Лекция 10

Потенциальная помехоустойчивость системы при точно известном ансамбле сигналов

Рассмотрим потенциальную помехоустойчивость дискретной системы при следующих исходных данных:

- по каналу передаются двоичные символы (m=2). В этом случае на приемном конце системы точно известны ожидаемые сигналы $S_1(t)$ и $S_0(t)$;
- в системе действует аддитивный белый шум;
- априорные вероятности передаваемых сигналов равны p(1)=p(0)=0,5;
- принятый сигнал Z(t) носит случайный характер.

Алгоритм оптимального приема:

$$\int_0^T Z(t)\left[S_1(t) - S_0(t)\right]dt \triangleright \frac{E_1 - E_0}{2}$$

$$E_i = \int_0^T S_i^2(t)dt --- i = 0,1$$

При выполнении неравенства система принимает решение, что передавался символ «1», а в противном случае – «0». Если действительно передавался сигнал $S_1(t)$, то принятый сигнал Z(t) при аддитивной помехе: $Z(t)=S_i(t)+n(t)$. Вероятность ошибки p(0/1) определяется вероятностью того, то неравенство будет не выполнено

$$\int_0^T S_1(t)\left[S_1(t) - S_0(t)\right]dt + \int_0^T n(t)\left[S_1(t) - S_0(t)\right]dt \triangleleft \frac{1}{2}\int_0^T \left[S_1^2(t) - S_0^2(t)\right]dt$$

$$\int_0^T n(t)\left[S_1(t)-S_0(t)\right]dt \lhd -0{,}5\int_0^T \left[S_1(t)-S_0(t)\right]^2 dt$$

Аналогичное соотношение получим, если передается «0». Следовательно, в обоих случаях вероятность ошибки оказывается равной: p(0/1)=p(1/0)=p. В этом случае сформированный модемом двоичный дискретный канал окажется симметричным

$$\xi = \int_0^T n(t)\left[S_1(t)-S_0(t)\right]dt$$

$$E_э = \int_0^T \left[S_1(t)-S_0(t)\right]^2 dt$$

$$\xi \lhd -0{,}5 E_э$$

$$\overline{\xi} = \int_0^T \overline{n(t)}\left[S_1(t) - S_0(t)\right]dt = 0$$

$$D(\xi) = \overline{\xi}^2 = \int_0^T \int_0^T \overline{n(t_1)n(t_2)} S_\Delta(t_1) S_\Delta(t_2) dt_1 dt_2$$

Для функции корреляции белого шума

$$\overline{n(t_1)n(t_2)} = \frac{N_0}{2}\delta(t_2 - t_1)$$

и, учитывая фильтрующие свойства δ-функции, получим

$$D(\xi) = \frac{N_0}{2}\int_0^T \int_0^T \delta(t_2 - t_1) S_\Delta(t_1) S_\Delta(t_2) dt_1 dt_2 = \frac{N_0 E_э}{2}$$

Вероятность ошибки для дискретного двоичного канала с аддитивным белым шумом

$$p = \int_{-\infty}^{-0,5E_э} \omega(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{-0,5E_э} \frac{1}{\sqrt{2\pi D(\xi)}} \exp(-\frac{\xi^2}{2D(\xi)})d\xi =$$

$$= \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{\eta^2}{2})d\eta$$

$$\alpha = \frac{0,5E_э}{\sqrt{D(\xi)}} = \sqrt{\frac{E_э}{2N_0}}$$

$$\eta = \frac{\xi}{\sqrt{D(\xi)}}$$

Функция

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta - \text{табулированная функия Крампа}$$

Учитывая, что эта функция при Ф(∞)=1, то для вероятности ошибки можно записать

$$p = 0{,}5\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{\mathrm{E}_э}{2\mathrm{N}_0}}\right)\right]$$

Вывод. Потенциальная помехоустойчивость двоичной системы при заданной помехе в канале полностью определяется эквивалентной энергией сигнала Еэ:

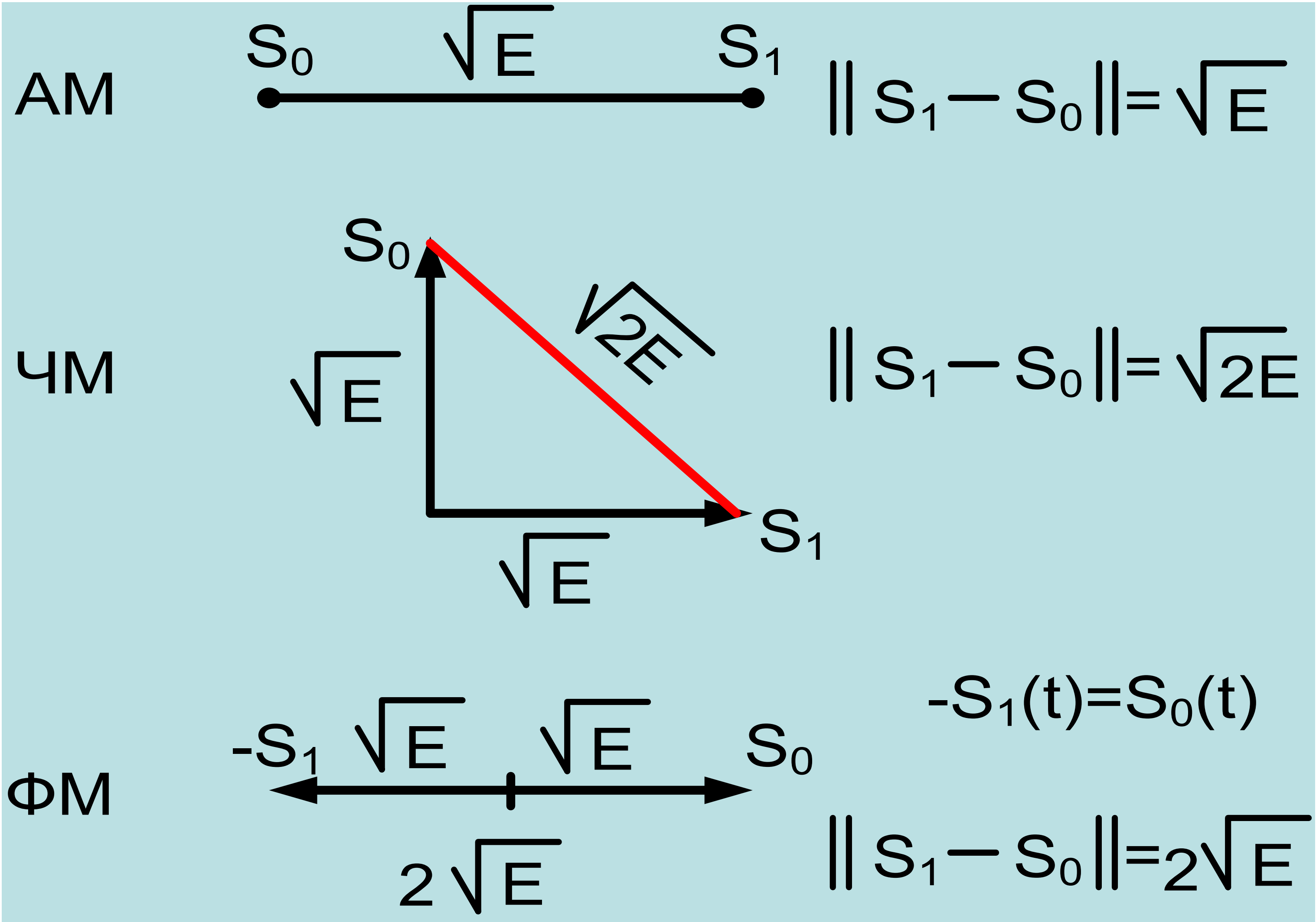
$$\mathrm{E}_э = \int_0^T \left(S_1(t) - S_0(t)\right)^2 dt$$

Выводы.

Помехоустойчивость тем выше, чем больше эквивалентная энергия сигналов, независимо от формы используемых сигналов.

Эквивалентная энергия Еэ двух сигналов равна квадрату расстояния между сигнальными точками в гильбертовом пространстве.

В двумерном пространстве точки сигналов для двоичной системы и трех видов модуляции имеют следующий вид:



Соотношение для эквивалентной энергии

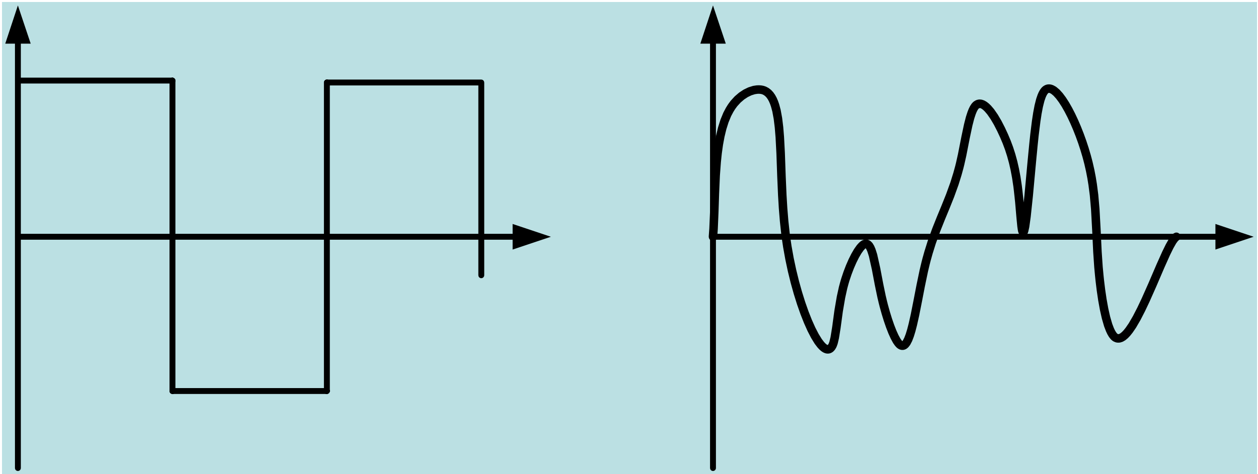
$$\int_0^T \left[S_1(t) - S_0(t)\right]^2 dt = E_э$$

позволяет осуществлять оптимальный выбор сигналов $S_0(t)$ и $S_1(t)$, обеспечивающих максимально возможную помехоустойчивость при заданной энергии сигналов E.

$$E_э = \int_0^T \left[S_1(t) - S_0(t)\right]^2 dt = 2E_1 + 2E_0 - \int_0^T \left[S_1(t) + S_0(t)\right]^2 dt$$

$$E_1 = \int_0^T S_1^2(t)dt \le E \ldots \text{и} \ldots E_0 = \int_0^T S_0^2(t)dt \le E$$

В двоичной системе с постоянными параметрами и аддитивной флюктационной помехой оптимальной оказывается система, в которой используются сигналы с противоположными знаками (S_1=-S_0).



$$\mathrm{E}_{э} = 4E$$

$$p = 0{,}5\left[1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{\mathrm{E}_{э}}{2\mathrm{N}_0}}\right)\right] = 0{,}5\left[1 - \Phi\left(\sqrt{2\mathrm{h}}\right)\right] \qquad h = \sqrt{\frac{E}{N_0}}$$

Вероятность ошибки при ЧМ и АМ

В случае частотной модуляции (ЧМ)

$$E_э = 2E$$

$$\mathrm{p} = 0{,}5\left[1 - \Phi(\mathrm{h})\right]$$

В случае амплитудной модуляции (АМ)

$$E_э = E$$

$$\mathrm{p} = 0{,}5\left[1 - \Phi\left(\frac{\mathrm{h}}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$p_{ОФМ} = 2p_{ФМ}\left(1 - p_{ФМ}\right) \approx 2p_{ФМ} = \left[1 - \Phi\left(\sqrt{2}\mathrm{h}\right)\right]$$

Реализация алгоритма оптимального приема на основе согласованных фильтров

При m=2 алгоритм оптимального приема сводится к проверке неравенства

$$\int_0^T Z(t)S_1(t) - 0{,}5E_1 \triangleright \int_0^T Z(t)S_0(t)dt - 0{,}5E_0$$

Скалярное произведение (Z,S_i) можно вычислить как активными, так и пассивными линейными фильтрами

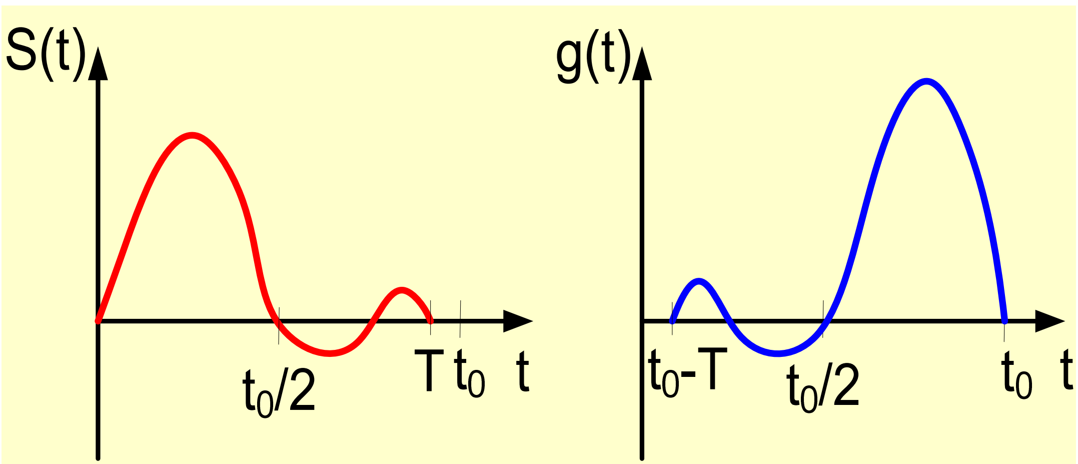
$$y(t) = \int_0^T Z(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$где - \mathrm{g}(\tau)$ - импульсная реакция фильтра

При этом
$$g(\tau) = S_i(t-\tau)$$
$$y(\mathrm{T}) = \int_0^{\mathrm{T}} Z(\mathrm{t}-\tau)\mathrm{S_i}(t-\tau)d\tau = \int_0^T Z(t)S_i(t)dt = (Z, S_i)$$

В более общем случае фильтром, согласованным с сигналом Si(t), называется линейный фильтр с постоянными параметрами и импульсной реакцией

$$g(t) = aS(t_0 - t)$$



$$g(t) = 0 - при - \mathrm{t} \lhd 0$$
$$\mathrm{t}_0 \geq T - или - (\mathrm{t}_0 - t) \rhd T$$
$$S(t_0 - t) = 0 - при - \mathrm{t} \lhd 0$$

Передаточная функция согласованного фильтра с импульсной реакцией

$$g(t) = aS(t_0 - t)$$

определяется преобразованием Фурье

$$K(j\omega)_{C\Phi} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} S(t_0 - t) e^{-j\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) e^{-j\omega(t_0 - \tau)} d\tau = aS^*(\omega) e^{-j\omega t_0}$$