Министерство транспорта России
Московский государственный технический
университет гражданской авиации

В.И.Котиков

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторным работам
по дисциплине
**“МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ
СИСТЕМ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ”**
для студентов 4 курсов
специальности «Прикладная математика»

Москва 2008

Лабораторная работа № 4

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФИЛЬТРОВ ПРИ ПРИЕМЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СООБЩЕНИЙ

1. Цель работы

Ознакомление студентов с различными способами построения оптимальных линейных фильтров, основанных на критерии минимального среднего риска, и проведение анализа и расчета различных характеристик таких устройств

2. Общие сведения

Линейную фильтрацию широко используют в системах передачи информации для обработки сигналов. Объясняется это прежде всего тем, что в отличие от нелинейной обработки сигналов, можно сравнительно просто осуществить реализацию линейных фильтров. С их помощью может осуществляться предварительная обработка сигналов в приемном устройстве как до процессов демодуляции, так и после них. С их помощью разделяются сигналы в многоканальных системах передачи информации.

При непосредственной передаче сообщения B(t) без модуляции принимаемый сигнал аддитивно складывается из переданного сигнала и помехи

$$Z(t) = S(t) + n(t), \qquad (1)$$

где $S(t) = кB(t)$, а к- коэффициент пропорциональности.

Если S(t) и n(t) - стационарные, взаимно-некоррелированные случайные процессы с энергетическими спектрами Gs(f) и Gn(f), то можно оценить качество передачи непрерывного сигнала S(t) (сообщения B(t)) средним квадратом ошибки

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{[S`(t+\tau) - S(t)]^2}, \qquad (2)$$

где S' $(t+\tau)$ - оценка сигнала в момент $t+\tau$; τ - время запаздывания сигнала в фильтре.

Передаточная функция оптимального фильтра Колмогорова-Винера, обеспечивающая минимум среднего квадрата ошибки $\varepsilon^2(t)_{min}$, может быть записана в следующем виде:

$$K(j2\pi f) = Gs(f) \exp(-j2\pi\tau) / [Gs(f) + Gn(f)], \qquad (3)$$

а средний квадрат ошибки такого фильтра, достигаемый при $\tau \to \infty$ будет равен

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Gs(f) \times Gn(f)}{Gs(f) + Gn(f)}\, df \qquad (4)$$

Реализуемая часть K(j2πf), определяемая выражением (3), может быть записана в следующем виде:

$$K(j2\pi f) = K_1(j2\pi f)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K^*{}_1(j2\pi\nu)\, Gs(0) \exp[j2\pi(0-f)]\, df\, d\nu \qquad (5)$$

Примем при этом, что $l/[Gs(f) + Gn(f)] = K_1(j2\pi f) x K^*{}_1(j2\pi f)$ - нереализуемая характеристика обеляющего фильтра; $K_1(p)$ - реализуемая передаточная функция, когда все нули и полюса лежат в левой полуплоскости; $K^*{}_1(p)$ - нереализуемая передаточная функция.

Характеристики реализуемого линейного фильтра, обеспечивающего $\varepsilon^2(t)_{min}$ даже при $\tau = 0$ и нестационарных процессах S(t) и n(t) с корреляционными функциями $Bs(t_1, t_2)$, $Bn(t_1,t_2)$, можно получить на основе стохастических дифференциальных уравнений.

Представим S(t) как первую компоненту многомерного марковского процесса с уравнением состояния

$$\overset{*}{X}(t) = \mathbf{f(t)}x(t) + \mathbf{g(t)}v(t), \qquad (6)$$

где v(t) - порождающий гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и единичной спектральной плотностью, матрицы **f(t)** , **g(t)** определяются корреляционной функцией процесса S(t).

Уравнение наблюдения можно записать в следующем виде

$$Z(t) = \mathbf{G(t)}x(t) + n(t). \qquad (7)$$

При G(t) = | 10…0…O | из (7) получим (1).

Фильтр Кальмана, обеспечивающий минимум среднеквадратичной ошибки между x(t) и ее оценкой x'(t) при подаче на вход сигнала (7), определяется уравнением

$$\overset{*}{x}'(t) = f(t)x(t) + k(t)\,[z(t) - c(t)\,x'(t)] / Gn , \qquad (8)$$

где <u>Gn - спектр</u>альная плотность шума n(t), который считается белым. Величина $k(t)= \overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{[x'(t) - x(t)]^2}$ определяется дифференциальным уравнением Риккати

$$k(t) = f(t)k^T(t) + k(t)f^T(t) - k(t)\,k^T(t)/ Gn + d(t)d^T(t) . \qquad (9)$$

Реализуемые схемы для оптимального приема, т.е. оценки, непрерывного сообщения b(t), содержащегося в модулированном сигнале **s[b(t),t],** принимаемого на фоне аддитивного шума n(t) по критерию минимума среднего квадрата ошибки:

$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{[b'(t) - b(t)]}^{\,2}$, можно получить на основе теории нелинейной фильтрации.

Пусть сообщение b(t) описывается уравнением состояния

$$B(t)= - \alpha B(t) +V(t), \qquad (10)$$

где V(t) - стационарный белый шум с характеристиками

$$\overline{V(t)} =0; \quad \overline{V(t_1)V(t_2)} = 0{,}5\, G_v\, \delta\, (t_2-t_1,). \qquad (11)$$

Коэффициент сноса $A_1\,(b,t) = - \alpha b(t)$, диффузии $A_2\,(b,t)=0{,}5\, Gv$.

Принимаемое колебание Z(t) на интервале (0,T) представляет собой сумму сигнала S(b,t) и стационарного белого шума n(t): Z(t) = S[b(t),t] + n(t). Для белого шума математическое ожидание и корреляционная функция оказываются равными

$$\overline{n(t)}=0; \qquad \overline{n(t_1)n(t_2)} = \delta(t_2- t_1)N_0/2 . \qquad (12)$$

Изменение во времени плотности вероятности w[b'(t),t] при данном z(t) подчиняется уравнению Колмогорова-Фоккера-Планка, которое при достаточно больших значениях отношения сигнал-шум и времени наблюдения приводит к следующим уравнениям для оптимальной оценки и дисперсии ошибки:

$$\overset{*}{b}'(t) = -\alpha b'(t) + k(t)\,\frac{dF(b'(t),t)}{db'}$$

$$\overset{*}{k}(t) = -2a\,k(t) + k^2(t)\,\frac{d^2F(b'(t),t)}{db'^2} + 0{,}5\,G_v \qquad (13)$$

где F(b'(t),t) = dlnw(z|b) / db - производная по времени к концу интервала обработки логарифма функции правдоподобия. При белом шуме в канале с точностью до постоянной

$$F[b'(t),t] = -\{z(t)-s[b'(t),t]\}^2/N_0 \qquad (14)$$

Если b(t) является неэнергетическим параметром для s[b'(t),t], как это имеет место при ФМ и ЧМ, то можно принять

$$F[b'(t),t] = 2z(t)s[b'(t),t]/N_0. \qquad (15)$$

Качество непрерывных систем передачи информации очень часто оценивают выигрышем модема в отношении сигнал-шум

$$g = \rho_{вых}/ \rho_{вх}, \qquad (16)$$

где $\rho_{вх}$ = (Рс/Рш) - отношение средних мощностей сигнала и шума на входе приемного устройства;

$$\rho_{вых}= b^2(t)/\int_0^{F_c} G_{вых}(f)df\ –$$

- отношение средних мощностей сигнала и шума на выходе приемного устройства.

Величину $\rho_{вых}$ удобно выразить через пик-фактор сообщения

$$П= |b(t)|_{мах} / \sqrt{b^2(t)}. \qquad (17)$$

При $|b(t)|_{мах}$ =1, что соответствует нормированному сообщению, величина $\rho_{вых}$ может быть рассчитана по следующей формуле:

$$\rho_{вых} = 1/(\Pi^2 \int_0^{Fc} Gвых(f)df). \qquad (18)$$

Очень часто качество непрерывных систем передачи информации оценивают обобщенным выигрышем

$$g' = \rho_{вых}\, Fc / \rho_{вх}\, F = g\, Fc / F = g/a, \qquad (19)$$

где Fc - полоса сообщения b(t); F - полоса сигнала s [b(t), t); a = F/Fc.

Обобщенный выигрыш систем с двойной модуляцией при условии, что на второй ступени используется прямая модуляция, может быть найден как произведение обобщенных выигрышей

$$g' = g'_{н} \times g'_{пн}, \qquad (20)$$

где $g'_{н}$ - обобщенный выигрыш при демодуляции несущего колебания; $g'_{пн}$ - обобщенный выигрыш при демодуляции поднесущего колебания.

2. Лабораторное задание

2.1. Определить, используя данные табл. 1, коэффициент передачи оптимального фильтра Колмогорова-Винера и найти энергетические спектры ошибки, полезного сигнала **и** шума на выходе фильтра, средние мощности трех этих компонент, а также параметр $\rho_{вых}$, если энергетические спектры сигнала и аддитивного шума определены на положительных частотах следующими соотношениями:

$$Gs(f) = \begin{cases} Af/F & \text{при } 0 \le f \le F \\ 0 & \text{при } f \ge F \end{cases}$$

$$Gn(f) = \begin{cases} A - Af/F & \text{при } 0 \le f \le F \\ 0 & \text{при } f \ge F. \end{cases}$$

При расчетах использовать формулы, приведенные в приложении 1.

Таблица 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0.25	0.35	0,45	0,55	0,8
F, кГц	10	20	30	40	5	6	2,5	3,5	4.5	5,5	12

2.2. Используя энергетические спектры сигнала и шума, приведенные в 2.1, найти средний квадрат ошибки и отношение средних мощностей сигнала и шума $\rho_{вых} = y^2_{s} / y^2_{п}$ на выходе идеального фильтра нижних частот с амплитудно-частотной характеристикой (табл. 2).

$$K(\omega) = \begin{cases} K_o & \text{при } 0 \le f \le F \\ 0 & \text{при } f < 0,\ f > F \end{cases}$$

Таблица 2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
K_0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,75	0,65	0,95	0,85	0,55

2.3. Сопоставить результаты расчетов, полученные в заданиях 2.1 и 2.2.

3. Содержание отчета

3.1. Цель работы.
3.2. Теоретические расчеты по определению основных характеристик оптимального и идеального фильтров.
3.3. Основные выводы по работе.

4. Контрольные вопросы

4.1. Что называется аддитивной помехой?
4.2. Какой фильтр называется оптимальным?
4.3. В чем достоинство оптимальной линейной фильтрации?
4.4. Что понимают под обобщенным выигрышем непрерывных систем?

6. Литература

6.1. **А.Г. Зюко** и др. Теория передачи сигналов. - М.: . Радио и связь, 1986
6.2. **Кловский Д.Д., Шилкин В.А.** Теория электрической связи. - М.: Радио и связь. 1990
6,3. **Котиков В.И.** Методическое пособие по выполнению лабораторных работ по курсу «Математическое обеспечение систем обработки данных». - М.: МГТУГА. 2008

Приложение 1.

1. Основные расчетные соотношения для выполнения задания по п. 2.1.

1.1. Коэффициент передачи оптимального фильтра

$$K(f) = \begin{cases} f/F & \text{при } 0<f<F \\ 0 & \text{при } f>F. \end{cases}$$

^

1.2. Энергетические спектры:

- для сигнала ошибки $G\varepsilon(f) = A(f/F - f^2/F^2)$;
- для полезного сигнала $Gys(f) = Af^3/F^3$;
- для шума $Gyn(f) = A(f^2/F^2 - f^3/F^3)$

1.3. Средняя мощность:

- сигнала ошибки $\overline{\varepsilon^2(t)} = AF/6$
- полезного сигнала $y^2_s = AF/4$
- шума $y^2_n = AF/12$

2. Основные расчетные соотношения для выполнения задания по п. 2.2.

2.1. Энергетический спектр сигнала ошибки

$$G\varepsilon(f) = (K_0 - 1)^2 Af/F + K_0^2 A(1 - f/F)$$

2.2. Дисперсия сигнала ошибки

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \int^{F} G\varepsilon(f)\, df = 0{,}5\, AF\, [(K_0 - 1)^2 + K^2_0]$$