Лекция 12

Прием непрерывных сообщений. Оптимальная оценка отдельных параметров сигналов

Оптимальная оценка отдельных параметров сигналов

В случае, когда оценивают один параметр сигнала заданной формы (частота, амплитуда, фаза и т.д.), то задачу оценки сообщения решают следующим образом. Принятое колебание Z(t) представляет аддитивную смесь на интервале (0,T)

$$Z(t) = S(t,\lambda) + n(t)$$

где λ - неизвестный параметр сигнала.

При этом считается, что он остается постоянным на интервале наблюдения (0,T) и известна априорная $\omega(\lambda)$.

Оптимальная оценка отдельных параметров сигналов

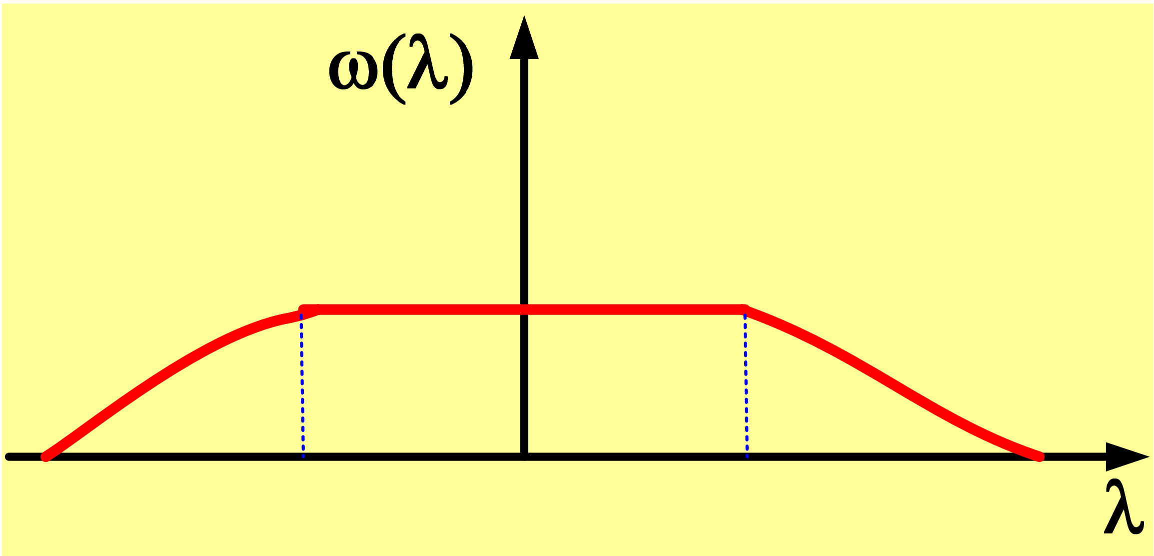
Нам следует определить оператор системы, гарантирующий получение наилучшей оценки параметра λ' и рассчитать точность этой оценки.

В силу случайного характера параметра λ точное измерение его невозможно и можно в этом случае указать только его приближенную оценку λ' . Вся информация о переданном параметре λ сообщения после приема сигнала Z(t) будет содержаться в апостериорном распределении $\omega(\lambda/Z)$, которое связано с функцией правдоподобия $\omega(Z/\lambda)$

$$\omega(\lambda / Z) = \frac{\omega(\lambda)\omega(Z / \lambda)}{\omega(Z)}$$

Оптимальная оценка отдельных параметров сигналов

При больших отношениях сигнал-шум функция $\omega(\lambda/Z)$ имеет максимум в окрестностях истинного значения параметра λ. В этом случае в качестве оценки параметра λ целесообразно взять то значение $\lambda^{/}$, которое обращает в максимум функцию $\omega(\lambda/Z)$



Оптимальная оценка отдельных параметров сигналов

При этом координата максимума функции $\omega(\lambda/Z)$ совпадает с координатой максимума функции правдоподобия. Оценку $\lambda^{/}$ параметра сигнала λ уже можно определить из следующего условия

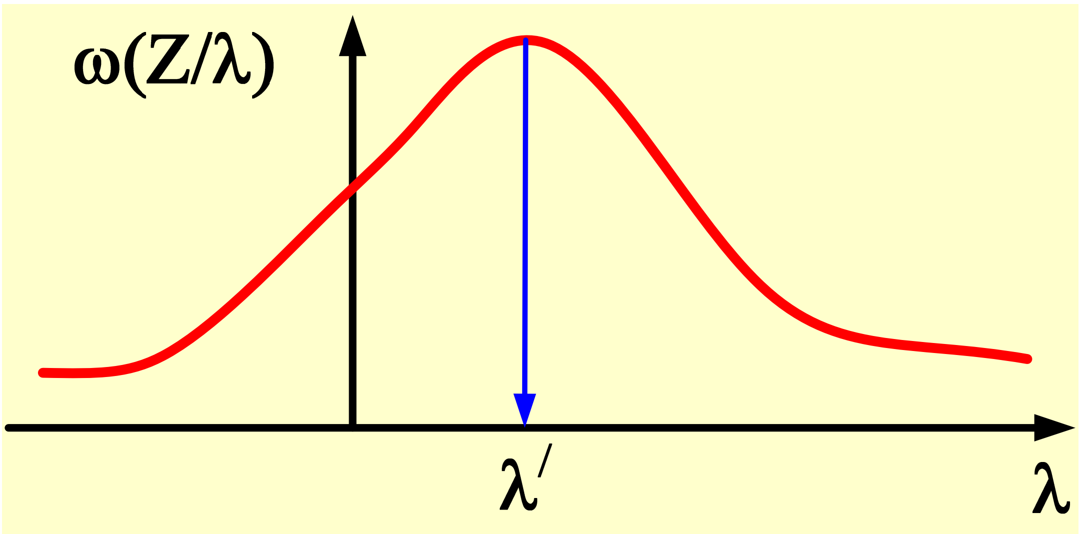
$$\frac{d\omega(Z/\lambda)}{d(\lambda)} = 0$$

Оценку параметра, определяемую по данному критерию, принято называть максимально правдоподобной.

Максимально правдоподобную оценку $\lambda^{/}$ параметра сигнала можно определить из следующего условия

$$\frac{d \ln \omega(Z / \lambda)}{d(\lambda)} = 0$$

Оценку параметра определяется тем корнем уравнения, который соответствует максимуму функции правдоподобия.



2. Оценка параметра сигнала по критерию минимума среднеквадратичной ошибки

$$\overline{\varepsilon^2(\lambda^/)} = \int_{\lambda} \left(\lambda - \lambda^/\right)^2 \omega(\lambda / Z) d\lambda$$

В этом случае оптимальная оценка $\lambda^/$ находится из условия

$$\frac{d\,\overline{\varepsilon^2(\lambda^/)}}{d\lambda^/} = 0$$

После дифференцирования по λ' и, учитывая, что

$$\int_{\lambda} \omega(\lambda / Z) d\lambda = 1$$

получаем

$$2\lambda' - 2\int_{\lambda} \lambda \omega(\lambda / Z) d\lambda = 0$$

$$\lambda' = \int_{\lambda} \lambda \omega(\lambda / Z) d\lambda$$

Вывод: Оптимальной оценкой по критерию минимума среднеквадратичной ошибки является математическое ожидание апостериорного распределения $\omega(\lambda/Z)$.

Байесовская оценка параметра сигнала

Если минимизируется математическое ожидание некоторой функции потерь L(λ-λ')

$$\overline{L(\lambda-\lambda')}=\int\limits_{\lambda} L(\lambda-\lambda')\omega(\lambda / Z)d\lambda,$$

то такую оценку принято называть байесовской оценкой, а указанный критерий - критерием среднего риска, который является более общим, чем критерий минимума среднеквадратичной ошибки.

Вывод

Если $\omega(\lambda/Z)$ оказывается симметричной относительно $\lambda'_{опт}$, что соответствует большому отношению сигнал-шум, то критерии максимума апостериорной плотности вероятностей или мах функции правдоподобия совпадают с критерием минимума среднеквадратичной ошибки

Определение апостериорной плотности вероятностей $\omega(\lambda/Z)$

Исходные данные:

1. Параметр λ сигнала оказывается постоянным на интервале наблюдения.
2. Принятый сигнал Z(t) представляет собой аддитивную смесь полезного сигнала $S(t,\lambda)$ и нормального белого шума n(t) со спектральной плотностью $N_0/2$.
3. Вектор принятого сигнала Z(t) является случайным гауссовским вектором, среднее значение которого равно $S(t,\lambda)$, а дисперсия совпадает с дисперсией шума .

$$\omega(Z/\lambda) = k\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [Z(t) - S(t,\lambda)]^2 dt\right\}$$

$$\omega(\lambda/Z) = k_1\omega(\lambda)\omega(Z/\lambda) = k_1\omega(\lambda)\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [Z(t) - S(t,\lambda)]^2 dt\right\}$$

$\int_\lambda \omega(\lambda/Z)d\lambda = 1$ - условие определения коэффициента k_1

$$\omega(\lambda/Z) = k_1\omega(\lambda)\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T Z^2(t)dt\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T S^2(t,\lambda)dt\right\}\times\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T Z(t)S(t,\lambda)dt\right\}$$

В случае, когда параметр λ оказывается не энергетичен, мы получаем следующее уравнение для расчета апостериорной плотности вероятностей

$$\omega(\lambda / Z) = k_2 \omega(\lambda) \exp\left[g(\lambda)\right]$$

$$g(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T Z(t) S(t, \lambda) dt$$

Выводы.

1. При известной априорной плотности вероятностей $\omega(\lambda)$ определение апостериорной плотности вероятностей сводится к вычислению функции $g(\lambda)$, т.е. к вычислению с точностью до постоянной скалярного произведения принятого сигнала $Z(t)$ и передаваемого сигнала $S(t,\lambda)$. Указанную функцию принято называть корреляционным интегралом.
2. Оптимальный приемник максимального правдоподобия воспроизводит тот параметр сигнала λ, несущего информацию, для которого функция $g(\lambda)$ максимальна.