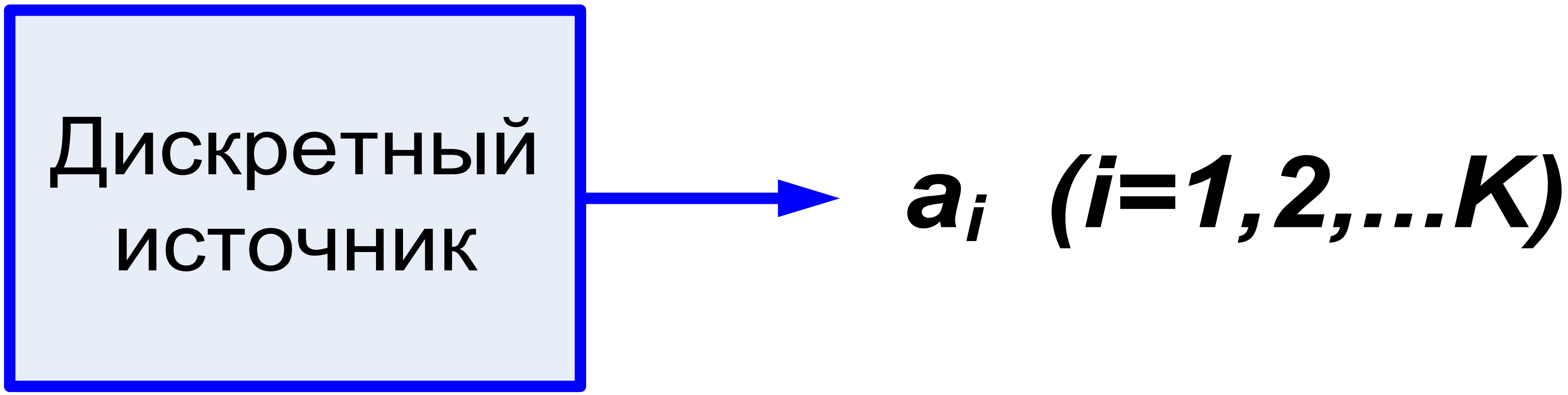
Лекции 2-3

Количественное определение информации в сообщении

Количественная мера информации в символе a_i дискретного источника



Две модели выбора дискретного символа источником:

1. **Выбор дискретного символа источником заранее известен (достоверное событие).**

В этом случае заключенная в нем информация количественно равна нулю.

2. **Выбор символа a_i источником производится с некоторой вероятностью $p(a_i)$.**

Количество информации $I(a_i)$, *заключенное в выбранном символе* a_i, *является функцией этой вероятности* $I(a_i) = I[p(a_i)]$

Количественная мера информации

1. Для поиска функциональной зависимости количественной меры информации **$I(a_i) = I[p(a_i)]$** будем считать, что источник вырабатывает пару следующих друг за другом символа (a_i, a_k), которые будем рассматривать уже как укрупненный символ, соответствующий новому алфавиту с объемом алфавита K^2.

Количественная мера информации

2. Вероятность такого совместного события, есть вероятность того, что источник произведет последовательный выбор символов a_i и a_k : $p(a_i, a_k)$. В такой паре событий уже будет содержаться другое количество информации

$$I(a_i, a_k) = I[p(a_i, a_k)]$$

Количественная мера информации

2. Количество информации , заключенное в паре символов a_i и a_k , должно удовлетворять условию **аддитивности,** т.е.равняется сумме количества информации, содержащейся в каждом символе a_i и a_k первоначального алфавита объемом К.

$$a_i \rightarrow I(a_i) = I[p(a_i)]$$

$$a_k \rightarrow I(a_k) = I[p(a_k / a_i)]$$

Количественная мера информации

3. С другой стороны, вероятность выбора источником пары последовательных символов a_i и a_k по правилу умножения

$$p(a_i, a_k) = p(a_i) \times p(a_k / a_i)$$

Требование аддитивности количества информации при операции укрупнения алфавита позволяет записать

$$I[p(a_i)] + I[p(a_k / a_i)] = I[p(a_i, a_k)] =$$
$$= I[p(a_i) \times p(a_k / a_i)]$$

Количественная мера информации

Введем следующие обозначения

$$p(a_i) = p$$

$$p(a_k / a_i) = q$$

Тогда для любых значений p и q

$0 < p \leq 1$ и $0 < q \leq 1$

$$I(p) + I(q) = I[p \times q]$$

Количественная мера информации

Продифференцируем обе части уравнения по ***p***

$$I^{'}(p) = qI^{'}[p \times q]$$

Умножая обе части на p и введя следующее обозначение pq=r имеем

$$pI^{'}(p) = rI^{'}[r]$$

$$0 \triangleleft p \leq 1 \text{и} \quad 0 \triangleleft \mathrm{r} \leq \mathrm{p}$$

Количественная мера информации

Последнее уравнение оказывается симметрично относительно p и q, что возможно лишь в случае, если обе части уравнения соответствуют некоторой постоянной величине γ

$$pI'(p) = \gamma$$

$$I'(p) = \frac{\gamma}{p}$$

$$I(p) = \gamma \ln p + C$$

Количественная мера информации

При γ**=1**

$$I(p) = -\ln p = \ln \frac{1}{p}$$

Чаще выбирают

$$\gamma = -\frac{1}{\ln 2}$$

и в этом случае получаем количестве нную меру информации по Шеннону

$$I(p) = -\frac{\ln p}{\ln 2} = -\log_2 p = \log_2 \frac{1}{p}$$

Случайные процессы и их числовые характеристики

Отличительной чертой случайных сигналов является тот факт, что их мгновенные значения нельзя предсказать заранее с абсолютной достоверностью. Однако ряд характеристик таких сигналов весьма точно описываются в вероятном смысле. Одной из важнейших характеристик случайной величины является вероятность ее появления. При этом в основе теории вероятностей лежит понятие полного множества случайных событий γ:

$$\gamma = \left\{ A_1, A_2 \ldots\ldots A_n \right\}$$

Основные аксиомы

1. Вероятность события p(Ai) всегда положительна и не может превышать значения 1.

$$0 \triangleleft p(A_i) \leq 1$$

2. Если Ai и Aj – несовместимые события

$$p(A_i + A_j) = p(A_i) + p(A_j)$$

3. Сумма всех событий, содержащихся в полном множестве γ, есть достоверное событие

$$p(A_1) + p(A_2) + \ldots\ldots + p(A_n) = 1$$

Функции распределения и числовые характеристики случайных процессов

Случайный процесс описывается двумя распределениями:

- Функцией плотности вероятностей $\omega(x,t_1)$

$$dP = \omega(x,t_1)dx$$

- Вероятностной характеристикой $F(x)=p(X\leq x_1)$

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(\infty) = 1$$

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta(x - x_i)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x)dx = 1$$

Моменты случайной величины

Результатом экспериментов над случайными величинами, как правило, служат средние значения тех или иных функций от этих величин.

Если $\varphi(x)$ – известная функция от *x* (исхода случайного испытания), то по определению, ее среднее значение оказывается равным

$$\overline{\varphi(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\omega(x)dx$$

Моменты случайной величины

$$m_n = \overline{x^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \omega(x)dx$$

$$m_1 = \overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x\omega(x)dx$$

$$m_2 = \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \omega(x)dx$$

$$\sigma^2 = \overline{(x-\overline{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})^2 \omega(x)dx = m_2 - m_1^2$$

Гауссовское распределение плотности вероятностей случайной величины

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left\{-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2}\right\}$$