**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РФ**
**ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЛУЖБА**
**ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**
**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**
**ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**

---

**Кафедра прикладной математики**
В.Л. Кузнецов, Т.В. Лоссиевская

# ПРЕДЕЛЫ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ

Учебно-методическое пособие
и типовые задания
по курсу математического анализа

Часть I

*для студентов I курса*
*специальности 073000*
*дневного обучения*

**Москва-2002**

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. А.В. Самохин
Кузнецов В.Л., Лоссиевская Т.В.

Пределы числовых последовательностей и функций: Учебно-методическое пособие и типовые задания по курсу математического анализа. – М: МГТУ ГА, 2002. – 36 с.

Пособие составлено в соответствии с программой по курсу математического анализа для студентов I курса специальности 073000 дневного обучения.

Данное пособие содержит набор типовых задач для проведения практических занятий и индивидуальной работы студентов.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 24.05.02 г. и методического совета 24.05.02 г.

## Введение

Теория пределов составляет фундамент математического анализа, а хорошее владение техникой предельных переходов является необходимой практической основой для углубленного изучения теоретического курса.

К сожалению, навыки проведения алгебраических преобразований, приобретаемые учащимися в школе, являются недостаточными и не могут быть эффективно использованы при изучении программы курса «Математический анализ». Наряду с трудностями, связанными с усвоением идей нового математического аппарата, студенты вынуждены затрачивать значительные интеллектуальные усилия на решение вопросов, связанных с использованием элементарной математики, владение приемами которой не доведено до автоматизма.

Предлагаемое издание ставит своей целью оказание помощи студентам в преодолении указанной проблемы в рамках рассматриваемой темы. Отобранные для этой цели задачи опираются на минимальный объем нового теоретического материала и направлены в основном на развитие и закрепление навыков алгебраических преобразований при решении задач на нахождение пределов. По существу, основная идея решения рассматриваемых задач может быть характеризована как поиск процедуры сведения некоторого сложного выражения, предел которого требуется установить, к конечной комбинации более простых выражений, пределы для которых известны, либо легко вычисляются (задачи, требующие значительного привлечения нового для студентов теоретического материала, рассматриваются во второй части методических указаний).

В издании предлагается достаточное количество задач для обеспечения индивидуальной работы студентов и проведения практических занятий.

Для удобства и экономии времени студентов, в частности при появлении у них вопросов о правомерности проводимых преобразований, вначале приведены краткие сведения из теории пределов, необходимые для решения предлагаемых задач.

Основные приемы, используемые при решении основных типов задач, проиллюстрированы в разобранных примерах.

# 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ

## 1.1.Предел числовой последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ действительных чисел называется сходящейся, если существует действительное число $a$ такое, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $N$ такое, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

При этом число $a$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, что символически записывают

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \text{ при } n \to \infty .$$

Теорема 1. (Арифметические операции над сходящимися последовательностями)

Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ действительных чисел сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b} \quad (y_n \neq 0 \text{ для } \forall n \in \mathrm{N}, b \neq 0)$,

Число $e$. Последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, имеет конечный предел, называемый числом $e$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281828459045...$$

## 1.2.Предел функций.

Определение (Гейне). Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, если она определена в некоторой окрестности точки $a$, за исключением, быть может, самой точки $a$, и существует такое число $A \in \mathrm{R}$, что для произвольной последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к $a$ и такой, что $x_n$ принадлежит проколотой окрестности, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $A$. При этом число $A$ называют пределом функции $f(x)$ в точке $a$ и обозначают:

$$\lim_{x\to a} f(x \quad A \quad \text{или} \quad f(x \quad A \text{ при } x \quad a .$$

Теорема 2. (Свойства пределом функций, связанные с арифметическими операциями).

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке $a$, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=A+B$, 2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ (при условии, что $B\neq 0$).

Теорема 3. (О замене переменной при вычислении предела).

Если существуют $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$ и $\lim\limits_{y\to b} f(y)=A$, причем для всех $x$ из некоторой проколотой окрестности точки $a$ выполняется условие $\varphi(x)\neq b$, то в точке $a$ существует предел сложной функции $f(\varphi(x))$ справедливо равенство

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x))=\lim_{y\to b} f(y).$$

Первый и второй замечательные пределы.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

Бесконечно малые функции.

Если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой при $x\to a$.

Определение. Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве $X$, если существуют числа $m$ и $M$ такие, что $m\leq f(x)\leq M$, $\forall x\in X$.

Отметим, что произведение бесконечно малой функции при $x\to a$ на ограниченную в соответствующей окрестности функцию есть снова бесконечно малая функция.

Эквивалентные функции.

Если в некоторой проколотой окрестности точки $a$ определены функции $f, g, h$ такие, что

$$f(x)=g(x)\cdot h(x),\quad \lim_{x\to a} h(x)=1,$$

то функции $g$ и $f$ называют эквивалентными (асимптотически равными) при $x\to a$ и пишут

$$f(x)\sim g(x) \text{ при } x\to a.$$

Таблица функций, эквивалентных при $x\to 0$

# 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ

## 1.1.Предел числовой последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ действительных чисел называется сходящейся, если существует действительное число $a$ такое, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $N$ такое, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

При этом число $a$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, что символически записывают

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \text{ при } n \to \infty .$$

Теорема 1. (Арифметические операции над сходящимися последовательностями)

Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ действительных чисел сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ $(y_n \neq 0$ для $\forall n \in \mathrm{N}, b \neq 0)$,

Число $e$. Последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, имеет конечный предел, называемый числом $e$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281828459045...$$

## 1.2.Предел функций.

Определение (Гейне). Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, если она определена в некоторой окрестности точки $a$, за исключением, быть может, самой точки $a$, и существует такое число $A \in \mathrm{R}$, что для произвольной последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к $a$ и такой, что $x_n$ принадлежит проколотой окрестности, соответствующая последовательность $\{f(x_{n)}\}$ сходится к $A$. При этом число $A$ называют пределом функции $f(x)$ в точке $a$ и обозначают:

$$\lim_{x\to a} f(x \quad A \quad \text{или} \quad f(x \quad A \text{ при } x \quad a .$$

Теорема 2. (Свойства пределом функций, связанные с арифметическими операциями).

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке $a$, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=A+B$, 2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ (при условии, что $B\neq 0$).

Теорема 3. (О замене переменной при вычислении предела).

Если существуют $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$ и $\lim\limits_{y\to b} f(y)=A$, причем для всех $x$ из некоторой проколотой окрестности точки $a$ выполняется условие $\varphi(x)\neq b$, то в точке $a$ существует предел сложной функции $f(\varphi(x))$ справедливо равенство

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x))=\lim_{y\to b} f(y).$$

Первый и второй замечательные пределы.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

Бесконечно малые функции.

Если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой при $x\to a$.

Определение. Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве $X$, если существуют числа $m$ и $M$ такие, что $m\le f(x)\le M,\ \forall x\in X$.

Отметим, что произведение бесконечно малой функции при $x\to a$ на ограниченную в соответствующей окрестности функцию есть снова бесконечно малая функция.

Эквивалентные функции.

Если в некоторой проколотой окрестности точки $a$ определены функции $f, g, h$ такие, что

$$f(x)=g(x)\cdot h(x),\qquad \lim_{x\to a} h(x)=1,$$

то функции $g$ и $f$ называют эквивалентными (асимптотически равными) при $x\to a$ и пишут

$$f(x)\sim g(x) \text{ при } x\to a.$$

Таблица функций, эквивалентных при $x\to 0$

| | | |
|---|---|---|
| $\sin x \sim x$ | $e^x - 1 \sim x$ | $th\, x \sim x$ |
| $tg\, x \sim x$ | $sh\, x \sim x$ | $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ |
| $\arcsin x \sim x$ | $\ln(1+x) \sim x$ | $chx - 1 \sim \frac{x^2}{2}$ |
| $arctgx \sim x$ | $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x$ | |

Теорема 4. (О замене функций эквивалентными при вычислении пределов).

Если $f \sim f_1$ и $g \sim g_1$ при $x \to a$, то из существования предела функции $f_1(x)/g_1(x)$ при $x \to a$ следует существование предела функции $f(x)/g(x)$ при $x \to a$ и справедливо равенство

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

## 2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+5)^3-(n-1)^3}{(2n+1)^2+(n+5)^2}$$

Рассматриваемый пример относится к группе задач, в которых общий член последовательности представим в виде отношения двух многочленов.

$$a_n = \frac{P_k(n)}{Q_e(n)} = \frac{c_k n^k + c_{k-1}n^{k-1} + \ldots + c_0}{d_e n^e + d_{e-1}n^{e-1} + \ldots + d_0}, \quad c_k \neq 0, d_e \neq 0$$

Представим $P_k(n)$ и $Q_e(n)$ в виде

$$n^k(c_k + c_{k-1}\,{}^1\!/_n + \ldots + c_0/n^k)$$

$$n^e(d_e + d_{e-1}\,{}^1\!/_n + \ldots + d_0/n^e)$$

Тогда $a_n = n^{k-e} \cdot \dfrac{c_n + c_k \, {}^{1}\!/_{n} + \ldots + c_0 / n^k}{d_e + d_{e-1} \cdot {}^{1}\!/_{n} + \ldots + d_0 / n^e}$.

Обратим внимание на то, что предел дроби при $n \to \infty$ существует и равен $(c_k / d_e)$. Здесь учтено, что $\dfrac{1}{n^P} \to 0$ при $n \to \infty$ и $P > 0$. Рассмотрим первый сомножитель $n^{k-e}$. При $k = e$ он равен 1, при $k > e$ $n^{k-e} \to \infty$, при $k < e$ $n^{k-e} \to 0$. Поэтому основной вопрос при решении задачи – вопрос о соотношении степеней многочленов $P_k$ и $Q_e$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_k(n)}{Q_e(n)} = \begin{cases} 0 & \text{при } k < e \\ c_k / d_e & \text{при } k = e \\ \infty & \text{при } k > e \end{cases}.$$

В нашем примере для нахождения ответа необходимо лишь привести выражения в числителе и знаменателе дроби к стандартному виду:

$$P_k(n) \to (n+5)^3 - (n-1)^3 = (n^3 + 15n^2 + 75n + 125) - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) =$$
$$= 18n^2 + 72n + 126$$
$$Q_e(n) \to (2n+1)^2 + (n+5)^2 = 4n^2 + 4n + 1 + n^2 + 10n + 25 = 5n^2 + 14n + 26.$$

Отсюда $k = e = 2$, $\quad c_k / d_e = {}^{18}\!/_{5} = 3.6$.

Ответ: искомый предел равен ${}^{18}\!/_{5}$.

2. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n\sqrt[4]{2n} + \sqrt{4n^4 - 9}}{(n - \sqrt{n})\sqrt{n^2 - 3n + 2}}.$$

Рассматриваемая задача является некоторым усложнением случая, приведенного в примере 1. Здесь в числителе и знаменателе дроби появились иррациональные выражения. Однако идея решения остается прежней. Определяется максимальная степень $n$ в числителе и знаменателе дроби. Отношение этих показателей является определяющим при вычислении предела.

Рассмотрим числитель дроби. С первым слагаемым все просто $n\sqrt[4]{2n} = \sqrt[4]{2} \cdot n^{5/4}$. Второе слагаемое дает $\sqrt{4n^4 - 9} = 2n^2 \sqrt{1 - \dfrac{9}{4n^4}}$, т. е. второе слагаемое при $n \to \infty$ стремится к бесконечности как $2n^2$. Максимальная степень роста – 2. Поэтому числитель мы можем записать в виде $2n^2\left(\sqrt{1 - \dfrac{9}{4n^4}} + 2^{3/4} n^{-3/4}\right)$, т. о. числитель мы представили в виде $n^2 \cdot a_n$, где последовательность $\{a_n\}$ имеет конечный и отличный от нуля предел.

Выполнение требования $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ - необходимое условие использования рассматриваемого подхода. В нашем случае $a_n \to 2$ при $n \to \infty$.

Обратимся теперь к знаменателю дроби. Оно представлено в виде произведения. Первый сомножитель переписываем в виде $n(1-n^{-1/2})$, второй дает $n\sqrt{1-3/n+2/n^2}$. Весь знаменатель можно записать в виде $n^2 \cdot b_n$, где $b_n = (1-n^{-1/2})\sqrt{1-3/n+2/n^2}$, $b_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Т.о. общий член исходной числовой последовательности мы представили в виде

$$\frac{n^2 \cdot 2(\sqrt{1-\frac{9}{4n^4}} + 2^{3/4} n^{-3/4})}{n^2 \cdot (1-n^{-1/2})\sqrt{1-3/n+2/n^2}}.$$

Сократив на $n^2$ получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 2$.

Ответ: искомый предел равен 2.

3. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^5-8} - n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}.$$

Рассматриваемый пример относится к той же группе задач, что и предыдущий предел. Небольшое отличие заключается в том, что если ранее при представлении числителя (знаменателя) последовательности в виде $n^\alpha \cdot a_n$ условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ выполнялось автоматически (так был подобран пример), то теперь за это придется побороться.

Действительно

$$\sqrt{n^5+8} - n\sqrt{n(n^2+5)} = a_n n^{\frac{5}{2}} = n^{5/2}\left[\sqrt{1+8/n^5} - \sqrt{1+5/n^2}\right],$$

но $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Значит действовать «в лоб» как в предыдущем примере нельзя. Рассмотрим, как можно устранить появившуюся неприятность. Она связана с появлением разности двух бесконечно больших последовательностей. Аналогичную ситуацию мы имели в первом примере, но там мы ее даже не обсуждали, поскольку она решалась просто при раскрытии скобок (возведением в куб и приведением подобных членов). В рассматриваемом примере фигурируют иррациональные выражения, поэтому здесь надо воспользоваться дополнительным приемом – в данном случае – домножением на сопряженное выражение.

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Если встречается разность кубов двух величин, то ее следует домножать на их неполный квадрат суммы

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(a^{2/3}+a^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3})}{a^{3/2}+\sqrt[3]{ab}+b^{2/3}}=\frac{a-b}{a^{3/2}+\sqrt[3]{ab}+b^{2/3}}.$$

Вернемся к нашему примеру.

$$\frac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}=\frac{(n^5-8)-n^2\cdot n(n^2+5)}{\sqrt{n}(\sqrt{n^5-8}+n\sqrt{n(n^2+5)})}=\frac{-5n^3-8}{\sqrt{n}(\sqrt{n^5-8}+n\sqrt{n(n^2+5)})}.$$

Теперь мы полностью свели задачу к предыдущему случаю. Общий член последовательности представим в виде:

$$-\frac{n^3(5+8/n^3)}{n^3\left[\sqrt{1-8/n^5}+\sqrt{1+5/n^2}\right]}.$$

Сократив на $n^3$ видим, что предел последовательности равен $-5/2$.

4. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}.$$

Способ нахождения предела аналогичен способам, рассмотренным ранее. Он базируется на представлении общего члена последовательности (либо числителя и знаменателя дроби, как в нашем примере) в виде произведения $A_n\cdot a_n$. Здесь $A_n$ определяет порядок роста, $\{a_n\}$ имеет конечный ненулевой предел при $n\to\infty$. Заметим, что $3^n-2^n=3^n(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n)$, т.е. $A_n=3^n$ и $a_n=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 1$ при $n\to\infty$. Аналогично $3^{n-1}+2^n=3^n(\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^n)$. Подставляя найденные выражения в исходную последовательность получаем:

$$\frac{3^n(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n)}{3^n(\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^n)}\to 3 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

5. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}\right).$$

На первом этапе решения задачи надо максимально упростить вид общего члена последовательности. В данном случае видно, что общий член последовательности приводится к сумме двух сумм геометрических прогрессий. Т.к. $\dfrac{3^n+2^n}{6^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, то

$$a_n=\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=S_n^{(1)}+S_n^{(2)}.$$

Первая сумма $\quad S_n^{(1)}=a_1\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n.$

Для второй суммы получаем $S_n^{(2)}=\dfrac{1}{3}\ \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}\cdot(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n).$

Тогда общий член последовательности можно записать в виде:

$$a_n=1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n),$$

т.к. при $|q|<1 \quad (q)^n\to 0$ при $n\to\infty$, то искомый предел равен $\tfrac{3}{2}$.

6. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}.$$

Этот пример относится к группе задач, решение которых основано на использовании определения числа $e$ $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$ и следующего из этого определения предела $\lim\limits_{\alpha_n\to 0}(1+\alpha_n)^{1/\alpha_n}=e$.

В последнем пределе $\alpha_n$ - бесконечно малая числовая последовательность.

Прежде чем непосредственно перейти к решению задачи,получим два полезных соотношения:

а) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}a_n^{b_n}=\lim_{n\to\infty}e^{b_n\cdot\ln a_n}=e^{b\cdot\ln a}=a^b=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n};$$

b) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}V_n=\infty$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(U_n)^{V_n} = \lim_{n\to\infty}\left[(1+(U_n-1))^{\frac{1}{U_n-1}}\right]^{(U_n-1)\cdot V_n}.$$

Полагая $\alpha_n = U_n - 1$ ($\alpha_n$ - бесконечно малая последовательность), убеждаемся, что величина, стоящая в прямоугольных скобках, стремится к $e$ при $n\to\infty$. Теперь, согласно соотношениям а) и b) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}(U_n)^{V_n} = \exp\left\{\lim_{n\to\infty}(U_n-1)\cdot V_n\right\}.$$

Согласно полученной формуле наша задача сводится к нахождению предела

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}-1\right)\cdot n^3 = \lim_{n\to\infty}\frac{-4\cdot n^3}{5n^2+3n+3} = -\infty.$$

Отсюда очевидно, что искомый предел равен нулю

$$\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^3}{5n^2+3n+3}\right\} = 0.$$

7. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-2x-3}$$

Прямая подстановка $x=-1$ показывает, что при этом и числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. (Неопределенность типа $\frac{0}{0}$). Это значит, что $-1$ является корнем соответствующих многочленов, и каждый из них может быть представлен в виде $Q_n(x) = (x+1)\cdot P_{n-1}(x)$. Получить явный вид многочлена $P_{n-1}(x)$ можно «делением в столбик» $Q_n(x)$ на $(x+1)$.

Рассмотрим знаменатель дроби

$$\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2-2x-3 & x+1 \\ \cline{2-2}
-\; x^3+x^2 \qquad\qquad & x^2+x-3 \\ \cline{1-1}
x^2-2x-3 & \\
-\; x^2+x \qquad & \\ \cline{1-1}
-3x-3 & \\
-\; -3x-3 & \\ \cline{1-1}
0 \quad &
\end{array}$$

Таким образом $x^3+2x^2-2x-3=(x+1)(x^2+x-3)$.

Аналогично находим: $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$.

Подставляя полученные выражения в исходную дробь, находим, что искомый предел равен

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+2}{x^2+x-3}=-\frac{1}{3}$$

8. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$$

В этом примере мы также имеем дело с неопределенностью типа $\frac{0}{0}$. Раскроем неопределенность, домножив числитель и знаменатель дроби на $\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)$, и проделаем элементарные преобразования:

$$\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}=\frac{-3(x-3)}{\sqrt[3]{(x-3)(x+3)}\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x=1}\right)}=\frac{-3(x-3)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x+3}\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}$$

Нетрудно убедиться в том, что предел последней из записанных дробей при $x\to 3$ равен нулю.

9. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\left(e^{\pi x}-1\right)}{3\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)}$$

Подставив в исследуемую функцию предельное значение $x=0$ убеждаемся, что снова имеем дело с неопределенностью типа $\frac{0}{0}$. Для раскрытия неопределенности воспользуемся следующими отношениями эквивалентности при $x\to 0$

$$e^x\sim 1+x,\ (1+x)^{\alpha}\sim 1+\alpha x$$

С их учетом можно записать:

$$2\left(e^{\pi x}-1\right)\sim 2\pi x$$
$$3\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\sim x$$

Далее справедливо равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\left(e^{\pi x}-1\right)}{3\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\pi x}{x}=2\pi,$$

т.е. искомый предел равен $2\pi$.

10. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{tg3x}$$

В рассматриваемом пределе неопределенность вида $\frac{0}{0}$ возникает в окрестности т. $x=\pi$. Здесь также можно воспользоваться эквивалентными функциями (функциями между которыми установлены отношения эквивалентности при $x\to x_0$).

Отметим, что в учебниках обычно приводится таблица функций, эквивалентных при $x\to 0$, поэтому в нашем примере надо сначала перейти к новой переменной $y=y(x)$,такой, что $y\to 0$ при $x\to\pi$.

Нетрудно видеть, что простейшая такая замена имеет вид $y=x-\pi$.

В новых переменных исследуемая функция равна

$$\frac{\sin[5(y+\pi)]}{tg[3(y+\pi)]}=-\frac{\sin 5y}{tg3y}$$

Учитывая, что $\sin 5y\sim 5y, tg3y\sim 3y$ при $y\to 0$,

находим, что искомый предел равен $-\frac{5}{3}$.

11. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$$

Убеждаемся, что в примере возникает неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Как и выше, для того, чтобы воспользоваться таблицей эквивалентных функций делаем замену $y=x-\frac{\pi}{2}$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln\cos y}{4y^2}$

Воспользуемся отношениями эквивалентности при $y\to 0$

$$\cos y\sim 1-\frac{y^2}{2},\quad \ln\left(1-\frac{y^2}{2}\right)\sim-\frac{y^2}{2}$$

Тогда искомый предел равен

$$\lim_{y\to 0}\left(-\frac{y^2/2}{4y^2}\right)=-\frac{1}{8}$$

12. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$$

Раскрытие неопределенности при $x\to 0$ в рассматриваемом примере основано на использовании следующих отношений эквивалентности $2^{3x}=e^{3x\cdot\ln 2}\sim 1+3\cdot x\cdot\ln 2$, $3^{2x}\sim 1+2\cdot x\cdot\ln 3$, $2^{3x}-3^{2x}\sim x(3\ln 2-2\ln 3)$ для числителя и $\arcsin x^3\sim x^3$, $x+\arcsin x^3\sim x$ для знаменателя дроби.

Отсюда получаем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(3\ln 2-2\ln 3)}{x}=3\ln 2-2\ln 3=\ln\left(\dfrac{8}{9}\right)$

13. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2\cdot 2^x}{1+x^2 5^x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$$

Пример относится к задачам на раскрытие неопределенности вида $1^\infty$. Для числовых последовательностей соответствующая ситуация рассмотрена в примере 6. Воспользуемся формулами, полученными там и справедливыми для случая нахождения пределов функций.

Искомый предел равен

$$\exp\left\{\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1+x^2 2^x}{1+x^2\cdot 5^x}-1\right)/\sin^3 x\right]\right\}$$

Выражение в прямоугольных скобках можно преобразовать к виду:

$$\frac{x^2\left(2^x-5^x\right)}{\sin^3 x\cdot\left(1+x^2\cdot 5^x\right)}$$

Используя отношения эквивалентности при $x\to 0$

$$2^x-5^x\sim x(\ln 2-\ln 5),\qquad \sin^3 x\sim x^3,$$

Находим

$$x^2\left(2^x-5^x\right)\sim x^3\ln\left(\frac{2}{5}\right)\qquad \sin^3 x\cdot\left(1+x^2 5^x\right)\sim x^3.$$

Отсюда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(2^x-5^x\right)}{\sin^3 x\left(1+x^2 5^x\right)}=\ln\left(\frac{2}{5}\right),$$

а искомый предел равен

$$\exp\left\{\ln\left(\frac{2}{5}\right)\right\} = \frac{2}{5}$$

14. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}.$$

Этот пример аналогичен предыдущему (неопределенность типа $1^{\infty}$) и нюансы решения связаны лишь с использованием отношений эквивалентности.
Согласно полученным ранее соотношениям искомый предел равен

$$\exp\left\{\lim_{x\to 1}\left[\left(\frac{2x-1}{x}-1\right)\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}\right]\right\}$$

Преобразуем выражение в прямоугольных скобках, сделав замену переменных $y = 1 - x$:

$$-\left(\frac{y}{1-y}\right)\frac{\ln(5-2y)}{\ln(1+y)}$$

Учитывая, что $\ln(1+y) \sim y$ при $y \to 0$, находим предел выражения, стоящего в экспоненте $(-\ln 5)$
Отсюда искомый предел равен

$$\exp\{-\ln 5\} = \frac{1}{5}$$

15. Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{-x^2}-1\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x}{\ln(1+x)}$$

Для вычисления предела воспользуемся следующими отношениями эквивалентности при $x \to 0$:

$$e^{-x^2} - 1 \sim -x^2, \qquad \ln(1+x) \sim x$$

Отсюда следует, что искомый предел равен

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1 - x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 - x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Заметим, что функция $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ - ограничена, а произведение ограниченной на бесконечно малую есть бесконечно малая функция. Отсюда следует, что искомый предел равен единице.

Задача 1. Вычислить предел числовой последовательности.

1.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n+2)^2+(n+3)^2}$

1.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(2-n)^3}{2n^2-(1+n)^2}$

1.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3+(n+2)^3}{(1-n)^3-(1+n)^3}$

1.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^2+(n+1)^3}{(4-2n)^4}$

1.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-2)^4-(n-3)^4}{(n-1)^2-(n+6)^2}$

1.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$

1.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-6)^3}{(n+3)^3-(n-3)^3}$

1.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n-5)^4-(n-6)^4}$

1.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^2+(n+4)^3}{(n+2)^4-(n-2)^4}$

1.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+(n+1)^2}{(n+3)^3-(n-1)^3}$

1.11 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-3)^4}{n(n+2)^2}$

1.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2+(n-2)^2}{(n+1)^3-(n-1)^3}$

1.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n+6)^3}{(n+4)^2+(n-4)^2}$

1.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(6-n)}{(n+4)^4-(n-4)^4}$

1.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+3)^2+(n-3)^2}$

1.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-(n-1)^3}{(3n+1)^2+n}$

1.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2+(n-3)^3}{(n+4)^4-(n-4)^4}$

1.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6n+1)^2-(n+1)^3}{n^4-(n-1)^4}$

1.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2+(n+1)^2}{(2n+3)^3-(2n-3)^3}$

1.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(2n-1)^3}{(4-n)^4-(n+1)^4}$

1.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(1-n)^3}{(n+2)^2+n(n+1)}$

1.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^5-(6+2n)^4}{n^2(n-1)^3}$

1.23 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3+6n}{(2n+1)^4-(2n-3)^4}$

1.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{n^2(6-n)}$

1.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3-(n-2)^3}{n^2-5n}$

1.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^3-(n+3)^3}{4n^2+1}$

1.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-4)^2}{(n+4)^3-(n+2)^3}$

1.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+1)^4-(n+2)^4}$

1.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(2n+1)^3-(2n-3)^3}$

1.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+5)^2+(n-5)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$

Задача 2. Вычислить предел числовой последовательности.

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n\sqrt{2n^2+1}-\sqrt[3]{n^5+1}}{(2+\sqrt{n})\sqrt{n^3-1}}$

2.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}-2n^2}{\sqrt{9n^4-5n^2+1}}$

2.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt{n^2+6}}{\sqrt[3]{n^2+1}-n}$

2.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+2}-\sqrt[3]{8n^6-5}}{3n^2-\sqrt[4]{n^8-n^5}}$

2.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{36n}-\sqrt[3]{27n^6+1}}{n\sqrt{21+n^2}}$

2.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5n+1}+\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4}+\sqrt[4]{n^4+1}}$

2.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+2}}{n+\sqrt[8]{n^8-6n}}$

2.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-\sqrt[4]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6-2}-n}$

2.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^7}+\sqrt{n^6+4}}{\sqrt[3]{9n^3+1}}$

2.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3-7}+\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[5]{n^5+3}}$

2.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{12n}+\sqrt{25n^2-4}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}$

2.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n^2+3}}{\sqrt[4]{n^8+1}+\sqrt[3]{n^2}}$

2.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n^3-3}}{(n-5\sqrt{n})\sqrt{n^2-1}}$

2.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5+n}+n\sqrt{11+n^2}}{n-\sqrt{n^6-2n}}$

2.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+6}+\sqrt{n^2-n}}{\sqrt[8]{n^8+1}}$

2.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[6]{n+1}-\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{n\sqrt{n^2+6n}}$

2.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[5]{n^5+1}}$

2.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2-\sqrt[3]{n^5+n^2}}{(n+\sqrt{3n^2+1})^2}$

2.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{27n^3-1}\cdot(n+2)}{\sqrt[4]{81n^8-5}}$

2.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n^4+5n}}$

2.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{n}+\sqrt{n^2+n}}{\sqrt[5]{10n^{10}+1}}$

2.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{n^6+5n}}{(n+\sqrt[3]{n})\sqrt{9+n^2}}$

2.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+1}-n}$

2.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^6+2}-n}{\sqrt{2n^4-5}}$

2.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3-3}+\sqrt{n^2}}{\sqrt[4]{n^4+2}}$

2.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n^4-2}+n}$

2.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{64n^6+1}}$

2.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{2n^6-n}}$

2.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^5+2}-3n^2}{\sqrt[7]{1+n^7}}$

2.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{8n^3+1}}{\sqrt[5]{n^5+1}+\sqrt[4]{n+1}}$

Задача 3. Вычислить предел числовой последовательности.

3.1. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$

3.2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot[\sqrt{n^2(n+2)}-\sqrt{n^3-1}]$

3.3. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}-\sqrt{(n-1)(n+3)})$

3.4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n+5}-n)$

3.5. $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[3]{2+8n^3}-2n)$

3.6. $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt[5]{5-n^5})$

3.7. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt{n^3(n^2-1)}-\sqrt{n^5+1})$

3.8. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[4]{64+16n^4}-\sqrt{4n^2-1})$

3.9. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt[3]{(n+5)^4}-\sqrt[3]{n^2(n^2+1)}]$

3.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

3.11. $\lim\limits_{n\to\infty}[n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}]$

3.12. $\lim\limits_{n\to\infty}[n-\sqrt{n(n+1)}]$

3.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+5}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-5})$

3.14. $\lim\limits_{n\to\infty} n^3(\sqrt[3]{n^2(n^4-5)}+\sqrt[3]{1-n^6})$

3.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-5}-n\sqrt{n^3-5}}{\sqrt{n}}$

3.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^6+1}-\sqrt{n^6-1}}{n}$

3.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n(n^2+1)}-\sqrt[3]{n^3+1}$

3.18. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-2)^2})$

3.19. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2})$

3.20. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4+2})$

3.21. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4+2})$

3.22. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}(\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2})$

3.23. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{(n+1)(n+2)})$

3.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{2n-3}-\sqrt{2n+3})$

3.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+3})$

3.26. $\lim\limits_{n\to\infty}[2n+\sqrt[3]{(4n^2+1)(1-n)}]$

3.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+n}(\sqrt{n^5+1}-\sqrt{n^2(n^3+1)})$

3.28. $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt[3]{3+n^3})$

3.29. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{(n^2-2)}+\sqrt[3]{(3-n^2)})$

3.30. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2-n}+\sqrt[3]{2-n^3})$

Задача 4. Вычислить предел числовой последовательности.

4.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+...+(2n-1)}{1+2+...+n}$

4.2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+...+\frac{2^n+3^n}{6^n})$

4.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{2n-n^2+4}$

4.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-5+4-7+...+2n-(2n+3)}{n+3}$

4.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+2}+5^n}$

4.6. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2})$

4.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{\sqrt{9n^4+1}}$

4.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+...+(2n-1)-2n}{n}$

4.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$

4.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{5^n}}$

4.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+7^{n-1}}{2^n-7^{n+1}}$

4.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+6+9+...+3n}{n^2-2}$

4.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n-1)!+(n+2)!}$

4.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+...+(2n-1)-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}$

4.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{\sqrt{n^4-n}}$

4.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{\sqrt{4n^4+5}-2n}$

4.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+1)!-(3n-1)!}{(3n)!\cdot 2n}$

4.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4+7+..+(3n-2)}{\sqrt{4n^4-1}}$

4.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}-9}{(3^n+2^n)(3^n-2^{n+1})}$

4.20. $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}]$

4.21. $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+...+2n}-2]$

4.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+6+...+3(n-1)}{\sqrt{9n^4+n^3}}$

4.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^n}}$

4.24. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3}{4}+\frac{5}{16}+\frac{9}{64}+...+\frac{1+2^n}{4^n})$

4.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$

4.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+15+...+(5n-3)}$

4.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$.

4.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{\sqrt[3]{n^6+2}}$

4.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!2^n+(n+1)!3^{n-1}}{(n-1)!3^{n+1}-(n)!2^{n+1}}$.

4.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+15+\ldots+5n}{2+5+\ldots+(3n-1)}$

Задача 5. Вычислить предел числовой последовательности.

5.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+2n-1}{n^3+4}\right)^{3n^2}$

5.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-1}\right)^{n+1}$

5.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{2n-1}$

5.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+17n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{3n-1}$

5.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$

5.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{3n-1}$

5.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-6n+5}{3n^2+2n+7}\right)^{n+3}$

5.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+5n-1}{n^2+5n+1}\right)^{2n}$

5.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^4}$

5.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+3}\right)^{n^2}$

5.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$

5.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^{-n}$

5.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-6n+1}{3n^2-5n+2}\right)^{-n^2}$

5.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$

5.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^{-n}$

5.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-2n}{3n^2-5n+7}\right)^{3n+2}$

5.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-2n-2}{n^2+2n+2}\right)^{2n-5}$

5.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{2n^2}$

5.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+4}{3n+6}\right)^{-n}$

5.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n+3}\right)^{5n}$

5.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-1}{n^3+1}\right)^{n^3-1}$

5.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{13n-3}{13n+7}\right)^{n-3}$

5.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{2n+6}$

5.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-6}{2n^2+6n}\right)^{1-2n^2}$

5.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5n+4}{n^2-1}\right)^{-n}$

5.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+3n+3}\right)^{2n}$

5.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$

5.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n-6}{5n+6}\right)^{-n^2}$

5.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+5}\right)^{2n^2+1}$

5.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{3n^2-6n+1}\right)^{-n^3}$

Задача 6. Вычислить предел функции.

6.1. $\lim\limits_{n\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$

6.2. $\lim\limits_{n\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

6.3. $\lim\limits_{n\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x^3+x^2}$

6.4. $\lim\limits_{n\to-1}\frac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$

6.5. $\lim\limits_{n\to1}\frac{x^2-2x+1}{3x^2-2x-1}$

6.6. $\lim\limits_{n\to-1}\frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$

6.7. $\lim\limits_{n\to1}\frac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$

6.8. $\lim\limits_{n\to-1}\frac{(x^3-3x-2)^2}{x^4+2x+1}$

6.9. $\lim\limits_{n\to1}\frac{x^3+x^2-4x+2}{x^3+x^2-x-1}$

6.10. $\lim\limits_{n\to0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$

6.11. $\lim\limits_{n\to-3}\frac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$

6.12. $\lim\limits_{n\to2}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$

6.13. $\lim\limits_{n\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$

6.14. $\lim\limits_{n\to2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}$

6.15. $\lim\limits_{n\to-2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$

6.16. $\lim\limits_{n\to-1}\frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$

6.17. $\lim\limits_{n\to1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$

6.18. $\lim\limits_{n\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$

6.19. $\lim\limits_{n\to-1}\frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$

6.20. $\lim\limits_{n\to0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{2x^2-7x}$

6.21. $\lim\limits_{n\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

6.22. $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{(2x-4)^2-(2+x)^4}{(x-1)^2-(2x+1)^2}$

6.23. $\lim\limits_{n\to -3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$

6.24. $\lim\limits_{n\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$

6.25. $\lim\limits_{n\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x^3-x^2+x-1}$

6.26. $\lim\limits_{n\to 3}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+2x+12}$

6.27. $\lim\limits_{n\to -1}\dfrac{2x^3-3x-1}{(x^2-5x-4)^2}$

6.28. $\lim\limits_{n\to 1}\dfrac{7x^3-5x^2-2}{5x-4x^2-1}$

6.29. $\lim\limits_{n\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+4}$

6.30. $\lim\limits_{n\to -1}\dfrac{x^4-2x^3-3}{x^3+x-2}$

Задача 7. Вычислить предел функции.

7.1. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{7+2x}-5}{\sqrt{x}-3}$

7.2. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

7.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

7.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

7.5. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{4x}}$

7.6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$

7.7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{2x}-\sqrt{1+x}}$

7.8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$

7.9. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$

7.10. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$

7.11. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$

7.12. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$

7.13. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1/4+x}-\sqrt{2x}}$

7.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x}}$

7.15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}$

7.16. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

7.17. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

7.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x^2+x}$

7.19. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

7.20. $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

7.21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$

7.22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$

7.23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$

7.24. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

7.25. $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{(\sqrt{x}-4)\sqrt{\sqrt{x}-4}}$

7.26. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$

7.27. $\lim\limits_{x\to -8}\frac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$

7.28. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$

7.29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$

7.30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$

Задача 8. Вычислить предел функции.

8.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2tgx)}{\sin 3x}$

8.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2-3x}{tgx}$

8.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{tg(\pi(2+x))}$

8.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{2x\cdot\sin x}$

8.5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$

8.6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{e^{x^2}-1}$

8.7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 5x}$

8.8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin[2\pi(x+\frac{1}{2})]}$

8.9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$

8.10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{\sin(2\pi(x+10))}$

8.11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-5x)}{\sin(\pi(x-5))}$

8.12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\ln(1-2x)}{4arctg3x}$

8.13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x^2+\pi x}$

8.14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin[\pi(x+1)]}{\lg(1+2x)}$

8.15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\arcsin(2x)}$

8.16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos 2x})\ln(1+x)}{(\sin x-tgx)}$

8.17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\sin(\pi(x/2+1))}$

8.18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-tg^2 x}{x^2(1-\cos x)}$

8.19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$

8.20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(\pi(1+x/2))}{\ln(2x+1)}$

8.21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}$

8.22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x+5\pi/2)tgx}{\arcsin(3x^2)}$

8.23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos[\pi(x+1)/2]}$

8.24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{3arctgx}$

8.25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+2x}-3}{3arctgx}$

8.26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 2x}{1-\cos x}$

8.27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{2x}-1}$

8.28. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}$

8.29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(\ln(e-x)-1)\sin x}$

8.30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$

Задача 9. Вычислить предел функции.

9.1. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 3x}{tg5x}$

9.2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x}$

9.3. $\lim\limits_{x\to \pi/3}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$

9.4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{arctg(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$

9.5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$

9.6. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}$

9.7. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{tg\pi x}{x+2}$

9.8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$

9.9. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$

9.10. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x}$

9.11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

9.12. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{tg\pi x}$

9.13. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\ln tgx}{\cos 2x}$

9.14. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{\ln 2x-\ln \pi}{\sin(5x/2)\cos x}$

9.15. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin \pi x}$

9.16. $\lim_{x\to 2}\frac{\sin(7\pi x)}{\sin(8\pi x)}$

9.17. $\lim_{x\to \pi}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$

9.18. $\lim_{x\to \pi}\frac{x^2-\pi^2}{\sin x}$

9.19. $\lim_{x\to 4}\frac{2^x-16}{\sin \pi x}$

9.20. $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$

9.21. $\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos \pi x}{tg^2 \pi x}$

9.22. $\lim_{x\to \pi/4}\frac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$

9.23. $\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$

9.24. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{tg \pi x}$

9.25. $\lim_{x\to \pi/2}\frac{tg 3x}{tg x}$

9.26. $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin^2 x-tg^2 x}{(x-\pi)^4}$

9.27. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x}$

9.28. $\lim_{x\to \pi}\frac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$

9.29. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$

9.30. $\lim_{x\to 1}\frac{1-2^{1-x}}{\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-2x+1}}$

Задача 10. Вычислить предел функции

10.1. $\lim_{x\to \pi/2}\frac{e^{tg 2x}-e^{-\sin 2x}}{1-\sin x}$

10.2. $\lim_{x\to \pi}\frac{(x^3-\pi^3)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}$

10.3. $\lim_{x\to \pi}\frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}$

10.4. $\lim_{x\to -2}\frac{tg(e^{x+2}-e^{x^2-4})}{tg x+tg 2}$

10.5. $\lim_{x\to \pi}\frac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}$

10.6. $\lim_{x\to a\pi}\frac{\ln(\cos(x/a)+2)}{a^{a^2\pi^2/x^2-a\pi/x}-a^{a\pi/x-1}}$

10.7. $\lim_{x\to \pi}\frac{tg(3^{\pi/x}-3)}{3^{\cos(3x/2)}-1}$

10.8. $\lim_{x\to 1/2}\frac{(2x-1)^2}{e^{\sin \pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}$

10.9. $\lim_{x\to \pi/2}\frac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$

10.10. $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-\sqrt[3]{2x-3})}{\sin(\pi x/2)-\sin[(x-1)\pi]}$

10.11. $\lim_{x\to 2}\frac{tg x-tg 2}{\sin \lg(x-1)}$

10.13. $\lim\limits_{x\to\pi/6} \dfrac{\ln\sin 3x}{(6x-\pi)^2}$

10.15. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}$

10.17. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}-1}{1+\cos\pi x}$

10.19. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{e^{\sin 2x}-e^{tg 2x}}{\ln(2x/\pi)}$

10.21. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$

10.23. $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{\ln\cos x}{3^{\sin 3x}-1}$

10.25. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\ln\cos 2x}{(1-\pi/x)^2}$

10.27. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}$

10.29. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^{x^2-a^2}-1}{tg\ln(x/a)}$

10.12.
$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(\sqrt{2x^2-3x-5}-\sqrt{1+x})}{\ln(x-1)-\ln(x+1)+\ln 2}$

10.14. $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{(x-2\pi)^2}{tg(\cos x-1)}$

10.16. $\lim\limits_{x\to\pi/3} \dfrac{e^{\sin^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\log_3\cos 6x}$

10.18. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2^x+7}-\sqrt{2^{x+1}+5}}{x^3-1}$

10.20. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{tg(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}-e}$

10.22. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\arcsin(x+2)/2}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}$

10.24. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{tg\ln(3x-5)}{e^{x+3}-e^{x^2+1}}$

10.26. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln(x^3-6x-8)}$

10.28. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos(x/2)}{e^{\sin x}-e^{\sin 4x}}$

10.30. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin(x^2/\pi)}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2}$

Задача 11. Вычислить предел функции

11.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^{3x}-5^{2x}}{3x-arctg 5x}$

11.3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6^{2x}-5^{-2x}}{\sin 3x-x}$

11.5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^x-2^{5x}}{tg 3x-2x}$

11.7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{12^x-5^{-3x}}{2\arcsin x-x}$

11.2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$

11.4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 3x-\sin x}$

11.6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-e^{x}}{\arcsin x-x^2}$

11.8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 7x}$

11.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 5x-7x}$

11.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-2^{x}}{\sin 2x-\sin^2 x}$

11.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{tg2x-\sin x}$

11.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2\sin x-arctgx}$

11.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-3^{-3x}}{x^3+\arcsin x}$

11.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{3x}}{x-\sin 7x}$

11.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2tgx-arctgx}$

11.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-\arcsin x}$

11.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x}-e^{2x}}{\sin 3x-tgx}$

11.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{3x}}{tg3x-\sin 2x}$

11.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{x+\sin x^2}$

11.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x+4tg(x/3)}$

11.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x-tgx}$

11.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2tgx-\sin x}$

11.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{tgx+x^2}$

11.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-7^{x}}{\arcsin 3x-5x}$

11.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{5x}-9^{-2x}}{\sin x-tgx^3}$

11.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{x}-2^{3x}}{arctg2x-7x}$

11.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{x}}{\sin 2x-arctgx}$

11.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{x}-3^{2x}}{tgx^2+\sin(\pi-x)}$

11.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{5x}-6^{-2x}}{tgx+\sin^2 x}$

11.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{arctgx+x}$

Задача 12. Вычислить предел функции

12.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 3x}$

12.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$

12.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-tga}{\ln x-\ln a}$

12.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$

12.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{\sin x^2}$

12.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{tg5x}$

12.7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{x}-2}{\ln x}$

12.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x+tg^2 x}{x\sin 5x}$

12.9. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\ln tgx}$

12.10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

12.11. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin\pi x}$

12.12. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$

12.13. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}$

12.14. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(x+\alpha)+\ln(x-\alpha)-2\ln x}{\alpha^2}$

12.15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{tgx}$

12.16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{x+1}-3}{\ln(1+x\sqrt{1+xe^x})}$

12.17. $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$

12.18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx-\sin ax}{\ln(tg(\pi/4+ax))}$

12.19. $\lim\limits_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b}$

12.20. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$

12.21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

12.22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

12.23. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\frac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$

12.24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(e^x-e^{-x})}{e^{x^3+1}-e}$

12.25. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+x^3}{\sin(1+x)}$

12.26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$

12.27. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$

12.28. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\log_3 x-1}{tg\pi x}$

12.29. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$

12.30. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\log_3 x-1}{\sqrt{x-2}-1}$

Задача 13. Вычислить предел функции

13.1. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{1/x}$

13.2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln(1+x^3))^{3/(x^2\arcsin x)}$

13.3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\pi x)^{1/(x\sin\pi x)}$

13.4. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x\sin^2 x)^{1/\ln(1+\pi x^3)}$

13.5. $\lim\limits_{x\to 0}(tg(\frac{\pi}{4}-x))^{ctgx}$

13.6. $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos 3x)^{1/\ln(1+x^2)}$

13.7. $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{\sin x})^{ctg\pi x}$

13.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{1/x^2}$

13.8. $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{x^2})^{1/\ln(1+tg^2(\pi x/3))}$

13.11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\frac{4}{\cos x}\right)^{1/\sin^2 3x}$

13.10. $\lim\limits_{x\to 0}[2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}]^{3/x}$

13.13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x\cdot 3^x}{1+x\cdot 7^x}\right)^{1/tg^2 x}$

13.12. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 3x)^{1/\ln\cos x}$

13.15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\frac{5}{\cos x}\right)^{ctg^2 x}$

13.14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)^{1/\ln(1+tg^2 3x)}$

13.17. $\lim\limits_{x\to 0}(2-3^{\sin^2 x})^{1/\ln\cos x}$

13.16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx\cdot\cos 2x}{1+tgx\cdot\cos 5x}\right)^{1/x^3}$

13.19. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$

13.18. $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2 x)^{1/\ln(1+3x^2)}$

13.21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\frac{2}{\cos x}\right)^{\operatorname{cosec}^2 x}$

13.20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cdot\cos 2x}{1+\sin x\cdot\cos 3x}\right)^{1/\sin x^3}$

13.23. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\ln(1+\sin^2 x)}$

13.22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln\frac{1}{3}arctg^6\sqrt{x}\right)^{1/x^3}$

13.25. $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{x^2})^{1/(1-\cos\pi x)}$

13.24. $\lim\limits_{x\to 0}(2-3^{arctg^2\sqrt{x}})^{2/\sin x}$

13.27. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin^2 x)^{1/tg(x^2)}$

13.26. $\lim\limits_{x\to 0}[1-\ln(1+\sqrt[3]{x})]^{1/\sin^4\sqrt[3]{x}}$

13.29. $\lim\limits_{x\to 0}(3-2\cos x)^{-ctgx}$

13.28. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln\cos x)^{1/x^2}$

13.30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\frac{2}{\cos^2 x}\right)^{ctg^2 x}$

Задача 14. Вычислить предел функции

14.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg2x}{x}\right)^{2+x}$

14.2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{(5x+1)/(1+x)}$

14.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^{2/(1+x)}$

14.4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{\sin x}\right)^{\cos^2(\pi/x+x)}$

14. 5. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos)^{x+2}$

14.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{\sin 2x}\right)^{x/(x+2)}$

14.7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\ln(1+2x)}\right)^{\cos x}$

14.8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{4-x^2}$

14.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4+x}{2+\sqrt{x}}\right)^{tgx}$

14.10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+2}{x^2+4}\right)^{tg(\frac{\pi}{4}+x)}$

14.11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin^2 x}{\arcsin x^2}\right)^{2x+1}$

14.12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\cos^4 x}$

14.13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{\sin 2x}\right)^{x+5}$

14.14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\frac{x^2}{\pi}\right)^{tgx}$

14.15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x^2}{\sin x}\right)^{1/(1+x)}$

14.16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3+1}{x^3+2}\right)^{2/(1+x)}$

14.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{2/(x+5)}$

14.18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin[x+2]\right)^{2x-1}$

14.19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{11x+8}{12x+7}\right)^{\sin x^2}$

14.20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{arctg 3x}{tg 3x}\right)^{6/(1+x)}$

14.21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{\arcsin^2 4x}\right)^{2x+1}$

14.22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2}$

14.23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+3}{2x+6}\right)^{x+2}$

14.24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-e^x}{x}\right)^{6/(2+x)}$

14.25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-x\right)^{\cos x^4}$

14.26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg 2x^3}{\sin 5x}\right)^{\ln(2+x)}$

14.27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{arctg 3x}{3x}\right)^{\sin 3x}$

14.28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(tg(\frac{\pi}{3}+x)\right)^{tg(x+\frac{\pi}{4})}$

14.29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{\sin x}\right)^{\cos^2 x}$

14.30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x}{3x}\right)^{\arccos\left(\frac{1-x}{x+2}\right)}$

Задача 15. Вычислить предел функции

15.1 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{1/(\sqrt{x}-1)}$

15.2. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{ctg 2x/\sin 3x}$

15.3. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{6tgx\cdot tg3x}$

15.4. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{9-2x}{3}\right)^{tg(\pi x/6)}$

15.5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{x/(x-1)}$

15.6. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(tg\frac{x}{2}\right)^{1/(x-\pi/2)}$

15.7. $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{5/tg5x\cdot\sin 2x}$

15.8. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{1/\sin^2 2x}$

15.9. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-x/a\right)^{tg\frac{\pi x}{2a}}$

15.10. $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{ctgx/\sin 4x}$

15.11. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(tgx)^{1/\cos(3\pi/4-x)}$

15.12. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\cos x}{\cos 2}\right)^{1/(x-2)}$

15.13. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$

15.14. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2e^{x-2}-1\right)^{\frac{3x+2}{x-2}}$

15.15. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+\cos 3x)^{\sec x}$

15.16. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\frac{2x-7}{x+1}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-2)}$

15.17. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}$

15.18. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6-x}{3}\right)^{tg(\pi x/6)}$

15.19. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{tg(\pi x/2)}$

15.20. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{\frac{3x-1}{x-1}}$

15.21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2-x}{x}\right)^{1/\ln(2-x)}$

15.22. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{\sin(\pi x/2)}{\ln(2-x)}}$

15.23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(1+x)}{\ln(2-x)}}$

15.24. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\frac{18\sin x}{ctgx}}$

15.25. $\lim\limits_{x\to\pi}\left(ctg\frac{x}{4}\right)^{1/\cos(x/2)}$

15.26. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(ctg\frac{x}{2}\right)^{1/\cos x}$

15.27. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$

15.28. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$

15.29. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(tg\frac{x}{2}\right)^{tgx}$

15.30. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2-x}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

Задача 16. Вычислить предел функции

16.1. $$\lim_{x\to\pi/4}(tgx)^{ctgx}$$

16.2. $$\lim_{x\to e}\left(\frac{\ln x-1}{x-e}\right)^{\sin\frac{\pi}{2e}x}$$

16.3. $$\lim_{x\to 2}(\sin x)^{3/(1-x)}$$

16.4. $$\lim_{x\to\pi/4}\left(\frac{\ln tgx}{1-ctgx}\right)^{1/(x+\pi/4)}$$

16.5. $$\lim_{x\to\pi/6}(\sin x)^{6x/\pi}$$

16.6. $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sin 3\pi x}{\sin \pi x}\right)^{\sin^2(x-2)}$$

16.7. $$\lim_{x\to 3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\sin\pi x}$$

16.8. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-x^2)/(1-x)}$$

16.9. $$\lim_{x\to 1}\left(1+e^x\right)^{\frac{\sin\pi x}{1-x}}$$

16.10. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{tg9\pi x}{\sin 4\pi x}\right)^{x/(x+1)}$$

16.11. $$\lim_{x\to\pi/4}(\sin 2x)^{\frac{x^2-\pi^2/16}{x-\pi/4}}$$

16.12. $$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\arcsin(x-3)}{\sin 3\pi x}\right)^{x^2-8}$$

16.13. $$\lim_{x\to 1}\left(arctg\frac{x-3/4}{(x-1)}\right)^{x+1}$$

16.14. $$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\right)^{x^2/a^2}$$

16.15. $$\lim_{x\to\pi}\left(ctg\frac{x}{4}\right)^{\sin(x-\pi)}$$

16.16. $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\right)^{1/x}$$

16.17. $$\lim_{x\to\pi/4}(\sin x+\cos x)^{1/tgx}$$

16.18. $$\lim_{x\to\pi/8}(tg2x)^{\sin(\pi/8+x)}$$

16.19. $$\lim_{x\to 1}(\arcsin x)^{tg\pi x}$$

16.20. $$\lim_{x\to\pi}(x+\sin x)^{\sin x+x}$$

16.21. $$\lim_{x\to 1}\left(\ln^2 ex\right)^{1/(x^2+1)}$$

16.22. $$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)^{\pi/arctgx}$$

16.23. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)^{1/x^2}$$

16.24. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{e^{\sin\pi x}-1}{x-1}\right)^{x^2+1}$$

16.25. $$\lim_{x\to 2}(\cos\pi x)^{tg(x-2)}$$

16.26. $$\lim_{x\to 1/2}(\arcsin x+\arccos x)^{1/x}$$

16.27. $$\lim_{x\to\pi/2}(1+\cos x)^{\sin x}$$

16.28. $$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt[3]{x}+x-1\right)^{\sin(\pi x/4)}$$

16.29. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}\right)^{1/(2-x)}$$

16.30. $\lim\limits_{x\to 1}\left((e^{2x}-e^{2})/(x-1)\right)^{x+1}$

Задача 17. Вычислить предел

17.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[3]{n^{4}-3}+\sin n}$

17.2. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{arctgx\cdot\sin^{2}\dfrac{1}{x}+5\cos x}$

17.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{tgx\,arctg\dfrac{1}{x}}+3}{2-\lg(1+\sin x)}$

17.4. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4\cos x+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\ln(1+x)}$

17.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\ln(e+x\sin\frac{1}{x})}{\cos x+\sin x}$

17.6. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{(e^{\sin x}-1)\cos\dfrac{1}{x}+4\cos x}$

17.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-\cos n)\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2n+1}-1}$

17.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{n^{2}+1}\cdot arctg\dfrac{n}{n^{2}+1}\right)$

17.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-\sin n}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^{3}-7}}$

17.10. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sqrt{(2x-\pi)\sin\dfrac{x}{2x-\pi}+3\sin x}$

17.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{2+n^{5}}-\sqrt{2n^{3}+3}}{\sqrt{7n}(n+\sin n)}$

17.12. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4\cos 3x+x\,arctg(1/x)}$

17.13. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2\cos^{2}x+(e^{x}-1)\sin\dfrac{1}{x}}$

17.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\ln(1+x)\sqrt{2+\cos(1/x)}}{2+e^{x}}$

17.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(1+x)}{(2+\sin\frac{1}{x})\ln(1+x)+2}$

17.16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos 2\pi x}{2+(e^{\sqrt{x-1}}-1)arctg\dfrac{x+2}{x-1}}$

17.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^{2}\cos n}+\sqrt{3n^{2}+2}}{\sqrt[5]{n^{6}+1}}$

17.18. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sqrt[3]{tgx}+(4x-\pi)\cos\dfrac{x}{4x-\pi}}{\lg(2+tgx)}$

17.19. $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{\dfrac{1+\cos\pi x}{4+(x+2)\sin\dfrac{x}{x+2}}}$

17.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2}-\sqrt{3n^{5}-7}}{(n^{2}-n\cos n+1)\sqrt{n}}$

17.23. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x(2+\sin\frac{1}{x})+4\cos x}$

17.25.

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\lg(x+2)+\sin\sqrt{4-x^2}\cos\frac{x+2}{x-2}}$$

17.27. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt[3]{2n^2+1}}{n+2\sin n}$$

17.29.

$$\lim_{x\to 0}\lg\left[(e^{x^2}-\cos x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)+tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

17.20. $$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{1/n}+\sin\frac{n}{n^2+1}\cdot\cos n}{1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$$

17.22. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2+\cos x\cdot\sin\frac{2}{2x-\pi}}{3+2x\cdot\sin x}$$

17.24.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin x+\sin\pi x\,arctg\frac{1+x}{1-x}}{1+\cos x}$$

17.26.

$$\lim_{x\to 1}tg\left(\cos x+\sin\frac{x-1}{x+1}\cdot\cos\frac{x+1}{x-1}\right)$$

17.28.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3-2n+1}-\sqrt{n^3-2n+2}}{n+\cos^2 n}$$

17.30. $$\lim_{x\to 0}\frac{tgx\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\lg(2+x)}{\lg(4+x)}$$

Редактор Т.Д.Неведомская

Подписано в печать 10.06.2002 г.

| | | |
|---|---|---|
| Печать офсетная | Формат 60x84/16 | 2,25 уч.-изд. л. |
| 2,09 усл.печ.л. | Заказ №826/ | Тираж 150 экз. |

*Московский государственный технический университет ГА*
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20
*Редакционно-издательский отдел*
125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а