Министерство транспорта России
Московский государственный технический
университет гражданской авиации

В.И.Котиков

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторным работам
по дисциплине
“МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ”
для студентов 4 курсов
специальности «Прикладная математика»

Москва 2008

Лабораторная работа № 3

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЕМА ДИСКРЕТНЫХ СООБЩЕНИЙ

1. Цель работы

Ознакомление студентов с обобщенной структурной схемой системы передачи информации и проведение анализа и расчета согласованных фильтров и вероятности ошибки оптимальных схем приема при точно известном сигнале.

2. Общие сведения

Общая структурная схема системы передачи информации представлена на рис.1.

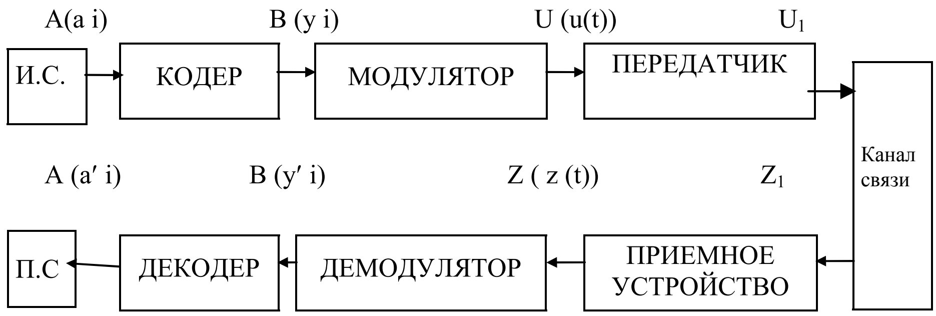

Рис.1

Под каналом передачи информации в широком смысле понимают совокупность средств, предназначенных для передачи сообщений и соответствующих им сигналов от источника к потребителю.

Дискретный канал математически описан, если заданы алфавит кодовых символов на входе y_i (i=1,m) вместе с их вероятностями p (y_i), алфавит кодовых символов на выходе y'_j ($j=1,m'$) и значения вероятностей переходов p (y'_j / y_i) ($i=1,m$; $j= 1, m'$), т.е. вероятностей того, что на выходе канала появится символ y'_j при условии, что на вход подан символ y_i.

В лабораторной работе будут рассмотрены вопросы, связанные с устройством преобразования сигналов, в частности, с демодулятором или иначе модемом системы передачи дискретных сообщений.

На вход демодулятора (рис.1) поступает сигнал плюс помеха

$$z(t)= s(t, b_i) + n(t),$$

где $s(t, b_i)$ - сигнал, соответствующий символу;
$n(t)$ - аддитивная помеха.

На выходе модема возникает дискретный сигнал, т.е. последовательность кодовых элементарных символов. Обычно некоторый элемент непрерывного сигнала преобразуется модемом в один кодовый символ (поэлементный прием). Работа каждого демодулятора описывается определенным законом, по которому поступивший на его вход непрерывный сигнал превращается в кодовый символ. Этот закон называется правилом решения, а реализующая его схема – решающей схемой.

Для синхронных систем передачи информации элементарные символы имеют неизменную длительность T и начало отсчета фиксировано. Основное внимание будет уделено поэлементным методам приема дискретных сообщений (последовательное вынесение демодулятором решения об отдельных элементарных кодовых символах $b_{k,i}$; k = 1,2.3,... - номер последовательно передаваемого элементарного символа; i= 1,2,3,... - номер позиции кодового символа).

Одним из наиболее широко распространенных критериев оптимального приема дискретных сообщений является критерий минимума средней вероятности ошибки (критерий идеального наблюдателя).

Алгоритм работы модема, оптимального по критерию идеального наблюдателя, можно записать так:

$$P\,[b_{k,i} \mid z\,(t)] \underset{b_{k,j}}{\overset{b_{k,i}}{>}} P\,[b_{k,j} \mid z(t)], \qquad i \neq j, \quad i=1, m, \tag{1}$$

или

$$P(b_{k,i})\; w\,[z(t) \mid b_{k,i}] \underset{b_{k,j}}{\overset{b_{k,i}}{>}} P(b_{k,j})\; w\,[z(t) \mid b_{k,j}] \tag{2}$$

т.е. сводится к проверке системы из (m-1) неравенств: регистрируется номер символа, который максимизирует сравниваемые величины. Здесь $P\,[b_{k,i} \mid z\,(t)]$ - апостериорная вероятность передачи символа $b_{k,j}$ прификсации на интервале анализа (0, Ta) реализации принимаемого колебания z(t), представляющего смессь **сигнал+шум**; $w[z(t)/b_{k,i}]$ - функция правдоподобия передачи символа $b_{k,i}$ при фиксации z(t). При непрерывном времени эту функцию называют функционалом правдоподобия.

Демодулятор, работающий в соответствии с алгоритмом

$$w\,[z(t) \mid b_{k,i}] \underset{b_{k,j}}{\overset{b_{k,i}}{>}} w\,[z(t) \mid b_{k,j}], \tag{3}$$

называют модемом или приемником, построенным по правилу максимального правдоподобия.

Если все символы равновероятны, то алгоритм (3) следует из (2) и этот алгоритм обеспечивает минимизацию средней вероятности ошибки. При неизвестных априорных вероятностях $P(b_{k,i})$ оптимальный прием в системах передачи информации чаще всего осуществляется по алгоритму (3).

Логарифмируя левые и правые части алгоритма (2), запишем этот алгоритм в следующей эквивалентной форме:

$$\ln w[z(t) \mid b_{k,\,i}]+\ln P(b_{k,\,i}) \underset{b_{k,\,j}}{\overset{b_{k,\,i}}{>}} \ln w[z(t) \mid b_{k,\,j}]+\ln P(b_{k,j}) \tag{4}$$

Интервал анализа на приеме T_a не всегда совпадает с тактовым интервалом на передаче T. Примем, что

$$Ta = (1+D)T, \qquad D = 0, 1, 2, ... \qquad (5)$$

Величину D называют фиксированной задержкой в принятии решения об элементарном символе.

Если сигналы соседних символов перекрываются в месте приема, что соответствует каналу с межсимвольной интерференцией, порожденной линейными искажениями или, как говорят, памятью канала), то при оптимальной обработке и учете всей энергии принимаемого сигнала приходится брать D>0. Конкретная величина D связана с параметром $L=\tau_{пер}/T = 0,1,2$ - относительной памятью канала, $\tau_{пер}$ - практическая протяженность импульсной переходной характеристики канала. При пренебрежении межсимвольной интерференцией выбирают Ta = T. Для каналов с межсимвольной интерференцией (L>0) могут быть построены демодуляторы (приемные устройства), когда D< L (неполный учет энергии принимаемых сигналов) и D ≥ L (полный учет энергии принимаемых сигналов). При независимых и равных вероятностях передачи кодовых символов

$$w[z(t)\,|\,b_{k,\,i}] = \sum_{k^{(L)}=1}^{m^L} \sum_{k^{(D)}=1}^{m^D} w[z(t)\,|\,B_{k^{(L)}-L}^{k^{(L)}-1},\ b_{k,\,i},\ B_{k^{(D)}+1}^{k^{(D)}+D}], \qquad (6)$$

где $w[z(t)\,|\,B_{k^{(L)}-L}^{k^{(L)}-1},\ b_{k,\,i},\ B_{k^{(D)}+1}^{k^{(D)}+D}]$,

- функция правдоподобия того, что при фиксации z(t) на интервале T_a k-ый символ имел номер i, до него передавались символы $b_{k-1}, ... , b_{k-L}$, а после него - символы $b_{k+1}, ... , b_{k+D}$; m^D - число различных цепочек сигналов, которые могли быть переданы на интервале анализа после k-го символа; m^L - число различных цепочек символов, последствия которых могут влиять на интервале анализа k-го символа.

Выражение (6) можно рассматривать как усредненную функцию правдоподобия (по символам, переданным до и после анализируемого). В условиях достаточно надежной передачи, что является важным требованием при создании современных систем передачи дискретных сообщений, можно считать, что символы, зафиксированные до анализируемого, действительно переданы по каналу (с вероятностью близкой к 1). Это означает, что на интервале T_a почти точно восстановлен сигнал $g_{ост}$ (t), порожденный "хвостами" предшествующих символов, и вместо (6) можно записать

$$w[z(t)/b_{k,\,i}] = \sum_{k^{(D)}=1}^{m^{(D)}} w[z(t) - g_{ост}(t) \mid b_{k,\,i},\, B_{k^{(D)}+1}^{k^{(D)}+D}]. \qquad (7)$$

Обозначим через $s_{r,i}(t)$ (r=1, ... , m) r-ю реализацию принимаемого сигнала, обусловленную на интервале Та i-й позицией k-го символа, L предшествующими символами и D последующими символами. Если сигналы $s_{r,i}(t)$ известны точно в месте приема, а на интервале T_a имеется реализация аддитивного стационарного шума с плотностью вероятности $w[n(t)]$, то

$$w[z(t) \mid B_{k^{(L)}-L,r}^{k^{(L)}-1},\, b_{k,\,i},\, B_{k^{(D)}+1,r}^{k^{(D)}+D}] = w[n(t) = z(t) - s_{r,i}(t)]. \qquad (8)$$

Индекс r в левой части равенства означает, что берется цепочка символов до и после анализируемого, порождающая сигнал $s_{r,\,i}$ (t).

Одним из способов реализации алгоритма оптимального приема при точно известном сигнале является применение согласованных фильтров.

Линейным фильтром, согласованным с сигналом s_i (t), называют фильтр с постоянными параметрами и импульсной переходной характеристикой

$g(t) = a\, s_i(t_0 - t)$, где a - произвольная постоянная.

Форма последней зеркальна (относительно оси ординат, смещенной в точку t_0) форме сигнала.

Если длительность сигнала равна T, то из условия физической реализуемости следует, что **t_0 - T ≥ 0**. На практике выбирают запаздывание $t_0 = T$.

Комплексный коэффициент передачи K (jω) согласованного фильтра определяется следующим выражением

$$K(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t)\exp(-j\omega t)dt = aS_i^*(j\omega)\exp(-j\omega t_0), \qquad (9)$$

где $aS_i^*(j\omega)$ - комплексно-сопряженный спектр сигнала $s_i(t)$.

Согласованный фильтр в момент **t_0** при флюктуационной помехе типа “белый шум” обеспечивает на выходе максимально возможное отношение пиковой мощности сигнала к средней мощности шума

$$r^2_{max} = 2h^2 = 2PcT/N_0 = 2FT\rho_{вх} \qquad (10)$$

Если **t_0 =T**, то в произвольный момент времени сигнальную компоненту на выходе согласованного фильтра можно найти как

$$y_c(t) = a\int_0^{t} s_i(x)\, s_i(x + T - t)dt = aB_{Si}(T - t), \qquad (11)$$

где $B_{Si}(t)$ - корреляционная функция сигнала $s_i(t)$.

В момент окончания сигнала на входе фильтра t = T сигнал на выходе согласованного фильтра достигает максимального значения

$$y_c(T) = a\int_0^{t} z(t)s_i(t)\, dt, \qquad (12)$$

которое совпадает с точностью до множителя ***a*** с сигналом на выходе коррелятора в момент окончания сигнала. Это позволяет в схеме оптимального демодулятора (приемника) для точно известного ансамбля сигналов заменить коррелятор, состоящий из перемножителя и интегратора, согласованным фильтром.

Огибающая отклика согласованного фильтра, имеющего импульсную переходную характеристику g(t) на сигнал z(t), определяется следующим соотношением

$$r(t) = \sqrt{\left[\int_0^t z(t)\, g(t - x)dx\right]^2 + \left[\int_0^t z(t)\, g(t - x)dx\right]^2}\,. \qquad (13)$$

При заданных системе сигналов, канале и способе анализа принимаемой смеси **сигнал+шум** (по отдельным отсчетам или по континууму значений на тактовом интервале) оптимальный демодулятор (приемник) обеспечивает минимальную вероятность ошибки.

Вероятность ошибочного перехода $P(b'_j | b_i)$, т.е. вероятность регистрации символа b'_j при условии передачи символа b_i, определяется вероятностью невыполнения системы неравенств, задаваемых алгоритмом приема. Средняя вероятность ошибки для двоичной системы при произвольных значениях априорных вероятностей передачи символов может быть рассчитана следующим образом:

$$p_{ош} = \sum_{i=1}^{2} P(b_i)\, P(b'_j | b_i), \qquad j \neq i. \qquad (14)$$

Если априорные вероятности передачи символов одинаковы, то

$$p_{ош} = 0{,}5 \sum_{i=1}^{2} P(b'_j | b_i), \quad j \neq i. \qquad (15)$$

Для двоичного симметричного канала, в котором вероятность ошибочного перехода не зависит от того, какой символ передавался,

$$p_{ош} = P(b'_j | b_i), \quad j, i = 1, 2, \quad j \neq i\,. \qquad (16)$$

Из двоичных систем для неискажающего канала передачи с белым гауссовским шумом особый интерес представляет система с противоположными сигналами. Например, ФМ с изменением фазы на π. Однако ввиду реализационных трудностей на практике широко применяется двоичная система с ОФМ, в которой информация закладывается в разность фаз соседних посылок. Платой за устранение “обратной работы ” является (в условиях надежной передачи) удвоение вероятности ошибки, обусловленной шумом в канале:

$$p_{\text{ош ОФМ}} \approx 2p_{\text{ош ФМ}} \qquad (17)$$

Вероятность ошибочного приема многопозиционного символа при использовании системы сигналов с активной паузой в симметричном канале

$$p_{\text{ош},m} \approx (m-1)\, p_{\text{ош}}, \qquad (18)$$

где $p_{\text{ош}}$ - вероятность ошибочного приема двоичного символа в том же канале и при том же способе анализа смеси z(t).

3. Лабораторное задание

3.1. Какой символ зарегистрирует модем, оптимальный по критерию минимума средней вероятности ошибки, принимающий решение по одному отсчету смеси сигнал+шум на интервале T. По каналу без памяти передаются двоичные символы, причем символ b_1 определяется в месте приема сигналом $s_1(t)= 0$, а символ b_2 - сигналом $s_2(t) = a$. В канале действует гауссовский стационарный шум с дисперсией σ^2 (табл.1). Как изменится правило решения, если значение мгновенного отсчета увеличится или уменьшится в 2 раза.

Таблица 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(b_1)$	0,5	0,7	0,4	0,55	0,37	0,42	0,5	0,6	0,65	0,7
σ^2,Вт	10-4	5.10-5	10-6	5.10-6	10-5	2.10-4	8.10-5	7.10-6	2.10-6	3.10-5
a,B	10-3	10-2	5.10-3	6.10-4	10-3	2.10-3	4.10-4	5.10-2	10-2	10-3
z,B	8.10-3	4.10-3	5.10-3	10-2	10-3	2.10-3	3.10-3	6.10-3	3.10-3	4.10-3

3.2. Определить какой выигрыш в отношении сигнал-шум могут дать фильтры, согласованные с сигналами, заданными двоичными последовательностями(табл.2). Длительность элементарного символа τ,мс = 5мс.

Таблица 2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Посл	1010	10101	01010	0101	010101	101010	1010101	0101010	10111011	01000100

3.3.Определить среднюю вероятность ошибки для сигналов, канала и приемника, приведенных в табл. 1

3.4. Вычислить значения средней вероятности ошибки при оптимальном приеме сигналов ОФМ по методу сравнения полярностей (табл.3).

Таблица 3

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_0,Вт	1	0,5	2	0,7	0,6	1,3	1,7	2,5	1,5	1
k	10-2	3.10-2	4.10-3	10-3	5.10-3	10-2	2.10-2	10-3	5.10-3	9.10-3
Т,мс	10	5	6	8	15	20	10	4	2	12
N_0, Вт/Гц	10-7	5.10-7	10-6	4.10-8	9.10-8	10-7	5.10-7	10-6	5.10-6	10-8

3.5. Получить аналитическое выражение для правила приема в случае, когда априорные вероятности передаваемых кодовых символов bi (i=0,1) равны: P (b_1)=P(b_2)= ½.

4. Содержание отчета

4.1. Цель работы.

4.2. Структурная схема дискретного канала передачи информации.

4.3. Теоретические расчеты по определению алгоритма оптимального приема и помехоустойчивости оптимальных систем приема при точно известном сигнале.

6.6. Основные выводы по работе.

5. Контрольные вопросы

5.1 Что называется дискретным каналом передачи?

5.2. Какие существуют критерии оптимального приема?

5.3. Опишите свойства согласованного фильтра?

5.4 Средняя вероятность ошибки для двоичной системы при произвольных значениях априорных вероятностей передачи символов?

5.5. От каких параметров зависит вероятность ошибки для многопозиционных систем передачи сообщений?

6. Литература

6.1. А.Г. Зюко и др. Теория передачи сигналов. - М.: , Радио и связь, 1986

6.2..Кловский Д.Д., Шилкин В.А. Теория электрической связи. - М.: Радио и связь, 1990