Лекция 4

Характеристики дискретного источника и дискретного канала без шумов

Энтропия и производительность дискретного источника

При построении каналов передачи сообщений основное значение имеет не количество информации, содержащееся в некотором конкретном сообщении (символе), а средняя величина количества информации, создаваемой источником сообщений.

Рассмотрим дискретный источник, в котором вероятность выбора элементарного символа не зависит от того , какие символы выбирались ранее (источник без памяти). Для такого источника, имеющего алфавит А (a_1, a_2, … a_k) объемом K, существует постоянная вероятность $p(a_i)$ выбора a_i символа. Причем сумма вероятностей выбора всех символов

$$\sum_{i=1}^{K} p(a_i) = 1$$

$$H(A) = \overline{I[p(a_i)]} = -\sum_{i=1}^{K} p(a_i) \log_2 p(a_i)$$

$$H_{\max} = -\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{K} \log \frac{1}{K} = \log K$$

Энтропия и производительность дискретного источника

Энтропия характеризует заданное распределение вероятностей с точки зрения степени неопределенности выбора того или иного дискретного символа. Энтропия равна нулю тогда и только тогда, когда одна из вероятностей выдачи символа дискретным источником сообщений будет равна 1, а все другие равны нулю.

$$\chi = 1 - \frac{H(A)}{H(A)_{\max}} = 1 - \frac{H(A)}{\log K}$$

$$H' = v_{\text{и}} H(A) = \frac{H(A)}{T_{\text{ср}}(A)}$$

Избыточность источника зависит как от протяженности статистических связей между последовательно выбираемыми символами (память источника), так и от степени вероятности появле-ния каждого символа на выходе источника

Пропускная способность дискретного канала без шумов

Если в дискретном канале алфавиты кодовых символов на входе b_i и на выходе b'_j одинаковы, а вероятности переходов

$$p\left({b'_j}/{b_i}\right) = \begin{cases} 1 npu\, i = j \\ 0 npu\, i \neq j \end{cases}$$

т.е. символы на входе и выходе совпадают, то такой канал называют дискретным каналом без шумов.

Пропускная способность дискретного канала без помех

Пропускная способность канала без помех зависит от скорости передачи кодовых символов *V и* основания кода

$$C = \upsilon \log m$$

Теорема о скорости передачи информации

Если источник сообщения имеет энтропию H(A) (двоичных единиц на символ), а канал обладает пропускной способностью C (двоичных единиц в сек), то можно закодировать сообщение источника таким образом, чтобы передавать его по каналу со средней скоростью

$$\upsilon_c = \frac{C}{H(A)} - \varepsilon$$

- (символов в сек.)

$$C \triangleright H^{/}(A)$$

Пример 1

Источник без памяти с объемом алфавита К выдает дискретные символы с одинаковыми вероятностями

$$p = 1/K$$

$$H = H_{\max} = \log_2 K$$

Если при этом предположить, что m=K , то кодирование сводится к установлению любым образом взаимно однозначного соответствия каждого элемента сообщения ak символу кода bi

$$\upsilon = \frac{C}{\log_2 m} = \frac{C}{\log_2 K} = \frac{C}{H} = \upsilon_c$$

$$\varepsilon = 0$$

Пример 2

Источник без памяти с равной вероятностью выбора символов:1,2, ..9 и с объемом алфавита равного К.

Объем алфавита К не является целой степенью основания кода m=2 (0,1) и позволяет передавать ν кодовых символов в сек.

$$H = H_{\max} = \log_2 K = \log 10 \approx 3,332$$

$$C = \upsilon \log_2 m = \upsilon \log_2 2 = \upsilon$$

$$\frac{C}{H} \cong \frac{\upsilon}{3,332}$$

Теорема Шеннона

В дискретном канале без помех с пропускной способностью С можно, применяя равномерный код, передавать сообщения любого источника, имеющего объем алфавита К, со скоростью, сколь угодно близкой к средней скорости

$$\boxed{\upsilon_c = \frac{C}{\log K}}$$ - букв в сек.

Дискретный канал с шумами. Структурная модель канала

Если на вход дискретного канала с шумами поступают символы $b_i (i = 1,2...m)$,а с выхода канала снимаются символы $b_j^/ (j = 1.2...m^/)$,то условные вероятности переходов $p(b_j^/ / b_i)$, а также апостериорные вероятности $p\left(b_i / b_j^/ \right)$ удовлетворяют условиям

$$0 \triangleleft p\left(b_j^/ / b_i \right) \triangleleft 1$$

$$0 \triangleleft p\left(b_i / b_j^/ \right) \triangleleft 1$$

то это означает, что при зафиксированном символе $b_j^/$ на выходе канала нельзя с полной уверенностью утверждать, какой символ b_i передавался.

Среднее количество информации, теряемой при передаче произвольного символа b по каналу без памяти

$$\overline{I\left(b/b^{/}\right)} = H\left(b/b^{/}\right) = -\sum_{j=1}^{m^{/}} \sum_{i=1}^{m} p\left(b_i/b_j^{/}\right) \log \frac{p\left(b_i/b_j^{/}\right)}{p(b_j^{/})}$$

Данная величина называется ненадежностью канала и показывает степень неопределенности последовательности входных символов b при условии что принята последовательность $b^{/}$.

Средним количеством информации на один символ, переданный по дискретному каналу с помехами, называется разность между количеством информации поступающей на вход канала $\overline{I(b)}$ и количеством информации, теряемой в канале $\overline{I\left(b/b'\right)}$.

Для канала без памяти эта величина равна

$$\overline{I(b,b')} = \overline{I(b)} - \overline{I(b/b')} = H(b) - H(b/b') =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m'} \sum_{i=1}^{m} p(b_i, b'_j) \log \frac{p(b_i, b'_j)}{p(b_i)\, p(b'_j)}$$

С другой стороны это есть среднее количество информации содержащееся в выходной последовательности **b'** относительно входной последовательности **b**.

Так как условная энтропия никогда не превосходит безусловную

$$0 \le H(b/b^{/}) \le H(b)$$

то можно записать

$$0 \le \overline{I(b,b^{/})} \le \overline{I(b)}$$

Среднее количество информации передаваемой по каналу имеет два граничных условия

$$\overline{I(b,b^{/})} = 0$$

$$\overline{I(b,b^{/})} = \overline{I(b)}$$

Количество информации передаваемой по каналу с помехами можно записать несколько в иной форме

$$\overline{I(b,b^{/})} = \overline{I(b^{/},b)} = H(b^{/}) - H(b^{/}/b)$$

где $H(b^{/})$ – определяет количество информации, содержащейся в выходных символах канала передачи.

Величина $H(b^{/}/b) = \overline{I(b^{/}/b)}$ определяет кол-во информации, содержащейся в выходной последовательности символов $b^{/}$, при известной последовательности входных символов b.

Энтропия шума в канале определяется условной энтропией

$$H(b^{/}/b) = -\sum_{j=1}^{m^{/}}\sum_{i=1}^{m} p(b_j^{/}/b_i)\log p(b_j^{/}/b_i)$$

Если на вход дискретного канала поступают символы со средней скоростью υ (симв./сек.), то можно определить среднюю скорость передачи информации по дискретному каналу с шумом:

$$I^{/}(b,b^{/}) = \upsilon\overline{I(b,b^{/})} = H^{/}(b) - H^{/}(b/b^{/}) = H^{/}(b^{/}) - H^{/}(b^{/}/b)$$

Структурная модель дискретного канала с шумом