_1, A_1 \rangle$ и $D_2 = \langle M_2, A_2 \rangle$ называется система $D = \langle M, A \rangle$, в которой:

1. $M = M_1 \times M_2$ – прямое (декартово) произведение пространств M_1 и M_2;

2. $A = A_1 \times A_2$ прямое произведение операторов A_1, A_2.

Напомним, что

$$(A_1 \times A_2)(x_1, x_2) = (A_1 x_1, A_2, x_2).$$

Таким образом, произведение операторов $A_1 \times A_2$ действует покомпонентно (рис. 1.4.8).

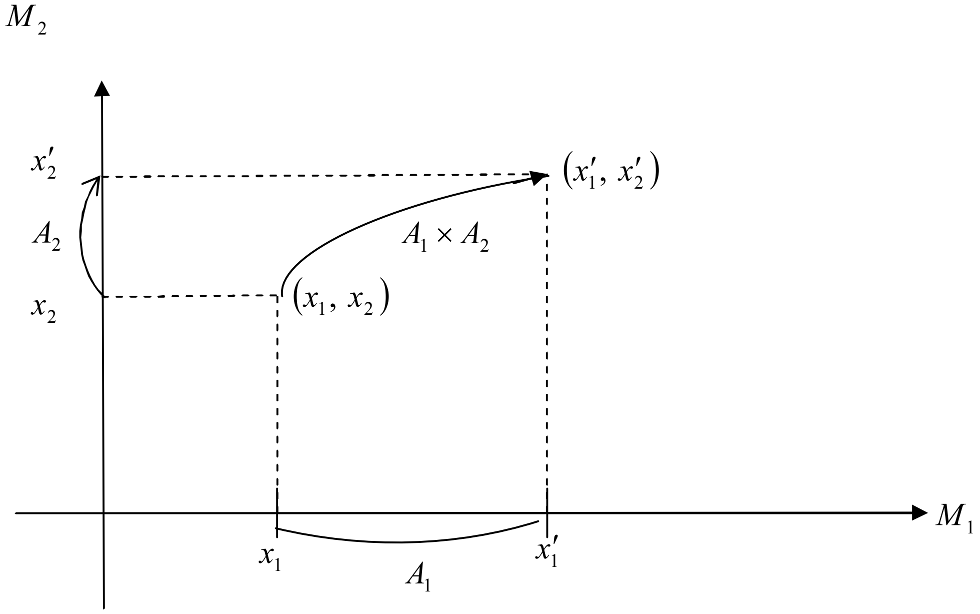


Рис. 1.4.8

Неформально можно сказать, что прямое произведение есть **параллельное соединение** систем. В отличие от операции прямой суммы при прямом произведении наблюдение ведется над обеими системами **одновременно**. Таким образом, в каждый момент времени отмечается состояние обеих систем, а значит, состояние системы произведения представляется **парой** состояний $x = (x_1, x_2)$, где x_1, x_2 – состояния систем D_1, D_2 соответственно. Произведение систем D_1, D_2 будем обозначать $D_1 \times D_2$.

Уравнение движения для произведения систем имеет вид

$$x(t+1) = Ax(t) \qquad \text{или} \tag{1.4.6}$$

$$(x_1(t+1), x_2(t+1)) = (A_1 \times A_2)(x_1(t), x_2(t)) = (A_1 x_1(t), A_2 x_2(t)).$$

Это значит, что уравнение движения (1.4.6) эквивалентно **системе двух** уравнений движений для каждой системы в отдельности:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = A_1 x_1(t) & x_1(t) \in M_1 \\ x_2(t+1) = A_2 x_2(t) & x_2(t) \in M_2 \end{cases}.$$

Движение системы $D_1 \times D_2$ представляет собой пару (φ_1, φ_2) движений каждой из систем D_1 и D_2.

Произведение систем $D_1 \times D_2$ связано с системами сомножителями посредством так называемых **канонических проекций** pr_1, pr_2:

$$
\begin{tikzcd}
 & D_1 \\
D_1 \times D_2 \arrow[ur, "pr_1"] \arrow[dr, "pr_2"'] & \\
 & D_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{cases} pr_1(x_1, x_2) = x_1 \\ pr_2(x_1, x_2) = x_2 \end{cases}
$$

Эти проекции представляют собой эпиморфизмы системы D на системы D_1 и D_2.

Следует отметить разницу в операциях суммы и произведения. При суммировании систем их состояния объединяются, но структура каждого отдельного состояния не меняется, т.е. каждое состояние системы – слагаемого входит без изменения, как состояние в фазовое пространство суммы систем. При умножении систем ситуация иная: здесь состояния систем сомножителей входят как компоненты (части) в состояние системы произведения. Таким образом, состояния произведения систем имеют составную структуру. Можно говорить, что система – произведение «содержит» в качестве своих компонент системы – сомножители. Однако она содержит их не в качестве подсистем как прямая сумма.

Отметим, что до сих пор пространства состояний систем представляли собой абстрактные (бесструктурные) множества. Прямое произведение систем уже наделено некоторой структурой, т.к. ее состояния представляют собой пары (кортежи), состоящие из отдельных компонент. Наделение пространства состояний специальной структурой – очень важная операция в теории систем и неоднократно будет использоваться в дальнейшем.

Граф произведения систем есть прямое произведение графов. К сожалению, оно не так наглядно, как прямая сумма графов.

Фазовый поток произведения систем есть произведение фазовых потоков: $(A_1 \times A_2)^t = A_1^t \times A_2^t, \quad t \in T$. Если $\phi_1 : T \times M_1 \to M_1$, $\phi_2 : T \times M_2 \to M_2$ – переходные функции систем, то переходная функция произведения имеет вид:

$$\phi = \phi_1 \times \phi_2 : T \times (M_1 \times M_2) \to M_1 \times M_2,\ \phi(t, (x_1, x_2)) = (\phi_1(t, x_2), \phi_2(t, x_2)).$$

Наконец, произведение систем обратимо, если и только если обе системы D_1 и D_2 обратимы.

Пример 1.4.7. $D_1 = D_2 = D_\infty = \langle Z, A\rangle, Ax = x + 1$. Тогда $D_1 \times D_2 = D_\infty^2 = \left\langle Z^2, A^2 \right\rangle$, где $A(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 1)$. Фазовый портрет системы произведения изображен на рис. 1.4.9.

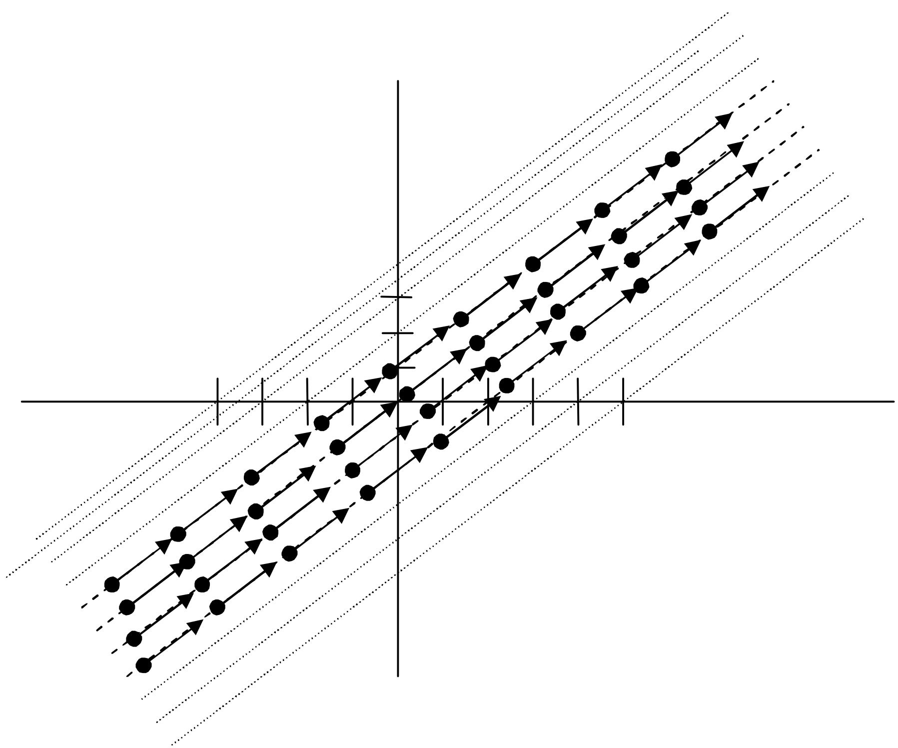


Рис. 1.4.9

Т.к. каждая из систем D_1, D_2 обратима, то обратима и $D_1 \times D_2$. Все движения $D_1 \times D_2$ невозвратны. Фазовый портрет есть семейство линейных графов. Отметим, что фазовый портрет каждой из систем D_1, D_2 состоит из одного (!) линейного графа.

Мы определили сумму и произведение двух систем. Точно так же можно определить сумму и произведение любого семейства систем.

Определение 1.4.8. *Прямой суммой* семейства систем $\{D_i\}_{i\in I}$, $D_i = \langle M_i, A_i\rangle$ называется система $D = \langle M, A\rangle$, в которой $M = \coprod_{i\in I} M_i$, $A = \coprod_{i\in I} A_i$, причем $Ax = A_i x$, если $x \in M_i$.

Прямую сумму семейства $\{D_i\}_{i\in I}$ обозначают $\coprod_{i\in I} D_i$. Если I конечное множество, например, $I = \{1,2,...,n\}$, то пишут также $\coprod_{i=1}^{n} D_i$ или в развернутом виде:

$$D = D_1 \coprod \ldots \coprod D_n .$$

Как и выше, для каждой системы D_i из семейства определено ее каноническое вложение (мономорфизм) $u_i : D_i \to D$ в прямую сумму. Каждая система D_i есть подсистема в D, при этом фазовые пространства систем D_i образуют инвариантное разбиение пространства системы D.

Определение 1.4.9. *Прямым произведением* семейства $\{D_i\}_{i \in I}$, $D_i = \langle M_i, A_i \rangle$ называется система $D = \langle M, A \rangle$, где $M = \prod_{i \in I} M_i$, $A = \prod_{i \in I} A_i$ при этом

$$A(\{x_i\}_{i \in I}) = \{Ax_i\}_{i \in I} .$$

Т.е. оператор – произведение действует покомпонентно.

Прямое произведение семейства $\{D_i\}_{i \in I}$ обозначается $\prod_{i \in I} D_i$. Если I конечное множество, например, $I = \{1,...,n\}$, то пишут также $\prod_{i=1}^{n} D_i$:

$$D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n .$$

В этом случае каждое состояние из $M = \prod_{i=1}^{n} M_i$ есть кортеж $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_i \in M_i$.

Как и для произведения двух систем, в общем случае имеются канонические проекции (эпиморфизмы): $pr_i : D \to D_i$, $pr_i(x) = x_i$ системы произведения на ее сомножители (компоненты).

Двум введенным выше операциям соответствуют два способа **декомпозиции** разложения системы.

Определение 1.4.10. Будем говорить, что система D допускает *аддитивную декомпозицию*, *т.е. разложение в прямую сумму* систем $\{D_i\}_{i \in I}$, если $D \approx \coprod_{i \in I} D_i$.

Отметим, что мы не требуем, чтобы D_i были **подсистемами** системы D, т.е. $D_i \subseteq D$. Требуется лишь изоморфность D и $\coprod_{i \in I} D_i$. Однако, если h изоморфизм, т.е. $h : \coprod_{i \in I} D_i \to D$, то образ $h(D_i)$ будет уже **подсистемой** в D изоморфной системе D_i, при этом, очевидно, что $D = \coprod_{i \in I} h(D_i)$ так что D **равно** прямой сумме подсистем $\{h(D_i)\}_{i \in I}$.

Примером аддитивной декомпозиции является построение фазового портрета системы. Если рассматривать фрагменты как подсистемы D_i, а это возможно, поскольку состояния фрагмента образуют инвариантное множество, то, очевидно, вся система будет прямой суммой таких подсистем. В случае обратимой системы, как мы уже знаем, состояния фрагмента образуют **минимальное** инвариантное множество и, следовательно, подсистемы $h(D_i)$ им соответствующие, минимальны. Обратимая система, тем самым, есть прямая сумма минимальных подсистем.

Операции умножения соответствует второй тип декомпозиции.

Определение 1.4.11. Будем говорить, что система D допускает *мультипликативную декомпозицию*, т.е. разложение в прямое произведение систем $\{D_i\}_{i \in I}$, если: $D \approx \prod_{i \in I} D_i$.

Здесь, как и выше, не требуется, чтобы D было **равно** произведению систем D_i. Сами по себе состояния системы D могут и не иметь структуру кортежа (семейства). Тем не менее состояние можно наделить такой структурой, т.е. «расцепить» его на компоненты, причем компоненты оказываются независимыми в том смысле, что новое значение этой компоненты, при переходе к новому состоянию, зависит лишь от ее старого значения и не зависит от значений других компонент. Заметим, наконец, что иногда состояние системы «естественным» образом представляется в виде кортежа, т.е. имеет составную структуру, однако компоненты состояния изменяются при движении системы зависимым образом, тогда как при мультипликативной декомпозиции состояние разбивается именно на независимые компоненты. Более подробно этот вопрос будет обсуждаться позднее.

Отметим теперь одну интересную связь между суммой и произведением систем. Пусть $\{D_k\}_{k \in K}$ семейство систем, каждая из которых изоморфна некоторой системе D_0, так что все системы семейства изоморфны между собой. Тогда прямая сумма $\coprod_{k \in K} D_k$ будет изоморфна произведению $ID(K) \times D_0$:

$$\coprod_{k\in K} D_k \approx D_0 \times ID(K), \qquad (1.4.7)$$

где через $ID(K)$ обозначена (**единичная**) система $< K, Id_K >$ на множестве K. Этот изоморфизм есть прямая сумма мономорфизмов $\{h_k\}_{k\in K}$, $h = \coprod_{k\in K} h_k$, $h|_{D_k} = h_k$, где $h_k : D_k \to D_0 \times ID(K)$, $h_k(x) = (x, k)$, $x \in D_k$, таким образом, $h_k(D_k) = D_0 \times \{k\}$ (рис. 4.10).

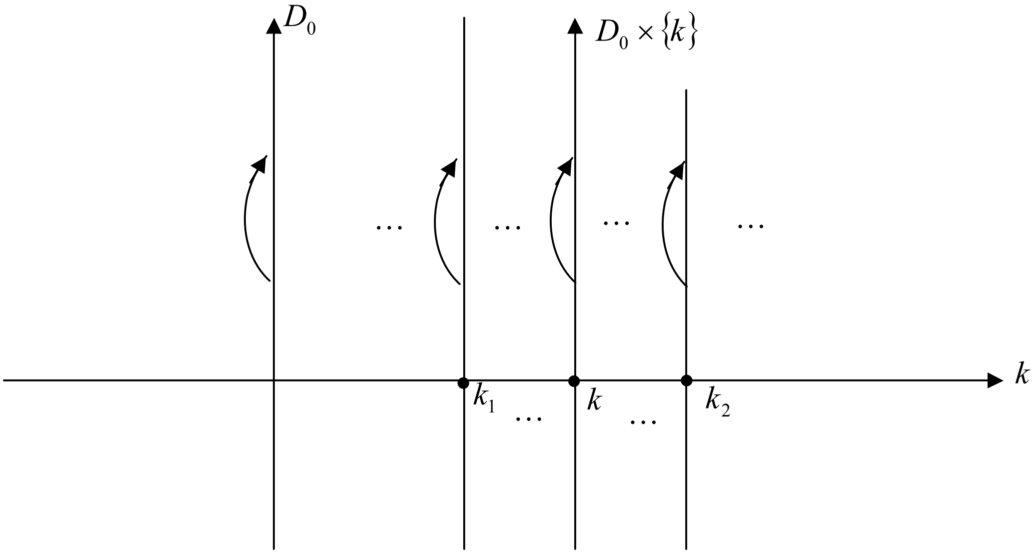


Рис. 1.4.10

Пример 1.4.8. Пусть $D_1 = D_2 = D_3$, тогда $D_1 \coprod D_2 = D_3 \coprod D_3 \approx D_3 \times ID(\{1,2\})$ (рис. 1.4.11).

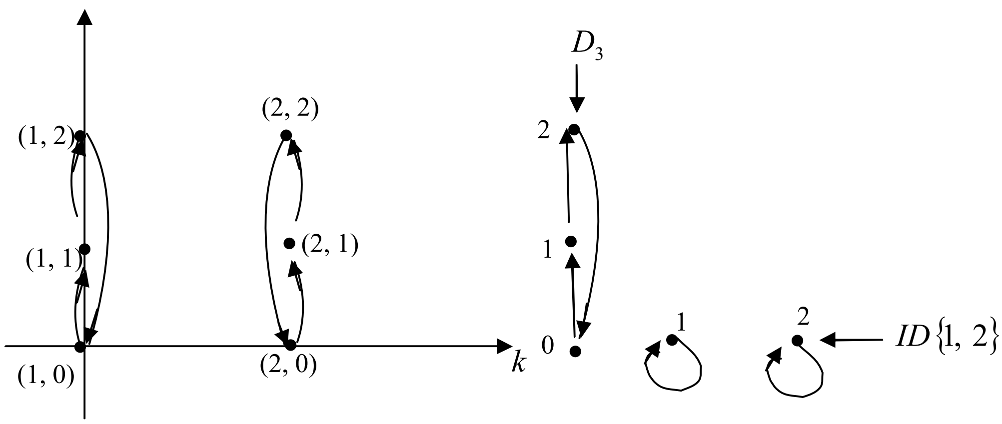


Рис.1. 4.11

Приведем еще ряд изоморфизмов систем.

Пример 1.4.9. Системы $D_1 = \langle R, A_1 \rangle$ и $D_2 = \langle R, A_2 \rangle$, где $A_1 x = x + a_1$, $A_2 x = x + a_2$, изоморфны, если $a_1 = a_2 = 0$, либо $a_1, a_2 \neq 0$. Если только одно из чисел a_1, a_2 равно 0, то системы не изоморфны.

Последнее очевидно, т.к. если $a_1 = 0$, то система D_1 состоит лишь из точек покоя, если $a_2 \neq 0$, то система вообще не имеет точек покоя, т.к. $x + a_2 = 0$.

Если $a_1 = a_2 = 0$, то $D_1 = D_2$ и изоморфность очевидна. Пусть теперь $a_1, a_2 \neq 0$. Покажем, что отображение $h(x) = \dfrac{a_1}{a_2} x$, $h : R \to R$ есть изоморфизм из D_1 в D_2. Отображение $h(x)$, очевидно, взаимно-однозначно. Остается проверить соотношение $h(A_1 x) = A_2(hx)$. Вычисляя левую и правую часть, получим

$$h(A_1 x) = h(x + a_1) = \frac{a_2}{a_1}(x + a_1) = \frac{a_2}{a_1} x + a_2$$

$$A_2(hx) = A_2\left(\frac{a_2}{a_1} x\right) = \frac{a_2}{a_1} x + a_2.$$

Заметим, что здесь существенен выбор пространства состояний. Если взять, например, $D_1 = \langle Z, A_1 \rangle$ и $D_2 = \langle Z, A_2 \rangle$, где $A_i x = x + a_i$, $i = 1, 2$, то системы будут изоморфны лишь при $i = 1, 2$. Например, система с $a_1 = 1$ содержит всего одну траекторию, тогда как система с $a_2 = 2$ содержит в точности две траектории (рис. 1.4.12).

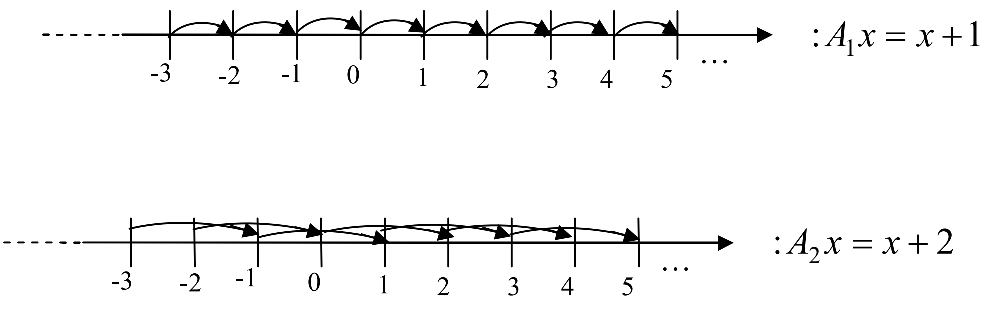


Рис. 1.4.12

Пример 1.4.10. Системы $D_1 = \langle R, A_1 \rangle$, $A_1 x = x + a$ и $D_2 = \left\langle R^+, A_2 \right\rangle$, $R^+ = \{ y \in R \mid y > 0 \}$, $A_2 y = ky$, $k > 0$ изоморфны, если $k = e^a$.

В самом деле, отображение $h : R \to R^+$, $y = h(x) = e^x$ дает изоморфизм:

$$h(A_1 x) = h(x + a) = e^{x+a} = e^a \cdot e^x = ke^x = ky = kh(x) = A_2 h(x).$$

Из двух последних примеров сразу следует, что любые две из систем типа $\langle R, A_1 \rangle$, $A_1 x = x + a_1$ и $\left\langle R^+, A_2 \right\rangle$, $A_2 x = kx$ изоморфны между собой, если $a_1 = 0$, $k = 1$ либо $a_1 \neq 0$, $k \neq 1$.

Пример 1.4.11. Система $D = \langle R, A \rangle$, $Ax = x + a$, при $a \neq 0$ допускает аддитивное разложение в прямую сумму систем $D_\infty = \langle Z, B \rangle$, $Bx = x + 1$:

$$D = \coprod_{0 \le \alpha < a} (D_\infty)_\alpha, \quad \text{где } (D_\infty)_\alpha = D_\infty \tag{1.4.8}$$

В самом деле, каждая траектория движения (обратимого) с начальным состоянием $\alpha, 0 \le \alpha < a$ имеет вид $M_\alpha = \{ \alpha + na \mid n \in Z \}$. Эта траектория представляет собой минимальное инвариантное множество. Сужение $D|_{M_\alpha}$ системы D на M_α будет изоморфно, очевидно, системе D_∞. При этом для $0 \le \alpha \neq \beta < 1$ множества M_α и M_β попарно не пересекаются: $M_\alpha \cap M_\beta = \varnothing$, т.к. α и β не лежат на одной траектории (разность $\alpha - \beta$ не кратна целому числу). Кроме того, ясно, что $R = \coprod_{0 \le \alpha < a} M_\alpha$. Отсюда сразу следует требуемое разложение. В силу соотношения (1.4.7), эта же система допускает мультипликативную декомпозицию: $D = D_\infty \times ID([0, a))$.

Оба эти разложения, по существу, означают разложение системы на минимальные подсистемы, которые, в данном случае, совпадают с отдельными траекториями. Тем самым, устанавливается структура фазового портрета этой системы, а, следовательно, и систем, изоморфных данной (пример 1.4.10).

В предложении 1.4.1 было установлено, что минимальные инвариантные множества обратимых систем есть траектории движений этой системы. Каждое такое движение либо невозвратно, и тогда минимальная подсистема, получающаяся сужением исходной системы на траекторию такого движения, изоморфна $D_\infty = \langle Z, A \rangle$, $Ax = x + 1$, либо периодично, и тогда соответствующее сужение изоморфно $D_n = \langle Z_n, A \rangle$, $Ax = x + 1 \bmod n$ для некоторого n. Этими системами и ограничиваются все минимальные подсистемы обратимой системы, так что каждая обратимая система есть прямая сумма таких минимальных подсистем:

$$D = \coprod_{j \in J} D_{\alpha_j} \tag{1.4.9}$$

где $\alpha_j = \infty$, либо $\alpha_j = n_j \in N$.

Этот факт дает алгебраическое описание фазового портрета обратимой системы.

В заключение этого параграфа опишем еще одну операцию, определенную только для обратимых систем. Смысл ее состоит в переходе к, в некотором смысле, обратной (инверсной, двойственной) системе.

Определение 1.4.12. Пусть $D = \langle M, A \rangle$ – обратимая система. Система $D^{-1} = \langle M, A^{-1} \rangle$ называется обратной (инверсной) системой для системы D.

Инверсная система D^{-1} всегда движется в «обратном направлении» по отношению к движениям системы D. Граф системы D^{-1} есть, очевидно, инверсия графа системы D, т.е. получается попросту из графа $G(D)$ «обращением стрелок» (дуг).

Фазовые потоки ϕ и $\phi^{(-1)}$ систем D и D^{-1} связаны соотношением

$$\phi^{-1}(t, x) = \left(A^{-1}\right)^t x = A_x^{-t} = \phi(-t, x),\ t \in Z \tag{1.4.10}$$

Соотношение (1.4.10) очень важно. Именно оно уточняет смысл о движении D^{-1} в обратном направлении. Хотя формально в определении D^{-1} время не участвует, соотношение (1.4.10) связывает **движения** этих систем. Оно показывает, что траектории движений этих систем совпадают, если имеют хотя бы одно общее состояние, но проходятся они во взаимно противоположных направлениях.

Пример 1.4.12. Пусть $D = D_\infty = \langle Z, A \rangle$, $Ax = x + 1$. Тогда $D^{-1} = \langle Z, A^{-1} \rangle$, $A^{-1}x = x - 1$.

Отметим, что эти системы изоморфны. В самом деле, положим $h: Z \to Z$, $h(x) = -x$. Тогда $h(Ax) = h(x+1) = -x - 1 = h(x) - 1 = A^{-1}(h(x))$. Итак $D_\infty^{-1} \approx D_\infty$.

Пример 1.4.13. Пусть $D = D_n = \langle Z_n, A \rangle$, $Ax = x + 1 \bmod n$. Тогда $D^{-1} = \langle Z_n, A^{-1} \rangle$, $A^{-1}x = x - 1 \bmod n$.

Эти системы также изоморфны. Изоморфизм $h : Z_n \to Z_n$ дается соотношением $h(x) = -x \bmod n$.

Из этих примеров следует изоморфность D и D^{-1} для любой обратимой системы D. Это сразу следует из следующего очевидного свойства:

$$\left(\coprod_{i \in I} D_i \right)^{-1} = \coprod_{i \in I} D_i^{-1} \qquad (1.4.11)$$

и разложения (1.4.9) обратимой системы.

Для произведений также выполняется свойство аналогичное (1.4.11)

$$\left(\prod_{i \in I} D_i \right)^{-1} = \prod_{i \in I} D_i^{-1} . \qquad (1.4.12)$$

1.5. Алгебра систем

В предыдущем пункте мы рассмотрели основные операции и отношения систем. Однако операции и отношения рассматривались отдельно друг от друга. В этом параграфе системы будут рассматриваться вместе со всеми операциями и отношениями, определенными выше. Выпишем теперь ряд очевидных свойств, которыми обладают операции и отношения.

1. $D_1 \approx D_1^{'}$ и $D_2 \approx D_2^{''}$ $\Rightarrow$ $D_1 \coprod D_2 \approx D_1^{'} \coprod D_2^{''}$;
2. $D_1 \approx D_1^{'}$ и $D_2 \approx D_2^{''}$ $\Rightarrow$ $D_1 \times D_2 \approx D_1^{'} \times D_2^{''}$;
3. $D_1 \coprod D_2 \approx D_2 \coprod D_1$ (коммутативность сложения);
4. $D_1 \coprod (D_2 \coprod D_3) \approx (D_1 \coprod D_2) \coprod D_3$ (ассоциативность сложения);
5. $D \coprod \varnothing = D$;
6. $D_1 \times D_2 \approx D_2 \times D_1$ (коммутативность умножения);
7. $(D_1 \times D_2) \times D_3 \approx D_1 \times (D_2 \times D_3)$ (ассоциативность умножения);

8. $D \times D_1 \approx D$;

9. $\left(D_1 \coprod D_2\right) \times D_3 \approx \left(D_1 \times D_3\right) \coprod \left(D_2 \times D_3\right)$ (дистрибутивность умножения относительно сложения);

10. $D_1 \subseteq D_2 \Rightarrow D_1 \coprod D \subseteq D_2 \coprod D$;

11. $D_1 \subseteq D_2 \Rightarrow D_1 \times D \subseteq D_2 \times D$;

12. $\varnothing \subseteq D$.

Изоморфизмы, встречающиеся в этих соотношениях, совпадают с каноническими теоретико-множественными биекциями. Например, для свойств 1, 2 существование изоморфизмов $h_i : D_i \to D_i^{'}$, $i = 1, 2$ обеспечивает существование изоморфизма

$$h_1 \coprod h_2 : D_1 \coprod D_2 \to D_1^{'} \coprod D_2^{'},\ h_1 \coprod h_2 |_{D_i} = h_i,\ \ i = 1, 2$$

и изоморфизма

$$h_1 \times h_2 : D_1 \times D_2 \to D_1^{'} \times D_2^{'},\ \left(h_1 \times h_2\right)\!\left(x_1, x_2\right) = \left(h_1 x_1, h_2 x_2\right).$$

Изоморфизм 6 дается биекцией

$$h : M_1 \times M_2 \to M_2 \times M_1,\ h(x_1, x_2) = (x_2, x_1).$$

Изоморфизм 7:

$$h : (M_1 \times M_2) \times M_3 \to M_1 \times (M_2 \times M_3),\ \left((x_1, x_2), x_3\right) \xrightarrow{h} \left(x_1, (x_2, x_3)\right).$$

Аналогичным образом строятся и другие изоморфизмы.

Отметим, что последовательное применение операций сложения или умножения к конечному семейству систем $D_1, D_2, ...,\ \ D_n$ равносильно сумме или произведению этого семейства, соответственно, точнее:

13. $\left(...(D_1 \coprod D_2) \coprod \ldots\right) \coprod D_n \big) \approx D_1 \coprod D_2 \coprod ... \coprod D_n$;

14. $\left(...(D_1 \times D_2) \times ...\right) \times D_n) \approx D_1 \times D_2 \times ... \times D_n$.

Заметим также, что в свойствах 3-9 стоят изоморфизмы, а не равенства. Поэтому, например, свойство 6, строго говоря, **нельзя** называть коммутативностью операции умножения. Для коммутативности в обычном смысле требовалось бы

$$D_1 \times D_2 = D_2 \times D_1,$$

а это, как легко видеть, не так, если $M_1 \neq M_2$. Однако, как мы не раз отмечали, изоморфные системы, по существу, неразличимы, поэтому мы будем говорить о коммутативности, ассоциативности и т.д. операций в этом обобщенном смысле, т.е. с точностью до изоморфизма. Тогда свойства 3-5 говорят, что системы **по сложению** образуют аддитивную коммутативную полугруппу с нейтральным (нулевым) элементом – пустой системой $\varnothing = \langle \varnothing, \varnothing \rangle$. Точно так же, свойства 6-8 говорят о том, что системы по умножению образуют мультипликативную коммутативную полугруппу с нейтральным (единичным) элементом D_1. Эта система состоит из единственной точки покоя. Поскольку умножение дистрибутивно относительно сложения, то класс всех систем относительно этих двух операций образует коммутативное полукольцо. Наконец, мы упорядочили класс всех систем по включению. При этом отношение порядка сохраняется относительно операций сложения и умножения (свойства 10, 11) так, что можно говорить об упорядоченном полукольце с наименьшим элементом – пустой системой (свойство 12). Итак, класс всех систем образует в совокупности упорядоченное полукольцо с наименьшим элементом.

Рассмотрим более детально обратимые системы. Поскольку сумма и произведение обратимых систем обратимы, то обратимые подсистемы образуют полукольцо полукольца всех систем. Наконец, если рассмотреть все конечные обратимые системы, то мы получим еще одно полукольцо, являющееся частью полукольца всех систем. Оказывается, это полукольцо очень просто устроено. Нашей ближайшей задачей будет описание структуры этого кольца.

Как было показано выше, каждая конечная обратимая динамическая система есть конечная прямая сумма минимальных подсистем. В свою очередь, минимальная подсистема в силу предложения 1.4.1 изоморфна стандартной циклической системе D_n, где n - длина цикла этой подсистемы. Таким образом, каждая конечная обратимая система D есть прямая сумма циклических подсистем:

$$D \approx \coprod_{i=1}^{r} \mathrm{D}_{n_i} \qquad (1.5.1)$$

где r – число различных циклов в D, а n_i - порядок подсистемы D_{n_i}, т.е. длина цикла. Этот результат совпадает с известной алгебраической теоремой о разложении перестановки в произведение независимых циклов.

В разложении $D = \coprod_{i=1}^{r} \mathrm{D}_{n_i}$ обратимой системы некоторые числа n_i могут совпадать, т.е. система может содержать несколько циклов одинаковой длины. Будем обозначать сумму циклов одинаковой длины в виде одного такого цикла с коэффициентом, равным числу циклов: $\underbrace{\mathrm{D}_k \coprod \ldots \coprod \mathrm{D}_k}_{m} = m\mathrm{D}_k$. Тогда разложение (1.5.1) можно записать в виде

$$D \approx \coprod_{k=1}^{n} a_k \mathrm{D}_k \ , \qquad (1.5.2)$$

где a_k – число циклов длины k, а n – максимальная длина цикла в D. При этом $a_k = 0$, если цикла D_k в D нет.

Набор чисел $a_1,...,a_n$ полностью описывает структуру системы D, т.е. задание этих чисел определяет систему посредством (1.5.2) с точностью до изоморфизма. Набор чисел $a_1,...,a_n$ удобно представлять в виде **структурного многочлена** системы

$$S_D(z) = a_1 z^1 + ... + a_n z^n ,$$

где z – переменная многочлена, одночлен z^k соответствует циклу длины k, а коэффициент при z^k, т.е. a_k, есть число таких циклов в D. Отметим, что коэффициенты этого многочлена неотрицательные целые (натуральные) числа.

Очевидно, что изоморфные системы конечные и обратимые имеют **одинаковые** структурные многочлены, т.е.

$$D_1 \approx D_2 \Leftrightarrow S_{D_1}(z) = S_{D_2}(z). \qquad (1.5.3)$$

Обозначим множество всех многочленов с натуральными коэффициентами через $\rho_N(z)$. Через $\rho_N^0(z)$ обозначим класс всех многочленов с нулевым свободным членом, т.е. $a_0 = 0$. Тогда соответствие $D \to S_D(z)$ сюръективно, т.е. осуществляет отображение класса всех обратимых конечных систем на $\rho_N^0(z)$. Действительно, для любого многочлена $S(z) = a_1 z^1 + ... + a_n z^n$ можно подобрать такую систему D, что $S(z) = S_D(z)$. Достаточно, например, взять систему $\coprod_{k=1}^{n} a_k D_k$. Многочлены можно складывать обычным способом, т.е. посредством сложения коэффициентов при одинаковых степенях. При этом очевидно:

$$S_{D_1 \coprod D_2}(z) = S_{D_1}(z) + S_{D_2}(z), \qquad (1.5.4)$$

т.е. структурный многочлен прямой суммы систем есть обычная сумма структурных многочленов систем – слагаемых.

Рассмотрим теперь вопрос о произведении структурных многочленов. Конечно, хотелось бы, чтобы для произведения многочленов было выполнено свойство, аналогичное свойству сложения (1.5.4):

$$S_{D_1 \times D_2}(z) = S_{D_1}(z) \cdot S_{D_2}(z). \qquad (1.5.5)$$

Обычное умножение многочленов **не удовлетворяет** соотношению (1.5.5).

Пример 1.5.1. Пусть $D_1 = D_2 = \mathrm{D}_2$. Тогда $D_1 \times D_2 = \mathrm{D}^2 = \langle M, A \rangle$, где $M = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ и $A(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 1) \bmod 2$. Граф произведения изображен на рис. 1.5.1.

Рис. 1.5.1

Таким образом, $D_2 \times D_2 \approx 2D_2$. Структурный многочлен системы D_2 есть $S_{D_2}(z) = 1 \cdot z^2 = z^2$, а системы $D_2 \times D_2$ есть $S_{D_2^2}(z) = 2z^2$. При обычном произведении $z^2 \cdot z^2 = z^4$, а в нашем случае $z^2 \cdot z^2 = 2z^2$.

Приведенный выше пример говорит о том, что для выполнения свойства (1.5.5) нужно специальным образом определить умножение структурных многочленов. Свойство дистрибутивности умножения систем относительно их сложения (9) и свойство (1.5.4) позволяют свести умножение произвольных многочленов к умножению одночленов, т.е. к произведениям вида $z^n \cdot z^m$. Для нахождения этого произведения необходимо выяснить структуру системы $D_n \times D_m$. Ответ содержится в следующем предложении.

Предложение 1.5.1.

$$D_n \times D_m \approx (n,m) D_{[n,m]}, \tag{1.5.6}$$

где $[n,m] = HOK(n,m)$ – наименьшее общее кратное чисел n, m и $(n,m) = HOD(n,m)$ – наибольший общий делитель чисел n, m.

Доказательство. Имеем

$$D_n \times D_m = \langle Z_n \times Z_m, A \rangle,$$

где $Z_n \times Z_m = \{(x,y) \mid 0 \le x < n,\ 0 \le y < m\}$, $A(x, y) = (x+1,\ y+1)$ причем $x+1$ по модулю n, $y+1$ по модулю m. Поскольку обе системы обратимы, то их произведение обратимо и $D_n \times D_m$ состоит из конечного числа циклов. Покажем, что все циклы имеют одну и ту же длину, равную $HOK(n, m)$, а число таких циклов равно $HOD(n, m)$. Возьмем любое начальное состояние (x_0, y_0). Оно порождает движение:

$$(x_0, y_0) \to (x_0+1, y_0+1) \to (x_0+2, y_0+2) \to \ldots \to (x_0+k, y_0+k) \text{ и т.д.}$$

Если k длина цикла, на котором лежит (x_0, y_0), то

$$x_0 + k = x_0 \bmod n,$$
$$y_0 + k = y_0 \bmod m.$$

Но это значит, что k кратно и n, и m одновременно, причем по определению длины периода цикла k должно быть наименьшим из таких кратных, т.е. $k = HOK(n,m)$. Эти рассуждения не зависят от выбора x_0, y_0. Значит, все циклы имеют одну и ту же длину. Заметим теперь, что система $\mathrm{D}_n \times \mathrm{D}_m$ содержит $n \cdot m$ состояний, которые разбиваются на циклы одинаковой длины k. Значит, число таких циклов будет:

$$\frac{n \cdot m}{k} = \frac{n \cdot m}{[n, m]} = (n, m) = HOD(n, m) \square$$

В примере 5.1 имеем $n = m = 2$. Тогда $(n, m) = 2$ и $[n, m] = 2$, откуда $\mathrm{D}_2 \times \mathrm{D}_2 \approx 2\mathrm{D}_2$.

Пример 1.5.2. $\mathrm{D}_2 \times \mathrm{D}_3 \approx \mathrm{D}_6$. Портрет системы изображен на рис. 1.5.2.

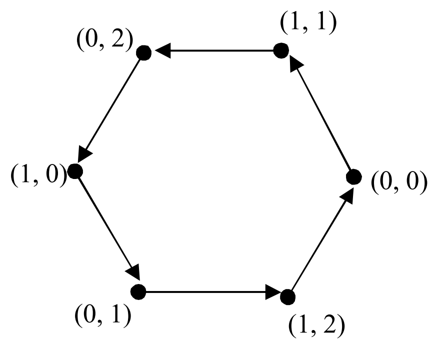


Рис. 1.5.2

Теперь ясно, каким должно быть правило умножения одночленов:

$$z^n \cdot z^m = (n, m) z^{[n,m]}$$

и многочленов:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k z^k\right) \otimes \left(\sum_{l=1}^{m} b_l z^l\right) = \sum_{n,l=1}^{n,m} a_k \cdot b_l \cdot (k,l) z^{[k,l]} .$$

Знак умножения обведем кружком, чтобы отличить его от обычного умножения.

Пример 1.5.3. Пусть $D_1 = 2\mathrm{D}_1 \coprod \mathrm{D}_2 \coprod \mathrm{D}_3$, $D_2 = 3\mathrm{D}_1 \coprod \mathrm{D}_2$. Тогда $S_{D_1}(z) = 2z^1 + z^2 + z^3$, $S_{D_2}(z) = 3z^1 + z^2$. Следовательно,

$$S_{D_1 \times D_2}(z) = (2z^1 + z^2 + z^3) \otimes (3z^1 + z^2) = 6z^1 + 3z^2 + 3z^3 + 2z^2 + 2z^2 + z^6 =$$
$$= 6z^1 + 7z^2 + 3z^3 + z^6.$$

Если снабдить множество всех многочленов с натуральными коэффициентами и с нулевым свободным членом операциями сложения и умножения, в смысле, описанном выше, то получим полукольцо многочленов

$$\left\langle \rho_N^0(z), +, \otimes \right\rangle.$$

Соответствие $D \mapsto S_D(z)$ дает гомоморфизм полукольца конечных обратимых систем в полукольцо структурных многочленов. Этот гомоморфизм сюръективен, а в силу свойства (1.5.3) две системы имеют один и тот же структурный многочлен тогда и только тогда, когда они изоморфны. Тем самым, полукольцо структурных многочленов полностью описывает алгебру конечных обратимых систем.

Мы определили структурные многочлены лишь конечных обратимых систем. Можно, однако, определить структурные многочлены произвольных конечных систем, необязательно обратимых. В силу результатов п. 3, каждая конечная система D содержит максимальную обратимую подсистему $D^{обр} \subseteq D$. Ее пространство состояний есть объединение всех циклов исходной системы (без переходных участков). Поэтому можно считать структурным многочленом произвольной конечной системы структурный многочлен ее обратимой части: $S_D(z) = S_{D^{обр}}(z)$. Отметим, что при этом выполняются следующие свойства:

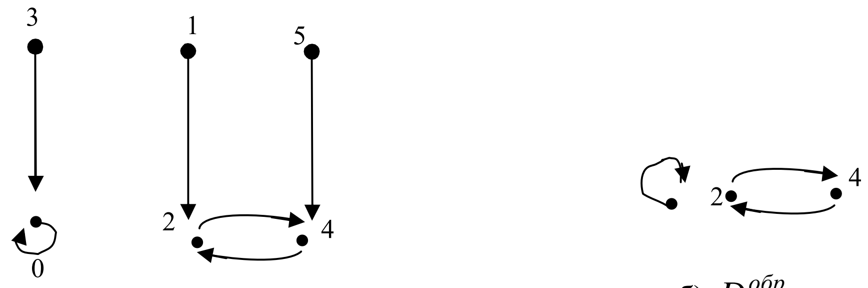
$$D = D_1 \coprod D_2 \coprod \ldots \coprod D_n \Rightarrow D^{обр} = D_1^{обр} \coprod D_2^{обр} \coprod \ldots \coprod D_n^{обр}, \qquad (1.5.7)$$

$$D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n \Rightarrow D^{обр} = D_1^{обр} \times D_2^{обр} \times \ldots \times D_n^{обр}, \qquad (1.5.8)$$

$$D_1 \approx D_2 \Rightarrow D_1^{обр} \approx D_2^{обр}. \qquad (1.5.9)$$

Отсюда сразу следует выполнимость свойств (1.5.3) – (1.5.5) для структурных многочленов произвольных конечных систем.

Пример 1.5.4. Пусть $D = \langle Z_6, A \rangle$, $Ax = 2x \bmod 6$. Граф системы и ее обратимой части изображены на рис. 1.5.3 а), б).



а) D б) $D^{обр}$

Рис. 1.5.3

Структурный многочлен этой системы $S_D(z)$ есть, очевидно, $z^1 + z^2$. Кроме того, получаем, что $S_{D^2}(z) = S_D(z) \otimes S_D(z) = (z^1 + z^2) \otimes (z^1 + z^2) = z^1 + 4z^2$.

Свойства 1.5.7 – 1.5.9 означают, что соответствие $D \mapsto D^{обр}$ есть гомоморфизм полукольца конечных систем на полукольцо конечных обратимых систем. Отметим, что для обратимых систем D естественно $D = D^{обр}$, так что этот гомоморфизм тождественен на полукольце конечных обратимых систем. Такие гомоморфизмы в математике называются **ретрактами**.

Следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & D^{обр} \arrow[dl, mapsto] \\ & S_{D^{обр}}(z) & \end{tikzcd}$$

описывает $D \mapsto S_D(z)$ из полукольца всех конечных систем на полукольцо структурных многочленов $\Phi_N^0(z)$.

Структурный многочлен конечной системы описывает ее «циклическую структуру», т.е. совокупность непересекающихся циклов этой системы, с точностью до изоморфизма. Во многих случаях этой информации достаточно, т.к. именно периодические движения являются, по существу, единственно важными для конечных систем. Такие движения являются «устойчивыми» по времени, тогда как переходные участки движений имеют **конечную длительность**.

Замечание 1.5.1. Не следует путать обратимую **подсистему** $D^{обр} \subseteq D$ и обратную (инверсную) систему D^{-1}, введенную в конце предыдущего параграфа. $D^{обр}$ именно подсистема системы D, т.е. ее оператор перехода тот же самый, но суженный до инвариантного множества, на котором он обратим. При этом $D^{обр}$ определяется для конечных (не обязательно обратимых) систем. Система D^{-1} хотя и имеет то же самое пространство состояний, но оператор перехода ее A^{-1}, вообще говоря, отличается от A, кроме того, операция обращения определена **только** для обратимых систем. Для обратимых конечных систем D:

$$S_D(z) = S'_{D^{-1}}(z),$$

т.к. системы D и D^{-1} изоморфны.

Контрольные вопросы

Ниже термин «система» означает автономную динамическую систему с дискретным временем.

1. Дайте определение автономной динамической системы с дискретным временем.
2. Что такое уравнение движения и движение системы?
3. В чем заключается принцип детерминированности автономных систем?
4. Сколько существует движений, удовлетворяющих уравнению движения системы с заданным начальным состоянием?

5. Чем отличаются следующие понятия: движение, траектория, мировая линия?
6. Определяет ли траектория движение системы полностью?
7. Дайте определение неподвижной точки системы.
8. Опишите движение, траекторию и мировую линию системы, если начальное состояние есть неподвижная точка.
9. Дайте определение периодического и квазипериодического движения. Опишите траекторию этих движений.
10. Что такое невозвратное движение?
11. Раскройте смысл финально эквивалентных движений.
12. Могут ли финально эквивалентные движения иметь разные типы движений?
13. Что означает, что движения встречаются?
14. Дайте классификацию движений автономных систем.
15. Может ли конечная система иметь невозвратное движение?
16. Дайте определение обратимых систем.
17. В чем заключается принцип детерминированности обратимых систем?
18. Дайте классификацию движений обратимых систем.
19. Дайте классификацию движений обратимых конечных систем.
20. Что такое фазовый поток системы? Что такое функция перехода системы? Чем отличаются эти два понятия?
21. Дайте определение фазового портрета системы.
22. Опишите минимальное инвариантное множество системы.
23. Дайте определение прямой суммы и произведения систем и раскройте их содержание.
24. Что означает, что система допускает аддитивную или мультипликативную декомпозицию?
25. Дайте определение обратной системы. Опишите ее фазовый портрет.
26. Чем отличаются подсистема $D^{обр} \subseteq D$ и обратная система D^{-1}?

27. Опишите циклическую структуру конечной обратимой системы?

28. Как складываются и умножаются структурные многочлены?

29. Как связаны структурные многочлены систем D и D^{-1}, где D – конечная обратимая система?

Глава 2
Линейные автономные системы с дискретным временем

2.1. Простейшие примеры линейных систем

Примером линейной автономной системы является система, пространство состояний которой M есть множество всех вещественных чисел R, а оператор перехода задается равенством:

$$x' = AX = a \cdot x,\ x, x' \in R,\ a \in R \qquad (2.1.1)$$

Таким образом, состояние системы изображается одним вещественным числом x. Это число можно назвать координатой состояния, так что состояние системы задается одной координатой. Оператор перехода A также задается одним вещественным числом a. Это число есть, в некотором смысле, также координата, но уже не состояния, а оператора. Равенство (2.1.1) определяет закон перехода системы в координатах (x).

Замечание 2.1.1. Можно, конечно, заявить, что поскольку было объявлено $M = R$, то число x есть **само состояние**, а не его **координата**. Однако вещественные числа сами по себе не могут быть состояниями никакой системы, они всегда появляются как результат реального или воображаемого измерения некоторых величин, характеризующих состояния. Такой подход лишь увязывает теорию с практикой, с абстрактной же точки зрения можно считать вещественное число самим состоянием.

Уравнение движения системы (2.1.1) имеет вид:

$$x(t+1) = ax(t),\ t \in T. \qquad (2.1.2)$$

Выясним теперь вопрос о выборе временной шкалы. Поскольку при $a \neq 0$ система обратима, действительно, в этом случае: $x = A^{-1}x' = \frac{1}{a}x'$, то при $a \neq 0$ в качестве T можно взять двустороннюю шкалу Z. Если $a = 0$, то система необратима и $T = N$.

Равенство (2.1.1) означает, что каждое следующее состояние получается из предыдущего просто умножением на одно и то же число a. Это сразу позволяет записать явное выражение для фазового потока:

$$\phi(t, x_0) = A^t x_0 = a^t x_0,\ t \in T,\ x_0 \in M, \tag{2.1.3}$$

где a^t – степень числа a.

Поведение системы зависит от оператора A, в частности, от числа a, задающего этот оператор. Отметим одно важное обстоятельство: при любом a имеем $a \cdot 0 = 0$, т.е. 0 является положением равновесия. Имеет ли система другие положения равновесия? Решение этого вопроса сводится к решению уравнения: $Ax = x$, т.е. $ax = x$. Решая его, получим, что при $a \neq 1$, начало координат 0 есть единственная точка покоя. Если же $a = 1$, то **все** состояния есть положения равновесия. При этом $A = Id_R$, т.е. система является единичной (тождественной). Ее фазовый поток сводится к одному **тождественному** оператору: $A^t = Id_K,\ t \in Z$. Следовательно, все движения системы периодические с периодом $\tau = 1$, любая траектория сводится к единственной точке покоя. Фазовый портрет состоит из класса таких точек (рис. 2.1.1).

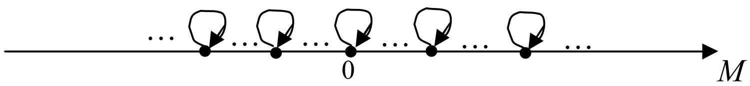


Рис. 2.1.1

Для специального случая $a = 0$ фазовый поток нулевой: $A^t = 0$, $\phi(t, x_0) = 0,\ t \in N$. Система переходит из любого состояния за один шаг в нулевое состояние (точку покоя) и остается в нем. Все движения квазипериодичны с периодом $\tau = 1$. Фазовый портрет состоит из **одного** фрагмента, содержащего нулевое состояние, в которое входят переходные участки траекторий, содержащие по одному состоянию (рис. 2.1.2).

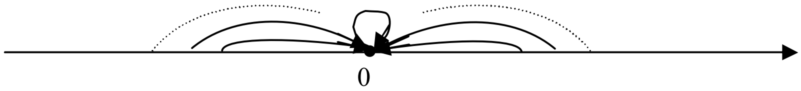


Рис. 2.1.2

Для специального случая $a=-1$ фазовый поток системы имеет вид:

$$\phi(t,x_0)=(-1)^t x_0=\begin{cases} x_0 & \text{если } t \text{ - четно;} \\ -x_0 & \text{если } t \text{ - нечетно.} \end{cases}$$

Каждое движение, начинающееся в ненулевом состоянии x_0, периодично с периодом $\tau=2$. Его траектория состоит из двух состояний: $x_0, -x_0$. Состояние $x_0=0$ соответствует периодическому движению с периодом $\tau=1$. Фазовый портрет системы изображен на рис. 2.1.3. Он состоит из бесконечного числа фрагментов, каждый из которых содержит пару состояний (одну траекторию).

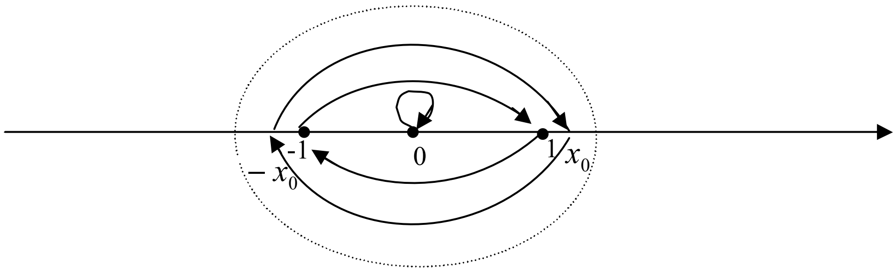


Рис. 2.1.3

Мы разобрали три особых случая, соответствующих значениям a: $0, 1, -1$. Эти значения разбивают всю область значений a (прямую R, рис. 2.1.4) на 4 области: I $(a>1)$, II $(0<a<1)$, III $(-1<a<0)$, IV $(a<-1)$.

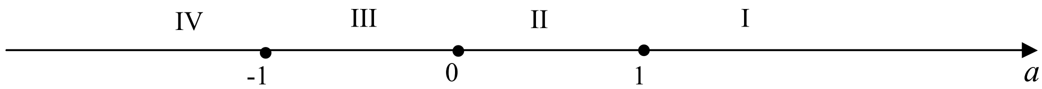


Рис. 2.1.4

Эти области соответствуют четырем типам систем. Изучим каждый такой тип в отдельности. При этом, следует заметить, что любые две системы, задаваемые числами a из одной и той же области, по существу, идентичны. Поэтому можно заменить изучение любой такой системы изучением каких-либо **конкретных** представителей для каждой области, т.е. взять, например, последовательно: $a=2$, $a=1/2$, $a=-1/2$, $a=-2$.

Начнем с рассмотрения случая $a>1$. Тогда для $x_0>0$ получаем

$$\begin{cases} 0 < \phi(t, x_0) = a^t x_0 \to +\infty & \textit{при } t \to +\infty, \\ 0 < \phi(t, x_0) = a^t x_0 = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-t} x_0 \to 0 & \textit{при } t \to -\infty. \end{cases}$$

Для $x_0 = 0$ имеем $\phi(t, 0) = a^t \cdot 0 = 0$ для всех t.

Для $x_0 < 0$ имеем $\begin{cases} 0 > \phi(t, x_0) \to -\infty & \text{при } t \to +\infty, \\ 0 < \phi(t, x_0) =\to 0 & \text{при } t \to -\infty. \end{cases}$

Таким образом, все пространство состояний разбивается на три инвариантных множества $M^+ = \{x \mid x > 0\}$, $M^0 = \{0\}$, $M^- = \{x \mid x < 0\}$. Все движения с **ненулевым** начальным состоянием невозвратны и уходят с течением времени в бесконечность. Система движется с нулевого состояния к бесконечности по полупрямой. Фазовый портрет изображен на рис. 2.1.5

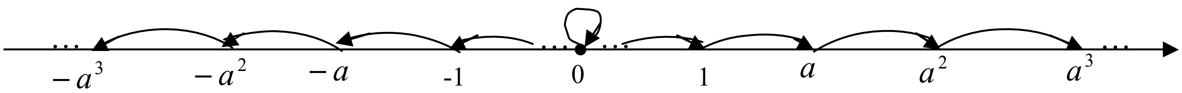


Рис. 2.1.5

Замечание 2.1.2. Отметить, что на рис. 2.1.5 в действительности приведен фактор – портрет, определяемый тремя представительными фрагментами фазового портрета. Техника изображения всего фазового портрета настолько сложна, что авторам не остается ничего другого, кроме надежды на то, что читатель наделен достаточным воображением для представления всех мыслимых траекторий системы по ее фазовому фактор-портрету.

Напомним, что нулевое состояние при любом a есть положение равновесия и движение, начавшееся в этом состоянии, все время остается в нем. Однако при $a > 1$ любое «сколь угодно малое возмущение» нулевого состояния (как начального) приводит к тому, что система со временем неограниченно удаляется от него. Это свойство называется *неустойчивостью* (нулевого) положения равновесия.

Пусть теперь $0 < a < 1$. Тогда при $x_0 > 0$:

$$\begin{cases} 0 < \phi(t, x_0) = a^t x_0 \to 0 & \text{при } t \to +\infty, \\ 0 < \phi(t, x_0) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-t} x_0 \to +\infty & \text{при } t \to -\infty. \end{cases}$$

при $x_0 = 0$: $\phi(t, 0) = 0$ для всех t,

$$\text{при } x_0 < 0: \begin{cases} 0 < \phi(t, x_0) = a^t x_0 \to 0 & \text{при } t \to +\infty, \\ 0 < \phi(t, x_0) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-t} x_0 \to -\infty & \text{при } t \to -\infty. \end{cases}$$

Таким образом, движение с **ненулевым** начальным состоянием с течением времени неограниченно приближается к нулевому состоянию. Это свойство называется *устойчивостью* (асимптотической) нулевого состояния. Все движения с ненулевым начальным состоянием невозвратны с бесконечными (в обе стороны) траекториями. Система движется из бесконечности к нулевому состоянию. Фазовый портрет изображен на рис. 2.1.6.

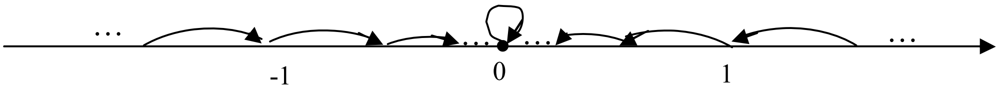


Рис. 2.1.6

Заметим, что портрет (2.1.6) получается из портрета (2.1.5) обращением стрелок. Это естественно, т.к. система с $0 < a < 1$ **обратна** в смысле п. 1.5 для системы с $\bar{a} = \dfrac{1}{a} > 1$.

Рассмотрим теперь случай $-1 < a < 0$. Тогда для $x_0 \neq 0$ имеем

$$\phi\left(t, x_0\right) = a^t x_0 \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty,$$

$$\left|\phi\left(t, x_0\right)\right| = \left|a^t x_0\right| \to +\infty \text{ при } t \to -\infty.$$

Система за каждый шаг переходит с одной полупрямой на другую. В этом случае имеются две инвариантные области $M^0 = \{0\}$ и $M \setminus \{0\}$. Система как бы совершает затухающие колебания (осцилляции) вокруг нулевого состояния. Все движения с ненулевыми состояниями невозвратны с бесконечными (в обе стороны) траекториями, идущими из бесконечности к нулевому состоянию. Нулевое состояние снова устойчивое (ассимптотически) положение равновесия. Фазовый портрет изображен на рис. 2.1.7.

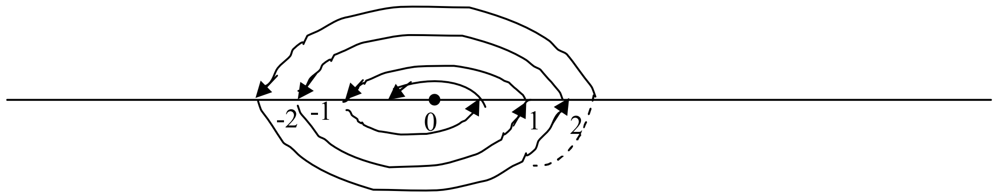


Рис. 2.1.7

Рассмотрим, наконец, последний случай: $a < -1$. Этот случай симметричен предыдущему , т.к. система с $a < -1$ обратна (в смысле п. 1.5) системе с $\bar{a} = \frac{1}{a}, -1 < \bar{a} < 0$. Фазовый портрет получается обращением стрелок на портрете 2.1.7 (рис. 2.1.8). Все движения с ненулевым начальным состоянием совершают колебания с возрастающей амплитудой. Система движется (невозвратно) из нулевого состояния в бесконечном прошлом, неограниченно удаляясь от него и переходя попеременно с одной полупрямой на другую:

$$\left|\phi(t, x_0)\right| = \left|a^t x_0\right| \to +\infty \text{ при } t \to \infty,$$

$$\phi(t, x_0) \to 0 \text{ при } t \to -\infty.$$

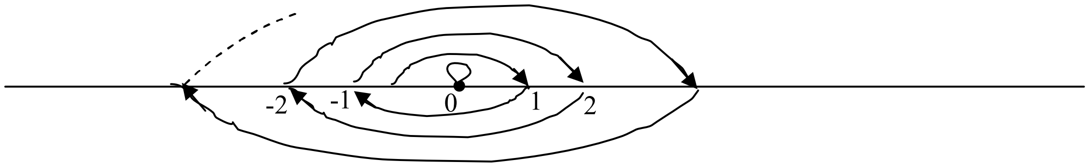


Рис. 2.1.8

Подведем итоги изучения простейших систем вида (2.1.1). Эти системы называются *одномерными линейными* системами, т.к. любые их состояния характеризуются **одним** вещественным числом. Термин "линейная система" означает линейность оператора перехода. Правая часть равенства (2.1.1) есть линейное по x выражение. Поведение системы определяется числом a – параметром системы. При этом имеется три выделенных значения параметра

$a:0,1,-1$, дающие три специальные системы. Эти три значения разбивают все множество значений для a на четыре области, соответствующие четырем типам систем. Поведение любых двух систем одного и того же типа совершенно аналогично. Нулевое состояние есть устойчивое положение равновесия для систем II и III типов ($|a|<1$) и неустойчивое для систем I, IV типов ($|a|>1$). Выделенные значения $a:0,1,-1$ называются *точками бифуркаций* системы (2.1.1). Это требует пояснения. Равенство (2.1.1) определяет не одну систему, а семейство систем, зависящих от параметра a. Конкретная система получится, если a придать конкретное числовое значение. Глобальное поведение системы, т.е. ее поток и портрет зависят от a. Если a принадлежит одной из четырех указанных выше областей, то **малое** изменение (не выводящее за пределы области) не влияет на качественную картину поведения системы, например, на структуру портрета, устойчивость нулевого состояния и т.п. Однако достаточно большое изменение параметра a приводит к переходу из одной области в другую, а тем самым, к изменению поведения системы, к перестройке фазового портрета, потере устойчивости нулевого состояния (или ее приобретения) и т.п. Если считать, что параметр a изменяется плавно (непрерывно), то переход из одной области в другую может произойти только при прохождении одного из выделенных значений $a:0,1,-1$. Именно в этих точках происходит качественное скачкообразное изменение поведения системы, или, как говорят, происходит *бифуркация*.

Рассмотрим теперь простейшие двумерные линейные системы. Будем считать пространством состояний M таких систем координатную плоскость R^2, так что каждое состояние изображается **парой** вещественных чисел $x=(x_1,x_2),\ \ x_1,x_2\in R$. В простейшем случае оператор перехода задается равенствами вида:

$$x'=Ax\sim\begin{cases}x_1'=a_1x_1\\ x_2'=a_2x_2\end{cases}\quad a_1,a_2\in R. \tag{2.1.4}$$

Таким образом, оператор A действует на каждую координату независимо. Фазовый поток системы (2.1.4) имеет вид

$$x(t)=A^t x(0), \quad \begin{cases} x_1(t)=a_1^t x_1(0) \\ x_2(t)=a_2^t x_2(0) \end{cases} \quad t\in T, \tag{2.1.5}$$

где $x(t)=\left(x_1(t), x_2(t)\right)$ – состояние системы в момент времени $t\in T$.

Используя обозначения координат x, y вместо x_1, x_2 и числа a, b вместо a_1, a_2, упростим запись равенств (2.1.5):

$$\begin{cases} x_t = a^t x_0 \\ y_t = b^t y_0 \end{cases} \qquad t\in T, \tag{2.1.6}$$

где (x_t, y_t) – состояние системы в момент времени t.

Как мы уже показали выше, существует семь типов одномерных линейных систем: 3 специальных и 4 общих. Ясно, что независимым выбором параметров a, b (a_1, a_2) можно образовать 49 типов двумерных систем вида (2.1.4). Области соответствующих значений для системных параметров a, b изображены на рис. 2.1.9

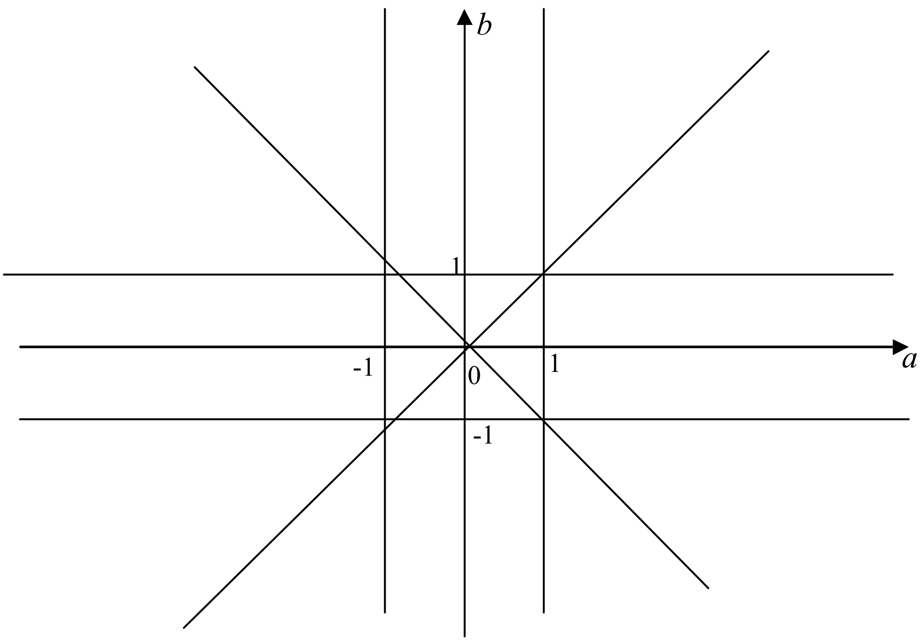


Рис. 2.1.9

Важно отметить, что теперь поведение системы зависит не только от типа значений a, b, но и от их отношения между собой. Так, если $a, b > 1$, т.е. оба параметра типа I, поведение системы при $a = b$ отличается от случая $a \neq b$. Именно поэтому на рис. 1.9 в качестве границ областей «типичного поведения» появились прямые $a = \pm b$ (биссектрисы координатных углов). Поэтому возможных комбинаций параметров, вообще говоря, еще больше. Однако некоторые из них вряд ли имеет смысл рассматривать отдельно. Так, например, случай $a > 1$, $0 < b < 1$ аналогичен случаю $0 < a < 1$, $b > 1$. В самом деле, первый случай переходит во второй, если поменять x, y местами. Эта симметрия сокращает число вариантов примерно вдвое. В частности, мы всегда можем считать $a \leq b$, тогда случай $a > b$ получается простой заменой x на y и y на x. Мы, конечно, не будем рассматривать все случаи, а ограничимся разбором нескольких примеров, в которых покажем принцип построения фазового портрета системы. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Поскольку детальное исследование поведения всех 49 типов рассматриваемых систем представляется авторам занятием не столько неблагодарным, сколь нецелесообразным, то для выявления качественной картины поведения системы ниже будут рассмотрены принципы построения фазового портрета для ограниченного числа характерных случаев.

Прежде чем перейти к разбору примеров, сделаем несколько предварительных замечаний. Как и в случае одномерных систем, начало координат $(0, 0)$ – это, конечно, положение равновесия. Система (2.1.4) обратима тогда и только тогда, когда $a \neq 0$, $b \neq 0$. Наконец, фазовый портрет обратной системы D^{-1} получается из фазового портрета D обращением стрелок.

I. Пусть $1 < a < b$. Фазовый портрет системы изображен на рис. 2.1.10.

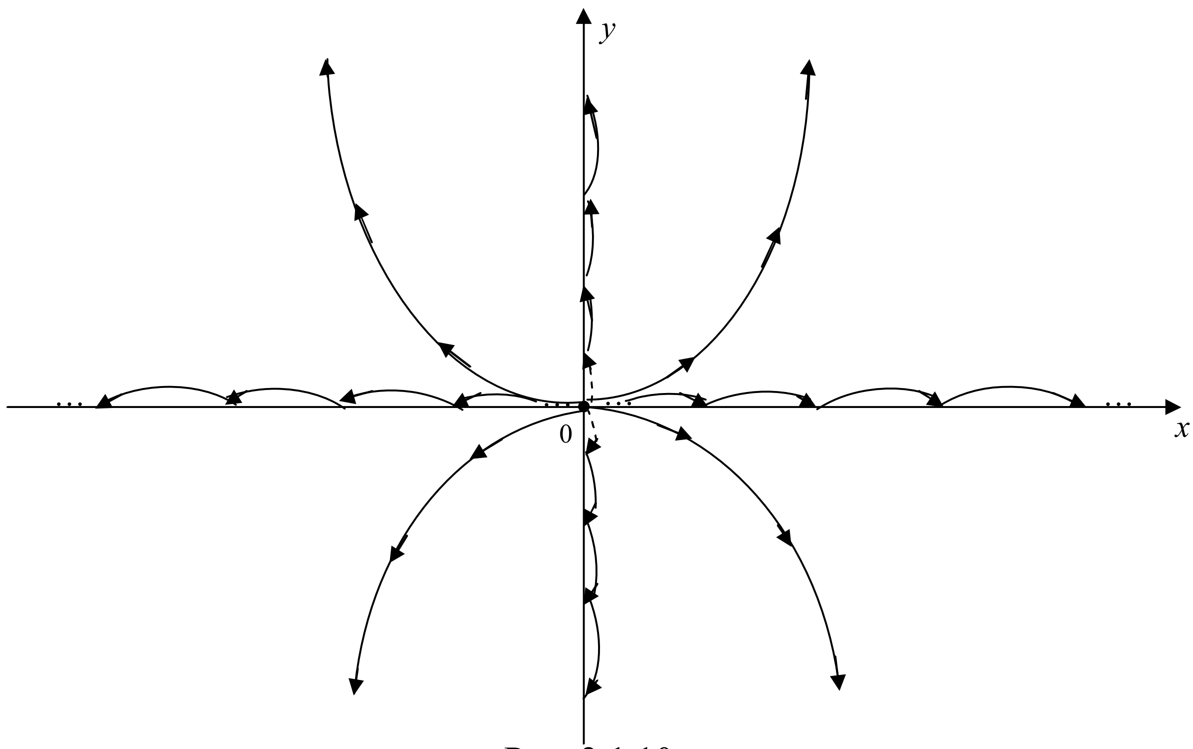


Рис. 2.1.10

Система имеет 9 инвариантных областей: 4 координатных квадранта (без границы), 4 координатных полупрямых и начало координат. В каждой из них показана «типичная» траектория. Все движения в пределах одной и той же инвариантной области аналогичны. Поскольку $b > a > 1$, то $\dfrac{b}{a} > 1$ и $\dfrac{b^t}{a^t} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^t \to +\infty$ при $t \to +\infty$, поэтому ордината растет быстрее чем абсцисса при возрастании t. При $t \to -\infty$, $\dfrac{b^t}{a^t} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-t} \to 0$. т.к. $\dfrac{a}{b} < 1$. Следовательно, траектория (не лежащая на осях координат) «касается» оси абсцисс. По осям координат получаются просто портреты одномерных систем. Начало координат, очевидно, неустойчивое положение равновесия. Оно называется *неустойчивым узлом*.

II. Пусть $1 < a = b$. Фазовый портрет системы изображен на рис. 2.1.11.

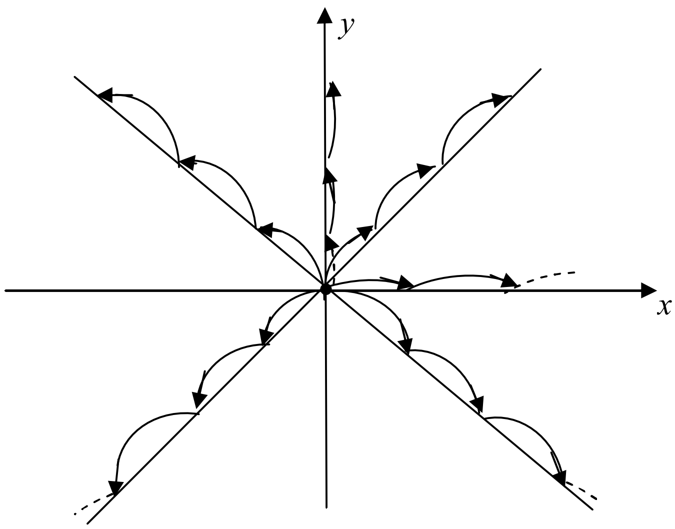


Рис. 2.1.11

Поскольку $a^t = b^t$, т.е. $x_t = y_t$, то все траектории лежат на лучах с вершиной в начале координат. Траектории «уходят» от начала координат в бесконечность. Портрет системы распадается на семейство портретов одномерных систем с общим нулевым состоянием. Начало координат – частный случай неустойчивого узла.

III. Пусть $0 < a < b < 1$. Тогда $a^{-1} > b^{-1} > 1$. Портрет системы (рис. 2.1.12) получается из портрета системы $1 < a_1 < b_1$ (рис. 2.1.10), где $a_1 = b^{-1}$, $b_1 = a^{-1}$ обращением стрелок и заменой x на y и y на x, т.е. симметрией относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов. Система имеет 9 инвариантных областей (4 квадранта, 4 полуоси и начало координат). Все движения за исключением покоя невозвратны, а траектории идут из бесконечности к началу координат. Начало координат – устойчивое положение равновесия, называется *устойчивым узлом*.

IV. Пусть $0 < a = b < 1$. Фазовый портрет этой системы (рис. 2.1.13) получается из портрета обратной системы $a^{-1} = b^{-1} > 1$ (рис. 2.1.11) обращением стрелок. Все траектории лежат на лучах с вершиной в начале координат и идут из бесконечности к началу координат. Положение равновесия – частный случай устойчивого узла.

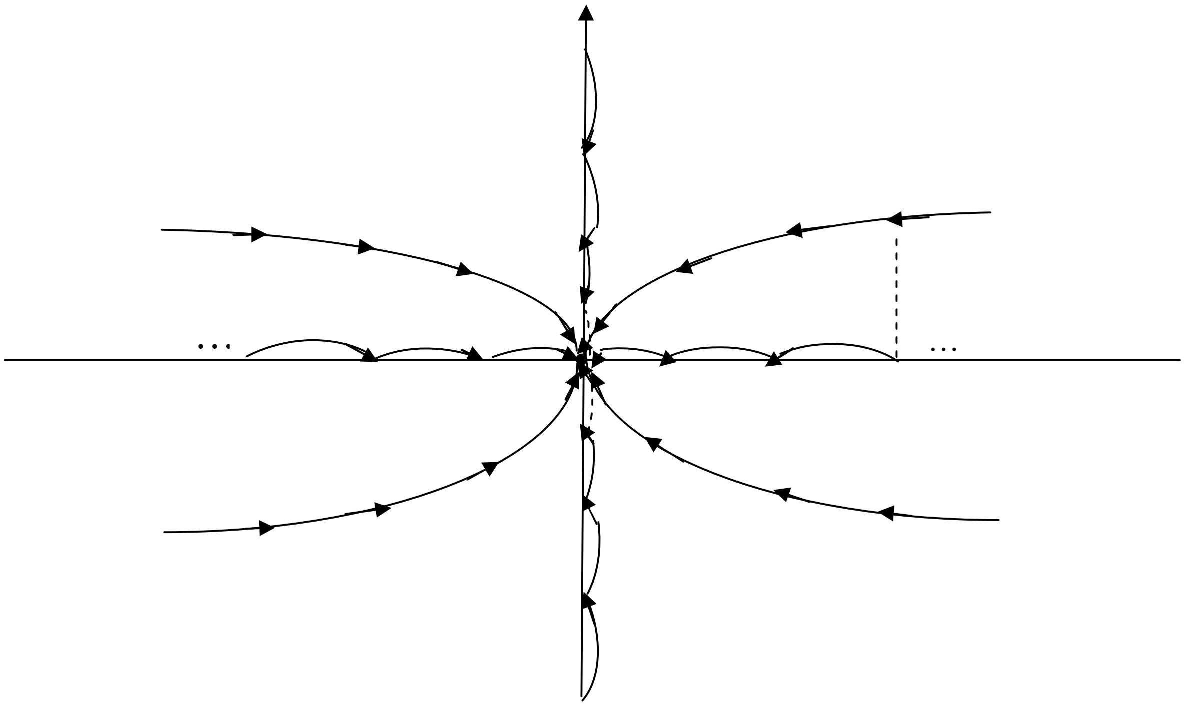


Рис. 2.1.12

V. Пусть $0 < a < 1 < b$. В этой системе $x_t = a^t \cdot x_0 \to 0$ при $t \to +\infty$, тогда как $y_t = b^t \cdot y_0 \to +\infty$, если $y_0 > 0$ и $y_t \to -\infty$, если $y_0 < 0$. Система имеет 9 инвариантных областей (4 квадранта, 4 координатных полуоси, начало координат), в пределах которых поведение системы идентично. Фазовый портрет изображен на рис. 2.1.14. Нулевое состояние – неустойчивое положение равновесия, т.к. система уходит со временем бесконечно далеко от него из любого начального состояния. Для рассматриваемой системы положение равновесия называется *седлом.*

VI. Пусть $a = 1 < b$. Для этого случая $x_t = x_0$, $y_t = b^t \cdot y_0$, т.е. абсцисса состояния x_t не меняется со временем, т.е. является инвариантом системы. Соответствующие инвариантные множества $M_{x_0} = \{(x, y) \mid x = x_0\}$ есть прямые, параллельные оси ординат. На них система ведет себя как простейшая одномерная система с параметром b. Весь портрет расслаивается на семейство таких одномерных «подпортретов» (рис. 2.1.15). Начало координат – неустойчивое положение равновесия.

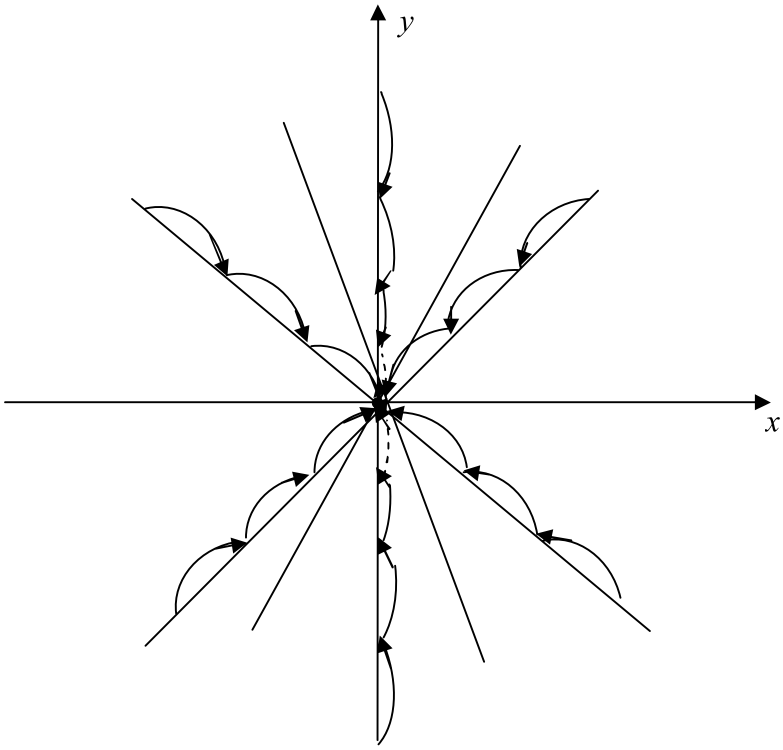


Рис. 2.1.13

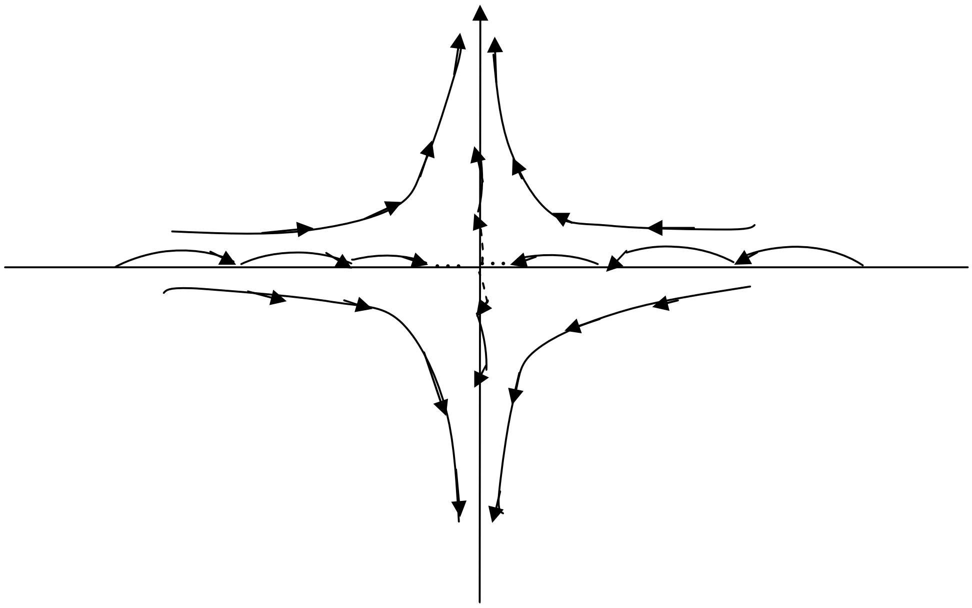


Рис. 2.1.14

VII. Для $0 < a < b = 1$ портрет этой системы получается из 2.1.15 обращением стрелок и взаимной заменой x и y.

VIII. Если $a = b = 1$, то система единичная, все состояния неподвижны $x_t = x_0$, $y_t = y_0$ и портрет состоит из отдельных точек (*петель*).

Рассмотренные выше случаи дают полный набор инвариантов систем для положительных значений параметров.

Рассмотрим теперь случай, когда один из параметров нулевой.

IX. Пусть $a = 0 < b < 1$. Тогда $x_t = a^t x_0 = 0$ при $t > 1$, $y_t = b^t y_0 \to 0$ при $t \to +\infty$. Таким образом, система за один шаг переходит на ось ординат и движется так, как одномерная система с параметром $0 < b < 1$. Фазовый портрет изображен на рис. 2.1.16.

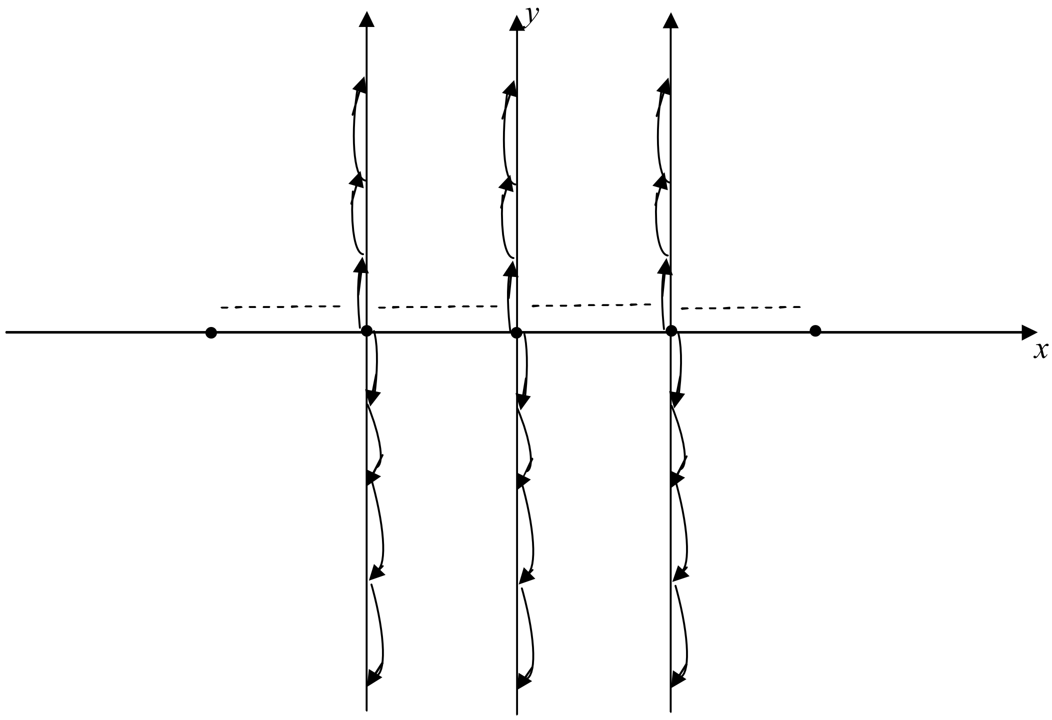


Рис. 2.1.15

Заметим, что система необратима. Все движения вдоль оси абсцисс квазипериодичны с периодом 1, все остальные движения невозвратны. Начало координат – устойчивое положение равновесия.

X. Случай $a = 0 < 1 < b$ получается из предыдущего обращением стрелок. В этом случае начало координат – неустойчивое положение равновесия.

Рассмотрим случай, когда один из значений параметров отрицателен.

XI. Пусть $-1 < a < 0 < b < 1$. Система попеременно переходит из одной полуплоскости (левой) в другую (правую). Имеется 6 инвариантных областей: верхняя и нижняя полуплоскости, 4 полуоси координат и начало координат. В общем случае система совершает затухающие колебания. Начало координат устойчивое положение равновесия. Портрет изображен на рис. 2.1.17.

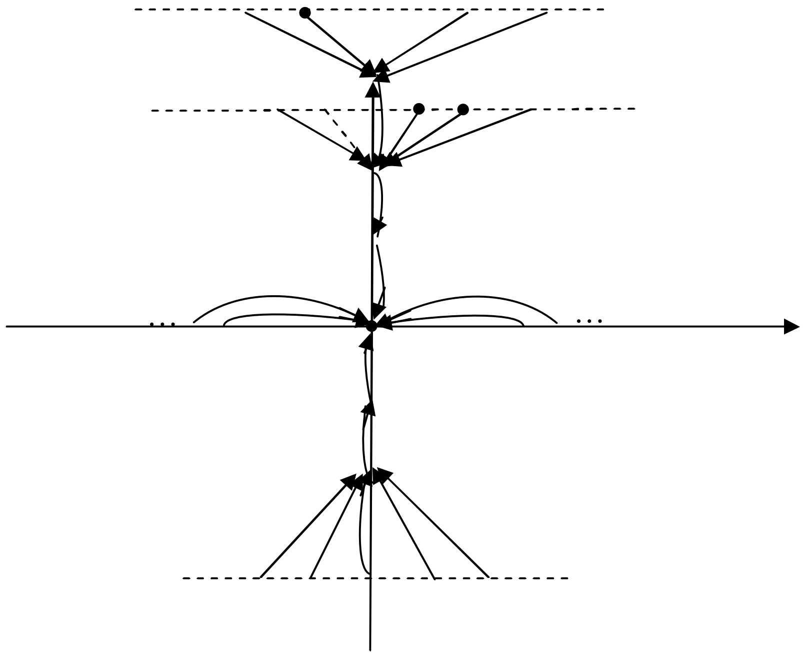


Рис. 2.1.16

X. Случай $a = 0 < 1 < b$ получается из предыдущего обращением стрелок. В этом случае начало координат – неустойчивое положение равновесия.

Рассмотрим случай, когда один из значений параметров отрицателен.

XI. Пусть $-1 < a < 0 < b < 1$. Система попеременно переходит из одной полуплоскости (левой) в другую (правую). Имеется 6 инвариантных областей: верхняя и нижняя полуплоскости, 4 полуоси координат и начало координат. В общем случае система совершает затухающие колебания. Начало координат устойчивое положение равновесия. Портрет изображен на рис. 2.1.17.

Случай $a < -1,\ 1 < b$ получается из предыдущего «обращением стрелок». Начало координат неустойчивое положение равновесия.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Отметим, если оба параметра принимают специальные значения, т.е. $a, b = 0, \pm 1$, то все движения обязательно квазипериодичны (конечны) с периодом, не превышающим 2. Во всех этих случаях начало координат – устойчивое положение равновесия.

Выше мы рассмотрели лишь небольшую часть из всех систем вида (2.1.4). Однако системами (2.1.4) далеко не исчерпывается класс двумерных (вещественных) линейных систем. Запись оператора перехода (2.1.4) имеет весьма

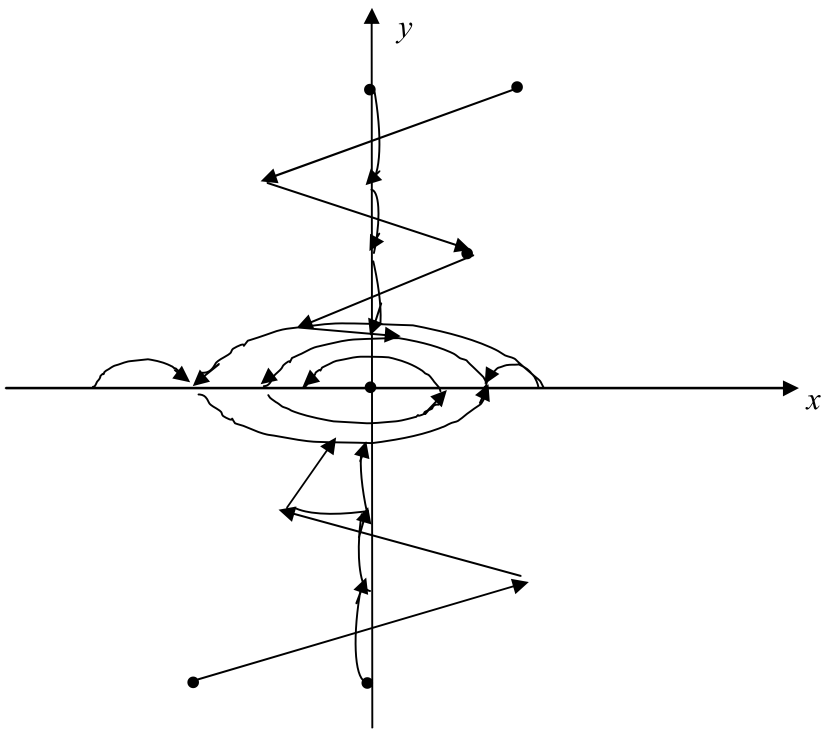


Рис. 2.1.17

специальный «расщепленный» вид. Можно записать линейный оператор перехода более общего вида:

$$\begin{cases} x_1^{'} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2^{'} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad a_{ij} \in R. \tag{2.1.7}$$

В этом случае оператор A задается не двумя, а четырьмя вещественными числами. Если их выписать в виде квадратной таблицы:

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то получим объект, называемый *матрицей* оператора перехода A в данных координатах. Систему уравнений (2.1.7) можно записать теперь в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (2.1.8)$$

или

$$x' = [A]x. \qquad (2.1.8')$$

В системе линейных уравнений (2.1.7), задающей оператор перехода системы, переменные состояния x_1, x_2 не разделены, т.е. каждая координата нового состояния зависит, вообще говоря, от **обеих** координат старого состояния.

Рассмотрим следующий пример. Пусть оператор A задается матрицей

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2, \\ x_2' = 4x_1 - 3x_2. \end{cases} \qquad (2.1.9)$$

Если начальное состояние $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то, используя (2.1.9), можно вычислить последовательно:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \end{pmatrix} \text{ и т.д.}$$

Однако, если бы мы захотели узнать, например, где окажется система на 10000 шаге, то нам ничего не оставалось, как примерить 10000 раз систему равенств (2.1.9) к текущим координатам состояния системы. Можно ли найти какой-нибудь более доступный метод «прогноза» поведения системы (2.1.9)? Для ответа на этот вопрос попробуем сделать следующую замену координат:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 + 4y_2 \end{cases}, \qquad (2.1.10)$$

тогда, выражая y_1, y_2 через x_1, x_2, т.е. решая систему (2.1.10) относительно y_1, y_2, получим

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{3}(4x_1 - x_2) \\ y_2 = \dfrac{1}{3}(-x_1 + x_2) \end{cases} \tag{2.1.11}$$

Аналогичные соотношения выполняются и для координат нового состояния:

$$\begin{cases} x_1' = y_1' + y_2' \\ x_2' = y_1' + 4y_2' \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1' = \dfrac{1}{3}(4x_1' - x_2') \\ y_2' = \dfrac{1}{3}(-x_1' + x_2') \end{cases}$$

Выражая x_1', x_2' через x_1, x_2 согласно (1.9) в выражениях для y_1', y_2' получим:

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{1}{3}(4x_1 - x_2) \\ y_2' = \dfrac{2}{3}(x_1 - x_2) \end{cases}.$$

Тогда из соотношений (2.1.11) сразу получаем:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = -2y_2 \end{cases} \tag{2.1.13}$$

Таким образом, в новых координатах y_1, y_2 система распалась на две независимые одномерные. Фазовый поток системы (2.1.13) вычисляется тривиально:

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0) \\ y_2(t) = (-2)^t y_2(0) \end{cases} \tag{2.1.14}$$

Теперь легко получить с помощью (2.1.10) и (2.1.11) выражение для фазового потока в исходных координатах:

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{3}(4 - (-2)^t)x_1(0) + \dfrac{1}{3}((-2)^t - 1)x_2(0) \\ x_2(t) = \dfrac{1}{3}(4 - (-2)^t)x_1(0) + \dfrac{1}{3}(4(-2)^2 - 1)x_2(0) \end{cases} \tag{2.1.15}$$

Разобранный пример показывает, что, используя замену координат, иногда можно «расщепить» двумерную систему на две независимые одномерные системы. Однако такая мультипликативная *декомпозиция* возможна далеко не всегда. Изучением возможности такой декомпозиции мы займемся несколько ниже. Сейчас же рассмотрим один специальный случай A, который важен сам по себе.

Выше мы изучили некоторые классы одномерных и двумерных **вещественных систем**. Это означает, что координаты и коэффициенты (параметры) a, b оператора перехода – вещественные числа. Однако во многих случаях, например, в электротехнике, чаще используют комплексные координаты. По аналогии с вещественным случаем рассмотрим простейшую одномерную **комплексную** систему. Это означает, что состояния системы изображаются **комплексным числом** $z = x + iy$ $(i^2 - 1)$. Оператор перехода имеет вид:

$$z' = c \cdot z\,,\ c = a + ib\,. \qquad (2.1.16)$$

Равенство (2.1.16) эквивалентно системе равенств:

$$\begin{cases} x' = ax - by, \\ y' = bx + ay, \end{cases} \qquad (2.1.17)$$

записанным отдельно для мнимой и вещественной частей нового состояния z'. Переход к равенствам (2.1.17) позволяет заключить, что комплексная одномерная система (2.1.16) эквивалентна двумерной системе (2.1.17) с матрицей специального вида:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \qquad (2.1.18)$$

Поэтому графически мы можем комплексное состояние z изображать точкой на плоскости с координатами $(x,\, y)$ или столбцом $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Чтобы вычислить фазовый поток рассматриваемой системы и нарисовать ее портрет, перейдем к тригонометрическому виду комплексных чисел или, что равносильно, к полярной системе координат на плоскости (рис. 2.1.18).

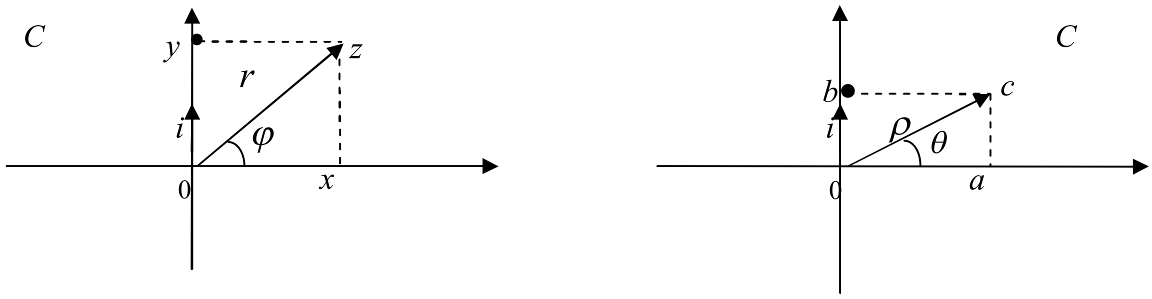


Рис. 1.18

Тогда имеем:

$$\begin{cases} z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ c = a + ib = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \end{cases} \quad -\pi < \varphi, \theta \le \pi \qquad (2.1.19)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модули комплексных чисел z и c, а φ, θ $-\pi < \varphi,\ \theta \le \pi$ – аргументы этих чисел.

Используя тригонометрическую форму, запишем (2.1.16) в виде

$$z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = \rho r(\cos(\varphi + \theta) + i\sin(\varphi + \theta)),$$

т.е.

$$r' = \rho r,\ \varphi' = \varphi + \theta \mod 2\pi. \qquad (2.1.20)$$

Равенства (2.1.20) дают правила умножения комплексных чисел в тригонометрической форме. Используя формулу Эйлера

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}, \qquad (2.1.21)$$

можно дать аналогичную (2.1.20) показательную запись:

$$z = re^{i\varphi},\ c = \rho e^{i\theta},\ z' = r\rho e^{i(\varphi+\theta)} \qquad (2.1.22)$$

Равенства (2.1.20) дают «полярное» разложение нашей системы в произведение двух систем: $D_r = \langle R^+, A_\rho \rangle$ и $D_\varphi = \langle (-\pi, \pi], A_\theta \rangle$, где R^+ – множество неотрицательных чисел, $A_\rho(r) = \rho \cdot r$ и $A_\theta(\varphi) = \varphi + \theta \mod 2\pi$.

Используя полярное разложение (2.1.20), легко вычислить фазовый поток системы:

$$r(t) = \rho^t \cdot r(0),\ \varphi(t) = \varphi(0) + t \cdot \theta. \qquad (2.1.23)$$

Откуда (по 2.1.19) получаем выражение для потока прямо в декартовых координатах (x, y): $\begin{cases} x(t) = r(t)\cos\varphi(t), \\ y(t) = r(t)\sin\varphi(t). \end{cases}$

Подставляя значения для $r(t)$ и $\varphi(t)$ из (2.1.23), получим

$$\begin{cases} x(t) = \rho^t (x_0 \cos t\cdot\theta - y_0 \sin t\cdot\theta), \\ y(t) = \rho^t (x_0 \sin t\cdot\theta + y_0 \cos t\cdot\theta). \end{cases} \tag{2.1.24}$$

или в матричном виде:

$$Z(t) = [A]^t z_0, \text{ где } [A]^t = \rho^t \begin{pmatrix} \cos t\cdot\theta & -\sin t\cdot\theta \\ \sin t\cdot\theta & \cos t\cdot\theta \end{pmatrix}. \tag{2.1.25}$$

На каждом шаге движения системы радиус-вектор ее состояния поворачивается на угол θ (против часовой стрелки, если $\theta > 0$ и по часовой стрелке, если $\theta < 0$) и растягивается (сжимается) в ρ раз, если $\rho > 1$ $(\rho < 1)$. Таким образом, траектория движения системы лежит либо на разворачивающейся (к бесконечности) спирали $(\rho > 1)$, либо на окружности $(\rho = 1)$, либо на сворачивающейся к началу координат спирали $(\rho < 1)$. Фазовые портреты для всех трех случаев $(\theta > 0)$ изображены на рис. 2.1.19.

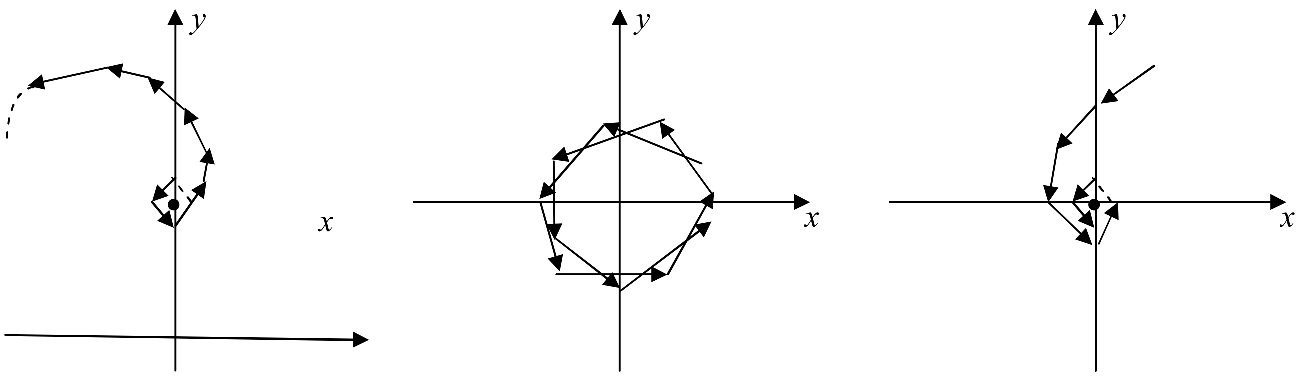


Рис. 2.1.19

В случае $\rho < 1$ начало координат – устойчивое положение равновесия, оно называется *устойчивым фокусом*. В случае $\rho = 1$ начало координат также устойчиво, оно называется *центром*. В случае $\rho > 1$ начало координат – *неустойчивый фокус*.

При $\rho \neq 1$ все движения (за исключением покоя в начале координат) невозвратны и имеют бесконечные спиралевидные траектории, «простирающиеся» от начала до бесконечности. В случае $\rho = 1$ все траектории лежат на окружности с центром в начале координат. Это наводит на мысль о возможной **периодичности** таких движений. Вопрос о периодичности движений с $\rho = 1$ довольно тонкий. Ответ зависит от значения угла поворота θ. Для периодичности движение необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_0 + t \cdot \theta = \varphi_0 \mod 2\pi$, $t \in Z$. Это значит, что для некоторого **целого** t угол $t \cdot \theta$ кратен 2π, т.е. $t \cdot \theta = 2\pi k$, $k \in Z$, откуда $\theta = 2\pi \frac{k}{t}$ или

$$\theta = 2\pi q, \tag{2.1.26}$$

где q – **рациональное** число. В этом случае говорят, что угол θ *соизмерим* с 2π. Это условие соизмеримости и есть необходимое и достаточное условие периодичности движения с $\rho = 1$.

Отметим, что для небольшого числа состояний и явного задания оператора перехода (например, с помощью таблицы) легко было **построить** фазовый портрет такой системы и тем самым получить представление о ее глобальном поведении. Однако, для большого числа состояний прямое построение портрета становится затруднительным и приходится искать другое, более комплексное описание глобального поведения системы. Одним из возможных средств такого описания являются структурные многочлены конечных систем, которые были введены в п. 1.4. Структурный многочлен полностью описывает циклическую структуру конечной системы, поэтому желательно уметь находить эти многочлены непосредственно по оператору перехода, минуя этап построения самого портрета. Это, оказывается, можно сделать в случае **линейных конечных** систем.

В случае вещественных и комплексных переменных введение понятия линейного выражения не представляет труда (алгебраические операции сложения и умножения вещественных и комплексных чисел хорошо известны), но в случае конечного множества значений координат это сделать труднее, т.к. сначала приходится наделить это множество значений алгебраическими операциями с тем, чтобы стало возможным определить понятие линейного выражения. Один из возможных способов сделать это состоит в использовании модулярной арифметики или, как еще говорят арифметики, по модулю некоторого числа m.

Обозначим через $Z_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ – (коммутативное) кольцо вычетов по модулю m. Напомним, как выполняются операции сложения и умножения в этом кольце. Данные вычеты x, y сначала складываются или умножаются как обычные натуральные числа, а затем вычисляется **остаток** от деления результата на число (модуль) m.

Отметим, что противоположный вычет (по модулю m) для вычета x находится очень легко

$$-x = (m - x) \quad x \in Z_m,$$

где $(m - x)$ – обычная разность целых чисел.

Теперь мы в состоянии определить простейшие конечные линейные системы. Так, одномерная линейная (по модулю m) система может быть определена следующим образом:

$$M = Z_m, \quad x' = Ax = a \cdot x \mod m, \tag{2.1.27}$$

где $x, x' \in M, \quad a \in Z_m$.

Аналогично можно определить двумерную линейную систему:

$$M = Z_m \times Z_m, \quad A \sim \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \mod m, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \mod m, \end{cases} \tag{2.1.28}$$

где $x, x' \in M$, $a_{ij} \in Z_m$.

Аналогично можно задать n-мерную линейную систему над **произвольным кольцом** K, если положить $M = K^n$, а оператор A задавать системой линейных равенств:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{2.1.29}$$

где $x, x' \in M$ – столбцы координат старого и нового состояния, а коэффициенты a_{ij} берутся из этого же кольца K. Так, если положить $K = R$, то получим определение n-мерной **вещественной**, а при $K = C$ – **комплексной** системы. Наконец, если $K = Z_m$, получим определение конечной (по модулю m) линейной n-мерной системы. Очень важно, что значительная часть теории таких систем строится для произвольного коммутативного кольца K, так что нет надобности отдельно рассматривать вещественный, комплексный и конечный случай колец. Но, конечно, структура самого кольца также существенна. Это проявляется уже хотя бы в том, что n-мерная линейная система над конечным кольцом сама конечна и, в частности, не может иметь невозвратных движений, тогда, как мы знаем, «в общем случае» одномерных и двумерных вещественных систем все движения, как правило, невозвратны.

В такой общности теория линейных систем достаточно сложна. Однако, если потребовать выполнения еще одного свойства для операции умножения из кольца K, то теория систем над такими кольцами значительно упростится. Это свойство существования обратного для любого ненулевого элемента кольца, т.е. для любого $x \neq 0$ существует x^{-1} такой, что $x \cdot x^{-1} = 1$. Конечно, кольца вещественных и комплектных чисел удовлетворяют этому условию. Для того, чтобы и кольцо вычетов Z_m удовлетворяло этому условию, необходимо и достаточно, чтобы модуль m был **простым числом**. Так, например, если $m = 6$, то вычет 2 не имеет обратного. Если же, например $m = 5$, то $2 \cdot 3 = 1$, так что $2^{-1} = 3$.

Напомним, что коммутативное кольцо, удовлетворяющее вышеуказанному условию, называется *полем*. Таким образом, R, C – поля, также как и Z_p, где p – простое число. Поле вычетов по простому модулю **не** единственный пример конечного поля. Напомним также, что число элементов конечного поля всегда есть степень p^k простого числа p, называемого *характеристикой* поля. Стандартное обозначение для поля из $q = p^k$ элементов – F_q или $GF(p^k)$. В частности, $F_p = Z_p$, где p – простое число.

Рассмотрим теперь одномерную линейную динамическую систему над конечным полем F_p:

$$M = F_p, \quad x' = Ax = a \cdot x \quad \mod p, \tag{2.1.30}$$

где $x, x', \in M, a \in F_p$. Вычислим фазовый поток этой системы и определим структуру фазового портрета.

Если x_0 начальное состояние, то очевидно:

$$x_t = a^t \cdot x_0 \quad \mod p, \quad t \in T. \tag{2.1.31}$$

Если $a = 0$, то система за один шаг переходит из любого состояния в нулевое. Фазовый поток в этом случае имеет вид:

$$A^t x_0 = a^t x_0 = \begin{cases} x_0 & t = 0, \\ 0 & t > 0. \end{cases} \tag{2.1.32}$$

Фазовый портрет изображен на рис. 2.1.20.

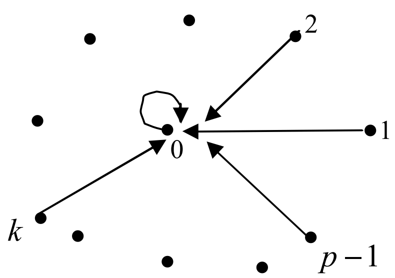


Рис. 2.1.20

Если $a \neq 0$, то система обратима, т.к. F_p поле: $x = A^{-1}x' = a^{-1}x'$. Кроме того, система имеет конечное множество состояний $M = F_p$, а значит все ее траектории – циклы и фазовый портрет состоит из конечного набора циклов.

Если $x_0 = 0$, то $ax_0 = 0$, так что нулевое состояние – положение равновесия – образует цикл длины 1. Если же $x_0 \neq 0$, то на каком-либо шаге, скажем k, система снова (в первый раз) вернется в начальное состояние, т.е. $a^k x_0 = x_0 \mod p$. Так как $x_0 \neq 0$, то, умножая справа это равенство на x_0^{-1}, мы получим

$$a^k = 1 \mod p. \qquad (2.1.33)$$

Следовательно, мы доказали, что некоторая степень любого ненулевого элемента a есть 1. Наименьшая такая положительная степень называется порядком элемента a по модулю p и обозначается $ord_p(a)$:

$$ord_p(a) = \min\{k \mid k > 0, a^k = 1\}. \qquad (1.34)$$

Если $ord_p(a) = k$, то отсюда сразу следует, что $a^i \neq a^j$ при $0 \leq i < j < k$, т.е. среди $a^0, a^t, ..., a^{k-1}$ нет повторяющихся элементов, так как в противном случае мы имели бы $a^i = a^j$, откуда $a^{j-i} = 1$, где $0 < j - i < k$, что невозможно по определению k. Тогда точно также среди элементов $x_0, ax_0, a^2 x_0, ..., a^{k-1} x_0$ нет повторяющихся, но $a^k x_0 = x_0$, значит для любого x_0 выписанные k элементов в точности дают цикл длины k. Длина цикла (период движения) **не зависит** от выбора ненулевого начального состояния $x_0 \in M$. Следовательно, все циклы, не содержащие нулевого состояния, имеют **одну** и **ту же** длину $k = ord_p(a)$. Так как в $M = F_p$ имеется всего $(p-1)$ ненулевых состояний, то таких циклов будет $(p-1)/k$. Следовательно, структурный многочлен конечной линейной (по модулю p) системы имеет вид:

$$S_{(a)}(z) = z^1 + \frac{p-1}{k} z^k, \qquad (2.1.35)$$

где a – параметр, задающий оператор перехода, а $k = ord_p(a)$ порядок этого элемента. Заметим, что первый член (z^1) соответствует нулевому состоянию (точке покоя).

Пример 2.1.1. Пусть $M = Z_7$, $Az = 2x \mod 7$. $ord_7(2) = 3$, т.к. $2^3 = 1 \mod 7$, откуда

$$S_{(2)}(z) = z^1 + 2z^3.$$

Портрет этой системы изображен на рис. 2.1.21.

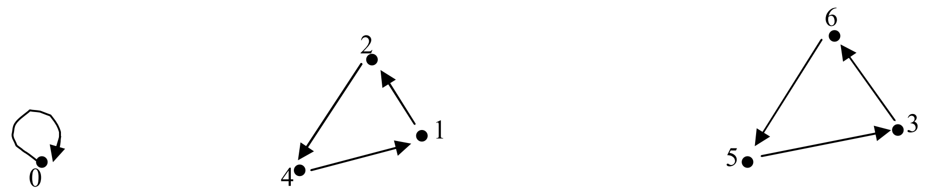


Рис. 2.1.21

Вычисление фазового потока (2.1.31) одномерной конечной системы (по модулю p) значительно упрощается, если мы знаем порядок элемента a, задающего оператор перехода. Легко видеть, что $a^n = a^r$, где $r = res_k(n)$ (остаток деления n на k). Так, например, если $p = 7$, $a = 2$, то $2^{1985} = 2^2 = 4$, т.к. $ord_7(2) = 3$ и $res_3(1985) = 2$. Следовательно, выражение для фазового потока можно записать в виде:

$$\phi(t, x) = a^t x = a^{r(t)} \cdot x \mod p, \tag{2.1.36}$$

где $r(t) = res_k(t)$, $k = ord_p(a)$.

Зная поток и структурный многочлен одномерной системы, легко вычислить поток и структурный многочлен «расщепленной» двумерной системы

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in F_p \right\}, \begin{cases} x' = ax \mod p, \\ y' = by \mod p, \end{cases} \tag{2.1.37}$$

где $a, b \in F_p$.

Как было показано в п. 1.5

$$S_{(a,\,b)}(z) = S_{(a)}(z) \otimes S_{(b)}(z),$$

где $S_{(a)}(z)$, $S_{(b)}(z)$ – структурные многочлены соответствующих одномерных систем.

Пример 2.1.2. Пусть

$$M = F_7^2,\ A(x,\, y) = (2x, 3y) \pmod 7.$$

Так как $ord_7(2) = 3$, $ord_7(3) = 6$, то $S_{(2)}(z) = z^1 + 2z^3$, $S_{(3)}(z) = z^1 + z^6$. Откуда получаем

$$S_{(2,\,3)}(z) = (z^1 + 2z^3) \otimes (z^1 + z^6) = z^1 + 2z^3 + 7 \cdot z^6.$$

Заметим, что для явного построения портрета нам пришлось бы находить траектории с помощью последовательного умножения абсциссы и ординаты состояния на 2 и 3 соответственно. Всего пришлось бы выполнить 49 таких умножений.

Исследование многомерных конечных линейных систем наталкивается на те же трудности, какие встречаются в случае вещественных систем. Сложная (хотя и линейная) зависимость координат нового состояния от координат старого (2.1.29) приводит к тому, что прямое вычисление потока в данной системе координат становится невозможным. Упрощение может быть достигнуто лишь подходящей заменой координат как в примере, разобранном выше (2.1.9) – (2.1.15). В этом примере мы просто предложили данную замену, и она оказалась успешной. Однако вся трудность состоит именно в нахождении такой «хорошей» замены координат. Кроме того, оказывается, такая замена и не всегда может быть найдена. Решение всех этих и многих других проблем невозможно без систематического изучения самого понятия «линейности». Изучая абстрактные линейные (векторные) пространства и линейные операторы вместе с их координатными представлениями: столбцами и матрицами, мы получим сильные средства для решения важнейших задач теории линейных систем.

Контрольные вопросы

1. Рассмотрим одномерную линейную систему $f(x) = ax$, где $M = R$, $a \in R$.

Найдите выражение для фазового потока.

Опишите основные типы траекторий, неподвижные точки, циклы и апериодические движения. Изобразите возможные фазовые портреты системы

Дайте определение устойчивости и неустойчивости неподвижных точек.

Для каких точек a происходит бифуркация?

2. Для двумерной линейной системы $x' = Ax \sim \begin{cases} x_1' = a_1 x_1, \\ x_2' = a_2 x_2, \end{cases}$ $a_1, a_2 \in R$, ответьте на вопросы 1.1, 1.2.

3. Для двумерной линейной системы $\begin{cases} x' = ax - by, \\ y' = bx + ay, \end{cases}$ $a, b \in R$, ответьте на вопросы 1.1, 1.2.

4. Для одномерной линейной системы $M = F_p$, $x' = Ax = a \cdot x \mod p$, ответьте на вопросы 1.1, 1.2. Дайте описание и количество k-циклов. Найдите структурный многочлен системы.

5. Найдите структурный многочлен автономной линейной системы над полем F_5 с матрицей A=$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Литература

1. Месарович М., Такахара Р. Общая теория систем. М. Мир, 1978.
2. Шрейдер Ю.А., Шаров А.А. Системы и модели. М. Радио и связь, 1978.
3. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М. Мир, 1978.
4. Портер У. Современные основания общей теории систем. М. Наука, 1971.
5. Вунш Г. Теория систем. М. Советское Радио, 1978.
6. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем. М. Мир, 1974.
7. Заде Л., Дезоэр Ч. Теория линейных систем. М. Наука, 1971.
8. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М. Наука, 1976.
9. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. М. "Наука", 1970.
10. Степаньянц Г.А. Теория динамических систем. М. Машиностроение, 1985.
11. Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савельев В.П. Динамические модели теории управления. М. Наука, 1985.
12. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М. Наука, 1978.

Оглавление