МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Кафедра прикладной математики
В.Л. Кузнецов, Т.В. Лоссиевская

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ПОСОБИЕ
по изучению дисциплины и типовые задания

для студентов I курса
специальности 073000
дневного обучения

Москва - 2004

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. А.В. Самохин
Кузнецов В.Л., Лоссиевская Т.В.

Математический анализ. Несобственные интегралы: Пособие по изучению дисциплины и типовые задания. – М.: МГТУ ГА, 2004. – 40 с.

Данное пособие издается в соответствии с учебным планом для студентов I курса специальности 073000 дневного обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 28.08.03г. и методического совета 28.08.03г.

Редактор И.В. Вилкова

	Подписано в печать 19.01.04 г.	
Печать офсетная	Формат 60x84/16	2,5 уч.-изд. л.
2,32 усл.печ.л.	Заказ № 1127/1715	Тираж 150 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а

I. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1.1. Несобственный интеграл 1-го рода.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,+\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a,\xi]\subset[a,+\infty)$. Символ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется несобственным интегралом 1-го рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a,+\infty)$.

Определение 2. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, если существует конечный $\lim\limits_{\xi\to+\infty}\int\limits_a^{\xi} f(x)dx$, в противном случае этот несобственный интеграл называется расходящимся.

Сходящийся несобственный интеграл определяется равенством

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\xi\to+\infty}\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx. \qquad (1)$$

Отметим, что для расходящегося несобственного интеграла либо $\lim\limits_{\xi\to+\infty}\int\limits_a^{\xi} f(x)dx=\infty$, либо $\lim\limits_{\xi\to+\infty}\int\limits_a^{\xi} f(x)dx$ не существует.

Пример 1. Исследовать сходимость интеграла $I(p)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$.

Решение.

а) $p\neq 1$. Имеем

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{\xi\to+\infty}\int\limits_1^{\xi}\frac{dx}{x^p}=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^{\xi}=\frac{1}{p-1}\lim_{\xi\to+\infty}\left(1-\xi^{1-p}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p<1\end{cases}.$$

Отсюда следует, что $I(p)$ сходится при $p>1$ и расходится при $p<1$.

б) $p=1$. Тогда

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{\xi\to+\infty}\int\limits_1^{\xi}\frac{dx}{x}=\lim_{\xi\to+\infty}\ln x\Big|_1^{+\infty}=\lim_{\xi\to+\infty}\ln\xi=+\infty$$

Таким образом, интеграл $I(1)$ расходится.

Ответ: интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\leq 1$.

Пример 2. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\cos x\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int_0^{+\infty}\cos x dx = \lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\xi}\cos x dx = \lim_{\xi\to+\infty}\sin x\,|_0^{\xi} = \lim_{\xi\to+\infty}\sin\xi \text{ - не существует.}$$

Ответ: интеграл $\int_0^{+\infty}\cos x dx$ расходится.

Аналогично интегралу $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ определяются следующие интегралы:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{\xi\to-\infty}\int_{\xi}^{a} f(x)dx, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx,\ b\in R, \tag{3}$$

причем интеграл в левой части (3) сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба интеграла в правой части (3)

1.2. Несобственный интеграл 2-го рода.

Определение 3. Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a,b)$, интегрируема на любом отрезке $[a,\xi]\subset[a,b)$. Символ $\int_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом 2-го рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a,b)$.

Определение 4. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ $(a<b<+\infty)$ называется сходящимся, если существует конечный $\lim\limits_{\xi\to b-0}\int_a^{\xi} f(x)dx$, в противном случае этот интеграл называется расходящимся.

Сходящийся несобственный интеграл определяется равенством

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi\to b-0}\int_a^{\xi} f(x)dx. \tag{4}$$

Отметим, что определение 4 сходящегося несобственного интеграла 2-го рода на промежутке $[a,b)$ является содержательным лишь в том случае, когда функция $f(x)$ неограничена на любом интервале $(b-\delta,b),\ \delta\in(0,b-a)$. Действительно, если функция $f(x)$ интегрируема (в смысле Римана) на любом отрезке $[a,\xi]\subset[a,b)$, ограничена на $[a,b)$, то, доопределив $f(x)$ в точке b, получим функцию, интегрируемую по Риману на отрезке $[a,b]$, причем интеграл Римана от этой функции равен пределу в правой части (4) и не зависит от $f(b)$. Поэтому при рассмотрении несобственных интегралов 2-го рода на промежутке $[a,b)$ будем считать, что функция $f(x)$ неограничена на любом интервале $(b-\delta,b),\ \delta\in(0,b-a)$.

Определение 5. Точка $b(b\neq\infty)$ числовой оси называется особой точкой подынтегральной функции $f(x)$ (см. (4)), если на любом интервале $(b-\delta,b),\ \delta\in(0,b-a)$ она является неограниченной.

Аналогично интегралу (4) определяются интегралы:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi\to a+0} \int_\xi^b f(x)dx,\ a \text{ - особая точка},$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ c \in (a,b) \text{ - особая точка}.$$

Пример 3. Исследовать сходимость интеграла $I(p) = \int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

Решение. а) $p \neq 1$. Имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\xi\to+0} \int_\xi^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\xi\to+0} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_\xi^1 = \frac{1}{1-p}\lim_{\xi\to+0}\left(1-\xi^{1-p}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & p<1, \\ +\infty, & p>1 \end{cases}.$$

Отсюда следует, что интеграл $I(p)$ сходится при $p<1$ и расходится при $p>1$.

б) $p=1$. $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi\to+0}\int_\xi^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi\to+0} \ln x\,\Big|_\xi^1 = \lim_{\xi\to+0}\left(-\ln\xi\right) = +\infty$.

Таким образом, интеграл $I(1)$ расходится.

Ответ: интеграл $I(p) = \int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p<1$ и расходится при $p \geq 1$.

1.3. Другие типы несобственных интегралов.

Определение 6. Пусть функция $f(x)$ определена на конечном или бесконечном промежутке (a,b) за исключением точек $x_k, k=\overline{1,n}$, где $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Тогда по определению несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx. \tag{5}$$

Определение 7. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется сходящимся, если сходится каждый из интегралов в правой чисти (5). В противном случае интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется расходящимся.

В дальнейшем мы будем рассматривать несобственные интегралы вида $\int_a^b f(x)dx$ в предположении, что:

а) функция $f(x)$ определена при $a \leq x < b$, где b - либо конечная точка, либо $b=+\infty$,

б) функция $f(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,\xi] \subset [a,b)$.

Тогда по определению сходящегося несобственного интеграла:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\xi\to+\infty} \int_a^{\xi} f(x)dx, \quad b = +\infty \text{ (несобственный интеграл 1-го рода)},$$

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\xi\to b-0} \int_a^{\xi} f(x)dx, \quad b \neq +\infty \text{ (несобственный интеграл 2-го рода)}.$$

2. СВОЙСТВА НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

2.1. Линейность.

Если сходятся интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$, то при любых $\alpha, \beta \in R$ сходится интеграл $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$ и имеет место равенство

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx .$$

2.2. Формула Ньютона - Лейбница. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b)$, $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный $\lim\limits_{\xi\to b-0} F(\xi) = F(b-0)$, причем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a). \tag{6}$$

Формула (6) называется формулой Ньютона - Лейбница для несобственного интеграла.

Замечание. Если $b = +\infty$, то в формуле (6) $F(b-0) = F(+\infty)$.

2.3. Интегрирование по частям. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a,b)$ и существует конечный $\lim\limits_{\xi\to b-0} (u(\xi)v(\xi)) = u(b-0)v(b-0) = uv\,|_{\xi=b-0}$.

Тогда интегралы $\int_a^b u(x)v'(x)dx$, $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся. Если указанные интегралы сходятся, то имеет место формула

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\,\Big|_a^{b-0} - \int_a^b u'(x)v(x)dx . \tag{7}$$

Формула (7) называется формулой интегрирования по частям.

2.4. Замена переменной. Пусть:

1) функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b)$;

2) функция $x = \varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha, \beta)$;

б) строго возрастает;

в) $\varphi(\alpha) = a, \quad \lim\limits_{t\to\beta-0} \varphi(t) = b$.

Тогда имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (8)$$

при условии, что хотя бы один из интегралов (8) сходится.

Формула (8) - формула замены переменной.

Замечание. Формула (8) верна и в случае, когда функция $\varphi(t)$ строго убывает.

2.5. Интегрирование неравенств. Если сходятся интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ и для всех $x \in [a,b)$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

Теорема 1 (теорема сравнения). Пусть для всех $x \in [a,b)$ выполняются неравенства $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда:

а) если интеграл $I_2 = \int_a^b g(x)dx$ сходится, то интеграл $I_1 = \int_a^b f(x)dx$ также сходится;

б) если интеграл I_1 расходится, то интеграл I_2 расходится.

Следствие. Пусть:

1) $f(x) > 0, \quad g(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b)$;

2) $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b-0$.

Тогда интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Заметим, что в исследованиях несобственных интегралов на сходимость при применении теоремы сравнения или ее следствия часто используются так называемые "эталонные" несобственные интегралы $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ (см. пример 1, п. 1.1.) и $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ (см. пример 3, п. 1.2.).

4. КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

Теорема 2 (критерий Коши). Для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a,b) : \forall \xi', \xi'' \in (\delta, b) \Rightarrow \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx \right| < \varepsilon .$$

Следствие. Если существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta \in (a,b)$ существуют такие $\xi_0', \xi_0'' \in (\delta, b)$, что выполняется неравенство $\left| \int_{\xi_0'}^{\xi_0''} f(x)dx \right| \ge \varepsilon_0$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

5. АБСОЛЮТНО И УСЛОВНО СХОДЯЩИЕСЯ ИНТЕГРАЛЫ.

Обозначим $I = \int_a^b f(x)dx$ - несобственный интеграл, $\hat{I} = \int_a^b |f(x)|dx$.

Определение 8. Несобственный интеграл I называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\hat{I}$.

Определение 9. Несобственный интеграл I называется условно сходящимся, если интеграл $\hat{I}$ расходится, а интеграл I сходится.

Теорема 3. Если несобственный интеграл $\hat{I}$ сходится, то интеграл I также сходится и имеет место неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

6. ПРИЗНАКИ ДИРИХЛЕ И АБЕЛЯ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ.

Теорема 4 (признак Дирихле). Пусть функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[a,+\infty)$ и выполняются следующие условия:

1) функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ограничена на $[a,+\infty)$;

2) функция $g'(x)$ не меняет знака на промежутке $[a,+\infty)$, т.е. $g'(x) \le 0$ или $g'(x) \ge 0$ на $[a,+\infty)$;

3) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Следствие (признак Абеля). Пусть:

1) функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,+\infty)$;

2) интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ сходится;

3) функция $g(x)$ ограничена на промежутке $[a,+\infty)$;

4) функция $g'(x)$ непрерывна и не меняет знака на промежутке $[a,+\infty)$.

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

7. ГЛАВНОЕ ЗНАЧЕНИЕ НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛА.

Определение 10. Пусть функция $f(x)$ определена при $x \in R$ и интегрируема на любом отрезке $[\xi,\eta] \subset R$. Если существует конечный $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx$, то он называется главным значением в смысле Коши интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ и обозначается v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Замечание 1. Если несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то главное значение этого интеграла существует и равно этому интегралу:

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Обратное, вообще говоря, не имеет места.

Замечание 2. Если функция $f(x)$ нечетна, то главное значение интеграла от нее существует и равно нулю.

Определение 11. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $[a,c)\cup(c,b]$, c - особая точка функции. Пусть, кроме того, функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[\xi,\eta]\subset[a,c)\cup(c,b]$. Если существует конечный $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right)$, то он называется главным значением в смысле Коши интеграла $\int_a^b f(x)dx$ и обозначается v.p. $\int_a^b f(x)dx$.

Отметим, что для таких интегралов также справедливо замечание 1.

II. РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ.

Задачи 1-3. Используя определение, вычислить интеграл или установить его расходимость.

а) $I = \int_1^{+\infty} \frac{arctgx}{x^3}dx$.

Решение. Интеграл I является несобственным интегралом 1-го рода. Поэтому

$$I = \lim_{\xi\to+\infty} \int_1^{\xi} \frac{arctgx}{x^3}dx = \lim_{\xi\to+\infty} I(\xi) \tag{1}$$

Для вычисления интеграла $I(\xi)$ применяем формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= -\frac{1}{2x^2}arctgx\Big|_1^{\xi} + \frac{1}{2}\int_1^{\xi}\frac{dx}{x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{2\xi^2}arctg\xi + \frac{\pi}{8} + \\ &+ \frac{1}{2}\int_1^{\xi}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2\xi^2}arctg\xi + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} - arctgx\right)\Big|_1^{\xi} = \frac{\pi}{8} - \\ &- \frac{1}{2\xi^2}arctg\xi - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi} + arctg\xi - 1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}arctg\xi - \frac{1}{2\xi} - \\ &- \frac{1}{2\xi^2}arctg\xi \end{aligned} \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$I = \lim_{\xi\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}arctg\xi - \frac{1}{2\xi} - \frac{1}{2\xi^2}arctg\xi\right) = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $I = \frac{1}{2}$.

б) $I = \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$.

Решение. Интеграл I - несобственный интеграл 1-го рода. Имеем

$$I=\lim_{\xi\to+\infty}\int_2^{\xi}\frac{\ln x}{x}dx=\lim_{\xi\to+\infty}\int_2^{\xi}\ln x d\ln x=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}\ln^2 x\,|_2^{\xi}=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}\left(\ln^2\xi-\ln^2 2\right)=+\infty.$$

Отсюда следует

Ответ: интеграл I расходится.

в) $I=\int_3^7\frac{xdx}{\sqrt{x-3}}$.

Решение. Интеграл I - несобственный интеграл 2-го рода, особая точка подынтегральной функции $x=3$. Поэтому

$$I=\lim_{\xi\to3+0}\int_{\xi}^{7}\frac{xdx}{\sqrt{x-3}}=\lim_{\xi\to3+0}\int_{\xi}^{7}\left(\sqrt{x-3}+\frac{3}{\sqrt{x-3}}\right)dx=$$

$$=\lim_{\xi\to3+0}\left(\frac{2}{3}(x-3)^{3/2}+6(x-3)^{1/2}\right)|_{\xi}^{7}=$$

$$=\lim_{\xi\to3+0}\left(\frac{16}{3}+12-\frac{2}{3}(\xi-3)^{3/2}-6(\xi-3)^{1/2}\right)=\frac{52}{3}$$

Ответ: $I=\frac{52}{3}$.

г) $I=\int_{-1}^{1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx$.

Решение. Интеграл I является несобственным интегралом 2-го рода, особая точка $x=0$ - находится внутри отрезка интегрирования. Тогда

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx+\int_{0}^{1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx\equiv I_1+I_2.$$

Для сходимости интеграла I необходимо и достаточно, чтобы сходились оба интеграла I_1 и I_2.

Рассмотрим интеграл I_1. Имеем

$$I_1=\lim_{\xi\to-0}\int_{-1}^{\xi}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx=\lim_{\xi\to-0}\int_{-1}^{\xi}\left(x^{-2/3}-x^{-5/3}\right)dx=\lim_{\xi\to-0}\left(3x^{1/3}+\frac{3}{2}x^{-2/3}\right)|_{-1}^{\xi}=$$

$$=\lim_{\xi\to-0}\left(3\xi^{1/3}+\frac{3}{2}\xi^{-2/3}+3-\frac{3}{2}\right)=+\infty$$

Отсюда получаем, что интеграл I_1 расходится. Итак, независимо от поведения интеграла I_2 интеграл I расходится.

Ответ: интеграл I расходится.

д) $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

Решение. В интеграле I область интегрирования - бесконечный промежуток $(1,+\infty)$; кроме того, подынтегральная функция имеет особую точку $x=1$. Поэтому интеграл I разбиваем на сумму несобственных интегралов 1-го и 2-го рода:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \equiv I_1 + I_2 . \qquad (3)$$

Имеем

$$\int_a^b \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = 2\int_a^b \frac{d\left(\sqrt{x-1}\right)}{x} = 2\int_a^b \frac{d\left(\sqrt{x-1}\right)}{1+\left(\sqrt{x-1}\right)^2} = \qquad (4)$$
$$= 2arctg\sqrt{x-1}\,\Big|_a^b = 2\left(arctg\sqrt{b-1} - arctg\sqrt{a-1}\right)$$

Таким образом, используя (4), получим

$$I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{\xi\to 1+0} \int_\xi^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{\xi\to 1+0} 2\left(\frac{\pi}{4} - arctg\sqrt{\xi-1}\right) = \frac{\pi}{2} . \qquad (5)$$

$$I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{\xi\to +\infty} \int_2^\xi \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{\xi\to +\infty} 2\left(arctg\sqrt{\xi-1} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} . \qquad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (3), получим

$I = I_1 + I_2 = \pi$.

Ответ: $I = \pi$.

Задачи 4 - 6. Исследовать сходимость интеграла.

а) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\left(x^2+3\right)dx}{x^9+25x^7+14}$.

Решение. Интеграл I - несобственный интеграл 1-го рода, подынтегральная функция положительна при любом $x \in [0,+\infty)$. Кроме того, $\frac{x^2+3}{x^9+25x^7+14} \sim \frac{1}{x^7}$ при $x \to +\infty$.

Используя следствие из теоремы 1 (теорема сравнения) и результат примера 1 $(p = 7)$, отсюда получим

Ответ: интеграл I сходится.

б) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{x^2+52}}$.

Решение. Как и в предыдущем случае, интеграл I - несобственный интеграл 1-го рода с неотрицательной подынтегральной функцией. Здесь невозможно непосредственно использовать теорему сравнения или ее следствие. Исследуем сходимость этого интеграла двумя способами.

1-й способ. Используя следствие из критерия Коши, докажем, что интеграл I расходится. Это означает, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ существуют $\xi_0', \xi_0'' \in (\delta,+\infty)$ такие, что

$$\left|\int_{\xi_0'}^{\xi_0''} \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{x^2+52}}\right| \geq \varepsilon_0 . \qquad (7)$$

Пусть $\xi_0' = \pi n,\ \xi_0'' = 2\pi n,\ n \in N,\ n \geq 3$. Тогда

$$\int_{\xi_0'}^{\xi_0''}\frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{x^2+52}}=\int_{\pi n}^{2\pi n}\frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{x^2+52}}>\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\pi n}^{2\pi n}\frac{\sin^2 x dx}{x}>\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 2\pi n}\int_{\pi n}^{2\pi n}\sin^2 x dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 4\pi n}\int_{\pi n}^{2\pi n}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\varepsilon_0$$

Таким образом, для любого $\delta>0$ существуют $\xi_0'=\pi n, \xi_0''=2\pi n\left(\xi_0''>\xi_0'>\delta\right)$ такие, что выполняется неравенство (7) при $\varepsilon_0=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$. Значит, интеграл I расходится.

2-й способ. Имеем

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{\sqrt{x^2+52}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+52}}-\frac{1}{2}\int\frac{\cos 2x dx}{\sqrt{x^2+52}}=\frac{1}{2}I_1-\frac{1}{2}I_2. \qquad (8)$$

По следствию из теоремы сравнения интеграл I_1 расходится, так как $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+52}}\sim\dfrac{1}{x}$ при $x\to+\infty$.

Что касается интеграла I_2, то для его исследования используем признак Дирихле (теорема 4), так как подынтегральная функция не является знакопостоянной. Имеем:

функция $f(x)=\cos 2x$ непрерывна, а функция $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+52}}$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[0,+\infty)$; далее

1) первообразная функции $f(x)$ равна $\dfrac{1}{2}\sin 2x$ и, следовательно, ограничена на промежутке $[0,+\infty)$;

2) функция $g(x)$ монотонно убывает на промежутке $[0,+\infty)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

Следовательно, по признаку Дирихле интеграл I_2 сходится. Учитывая, что интеграл I_1 расходится, а интеграл I_2 сходится, из (8) получим, что интеграл I расходится.

Ответ: интеграл I расходится.

в) $I=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

Решение. Имеем $e^{-x^2}=e^{x-x^2}\cdot e^{-x}$. Легко доказать, что $0<e^{x-x^2}\le\sqrt[4]{e}$. Тогда

$$0<e^{-x^2}\le\sqrt[4]{e}\cdot e^{-x}. \qquad (9)$$

Очевидно, что $\tilde{I}=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$. Так как интеграл $\tilde{I}$ сходится, то из неравенств (9) и теоремы сравнения следует

Ответ: интеграл I сходится.

г) $I=\int\limits_0^1\dfrac{x^3dx}{\sqrt[16]{1-x^2}}$.

Решение. Интеграл I - несобственный интеграл 2-го рода, $x=1$ - особая точка подынтегральной функции. Имеем

$$0\le\frac{x^3}{\sqrt[16]{1-x^3}}=\frac{x^3}{(1-x)^{1/16}\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)^{1/16}}\le\frac{1}{(1-x)^{1/16}},\ x\in[0,1). \qquad (10)$$

Так как интеграл $\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^{1/16}}$ сходится (см. пример 3, $p=\frac{1}{16}$), то из теоремы сравнения и из (10) следует

Ответ: интеграл I сходится.

д) $I=\int_0^1\frac{\ln\cos x}{\sqrt{x^3-x^7}}dx$.

Решение. Интеграл I - несобственный интеграл 2-го рода, особая точка $x=1$. Что касается точки $x=0$, то

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt{x^3-x^7}}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x-1}{x^{3/2}}=\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^{3/2}}=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)=0.$$

Таким образом, точка $x=0$ не является особой.

Рассмотрим точку $x=1$. Имеем

$$0<\frac{-\ln\cos x}{\sqrt{x^3-x^7}}=\frac{|\ln\cos x|}{\sqrt{x^3}\sqrt{1-x}\sqrt{1+x+x^2+x^3}}\sim\frac{|\ln\cos 1|}{2\sqrt{1-x}},\quad x\to 1. \qquad (11)$$

Так как интеграл $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится, то из (11) и следствия из теоремы сравнения получим

Ответ: интеграл I сходится.

е) $I=\int_0^2\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\ln^2 x}dx$.

Решение. Интеграл I - несобственный интеграл 2-го рода, особая точка $x=1$ - внутренняя точка промежутка интегрирования. Поэтому

$$I=\int_0^2\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\ln^2 x}dx=\int_0^1\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\ln^2 x}dx+\int_1^2\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\ln^2 x}dx\equiv I_1+I_2.$$

В интеграле I_1 сделаем замену переменной $x=1-t$. Тогда $I_1=\int_0^1\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{\ln^2(1-t)}dt$, особая точка $t=0$. Имеем $\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{\ln^2(1-t)}\sim\frac{\pi}{2t}$ при $t\to 0$. Так как интеграл $\int_0^1\frac{\pi}{2t}dt$ расходится, то по следствию из теоремы сравнения интеграл I_1 также расходится. Таким образом, независимо от результата исследования интеграла I_2 отсюда получаем

Ответ: интеграл I расходится.

ж) $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha arctgx}{1+x^\beta} dx, \ \beta \geq 0$.

Решение. Так как

$$\frac{x^\alpha arctgx}{1+x^\beta} \sim x^{\alpha+1} \text{ при } x \to +0, \tag{12}$$

то при $\alpha < -1$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$. Поэтому интеграл I разбиваем на два интеграла:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha arctgx}{1+x^\beta} dx = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty} \equiv I_1 + I_2,$$

интеграл I_1 - несобственный интеграл 2-го рода, I_2 - 1-го рода. Из соотношения (12) и из следствия из теоремы сравнения получим, что интеграл I_1 сходится при $\alpha + 1 > -1$ (см. пример 3), т.е. при $\alpha > -2$. Далее

$0 < \frac{x^\alpha arctgx}{1+x^\beta} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$ при $x \to +\infty$.

Отсюда и из следствия из теоремы сравнения получим, что интеграл I_2 сходится при $\beta - \alpha > 1$ (см. пример 1). Объединяя эти результаты, получим

Ответ: интеграл I сходится при $-2 < \alpha < \beta - 1$.

з) $I = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$.

Решение. Если $p < 1$, то подынтегральная функция имеет особенность при $x = 0$. Поэтому

$$I = \int\limits_0^{+\infty} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty} \equiv I_1 + I_2, \tag{13}$$

интеграл I_1 - несобственный интеграл 2-го рода, интеграл I_2 - 1-го рода.

Имеем $x^{p-1}e^{-x} \sim x^{p-1}$ при $x \to +0$. Следовательно, интеграл I_1 сходится при $p > 0$. Далее

$$x^{p-1}e^{-x} = x^{p-1}e^{-\frac{x}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, \tag{14}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{p-1}e^{-\frac{x}{2}} = 0$ при любом $p \in R$. Следовательно, непрерывная на промежутке $[1, +\infty)$ функция $x^{p-1}e^{-\frac{x}{2}}$ ограничена, т.е. существует положительная константа M_p такая, что

$$0 < x^{p-1}e^{-\frac{x}{2}} \leq M_p. \tag{15}$$

Из (14) и (15) получим

$$0 < x^{p-1}e^{-x} \leq M_p e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \in [1, +\infty). \tag{16}$$

Так как $\int\limits_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx$ сходится, то по теореме сравнения из (16) следует, что сходится интеграл $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ при любом $p \in R$.

Объединяя результаты, из (13) получим

Ответ: интеграл I сходится при $p > 0$.

и) $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-5x}}{\sqrt[3]{x^5 - x^4}}dx$.

Решение. Подынтегральная функция имеет особые точки при $x = 0$ и $x = 1$. Поэтому $I = \int\limits_0^{+\infty} \equiv \int\limits_0^{1/2} + \int\limits_{1/2}^{1} + \int\limits_1^2 + \int\limits_2^{+\infty} \equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4$. Имеем $\frac{e^{-2x} - e^{-5x}}{\sqrt[3]{x^5 - x^4}} = \frac{e^{-5x}\left(e^{3x} - 1\right)}{x^{4/3}(x-1)^{1/3}} \sim -\frac{3}{x^{1/3}}$, $x \to +0$. Отсюда следует, что интеграл I_1 сходится.

Далее, $\frac{e^{-2x} - e^{-5x}}{x^{4/3}(x-1)^{1/3}} \sim \frac{e^{-2} - e^{-5}}{(x-1)^{1/3}}$, $x \to 1$. Отсюда получим, что интегралы I_2 и I_3 также сходятся.

Наконец, $I_4 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-5x}}{\sqrt[3]{x^5 - x^4}}dx = \int\limits_2^{+\infty} \frac{e^{-2x}dx}{\sqrt[3]{x^5 - x^4}} - \int\limits_2^{+\infty} \frac{e^{-5x}dx}{\sqrt[3]{x^5 - x^4}} \equiv I_5 - I_6$.

Интегралы I_5 и I_6 однотипны. Поэтому рассмотрим $\varphi(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{\sqrt[3]{x^5 - x^4}}$, $\alpha > 0$. Имеем

$$0 < \frac{e^{-\alpha x}}{\sqrt[3]{x^5 - x^4}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{16}}e^{-\alpha x},\ x \in [2, +\infty).$$

Интеграл $\int\limits_2^{+\infty} e^{-\alpha x}dx$ сходится при $\alpha > 0$. Отсюда следует, что сходятся интегралы I_5 и I_6, а значит, и интеграл I_4.

Объединяя результаты, получим

Ответ: интеграл I сходится.

Задачи 7, 8. Исследовать интеграл на абсолютную и условную сходимость.

а) $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 7x dx}{\sqrt[3]{5x^6 + 3x^5}}$.

Решение. Исследуем интеграл I на абсолютную сходимость. Обозначим

$$\hat{I} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin 7x| dx}{\sqrt[3]{5x^6 + 3x^5}}.$$

Особая точка подынтегральной функции $x = 0$. Поэтому интеграл $\hat{I}$ разобьем на два интеграла

$$\hat{I}=\int\limits_0^1\frac{|\sin 7x|dx}{\sqrt[3]{5x^6+3x^5}}+\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\sin 7x|dx}{\sqrt[3]{5x^6+3x^5}}\equiv I_1+I_2. \quad (17)$$

Интеграл I_1 - несобственный интеграл 2-го рода. Имеем

$\frac{|\sin 7x|}{\sqrt[3]{5x^6+3x^5}}\sim\frac{7x}{\sqrt[3]{3x^5}}=\frac{7}{\sqrt[3]{3}\cdot x^{2/3}}$ при $x\to+0$. Отсюда и из следствия из теоремы сравнения получаем, что интеграл I_1 сходится (см. пример 3).

Интеграл I_2 - несобственный интеграл 1-го рода. Имеем

$$\frac{|\sin 7x|}{\sqrt[3]{5x^6+3x^5}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{5}\cdot x^2},\quad x\in[1,+\infty).$$

Используя теорему сравнения и результат примера 1, отсюда получаем, что интеграл I_2 сходится.

Таким образом, эти результаты и (17) дают, что интеграл I сходится. Значит,

Ответ: интеграл I сходится абсолютно.

б) $I=\int\limits_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}}dx$.

Решение. Интеграл I - несобственный интеграл 2-го рода, особая точка $x=0$. Сделаем замену переменной $x=\frac{1}{t}$. Это возможно, так как

1) функция $f(x)=\frac{\sin\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}}$ непрерывна на промежутке $(0,1]$;

2) функция $\varphi(t)=\frac{1}{t}$ удовлетворяет следующим условиям:

а) непрерывно дифференцируема на промежутке $[1,+\infty)$;

б) строго убывает;

в) $\varphi(1)=1,\quad \lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=0$.

Тогда

$$\int\limits_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}}dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt\equiv\tilde{I}. \quad (18)$$

$\tilde{I}$ - несобственный интеграл 1-го рода. По признаку Дирихле интеграл $\tilde{I}$ сходится, так как:

1) функция $u(t)=\sin t$ непрерывна на промежутке $[1,+\infty)$ и ее первообразная $U(t)=-\cos t$ ограничена;

2) $g(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[1,+\infty)$ и $g'(t)=-\frac{1}{2t\sqrt{t}}<0$;

3) $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0$.

Итак, интеграл $\breve{I}$ сходится, а значит, сходится и интеграл I.

Докажем теперь, что интеграл $\hat{I}=\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}dt$ расходится. Имеем

$$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}dt \geq \int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2t}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}}-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{\sqrt{t}}dt \equiv \frac{1}{2}I_1-\frac{1}{2}I_2 .$$

Известно, что интеграл I_1 расходится (см. пример 1). По признаку Дирихле интеграл I_2 сходится (доказывается точно так же, как сходимость интеграла $\breve{I}$ - см. выше). Таким образом, интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}I_1-\frac{1}{2}I_2$ расходится. Так как $\hat{I}=\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|dt}{\sqrt{t}}\geq\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}}dt$, то по теореме сравнения интеграл $\hat{I}$ также расходится.

Следовательно, интеграл I сходится условно, и значит (см. (18)),

Ответ: интеграл I сходится условно.

в) $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2x^3+x)}{\sqrt[3]{x+25}}dx$.

Решение. Интеграл I - несобственный интеграл 1-го рода. Используя признак Дирихле, докажем, что он сходится. Действительно,

$$\frac{\sin(2x^3+x)}{\sqrt[3]{x+25}}=(6x^2+1)\sin(2x^3+x)\cdot\frac{1}{(6x^2+1)\sqrt[3]{x+25}}\equiv f(x)\cdot g(x).$$

Выполняются следующие условия:

1) функция $f(x)=(6x^2+1)\sin(2x^3+x)$ непрерывна на промежутке $[0,+\infty)$; ее первообразная $F(x)=-\cos(2x^3+x)$ ограничена;

2) функция $g(x)=\frac{1}{(6x^2+1)\sqrt[3]{x+25}}$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[0,+\infty)$ и монотонно убывает $(g'(x)<0)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

Точно так же, как в задаче б) доказывается, что интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin(2x^3+x)|}{\sqrt[3]{x+25}}dx$ расходится.

Таким образом, получаем

Ответ: интеграл I сходится условно.

г) $I=\int_0^{+\infty}e^{2\cos x}\,\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to+0}e^{2\cos x}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}=0$. Поэтому точка $x=0$ не является особой точкой подынтегральной функции. Значит, интеграл I является несобственным интегралом 1-го рода.

Так как функция $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ не является непрерывной в точке $x=0$, то для дальнейшего исследования интеграл I разобьем на два интеграла:

$$I=\int_0^1 e^{2\cos x}\,\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}dx+\int_1^{+\infty} e^{2\cos x}\,\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}dx \equiv I_1+I_2. \qquad (19)$$

Если подынтегральную функцию доопределить нулем в точке $x=0$, то она становится непрерывной на отрезке $[0,1]$. Следовательно, I_1 - интеграл Римана и он существует.

Что касается интеграла I_2, то его мы исследуем на абсолютную и условную сходимость.

Докажем сначала, используя признак Дирихле, что интеграл I_2 сходится. Действительно,

1) функция $f(x)=e^{2\cos x}\sin 2x$ непрерывна на промежутке $[1,+\infty)$; ее первообразная $F(x)=e^{2\cos x}\left(\dfrac{1}{2}-\cos x\right)$ (проверить) - ограничена;

2) функция $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[1,+\infty)$ и монотонно убывает $(g'(x)<0)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

Рассмотрим теперь интеграл $\hat{I}_2=\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{2\cos x}\,\frac{|\sin 2x|}{\sqrt{x}}dx$.

Имеем $e^{2\cos x}\dfrac{|\sin 2x|}{\sqrt{x}}\ge e^{-2}\dfrac{\sin^2 2x}{\sqrt{x}}$. Точно так же, как в задаче б) доказывается, что интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 2x}{\sqrt{x}}dx$ расходится. Следовательно, по теореме сравнения интеграл $\hat{I}_2$ расходится.

Таким образом, мы имеем: интеграл $\hat{I}_2$ расходится, а интеграл I_2 сходится. Отсюда следует, что интеграл I_2 сходится условно.

Учитывая (19) и то, что интеграл Римана I_1 существует, отсюда получаем

Ответ: интеграл I сходится условно.

д) $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{\left(1-x^3\right)^p}dx$.

Решение. Интеграл I - несобственный интеграл 2-го рода, особая точка $x=1$.

1^0. Пусть $\hat{I}=\displaystyle\int_0^1\frac{\left|\sin\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right|}{\left(1-x^3\right)^p}dx$. Имеем $\dfrac{\left|\sin\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right|}{\left(1-x^3\right)^p}\le\dfrac{1}{(1-x)^p}$. Известно, что $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^p}$ сходится при $p<1$ (см. пример 3). Следовательно, по теореме сравнения интеграл $\hat{I}$ сходится, а значит, интеграл I сходится абсолютно при $p<1$.

2^0. Пусть теперь $p \geq 1$. В интеграле I сделаем замену переменной $t = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, или $x = 1 - \frac{1}{t^2}$. Это возможно, так как

1) функция $f(x) = \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{(1-x^3)^p}$ непрерывна на промежутке $[0,1)$;

2) функция $\varphi(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$ удовлетворяет следующим условиям:

а) непрерывно дифференцируема на промежутке $[1,+\infty)$;

б) строго возрастает;

в) $\varphi(1) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t) = 1$.

Тогда

$$I = \int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{(1-x^3)^p}dx = 2\int_1^{+\infty}\frac{\sin t dt}{t^{3-6p}(3t^4-3t^2+1)^p} \equiv 2I_1. \qquad (20)$$

α) Докажем сначала, что интеграл I_1 расходится при $p \geq \frac{3}{2}$. Используем следствие из критерия Коши:

если существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 1$ существуют такие $\xi_0', \xi_0'' \in (\delta, +\infty)$, что выполняется неравенство

$$\left|\int_{\xi_0'}^{\xi_0''}\frac{\sin t dt}{t^{3-6p}(3t^4-3t^2+1)^p}\right| \geq \varepsilon_0, \qquad (21)$$

то интеграл I_1 расходится.

Имеем

$$t^{3-6p}(3t^4-3t^2+1)^p = t^{3-2p}\left(3 - \frac{3}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right)^p, \qquad (22)$$

Если $t \in [1,+\infty)$, то $\frac{1}{t^2} = \tau \in (0,1]$. Имеют место неравенства $1 \leq \tau^2 - 3\tau + 3 \leq 3$, $\tau \in [0,1]$. Отсюда и из (22) получим

$$t^{3-2p} \leq t^{3-6p}(3t^4-3t^2+1)^p \leq 3^p t^{3-2p},\ p \geq 0. \qquad (23)$$

Теперь в (21) положим $\xi_0' = \pi n$, $\xi_0'' = \pi n + \pi$. Используя (23), имеем

$$\left|\int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{\sin t dt}{t^{3-6p}(3t^4-3t^2+1)^p}\right| = \int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{|\sin t|dt}{t^{3-6p}(3t^4-3t^2+1)^p} \geq$$

$$\geq \frac{1}{3^p}\int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\frac{\sin^2 t dt}{t^{3-2p}} \geq \frac{(\pi n)^{2p-3}}{3^p}\int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\sin^2 t dt \geq \frac{1}{3^p}\int_{\pi n}^{\pi n+\pi}\sin^2 t dt = \frac{\pi}{2\cdot 3^p} = \varepsilon_0$$

Напомним, что $2p-3 \geq 0$.

Таким образом, для любого $\delta > 1$ существуют $\xi_0' = \pi n, \xi_0'' = \pi n + \pi$ $\left(\xi_0'' > \xi_0' > \delta\right)$ такие, что выполняется неравенство (21) при $\varepsilon_0 = \dfrac{\pi}{2 \cdot 3^p}$.

Итак, при $p \geq \dfrac{3}{2}$ интеграл I_1 расходится, а значит, расходится и интеграл I (см. (20)).

β) Докажем теперь, что интеграл I_1 сходится условно при $1 \leq p < \dfrac{3}{2}$.

Для доказательства сходимости интеграла I_1 используем признак Дирихле:

1) функция $f(t) = \sin t$ непрерывна на промежутке $[1, +\infty)$ и ее первообразная $F(t) = -\cos t$ ограничена;

2) функция $g(t) = \dfrac{1}{t^{3-6p}(3t^4 - 3t^2 + 1)^p}$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[1, +\infty)$ и монотонно убывает: действительно,

$$\left(t^{3-6p}\left(3t^4 - 3t^2 + 1\right)^p\right)' = 3t^{2-6p}\left(3t^4 - 3t^2 + 1\right)^{p-1}\left[(3-2p)t^4 - (3-4p)t^2 + (1-2p)\right] > 0$$

$$t \in [1, +\infty), \quad p \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \text{ (проверить);}$$

отсюда следует, что $t^{3-6p}(3t^4 - 3t^2 + 1)^p$ возрастает, следовательно, $g(t)$ убывает;

3) $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0$.

Тогда интеграл I_1 сходится.

Докажем теперь, что интеграл $\hat{I}_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t| dt}{t^{3-6p}(3t^4 - 3t^2 + 1)^p}$ расходится $\left(1 \leq p < \dfrac{3}{2}\right)$. Из (23) имеем

$$\frac{|\sin t|}{t^{3-6p}(3t^4 - 3t^2 + 1)^p} \geq \frac{\sin^2 t}{3^p \cdot t^{3-2p}} = \frac{1}{2 \cdot 3^p}\left(\frac{1}{t^{3-2p}} - \frac{\cos 2t}{t^{3-2p}}\right). \tag{24}$$

Известно, что интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3-2p}}$ расходится при $p \geq 1$ (см. пример 1), а интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t dt}{t^{3-2p}}$ сходится при $p < \dfrac{3}{2}$. Следовательно, интеграл $\dfrac{1}{2 \cdot 3^p}\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t^{3-2p}} - \frac{\cos 2t}{t^{3-2p}}\right) dt$ расходится при $1 \leq p < \dfrac{3}{2}$. Отсюда, из (24) и теоремы сравнения следует, что интеграл $\hat{I}_1$ расходится при $1 \leq p < \dfrac{3}{2}$.

В результате имеем: интеграл I_1 сходится, а интеграл $\hat{I}_1$ расходится. Значит, интеграл I_1 сходится условно, а вместе с ним сходится условно и исходный интеграл I при $1 \leq p < \dfrac{3}{2}$ (доказать).

Ответ: интеграл I сходится абсолютно при $p<1$, сходится условно при $1\le p<\frac{3}{2}$, расходится при $p\ge\frac{3}{2}$.

е) $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|^p\cos e^{2x}dx$.

Решение. При $p<0$ точка $x=0$ является особой точкой подынтегральной функции. Поэтому представим интеграл I в виде $I=\int\limits_{-\infty}^{-1}+\int\limits_{-1}^{0}+\int\limits_{0}^{1}+\int\limits_{1}^{+\infty}\equiv I_1+I_2+I_3+I_4$.

Рассмотрим интеграл I_3. Имеем $|x|^p\cos e^{2x}\sim\cos 1\cdot x^p$ при $x\to+0$. Отсюда следует, что интеграл I_3 расходится при $p\le-1$ (см. пример 3). Тогда независимо от поведения остальных интегралов отсюда получаем, что интеграл I расходится при $p\le-1$.

Пусть теперь $p>-1$. Рассмотрим интеграл I_1. Имеем $|x|^p\cos e^{2x}\sim|x|^p$ при $x\to-\infty$. Отсюда следует, что интеграл I_1 расходится при $p>-1$ (см. пример 1). Это означает, что интеграл I расходится при $p>-1$.

Ответ: интеграл I расходится при любом действительном p.

Задача 9. Установить, собственным или несобственным является интеграл; если он несобственный, то исследовать его сходимость.

а) $I=\int\limits_0^{1/2}\frac{tg(e^x-1)-x(1-0{,}6x-0{,}27x^2)^{-5/6}}{\sqrt[25]{4x^{17}+3x^{25}}}dx$.

Решение. Предполагаемая особая точка $x=0$. Имеем

$\sqrt[25]{4x^{17}+3x^{25}}\sim\sqrt[25]{4}\cdot x^\alpha, x\to 0;\ \alpha=\frac{17}{25}<1$. Таким образом,

$$f(x)=\frac{tg(e^x-1)-x(1-0{,}6x-0{,}27x^2)^{-5/6}}{\sqrt[25]{4x^{17}+3x^{25}}}\sim$$
$$\sim\frac{1}{\sqrt[25]{4}}\cdot\frac{1}{x^\alpha}\left[tg(e^x-1)-x(1-0{,}6x-0{,}27x^2)^{-5/6}\right]\equiv\frac{\varphi(x)}{x^\alpha},\ x\to 0 \qquad (25)$$

Очевидно, что в некоторой окрестности точки $x=0$ функция $\varphi(x)$ имеет производные любого порядка. Так как $\alpha<1$. То из (25) следует, что либо интеграл I несобственный и он сходится (см. пример 3), либо точка $x=0$ не является особой точкой функции $f(x)$ и она интегрируема в смысле Римана, т.е. интеграл I собственный.

Так как $\varphi(0)=0$, то, используя правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to+0}\frac{\varphi(x)}{x^\alpha}=\lim_{x\to+0}\frac{\varphi'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\frac{25}{17}\lim_{x\to+0}\varphi'(x)\cdot x^{\frac{8}{25}}=0.$$

Напомним, что в некоторой окрестности точки $x=0$ функция $\varphi'(x)$ непрерывна и, значит, ограничена. Следовательно, точка $x=0$ не является особой точкой подынтегральной функции.

Ответ: интеграл I собственный.

б) $I = \int\limits_0^{1/2} \frac{tg(e^x-1) - x(1-0{,}6x-0{,}27x^2)^{-5/6}}{\sqrt{4x^9+27x^{36}}}dx$.

Решение. $x = 0$ - предполагаемая особая точка. Имеем

$$f(x) = \frac{tg(e^x-1) - x(1-0{,}6x-0{,}27x^2)^{-5/6}}{\sqrt{4x^9+27x^{36}}} \equiv \frac{\varphi(x)}{\sqrt{4x^9+27x^{36}}} \sim \frac{\varphi(x)}{2\cdot x^{9/2}},\ x \to 0. \quad (26)$$

Функцию $\varphi(x)$ разложим по формуле Маклорена:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}x + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (27)$$

Обозначим $\varphi_1(x) = tg(e^x-1)$, $\varphi_2(x) = (1-0{,}6x-0{,}27x^2)^{-5/6}$. Тогда $\varphi(x) = \varphi_1(x) - x\varphi_2(x)$. Отсюда $\varphi^{(k)}(x) = \varphi_1^{(k)}(x) - k\varphi_2^{(k-1)}(x) - x\varphi_2^{(k)}(x)$ (проверить) и

$$\varphi^{(k)}(0) = \varphi_1^{(k)}(0) - k\varphi_2^{(k-1)}(0),\ k = 0,1,2,\ldots. \quad (28)$$

Используя формулу (28), получим

$$\varphi_1(0) = 0, \qquad \varphi(0) = 0;$$

$$\varphi_1'(0) = 1, \quad \varphi_2(0) = 1, \qquad \varphi'(0) = 0;$$

$$\varphi_1''(0) = 1, \quad \varphi_2'(0) = \frac{1}{2}, \qquad \varphi''(0) = 0;$$

$$\varphi_1'''(0) = 3, \quad \varphi_2''(0) = 1, \qquad \varphi'''(0) = 0;$$

$$\varphi_1^{(4)}(0) = 13, \quad \varphi_2'''(0) = \frac{121}{50}, \qquad \varphi^{(4)}(0) = \frac{83}{25}$$

Отсюда и из формулы (27) следует

$$\varphi(x) = \frac{83}{600}x^4 + o(x^4). \quad (29)$$

Из формул (26) и (29) имеем $f(x) \sim \frac{83}{1200}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \to 0$, что дает нам (см. пример 3)

Ответ: интеграл I несобственный и он сходится.

в) $I = \int\limits_0^{1/2} \frac{tg(e^x-1) - x(1-0{,}6x-0{,}27x^2)^{-5/6}}{\sqrt{4x^{10}+3x^{25}}}dx$.

Решение. Используя формулу (29), имеем

$$\frac{tg(e^x-1) - x(1-0{,}6x-0{,}27x^2)^{-5/6}}{\sqrt{4x^{10}+3x^{25}}} \sim \frac{83}{1200}\cdot\frac{1}{x},\ x \to 0.$$

Отсюда и из примера 3 следует

Ответ: интеграл I несобственный и он расходится.

г) $I = \int\limits_0^1 \frac{(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{\sqrt[4]{x}}+4} - e^{3\sqrt[4]{x}}}{\ln(1+x)}dx$.

Решение. Предполагаемая особая точка $x = 0$.

Обозначим $y(x)=(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{\sqrt[4]{x}}+4}-e^{3\sqrt[4]{x}}=(1+t^2)^{\frac{3}{t}+4}-e^{3t}\equiv z(t)\equiv\varphi(t)-\psi(t)$, здесь $\sqrt[4]{x}=t$. Функция $\varphi(t)$ определена при $t\neq 0$. Так как $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)=1$, то, полагая

$$\varphi(t)=\begin{cases}(1+t^2)^{\frac{3}{t}+4}, & t\neq 0,\\ 1, & t=0\end{cases},$$

получим непрерывную функцию (даже имеющую производные любого порядка - проверить). Разлагая $\varphi(t)$ по формуле Маклорена, получим

$$\varphi(t)=1+3t+\frac{17}{2}t^2+o(t^2),\ t\to 0.$$

Учитывая, что $\psi(t)=1+3t+\frac{9}{2}t^2+o(t^2),\ t\to 0$, отсюда получим $z(t)=4t^2+o(t^2),\ t\to 0$. Тогда $y(x)=4\sqrt{x}+o(\sqrt{x}),\ x\to +0$. Значит,

$$f(x)=\frac{y(x)}{\ln(1+x)}=\frac{4\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}{x+o(x)}\sim\frac{4}{\sqrt{x}},\ x\to +0.$$

Отсюда следует

Ответ: интеграл I несобственный и он сходится.

д) $I=\int\limits_{100}^{+\infty}\left(\frac{3}{x}-arcctg\frac{x}{3}\right)dx$.

Решение. Очевидно, что интеграл I несобственный интеграл 1-го рода. Остается выяснить, сходится ли он. Имеем $f(x)=\frac{3}{x}-arcctg\frac{x}{3}=\frac{3}{x}-arctg\frac{3}{x}$. Так как $arctgt=t-\frac{1}{3}t^3+o(t^3), t\to 0$, то отсюда получим $f(x)=\frac{9}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right),\ x\to+\infty$, что дает нам

Ответ: интеграл I несобственный и он сходится.

е) $I=\int\limits_{0,9}^{1}\frac{tg\pi x+\frac{\pi^2}{2}\left(x^2-2x+1+\frac{2}{\pi^2}\right)\sin\pi x}{x^7(\ln x)^5}dx$.

Решение. Предполагаемая особая точка $x=1$. Сделаем замену переменной $x=1-t$. Получим

$$I=-\int\limits_{0}^{0,1}\frac{tg\pi t-\left(\frac{\pi^2}{2}t^2+1\right)\sin\pi t}{(1-t)^7(\ln(1-t))^5}dt=-\int\limits_{0}^{0,1}\frac{tg\pi t\left[1-\left(\frac{\pi^2}{2}t^2+1\right)\cos\pi t\right]}{(1-t)^7(\ln(1-t))^5}dt. \qquad (30)$$

Учитывая, что $\cos\pi t=1-\frac{\pi^2t^2}{2}+\frac{\pi^4t^4}{24}+o(t^4)$, получим

$1-\left(\frac{\pi^2}{2}t^2+1\right)\cos\pi t=\frac{5\pi^4}{24}t^4+o(t^4)$. Отсюда

$$-\frac{tg\pi t\left[1-\left(\frac{\pi^2}{2}t^2+1\right)\cos\pi t\right]}{(1-t)^7(\ln(1-t))^5}\sim\frac{5\pi^5}{24},\ t\to 0. \qquad (31)$$

Из (30) и (31) следует

Ответ: интеграл I является собственным.

Задача 10. Получить рекуррентную формулу для интеграла $I_n, n=2,3,...$ и вычислить его.

$$I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(Ax^2+2Bx+C\right)^n},\ AC-B^2>0.$$

Решение. Сделаем замену переменной $x+\frac{B}{A}=t$ и обозначим $\frac{AC-B^2}{A^2}=a^2$. Получим

$$I_n=\frac{1}{A^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}\equiv\frac{1}{A^n}\tilde{I}_n. \qquad (32)$$

Имеем

$$\tilde{I}_n=\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(a^2+t^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt=\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}-$$
$$-\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}\equiv\frac{1}{a^2}\tilde{I}_{n-1}-\frac{1}{a^2}\hat{I}_n \qquad (33)$$

Интеграл $\hat{I}_n$ интегрируем по частям:

$$\hat{I}_n=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}\tilde{I}_{n-1}. \qquad (34)$$

Подставляя (34) в (33), получим рекуррентную формулу

$$\tilde{I}_n=\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{a^2}\tilde{I}_{n-1},\ n=2,3,\dots. \qquad (35)$$

Применяя формулу (35) $(n-1)$ раз, имеем

$$\tilde{I}_n=\frac{1}{a^{2n-2}}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\tilde{I}_1=\frac{1}{a^{2n-2}}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a^{2n-1}}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\pi. \qquad (36)$$

Объединяя (36) и (32), получим

$$I_n=\frac{1}{A^n}\cdot\frac{1}{a^{2n-1}}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\pi=\frac{\pi A^{n-1}}{\left(AC-B^2\right)^{n-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!},\ n=2,3,...$$

Ответ: $I_n=\frac{\pi A^{n-1}}{\left(AC-B^2\right)^{n-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!},\ n=2,3,\dots.$

Задача 11. Вычислить $I_n=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x)...(n+x)}, n\in N$.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{x(1+x)\dots(n+x)}=\frac{A_0}{x}+\frac{A_1}{1+x}+\dots+\frac{A_k}{k+x}+\dots+\frac{A_n}{n+x},$$

где $A_k=(-1)^k\dfrac{1}{k!(n-k)!}$, $k=\overline{0,n}$. Отсюда

$$I_n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!}\ln(k+x)\Big|_1^{+\infty}=B_n+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{\ln(k+1)}{k!(n-k)!}\text{ (при } k=0 \text{ получаем } \ln 1=0) \tag{37}$$

Здесь $B_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{1}{k!(n-k)!}\ln(k+x)$. Заметим, что при любом $n\in N$ интеграл I_n сходится и, следовательно, B_n конечно. Имеем

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!}\ln(k+x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!}\left[\ln x+\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\right]=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!}\ln x+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!}\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\equiv\varphi_n(x)+\psi_n(x) \tag{38}$$

Так как $0=\dfrac{1}{n!}(1-1)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!(n-k)!}$, то $\varphi_n(x)=\ln x^{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}}=\ln x^0\equiv 0$. Учитывая (38), отсюда имеем

$$B_n=\lim_{x\to+\infty}\psi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)=0. \tag{39}$$

Из формул (37) и (39) получаем

Ответ: $I_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\dfrac{\ln(k+1)}{k!(n-k)!}$.

Задача 12. Вычислить

а) $\text{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+x+1}$.

Решение. Пусть $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$. Очевидно, что $\dfrac{x}{x^2+x+1}\sim\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty$. Поэтому несобственный интеграл 1-го рода $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ расходится. Вычислим $\text{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$. Имеем

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{(2x+1)-1}{x^2+x+1}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\left[\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]\Big|_{-A}^{+A}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\left[\ln\frac{A^2+A+1}{A^2-A+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2A+1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{-2A+1}{\sqrt{3}}\right]=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Таким образом, мы получили

Ответ: $\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+x+1}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

б) $\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3dx}{x^2+x+1}$.

Решение. Имеем

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3dx}{x^2+x+1}=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A}\left(x-1+\frac{1}{x^2+x+1}\right)dx=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{-A}^{A}=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(-2A+\frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2A+1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{-2A+1}{\sqrt{3}}\right)=-\infty$$

Таким образом, получаем

Ответ: $\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3dx}{x^2+x+1}$ не существует.

в) $\text{v.p.}\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x(x^3+8)}$.

Решение. Особая точка $x=0$. Очевидно, что несобственный интеграл 2-го рода $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x(x^3+8)}$ расходится, так как $\frac{1}{x(x^3+8)}\sim\frac{1}{8x}$, $x\to0$. Поэтому

$$\text{v.p.}\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x(x^3+8)}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x(x^3+8)}+\int\limits_{\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x(x^3+8)}\right]=\frac{1}{8}\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\left(\frac{1}{x}-\frac{x^2}{x^3+8}\right)dx+\int\limits_{\varepsilon}^{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{x^2}{x^3+8}\right)dx\right]=$$

$$=\frac{1}{24}\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\left(3\ln|x|-\ln\left(x^3+8\right)\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\left(3\ln|x|-\ln\left(x^3+8\right)\right)\Big|_{\varepsilon}^{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{24}\lim_{\varepsilon\to+0}\left[3\ln\varepsilon-\ln\left(8-\varepsilon^3\right)+\ln7+3\ln2-\ln16-3\ln\varepsilon+\ln\left(8+\varepsilon^3\right)\right]=\frac{1}{24}\ln\frac{7}{2}$$

Отсюда

Ответ: $\text{v.p.}\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x(x^3+8)}=\frac{1}{24}\ln\frac{7}{2}$.

Задача 13. Доказать неравенства.

а) $0<\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx<2\sqrt{\pi}$.

Доказательство. Обозначим $I=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$. Особая точка $x=0$. Так как $\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x\to0$ и $\frac{|\sin x|}{x\sqrt{x}}\le\frac{1}{x\sqrt{x}}$, то интеграл I абсолютно сходится.

Пусть

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx \equiv I_1 + I_2 . \tag{40}$$

Рассмотрим интеграл I_1. Обозначим $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x \neq 0, \\ 1, x = 0 \end{cases}$. Имеем

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} . \tag{41}$$

Докажем, что

$$\varphi(x) \equiv x \cos x - \sin x < 0 \text{ при } x \in (0, \pi]. \tag{42}$$

Действительно, $\varphi'(x) = -x \sin x < 0$ при $x \in (0, \pi)$. Следовательно, $\varphi(x)$ убывает на промежутке $[0, \pi]$. А так как $\varphi(0) = 0$, то отсюда следует (42). (41) и (42) дают нам, что $f'(x) < 0, x \in (0, \pi]$. Следовательно,

$$\max_{x \in [0,\pi]} f(x) = f(0) = 1, \ \min_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} . \tag{43}$$

Используя вторую из формул (43), получим $I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx > \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Итак,

$$I_1 > 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} . \tag{44}$$

Оценим интеграл I_2. Имеем

$$|I_2| < \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} , \tag{45}$$

Так как $I \geq I_1 - |I_2|$ (см. (40), то из неравенств (44) и (45) получаем

$$I > 0 . \tag{46}$$

(Доказать, что неравенства (44) и (45) строгие).

Пусть теперь

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx \equiv I_3 + I_4 . \tag{47}$$

Используя первую из формул (43), получим

$$I_3 < \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{\pi} . \tag{48}$$

Докажем, что

$$I_4 < 0 . \tag{49}$$

Интегрируя по частям, имеем

$$I_4 = -\frac{\cos x}{x^{3/2}} \Big|_{\pi}^{+\infty} - \frac{3}{2} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{5/2}} dx = -\pi^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{5/2}} dx . \tag{50}$$

Далее

$$\frac{3}{2}\left|\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{5/2}}\,dx\right| < \frac{3}{2}\int_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x^{5/2}} = -\frac{1}{x^{3/2}}\Big|_{\pi}^{+\infty} = \pi^{-\frac{3}{2}}. \tag{51}$$

Из (50) и (51) получим $I_4 < -\pi^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\left|\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{5/2}}\,dx\right| < 0$.

Неравенство (49) доказано. Из (47) - (49) следует

$$I = I_3 + I_4 < I_3 < 2\sqrt{\pi}. \tag{52}$$

Неравенства (46) и (52) дают

$$0 < I < 2\sqrt{\pi}.$$

Замечание. Интегрируя по частям интеграл I_4, можно получить более точную оценку интеграла I.

б) $\dfrac{42}{41} < \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^{5/6}(x^7+2x^5+3)} < \dfrac{88}{41}$.

Доказательство. Обозначим $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^{5/6}(x^7+2x^5+3)}$. Интеграл I является сходящимся несобственным интегралом (доказать). Имеем

$$I = \int_0^1\frac{dx}{x^{5/6}(x^7+2x^5+3)} + \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{5/6}(x^7+2x^5+3)} \equiv I_1 + I_2. \tag{53}$$

Очевидно, что $\dfrac{1}{6}\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^{5/6}} < I_1 < \dfrac{1}{3}\int_0^1\frac{dx}{x^{5/6}}$. Отсюда

$$1 < I_1 < 2. \tag{54}$$

Далее $\dfrac{1}{6}\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{7+5/6}} < I_2 < \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{7+5/6}}$. Тогда

$$\frac{1}{41} < I_2 < \frac{6}{41}. \tag{55}$$

Объединяя (53) - (55), получим

$$\frac{42}{41} < I < \frac{88}{41}. \tag{56}$$

Замечание. Оценка (56) может быть улучшена.

III. ЗАДАНИЯ

Задача 1. Используя определение, вычислить интеграл или установить его расходимость.

1.1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)^2}$.

1.2. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+16)(x^2+25)}$

1.3. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+4)(x^2+49)}$

1.4. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$

1.5. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+36)(x^2+25)}$

1.6. $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-2x}\cos 3x dx$

1.7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+25)^2}$

1.8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}$

1.9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+36)(x^2+81)}$

1.10. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+8x+15}$

1.11. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+121)(x^2+25)}$

1.12. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)}$

1.13. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

1.14. $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-3x}\sin 2x dx$

1.15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+4)^2}$

1.16. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+1)(x^2+9)}$

1.17. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$

1.18. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+16)}$

1.19. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+64)(x^2+25)}$

1.20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{2x^2-4x+11}$

1.21. $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-5x}\cos 2x dx$

1.22. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$

1.23. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+16)^2}$

1.24. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+4)(x^2+49)}$

1.25. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+36)(x^2+81)}$

1.26. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

1.27. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)(x^2+121)}$

1.28. $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-4x}\sin 7x dx$

1.29. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2-4x+11}$

1.30. $\int\limits_{1}^{3/2}\frac{dx}{(x-1)(2x-3)}$

Задача 2. Используя определение, вычислить интеграл или установить его расходимость.

2.1. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

2.2. $\int\limits_{0}^{2}\left(2x\sin\frac{\pi}{x^2}-\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}\right)dx$

2.3. $\int\limits_{1}^{2}\frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx$

2.4. $\int\limits_{0}^{1}x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$

2.5. $\int\limits_{0}^{25}\frac{dx}{\sqrt{x}+x}$

2.6. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1-4x^2)}$

2.7. $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$

2.8. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[7]{\cos^5 x}}$

2.9. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{3}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3}}$

2.10. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

2.11. $\int\limits_{0}^{1/2}\frac{dx}{x\ln^2 x}$

2.12. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$

2.13. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

2.14. $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

2.15. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x^2}}$

2.16. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\ln^2 x}$

2.17. $\int\limits_0^1 \ln x dx$

2.18. $\int\limits_{-1}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

2.19. $\int\limits_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}dx$

2.20. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\ln x}$

2.21. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x^3dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$

2.22. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt[3]{\arcsin x}}$

2.23. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(5-4x)(5-3x)}}$

2.24. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

2.25. $\int\limits_{10}^{15} x\sqrt{\frac{x-10}{15-x}}dx$

2.26. $\int\limits_0^{\pi} tgx dx$

2.27. $\int\limits_3^8 \frac{dx}{\sqrt{(x-3)(8-x)}}$

2.28. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{1-x^2}}$

2.29. $\int\limits_4^7 \sqrt{\frac{x-4}{7-x}}dx$

2.30. $\int\limits_2^9 \frac{xdx}{\sqrt{(x-2)(9-x)}}$

Задача 3. Используя определение, вычислить интеграл или установить его расходимость.

3.1. $\int\limits_1^{+\infty} xe^{-x^2}(2x^4-1)dx$

3.2. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$

3.3. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dxc}{\sqrt{x^2-1}(9x^2-1)}$

3.4. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-7x}\cos xdx$

3.5. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\sin xdx$

3.6. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-6x}\sin 4xdx$

3.7. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^5 x}$

3.8. $\int\limits_1^{+\infty} \ln xdx$

3.9. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{x^2-1}}$

3.10. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}dx$

3.11. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-4x}\cos 3xdx$

3.12. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^6 x}$

3.13. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}(25x^2-1)}$

3.14. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{arctg^2 x}{x^3}dx$

3.15. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}\sin 10xdx$

3.16. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^4 x}$

3.17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{x^2+1}}$

3.18. $\int\limits_0^{+\infty} \sin 2xdx$

3.19. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x}\cos 3xdx$

3.20. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$

3.21. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}$

3.22. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^9 x}$

3.23. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}(16x^2-1)}$

3.24. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-8x}\sin 6xdx$

3.25. $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$

3.26. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^7 x}$

3.27. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+25)\sqrt{x^2-1}}$

3.28. $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos 5x dx$

3.29. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-6x} \cos 5x dx$

3.30. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+36)\sqrt{x^2+1}}$

Задача 4. Исследовать сходимость интеграла.

4.1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^{100}+1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\sqrt{x}}} dx$

4.2. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\left(2^x+3^x\right)^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x^2\sqrt{x^2+1}}} dx$

4.3. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{\left(e^{x^2}+3\right)^{1/x}} dx$

4.4. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left(\frac{3x+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} dx$

4.5. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} dx$

4.6. $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin^2\left(\pi\left(x+\frac{1}{x}\right)\right) dx$

4.7. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$

4.8. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2-5x+1}{x^4+18x+100} dx$

4.9. $\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\ln\left(x^2+1\right)-2\ln x\right) dx$

4.10. $\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4+4x^3}\right) dx$

4.11. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}}{x\ln^2 x} dx$

4.12. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

4.13. $\int\limits_{1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{x}\right) dx$

4.14. $\int\limits_{1}^{+\infty} \ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right) dx$

4.15. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) dx$

4.16. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{|\ln x|}{1+x^2} dx$

4.17. $\int\limits_{1}^{+\infty} \left|\ln\cos\frac{1}{x}\right| ctg\frac{1}{x} dx$

4.18. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} dx$

4.19. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x^4+3x^5}} dx$

4.20. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{1,1}} dx$

4.21. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left|\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right| dx$

4.22. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\left|\pi^2-x^2\right|} dx$

4.23. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{arctg 4x}{\sqrt{x^3+2x^5}} dx$

4.24. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^x}$

4.25. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{3x}-1}}$

4.26. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$

4.27. $\int\limits_{0}^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x} dx$

4.28. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$

4.29. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos^3 x}{x^2}dx$

4.30. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{|x-3|}}$

Задача 5. Исследовать сходимость интеграла.

5.1. $\int\limits_2^6\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}$

5.2. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}$

5.3. $\int\limits_1^2\frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}dx$

5.4. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$

5.5. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}}$

5.6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{|1-3\sin x|}$

5.7. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}$

5.8. $\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}}$

5.9. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt[4]{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}}dx$

5.10. $\int\limits_0^{\pi/2}(tgx)^{\frac{5}{2}}dx$

5.11. $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^2 x\cos^3 x}}$

5.12. $\int\limits_0^{\pi}\sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$

5.13. $\int\limits_0^{\pi}\frac{1-\cos x}{x^3}dx$

5.14. $\int\limits_0^1\frac{arctgx}{\sqrt{1-x^2}}dx$

5.15. $\int\limits_0^{1/8}\frac{\arcsin(x^2+x^5)}{x\ln^2(1+x)}dx$

5.16. $\int\limits_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

5.17. $\int\limits_0^{\pi}\frac{1+\cos x}{\sqrt{(\pi-x)^5}}dx$

5.18. $\int\limits_0^1\frac{dx}{x-\sin x}$

5.19. $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\ln x}dx$

5.20. $\int\limits_0^1\frac{\ln x dx}{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}$

5.21. $\int\limits_0^1\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx$

5.22. $\int\limits_0^1\frac{\ln x dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

5.23. $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{e^x-1}}{\sin x}dx$

5.24. $\int\limits_1^e\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

5.25. $\int\limits_0^{\pi}\ln\sin x dx$

5.26. $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\ln\sin x dx}{\sqrt{x(\pi-2x)^5}}$

5.27. $\int\limits_0^{\pi}\frac{\ln\sin x}{x}dx$

5.28. $\int\limits_0^{\pi}\frac{|\ln x|}{\sqrt{\sin x}}dx$

5.29. $\int\limits_0^1\frac{dx}{e^x-\cos x}$

5.30. $\int\limits_0^1\frac{\sqrt[3]{\ln(1+x)}}{1-\cos x}dx$

Задача 6. Исследовать сходимость интеграла.

6.1. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}dx}{1+x^2}$

6.2. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{arctgx}{x^p}dx,\ p>0$

6.3. $\int\limits_0^{1/3}\frac{|\ln x|^{\alpha}}{(tgx)^{\beta}}dx$

6.4. $\int\limits_0\frac{\ln(1+x^{\alpha})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx$

6.5. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^\alpha+1}-\sqrt[3]{|x^\alpha-1|}}{\sqrt{x}}dx$

6.6. $\int_0^{\pi/2} \left|\ln\left|\sin^2 x - k^2\right|\right| dx,\ |k|<1$

6.7. $\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}} - e^{-\frac{\beta^2}{x^2}}\right)dx$

6.8. $\int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}$

6.9. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x^\alpha}dx$

6.10. $\int_0^1 x^p |\ln x|^q\, dx$

6.11. $\int_0^{+\infty} x^\lambda \frac{x+\sin x}{x-\sin x}dx$

6.12. $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ln x dx$

6.13. $\int_1^{+\infty} \frac{\left|\ln\cos\frac{1}{x}\right|}{x^p}dx$

6.14. $\int_0^1 \frac{x^{\beta-1}-x^{\alpha-1}}{\ln x}dx,\ \alpha>0,\ \beta>0$

6.15. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$

6.16. $\int_0^\pi \frac{1+\cos x}{(\pi-x)^p}dx$

6.17. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+|\ln x|^\alpha}$

6.18. $\int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^\alpha}dx$

6.19. $\int_{100}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x|\ln\ln x|^\alpha}$

6.20. $\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x\cos^\beta x dx$

6.21. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha}$

6.22. $\int_0^{\pi/2} (tgx)^p\, dx$

6.23. $\int_0^{+\infty} x^x e^{-x^x} dx$

6.24. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)^p dx,\ p>0$

6.25. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m arctgx}{\sqrt{4+x^n}}dx,\ n\ge 0$

6.26. $\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{\cos x-\cos b}},\ 0<b<\pi$

6.27. $\int_0^{+\infty} \frac{arctg\alpha x - arctg\beta x}{x}dx$

6.28. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{|k-\sin x|},\ 0<k<1$

6.29. $\int_0^{+\infty} \frac{arctg\alpha x\, arctg\beta x}{x^2}dx$

6.30. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\ |k|<1$

Задача 7. Исследовать интеграл на абсолютную и условную сходимость.

7.1. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+7}dx$

7.2. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x^3+x}}dx$

7.3. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$

7.4. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x^2+x}}dx$

7.5. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 3x}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

7.6. $\int_1^{+\infty} e^{\sin x} \cdot \frac{\sin 2x}{x}dx$

7.7. $\int_0^{1} \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}dx$

7.8. $\int_1^{+\infty} e^{\cos x} \frac{\sin x}{x+\sin x}dx$

7.9. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} arctgx dx$

7.10. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x dx$

7.11. $\int_0^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{x(e^x+1)}dx$

7.12. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^{x^2+\sin x}}dx$

7.13. $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$

7.14. $\int_0^{+\infty} x\cos(x^3-x)dx$

7.15. $\int_0^{\pi/2} \sin(\sec x)dx$

7.16. $\int_0^{+\infty} \cos(x^3)dx$

7.17. $\int_0^{+\infty} (e^x+x)\sin e^{2x}dx$

7.18. $\int_0^{+\infty} \cos(x+x^3)dx$

7.19. $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin 3x}{x^2+4}dx$

7.20. $\int_0^{+\infty} \sin(\ln^2 x)\frac{dx}{x}$

7.21. $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2}\sin x dx$

7.22. $\int_0^{1} \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{x(1-x)^2}dx$

7.23. $\int_2^{+\infty} \frac{\cos(x+x^2)}{\sqrt{x}}dx$

7.24. $\int_{200}^{+\infty} (\ln^2 x)\frac{\sin x}{x}dx$

7.25. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \sin e^x dx$

7.26. $\int_0^{+\infty} e^{\frac{1-x}{1+x}} \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{x}}dx$

7.27. $\int_0^{1} \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

7.28. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}\cos x}{1+\sqrt{x}}dx$

7.29. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x+x^2)}{x+4}dx$

7.30. $\int_\pi^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+x^3}dx$

Задача 8. Исследовать интеграл на абсолютную и условную сходимость.

8.1. $\int_1^{+\infty} e^{2\cos x} \frac{\sin x}{x+\sin x}dx$

8.2. $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx$

8.3. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a}dx,\ a>0$

8.4. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x dx$

8.5. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}dx$

8.6. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^p}dx,\ p\ge 0$

8.7. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{e^{ax^2+\sin x}}$

8.8. $\int_0^{+\infty} \frac{2x+3}{x^p}\sin x dx$

8.9. $\int_\pi^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$

8.10. $\int_0^{+\infty} (e^x+x)\sin e^{ax}dx$

8.11. $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x dx}{1+x^q},\ q\ge 0$

8.12. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} arctgx dx$

8.13. $\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^p}dx$

8.14. $\int\limits_{500}^{+\infty} (\ln x)^p \frac{\sin x}{x}dx$

8.15. $\int\limits_0^{+\infty} e^{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{\sin x}{x^p}dx$

8.16. $\int\limits_0^{+\infty} \cos(x^p)dx$

8.17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}dx$

8.18. $\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{(1-x^2)^p}dx$

8.19. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}\sin x}{x(e^x+1)}dx$

8.20. $\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{x(1-x)^p}dx$

8.21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^p \sin e^x dx$

8.22. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p\cos x}{1+x^q}dx,\ q \ge 0$

8.23. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(x+x^2)}{x+a}dx,\ a \ge 0$

8.24. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^p}dx$

8.25. $\int\limits_1^{+\infty} e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^p}dx$

8.26. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\cos(x+x^2)}{x^p}dx$

8.27. $\int\limits_0^{+\infty} \sin|\ln x|^p \frac{dx}{x},\ p>0$

8.28. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p\cos x}{x+1000}dx$

8.29. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(3x^p)}{\sqrt{x^3+3x}}dx$

8.30. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(2x^p)}{\sqrt{x^2+x}}dx$

Задача 9. Установить, собственным или несобственным является интеграл; если он несобственный, то исследовать его сходимость.

9.1. $\int\limits_0^2 \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}+2}-e^x}{\ln(1+x^2)}dx$

9.2. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{+\infty} \left(\frac{1}{x}-arcctgx\right)dx$

9.3. $\int\limits_0^1 \frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{3x^{11}+2x^{30}}}dx$

9.4. $\int\limits_0^1 x\ln|\ln x|dx$

9.5. $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{x}-ctgx\right)dx$

9.6. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2-x+1}-\sqrt[8]{e^{x^2-1}}}{\left(e^{x^2}-e\right)(\ln x)^{10/3}}dx$

9.7. $\int\limits_0^1 \frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x(\sin x)^\alpha}dx$

9.8. $\int\limits_0^{1/3} \frac{tg\pi x-(1-6x^2+4x^3)\sin\pi x}{x^4\ln^3 x}dx$

9.9. $\int\limits_0^1 \frac{(2\ln(1+3x+3x^2)+3(x-1)^2-3)\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{5x^{12}+7x^{25}}}dx$

9.10. $\int\limits_0^1 \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}+7} - e^x}{(\ln(1+x^2))^{4/3}}dx$

9.11. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{6x^{11}+17x^{28}}}dx$

9.12. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(2-x)}{\sin(x-1)} ctg\sqrt{\pi x}dx$

9.13. $\int\limits_0^1 \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}dx$

9.14. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(2\ln(1+3x+3x^2) + 3(x-1)^2 - 3)\sqrt{2x^3+7}}{\sqrt[3]{5x^{13}+9x^{25}}}dx$

9.15. $\int\limits_0^3 \frac{\sqrt[4]{x^2-x+1} - \sqrt[8]{e^{x^2-1}}}{\left(e^{x^2}-e\right)(\ln x)^{7/3}}dx$

9.16. $\int\limits_7^{+\infty} \frac{1}{x}\ln\frac{x-7}{x+7}dx$

9.17. $\int\limits_0^1 \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{4x^{10}+13x^{13}}}dx$

9.18. $\int\limits_0^2 \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}+3} - e^x}{(\ln(1+x^2))^{3/2}}dx$

9.19. $\int\limits_{3/4}^1 \frac{tg\pi x - (1-6x^2+4x^3)\sin\pi x}{x^4\ln^4 x}dx$

9.20. $\int\limits_0^1 \frac{e^{\sqrt[3]{x}} - e^{-\sqrt[3]{x}} - 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - \sin\sqrt{x}}dx$

9.21. $\int\limits_0^{1/4} \frac{tg\pi x - (1-6x^2+4x^3)\sin\pi x}{x^3\ln^3 x}dx$

9.22. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+2x+4x^2) + \ln(1-2x+4x^2)}{x^{3/2}(e^x-1)}dx$

9.23. $\int\limits_0^1 \frac{e^{\sqrt[3]{x}} - e^{-\sqrt[3]{x}} - 2\sqrt[3]{x}}{x^{5/3} - \sin x^{5/3}}dx$

9.24. $\int\limits_0^1 \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{9x^{13}+19x^{43}}}dx$

9.25. $\int\limits_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - \sin\sqrt[3]{x}}dx$

9.26. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2-x+1} - \sqrt[8]{e^{x^2-1}}}{\left(e^{x^2}-e\right)(\ln x)^{7/3}}dx$

9.27. $\int\limits_0^{10} \frac{(2\ln(1+3x+3x^2) + 3(x-1)^2 - 3)\sqrt{2x^3+25}}{\sqrt[3]{4x^{13}+3x^{25}}}dx$

9.28. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3-125}{(x^2+1)^2}\left(3^{\frac{x}{2x^2+1}} - 1\right)dx$

9.29. $\int\limits_0^7 \frac{\sqrt{x^2-x+1} - \sqrt[8]{e^{x^2-1}}}{\left(e^{x^2}-e\right)\ln^2 x}dx$

9.30. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(2\ln(1+3x+3x^2) + 3(x-1)^2 - 3)\sqrt{x^3+4}}{\sqrt[3]{12x^{12}+5x^{13}}}dx$

Задача 10. Нечетные номера: доказать равенства, четные - получить рекуррентную формулу для интеграла $I_n, n \in N$, и вычислить его.

10.1. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx = -2\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$

10.2. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx$

10.3. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x dx = -\int\limits_0^{\pi/2} \frac{x}{tgx}dx$

10.4. $I_n = \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{ch^{n+1} x}$

10.5. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx = -\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

10.6. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx$

10.7. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = -\int\limits_0^1 \frac{arctgx}{x} dx$

10.8. $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}}$

10.9. $\int\limits_{-1}^1 \cos x \ln \frac{1-x}{1+x} dx = 0$

10.10. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin^n x dx$

10.11. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx$

10.12. $I_n = \int\limits_0^1 (\ln x)^n dx$

10.13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^4} dx = 0$

10.14. $I_n(m) = \int\limits_0^1 x^n \ln^m x dx, m \in N$

10.15. $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$

10.16. $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^{2n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$

10.17. $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-k^2)}} = 2 \int\limits_0^{1/\sqrt{x_0}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$

10.18. $I_n(m) = \int\limits_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1} dx, m \in N$

10.19. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{1+x^2} = -\int\limits_0^1 \frac{\ln x dx}{1+x^2}$

10.20. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} dx, \alpha > 0$

10.21. $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin x} dx$

10.22. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} \sin x dx$

10.23. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$

10.24. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} dx, \alpha > 0$

10.25. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{tgx}} = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{tgx} dx = 2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

10.26. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} \cos x dx$

10.27. $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} dx}{(1+x)^{\alpha+\beta}} = \int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha-1} + x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx, \alpha > 0, \beta > 0$

10.28. $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) \cos 2nx dx$

10.29. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x^{\frac{\alpha-1}{2}} (1-x)^{\frac{\beta-1}{2}} dx, \alpha > -1, \beta > -1$

10.30. $I_n = \int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx$

Задача 11. Вычислить.

11.1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2\sqrt{x}}dx$

11.2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n+1} 2x}{x}dx,\ n \in N$

11.3. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctgx}{(1+x^2)^{3/2}}dx$

11.4. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\ln x dx}{(1+x^2)^{3/2}}$

11.5. $\int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{ctgx}dx$

11.6. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx\cos x}{\sin x}dx,\ n \in N$

11.7. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctgx}{x\sqrt{x}}dx$

11.8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x dx}{1-x^2}$

11.9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m \ln x}{1+x^{2m+2}}dx,\ m > -1$

11.10. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \ln\left(\frac{1}{x^2}-1\right)dx$

11.11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^3}$

11.12. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctgx}{\sqrt{x}}dx$

11.13. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)-\ln(1+\beta^2 x^2)}{x^2}dx$

11.14. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\left|a^2-\sin^2 x\right|dx,\ |a| \le 1$

11.15. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x dx$

11.16. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

11.17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

11.18. $\int\limits_0^{\pi} \ln\sin x \cdot \cos nx dx,\ n \in N$

11.19. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{(\pi-2x)dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}$

11.20. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{tgx}dx$

11.21. $\int\limits_0^{+\infty} \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1+x^2}$

11.22. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$

11.23. $\int\limits_0^1 \frac{x\ln x dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

11.24. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{ctgx}dx$

11.25. $\int\limits_0^1 \frac{(1-x^2)\ln x dx}{(1+x^2)^2}$

11.26. $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{\cos\frac{x}{2}\, dx}{\sqrt{2\cos x-1}}$

11.27. $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{x}dx$

11.28. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x dx$

11.29. $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\cos\frac{3x}{2}dx}{\sqrt{2\cos x-\sqrt{3}}}$

11.30. $\int\limits_0^{\pi} x\ln\sin x dx$

Задача 12. Вычислить

12.1. v.p. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$

12.2. v.p. $\int\limits_1^{3} \frac{dx}{x-2}$

12.3. v.p. $\int\limits_0^{2} \frac{\sqrt{x}dx}{1-x}$

12.4. v.p. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2}$

12.5. v.p. $\int\limits_1^{\pi/2} \frac{dx}{1-2\sin x}$

12.6. v.p. $\int\limits_5^{10} \frac{dx}{(x-7)^3}$

12.7. v.p. $\int\limits_{1/2}^{2} \frac{dx}{x\ln x}$

12.8. v.p. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{12-13\cos x}$

12.9. v.p. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{xdx}{1-5\cos x}$

12.10. v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx$

12.11. v.p. $\int\limits_{-2}^{5} \frac{dx}{1+x}$

12.12. v.p. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}$

12.13. v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} arctgx dx$

12.14. v.p. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{4-5\sin x}$

12.15. v.p. $\int\limits_{-9}^{-6} \frac{dx}{(x+8)^5}$

12.16. v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\frac{dx}{x}$

12.17. v.p. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3-5\cos x}$

12.18. v.p. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{xdx}{1-6\cos x}$

12.19. v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$

12.20. v.p. $\int\limits_6^{12} \frac{dx}{x-10}$

12.21. v.p. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)}$

12.22. v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x dx$

12.23. v.p. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{12-13\sin x}$

12.24. v.p. $\int\limits_9^{12} \frac{dx}{(x-10)^9}$

12.25. v.p. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^3}$

12.26. v.p. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{15-17\cos x}$

12.27. v.p. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{xdx}{1-3\cos x}$

12.28. v.p. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}(1-x)}$

12.29. v.p. $\int\limits_1^{4} \frac{dx}{(x-2)^7}$

12.30. v.p. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{15-17\sin x}$

Задача 13. Доказать неравенства.

13.1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{sin x}{x}dx > 0$

13.2. $1-\frac{1}{n} < \int\limits_0^{1} e^{-x^n}dx < 1,\ n > 1$

13.3. $-\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} < \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx < 0$

13.4. $\frac{4}{15} < \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{2x^4 + x + 2} < \frac{2}{3}$

13.5. $0 < \int\limits_{100\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} < \frac{1}{100\pi}$

13.6. $0 < \int\limits_{1,9}^{2} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt[4]{2 + x - x^2}} < 0{,}03$

13.7. $0 < \int\limits_{0}^{1} \frac{\sin \pi x}{x\sqrt{x}}dx < 2\pi$

13.8. $\left| \int\limits_{2}^{+\infty} e^{-x^4} \cos x^4 dx \right| < \left(\frac{1}{2} \right)^{21}$

13.9. $0 < \int\limits_{100\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{1}{50\pi}$

13.10. $\frac{4}{9} < \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{x^3 + x + 1} < \frac{4}{3}$

13.11. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x \right)}{\sqrt{1 - x^2}}dx > 0$

13.12. $0 < \int\limits_{2}^{2,1} \frac{e^{-\frac{x}{2}} dx}{\sqrt[5]{x^2 + x - 6}} < 0{,}06$

13.13. $\frac{1}{2} < \int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^n}} < \frac{3}{5}, n \geq 1$

13.14. $\left| \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos 15x dx}{x^2 + 25} \right| < \frac{\pi}{10}$

13.15. $\frac{1}{19} < \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1 + x^{20}}{1 + x^{40}}dx < \frac{1}{19} + \frac{1}{39}$

13.16. $\frac{8}{21} < \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(x^4 + 2x^3 + 3\right)} < \frac{20}{21}$

13.17. $1 - \frac{1}{n} < \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^n} dx < 1 + \frac{1}{n}, n > 1$

13.18. $0 < \int\limits_{3}^{3,1} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}} < 0{,}02$

13.19. $0 < \int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{x}dx < 0{,}01$

13.20. $\left| \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin 13x dx}{x^2 + 36} \right| < \frac{\pi}{12}$

13.21. $\frac{20}{19} < \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1 + x^{20}}{1 + x^{40}}dx < \frac{20}{19} + \frac{1}{20}$

13.22. $\frac{5}{36} < \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x dx}{3x^5 + 2x^3 + 1} < \frac{11}{18}$

13.23. $0 < \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x^n} dx < \frac{1}{n}, n > 1$

13.24. $0 < \int\limits_{1}^{1,1} \frac{e^{-2x} dx}{\sqrt[6]{x^2 + x - 2}} < 0{,}02$

13.25. $0 < \int\limits_{100}^{+\infty} \sin \pi x^2 dx < 0{,}005$

13.26. $0 < \int\limits_{2}^{+\infty} e^{-x^2} dx < \frac{1}{4e^4}$

13.27. $\left| \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin 2x dx}{x^2 + 16} \right| < \frac{\pi}{8}$

13.28. $0 < \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{x + 100} < \frac{1}{100}$

13.29. $0 < \int\limits_{3}^{+\infty} e^{-x^2} dx < \left(\frac{1}{2} \right)^{15}$

13.30. $\left| \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos 4x dx}{x^2 + 4} \right| < \frac{\pi}{4}$