Лекция 7

Эпсилон-энтропия H_ε и основные характеристики непрерывного канала

$H\varepsilon$ -(ε-энтропия) и ее характеристика

Будем рассматривать одно передаваемое сообщение u(t) множество эквивалентных ему принятых сообщений z(t). Количество взаимной информации *I(u,z)* зависит как от дифференциальной энтропии h(u), так и от критерия эквивалентности, определяющего условную плотность вероятности ω(z/u), а следовательно и условную энтропию h(u/z)

$$\overline{I(u,z)} = h(u) - h(u/z)$$

Hε -(ε-энтропия) и ее характеристика

Минимальное количество информации содержащейся в сообщении z(t) относительно u(t), при котором они еще оказываются эквивалентными, принято называть эпсилон-энтропией - Hε(u)

$$H_{\varepsilon}(u) = \min_{\omega(z/u)} \overline{I(u,z)} = h(u) - \max h(u/z)$$

$$\text{при } \overline{\varepsilon^2(t)} \le \varepsilon_0^2$$

Эпсилон-энтропия гауссовского источника

Рассмотрим случай, когда источник непрерывного сигнала оказывается гауссовским, т.е. u(t) представляет собой стационарный гауссовский процесс с заданной мощностью Pc, а критерием эквивалентности является средне-квадратичное отклонение

$$\sqrt{\overline{\varepsilon^2(t)}} \leq \varepsilon_0$$

$$\text{или } \overline{\varepsilon^2(t)} \leq \varepsilon_0^2$$

$$u(t) = z(t) - \varepsilon(t)$$

$$\max h(u/z) = \max h(\varepsilon)$$

Если шум воспроизведения имеет фиксированную дисперсию $\sigma_\varepsilon^2 = \varepsilon^2(t)$,то дифференциальная энтропия h(ε) имеет максимум в случае нормального распределения

$$\max h(\varepsilon) = \log\sqrt{2\pi e \sigma_\varepsilon^2}$$

При заданной дисперсии сообщения источника $\sigma_u^2 = P_c$ дифференциальная энтропия гауссовского источника оказывается равной

$$h(u) = \log\sqrt{2\pi e \sigma_u^2}$$

$$\mathrm{H}_\varepsilon(u) = \log\sqrt{2\pi e \sigma_u^2} - \log\sqrt{2\pi e \sigma_\varepsilon^2} = \frac{1}{2}\log\frac{P_c}{P\varepsilon}$$

Производительность непрерывного источника

Производительность источника непрерывных сообщений можно определить как количество информации, которое необходимо передать в ед. времени, чтобы восстановить сообщение при заданном критерии эквивалентности. Если источник выдает независимые отсчеты сообщения дискретно во времени со средней скоростью υ, то его эпсилон- производительность

$$H_{\varepsilon}^{/}(u) = \upsilon\left[h(u) - \log\sqrt{2\pi e\sigma_{\varepsilon}^{2}}\right]$$

Эпсилон-производительность называют также скоростью создания информации при заданном критерии верности.

$$\Delta t = \frac{1}{2F_c} = \frac{1}{\upsilon_u}$$

$$H_\varepsilon^{/}(u) = 2F_c H_\varepsilon(u) = F_c \log\frac{P_c}{P_\varepsilon} = F_c \log\rho_0$$

$$V = TH_\varepsilon^{/}(u) = TF_c \log\frac{P_c}{P_\varepsilon} = TF_c \log\rho_0$$

$$\chi = 1 - \frac{H_\varepsilon(u)}{H_\varepsilon(u)_{\max}}$$

Теорема об оптимальном кодировании для непрерывного канала

Если при заданном критерии эквивалентности сообщений эпсилон-производительность непрерывного источника оказывается меньше пропускной способности канала $H'_{\varepsilon}(u) \lhd C$

то существуют такие способы кодирования и декодирования, при которых неточность $\overline{\varepsilon^2(t)}$ воспроизведения будет сколь угодна близка к ε_0^2. При $H'_{\varepsilon}(u) \rhd C$ таких способов

кодирования не существует.

Пропускная способность непрерывного канала

Под пропускной способностью C непрерывного канала с заданными шумами в канале и скоростью передачи υ_k будем понимать предельное количества передаваемой информации в ед. времени, взятое по всевозможным источникам входного сигнала.

Пусть канал имеет ограниченную полосу пропускания шириной F. Тогда сигналы на его входе u(t) и выходе z(t) в соответствии с теоремой Котельникова будут определяться своими дискретными отсчетами, взятыми через интервал времени

$$\Delta t = \frac{1}{2F}$$

В этом случае количество информации, переданное по каналу за время Т, будет равно сумме количества информации, переданных за каждый такой отсчет.

Пропускная способность непрерывного канала на один такой отсчет

$$C_{\text{отсчет}} = \max_{\omega(u)} \overline{I(u,z)} = \max_{\omega(u)} \left[h(z) - h(z/u) \right] \text{бит/отсчет}$$

Рассчитаем пропускную способность непрерывного канала с аддитивным белым шумом в канале и имеющем:

- полосу пропускания F ;
- мощность сигнала (дисперсия) не более Рс;
- мощность (дисперсия) шума в полосе частот F: $Pш=N_0F$

Z=U+N

Так как N имеет нормальное распределение с нулевым значением математического ожидания, то ω(z/u) при фиксированном значении u будет также иметь нормальное распределение с дисперсией равной Рш.

Дифференциальная энтропия h(z/u) при нормальном распределении ω(z/u) не зависит от мат. ожидания и в этом случае равна

$$h(N) = h(z/u) = \log\sqrt{2\pi e P_{ш}}$$

$$\mathrm{D(Z)} = \mathrm{D(U)} + \mathrm{D(N)} = \mathrm{P_c} + P_{ш}$$

При нормальном одномерном распределении случайной величины U на входе распределение случайной величины Z на выходе будет нормальным, обеспечивая максимум дифференциальной энтропии

$$\max_{\omega(u)} h(z) = \log\sqrt{2\pi e(P_c + P_{ш})}$$

В этом случае пропускная способность непрерывного канала, приходящаяся на один отсчет, будет равна

$$C_{отсчет} = \log\sqrt{2\pi e(P_c + P_ш)} - \log\sqrt{2\pi e P_ш} = \frac{1}{2}\log\frac{P_c + P_ш}{P_ш}$$

Пропускная способность непрерывного канала при равномерной спектральной плотности сигнала в полосе частот F и максимальный объем информации переданной за интервал времени Тк

$$C = 2FC_{\text{отсч.}} = F\log(1 + P_c / P_ш)$$

$$V_k = T_k C$$

Теорема об оптимальном кодировании в непрерывном канале

Если эпсилон-производительность $H_{\varepsilon}{}^{/}(A)$ будет меньше пропускной способности канала С, то существуют такие способы кодирования и декодирования, при которых с вероятностью близкой к единице, средняя мощность шума воспроизведения будет меньше заданной величины $P_{ш0}$.

Прием дискретных сообщений. Прием сигналов как статистическая задача

Вопрос о приеме дискретных сообщений, который будем решать в виде статистической задачи, рассмотрим применительно к устройству преобразования сигналов, т.е. модему или его демодулятору. На его вход поступает аддитивная смесь сигнал + помеха

$$z(t) = s(t, b_i) + n(t)$$

Решающая схема

Каждый демодулятор описывается законом, по которому принятый непрерывный сигнал преобразуется в кодовый символ. Этот закон принято называть правилом решения, а реализующая его схема – решающей схемой.

Линейная обработка принятых сигналов

Линейная обработка сигнала описывается операцией интегрирования с весом $\varphi(t,\tau)$ В течение тактового интервала [0,T):

$$y[T] = \int_0^T z(\tau)\varphi(t,\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^T s(\tau,b_i)\varphi(t,\tau)d\tau + \int_0^T n(\tau)\varphi(t,\tau)d\tau$$

Линейная обработка сигналов

В простейшем случае $\varphi(t,\tau)=\delta(\tau-t_0)$ при $0\le t_0\le T$

$$y(T)=z(t_0)$$

В случае многократного отсчета $\varphi(t,\tau)=\sum_{k=1}^{n}\delta(\tau-t_k)$

при $0\le t_k\le T$

$$y(T)=\sum_{k=1}^{n}z(t_k)$$

В случае, когда сигнал $s(t,b_i)=a_i$ выбор $\varphi(t,\tau)=1$

$$y(T)=\int_0^T z(\tau)d\tau$$

-интегральный прием

В случае линейной обработки сигналов с помощью фильтров

$$\varphi(\mathrm{t},\tau)=\mathrm{g}(\mathrm{t}-\tau)$$

- импульсная реакция фильтра

Обработка сигналов на основе статистической теории

В этом случае удается отыскать наилучшую операцию обработки принятого сигнала z(t), обеспечивающую максимальное качество оценки $b_i^/$.

Если принять, что свойства источника сообщения и кодера известны, а также модулятор и математическая модель непрерывного канала, то в этом случае нам требуется определить, каким должно быть правило решения демодулятора, обеспечивающего оптимальное качество приема. В такой постановке качество оценивается вероятностью правильного приема символа.

Максимум этой вероятности при заданном виде модуляции принято называть потенциальной помехоустойчивостью, а сам демодулятор – идеальным приемником.