

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**

Кафедра «Прикладная математика»
В. И. Котиков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ

Пособие
к выполнению лабораторных работ

*для студентов III курса
специальности 230401
дневного обучения*

Москва-2007

ББК 517.8

В19

Рецензент канд. тех. наук, доц. С.Ж. Кишинский

Котиков В.И.

В19 Математические модели сигналов: Пособие к выполнению лабораторных работ. – М.: МГТУ ГА, 2007. – 44 с.

Данное пособие издается в соответствии с учебной программой для студентов III курса специальности 230401 дневного обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры
00.00.2007 г.

© Московский государственный
технический университет ГА, 2007

Лабораторная работа № 1

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

1. Цель работы

Выработка у студентов умения применять математические методы при решении задач анализа и синтеза детерминированных сигналов с использованием интегралов и рядов Фурье, а также применять современные программные средства при построении временных и спектральных характеристик периодических и непериодических сигналов.

2. Общие сведения

Наряду с временной моделью колебания $x(t)$ в системах передачи и обработки сообщений при анализе и синтезе используются математическими моделями в виде суммы взаимно-ортогональных функций, в частности, некоторого конечного или бесконечного числа гармонических составляющих (с конечными или бесконечно-малыми амплитудами). Последнее математическое представление называется **спектральным**.

Основу спектрального анализа сигналов составляет преобразование Фурье временной функции $x(t)$.

2.1. Спектральное представление периодических сигналов

Математическая модель периодического детерминированного сигнала должна удовлетворять условию $x(t) = x(t + nT)$ во все моменты времени - $-\infty < t < +\infty$, где n - целое число, T - период.

Произвольного вида периодическая временная функция $x(t)$, которую называют еще сигналом, может быть представ-

лена рядом Фурье, записанным в тригонометрической или комплексной форме:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \text{Cos}k\omega_0 t + b_k \text{Sink}\omega_0 t). \quad (1.1)$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \text{Cos}(k\omega_0 t - \varphi_k), \quad (1.2)$$

где: $\omega_0 = 2\pi/T$, T - период сигнала $x(t)$; k - номер гармоники;
 $F_0 = 1/T$ - первая (основная) гармоника периодического колебания $x(t)$;

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt - \text{постоянная составляющая колебания } x(t); \quad (1.3)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \text{Cos}k\omega_0 t dt - \text{ } k\text{-ая амплитуда косинусоидальной составляющей колебания } x(t); \quad (1.4)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \text{Sink}\omega_0 t dt - \text{ } k\text{-ая амплитуда синусоидальной составляющей колебания } x(t); \quad (1.5)$$

Произвольный периодический сигнал $x(t)$ может быть представлен рядом Фурье в комплексной форме

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\dot{C}_k = (a_k - jb_k) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt - \text{ комплексная амплитуда } k\text{-ой гармоники периодического сигнала } x(t); \quad (1.6)$$

$$C_k = |\dot{C}_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} - \text{ амплитуда } k\text{-ой гармоники } x(t);$$

$\varphi_k = \arctg(b_k/a_k)$ - фазовый сдвиг k -ой гармоники периодического сигнала $x(t)$.

Комплексную амплитуду k -ой гармоники периодического сигнала $x(t)$ можно представить следующим образом

$$\dot{C}_k = C_k e^{j\varphi_k}. \quad (1.7)$$

Совокупность значений амплитуд C_k гармонических составляющих периодического колебания $x(t)$ (рис. 1.1) носит название **спектра амплитуд** (рис. 1.2а), а совокупность значений фаз φ_k - **спектра фаз** (рис. 1.2б).

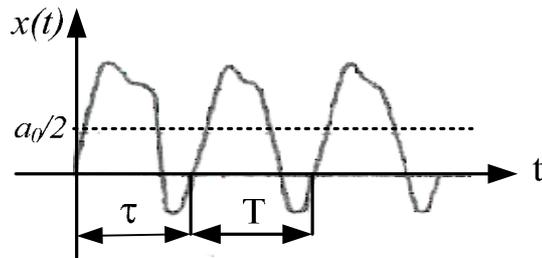


Рис. 1.1. Временная характеристика периодического сигнала $x(t)$

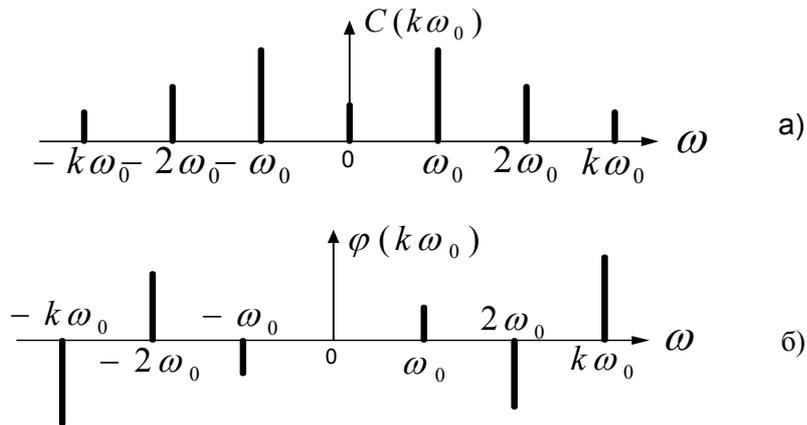


Рис. 1.2. Спектр амплитуд (а) и спектр фаз (б) для сигнала $x(t)$

Для периодических сигналов можно сделать следующие важные **выводы**:

1. Спектр периодического колебания $x(t)$ представляется множеством гармонических составляющих кратных частот, т. е. является всегда **линейчатым** (дискретным). Расстояние между двумя соседними спектральными составляющими точно соответствует основной частоте колебания ω_0 .

2. При использовании комплексной записи формально имеются гармоники и на отрицательных частотах $-k\omega_0$. Однако их свойства полностью определяются составляющими на реально существующих положительных частотах $k\omega_0$.

Действительно,

$$\dot{C}_{-k} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{jk\omega_0 t} dt = a_k + jb_k. \quad (1.8)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} C_{-k} &= C_k, \\ \varphi_{-k} &= -\varphi_k. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Из представленных выражений (1.9) и рис.1.2 следует, что спектр амплитуд $C(k\omega_0)$ - четная функция, а спектр фаз $\varphi(k\omega_0)$ - нечетная функция частоты. Благодаря введению составляющих на отрицательных частотах $-k\omega_0$ получается действительное колебание $x(t)$ в результате суммирования комплексных составляющих в соответствии с формулой (1.2).

2.2. Спектральное представление непериодических сигналов

Если сохранять неизменной длительность τ каждого элемента периодического сигнала $x(t)$ (рис.1.1) и при этом увеличивать расстояние между ними, то период колебаний T становится больше τ . Если устремить период T к бесконечности

($T \rightarrow \infty$), то получим непериодическую функцию $x(t)$, существующую только в интервале времени $-\tau_0 \leq t \leq \tau_0$ и равную нулю вне этого интервала (рис. 1.3а). При таком предельном переходе будут изменяться и комплексные амплитуды

$$\dot{C}_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

При $T \rightarrow \infty$ интервал между отдельными линиями в спектре амплитуд $\omega_0 = 2\pi/T$ сокращается до нуля, т.е. спектр становится сплошным, а амплитуды C_k уменьшаются до бесконечно малых величин.

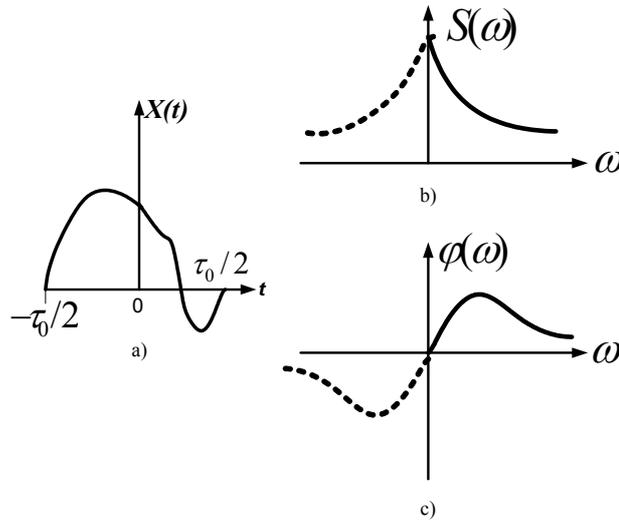


Рис. 1.3

Введем для отдельных спектральных составляющих функцию следующего вида

$$S(k\omega_0) = \dot{C}_k \frac{T}{2} = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

При $T \rightarrow \infty$ дискретная функция $S(k\omega_0)$ преобразуется в непрерывную и принимает следующий вид

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (1.10)$$

Функция $S(\omega)$ имеет размерность амплитуда/Герц. Она показывает амплитуду, приходящуюся на единицу частоты (1 Герц). Такая зависимость называется функцией **спектральной плотности** комплексных амплитуд.

Спектральная плотность $S(\omega)$ - непрерывная комплексная функция частоты ω , Амплитуда элементарной гармонической составляющей \dot{C}_k связана с текущей частотой ω

$$\dot{C}_k = \frac{2S(k\omega_0)}{T} = \frac{2S(\omega)d\omega}{2}.$$

Ряд Фурье (1.2) переходит в интеграл Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.11)$$

Формулы (1.10) и (1.11) представляют собой пару прямого и обратного преобразования Фурье. Отличие функции $S(\omega)$ от \dot{C}_k только в том, что она является непрерывной функцией частоты, а в остальном $S(\omega)$ обладает всеми основными свойствами комплексной амплитуды периодического сигнала \dot{C}_k :

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin\omega t dt = A(\omega) - jB(\omega),$$

$$S(-\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = \dot{S}(\omega),$$

$$\dot{S}(\omega) = |S(\omega)|e^{j\varphi(\omega)},$$

$$\text{где } |S(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \quad \text{и } \varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}.$$

Функция $|S(\omega)|$ называется спектральной плотностью амплитуд, а $\varphi(\omega)$ - спектральной плотностью фаз. Примерный вид этих функций показан на рис. 1.3 в,с.

Следует отметить, что значения спектральной плотности $S(\omega)$ на частотах $\omega = k\omega_0$ пропорциональны C_k :

$$S(k\omega_0) = \dot{C}_k T / 2. \quad (1.12)$$

Это соотношение устанавливает простую связь между спектрами периодических и непериодических сигналов одинаковой формы, а именно, с точностью до постоянного множителя огибающая спектра амплитуд периодического сигнала совпадает со спектральной плотностью амплитуд непериодического сигнала.

Из вышеприведенного рассмотрения можно сделать следующие **выводы**:

1. *Спектр непериодической функции всегда является **непрерывным** (сплошным) и представляется спектральной плотностью $S(\omega)$.*

2. *Между спектрами периодической и непериодической функций существует связь, определяемая соотношением (1.12).*

3. *Преобразования Фурье позволяют осуществить как анализ (определить спектральный состав), так и синтез (построить математическую временную модель) сигнала.*

2.3. Спектр периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов

Временная математическая модель сигнала (рис.1.4) может быть записана с использованием функции включения

$$x(t) = A [\sigma \{ t + (nT + \tau/2) \} - \sigma (t - \{ nT + \tau/2 \})].$$

По формулам (1.3) и (1.4) находим постоянную составляющую $a_0/2$ и соответствующие амплитуды спектральных со-

ставляющих сигнала C_k :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A dt = A \frac{\tau}{T} = \frac{A}{Q},$$

$$C_k = a_k = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cos k \omega_0 t dt = \frac{2A}{Q} \frac{\sin(k \omega_0 \tau / 2)}{(k \omega_0 \tau / 2)},$$

где $Q = T/\tau$ - скважность, $\omega_0 = 2\pi/T$ - круговая частота первой гармоники колебания, τ - длительность прямоугольного видеоимпульса.

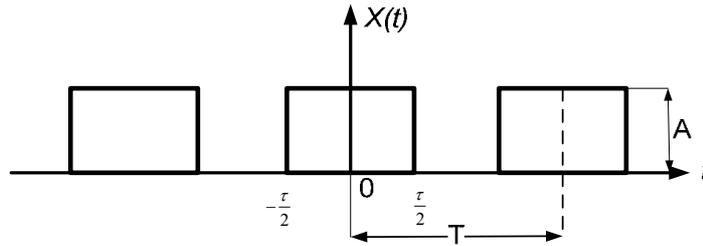


Рис. 1.4

Математическая модель сигнала (рис. 1.4) может быть записана в виде суммы гармонических составляющих (ряда Фурье)

$$x(t) = \frac{A}{Q} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k \omega_0 \tau / 2)}{(k \omega_0 \tau / 2)} \cos k \omega_0 t \right].$$

Графическое представление модуля спектра амплитуд $\frac{|C_k|Q}{2A}$ показано на рис. 1.5.

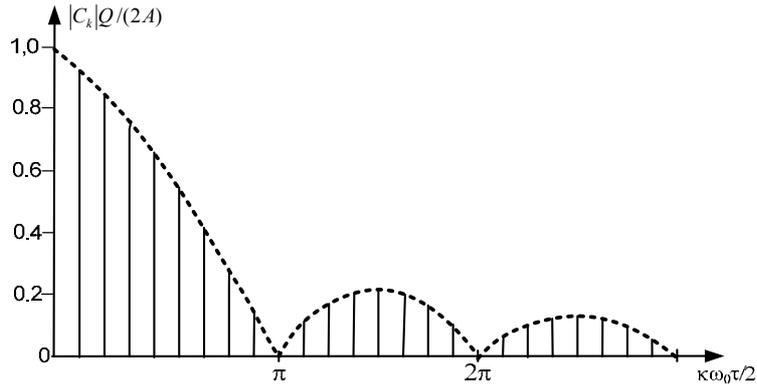


Рис. 1.5. Спектральный состав периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов

2.4. Спектральная плотность одиночного прямоугольного видеоимпульса

Математическая временная модель сигнала $x(t)$ (рис. 1.6) может быть записана с использованием функции включения $\sigma(t)$: $x(t) = A[\sigma(t + \tau/2) - \sigma(t - \tau/2)]$

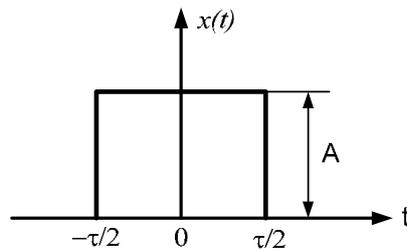


Рис. 1.6. Прямоугольный видеоимпульс

По формуле (1.10) находим спектральную плотность для одиночного видеоимпульса

$$S(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = q \frac{\text{Sin}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}, \quad (1.13)$$

где $q = A\tau$ - площадь импульса.

График функции $|S(\omega)|/q$, представленный в области положительных частот (рис. 1.7), совпадает с огибающей спектра периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов (рис. 1.5).

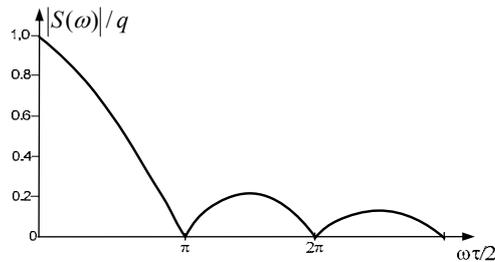


Рис. 1.7

2.5. Спектральная плотность одиночного косинусоидального импульса

Временная математическая модель одиночного косинусоидального сигнала, представленного на рис. 1.8, может быть описана с помощью функции включения

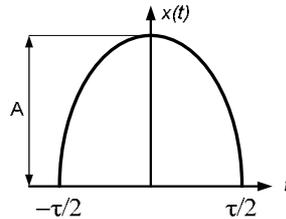


Рис. 1.8. Косинусоидальный импульс

$$x(t) = A \text{Cos} \left(\frac{\pi t}{\tau} \left[\sigma \left(t + \frac{\tau}{2} \right) - \sigma \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right] \right) .$$

Спектральная плотность одиночного синусоидального импульса описывается следующим математическим выражением

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt = q \frac{\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{1 - \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\omega\tau}{2}\right)^2}. \quad (1.14)$$

3. Лабораторное задание

3.1. Выяснить с использованием программы «SIGMA-2» как изменяются спектры амплитуд и фаз для периодической последовательности прямоугольных импульсов, если:

- изменяется длительность импульсов τ при неизменной основной частоте колебаний F_0 (табл.1);
- изменяется основная частота колебаний F_0 при неизменной длительности прямоугольных видеоимпульсов τ (табл. 2).

Таблица 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A(B)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
τ_1 , мксек	100	200	400	100	100	200	400	100	200	400
τ_2 , мксек	200	800	100	400	400	50	100	400	400	200
F_{01} , (кГц)	1	0,5	0,25	2	1	0,5	0,25	2	1	0,25

Таблица 2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A(B)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
τ , мксек	100	200	400	100	100	200	400	100	200	400
F_{01} , (кГц)	1	0,5	0,25	2	1	0,5	0,25	2	1	0,25
F_{02} , (кГц)	2	1	0,5	4	2	1	0,5	4	2	0,5

Расчеты выполнить для случая первых 10 гармоник и при числе отсчетных точек на временном интервале T периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов не менее $n \geq 30$.

Провести оценку влияния длительности импульса и периода основных колебаний на ширину спектра.

3.2. Рассчитать спектральную плотность для одиночного импульса с использованием программы «Mathcad» по данным, приведенным в табл. 3.

Таблица 3

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A(B)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
τ, мксек	100	200	300	400	500	100	50	200	400	500
Форма сигнала	П*	С**	П	С	П	С	П	П	С	С

* П- прямоугольная; ** С – синусоидальная

3.3. Для случая одиночного импульса (табл. 3) определить ширину спектра колебания, используя следующее приближенное выражение: $f_B \times \tau = 1$.

3.4. Зарисовать с экрана монитора формы восстановленных сигналов для случаев 1-ой, 3-х и 10-ти первых гармоник спектра комплексных амплитуд, полученных в п. 3.1 лабораторного задания, используя для этого программу «SIGMA-2».

3.5. Собрать лабораторную установку, представленную на рис. 1.9, и зарисовать с экрана осциллографа С1-55 формы гармонических и периодических сигналов с учетом данных, приведенных в табл. 1. Исследуемые сигналы формируются на выходе генераторов гармонических колебаний ГЗ -33 и прямоугольных импульсов Г5-54.

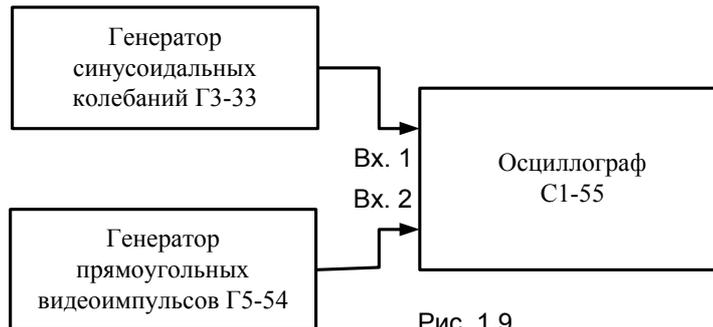


Рис. 1.9

4. Порядок выполнения работы

4.1. Включить компьютер, открыть файл с программой «sigma.exe» и активизировать подпрограмму «Определение коэффициентов ряда Фурье».

Задавая мгновенные значения исследуемого сигнала $x(t)$ в моменты времени $\omega_0 t_i$ ($i=1...30$) на интервале от 0 до 2π согласно данным, приведенным в таблицах 1 и 2, определить значения амплитуд и фаз для первых 10-ти гармоник ряда Фурье и постоянной составляющей. Зарисовать спектры амплитуд и фаз.

4.2. Активизировать подпрограмму обратного преобразования Фурье в программе «SIGMA-2» с целью получения временных характеристик для восстановленного сигнала $x'(t)$.

Для этого в открывающееся окно программы подставляем значения амплитуд и фаз спектральных составляющих, а также постоянной составляющей, согласно заданию п. 3.4, и активизируем ее выполнение. Зарисовать временные характеристики для всех 3-х рассматриваемых случаев.

4.3. Включить все измерительные приборы, представленные на рис. 1.9, и дать им прогреться 10 минут. Провести подключение генераторов к соответствующим входам осциллографа. Установить на выходе генераторов параметры в соответствии с данными табл. 1. После настройки приборов снять временные зависимости анализируемых сигналов.

5. Содержание отчета

5.1. Цель работы.

5.2. Функциональная схема измерительной установки.

5.3. Спектральные характеристики периодических и непериодических сигналов.

5.4. Теоретический синтез временных моделей сигналов по их спектрам.

5.5. Временные характеристики исследуемых сигналов.

5.6. Основные выводы по работе.

6. Контрольные вопросы

- 6.1 Что называется обобщенным рядом Фурье?
- 6.2. Чем характеризуется спектр периодической функции?
- 6.3. Что такое спектральная плотность сигнала?
- 6.4. В чем различие и сходство спектральных характеристик периодического и непериодического сигналов?
- 6.5. Что такое прямое и обратное преобразование Фурье?
- 6.6. Как изменяется ширина спектра прямоугольного видеоимпульса с изменением его длительности?

7. Литература

- 7.1. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 1999.
- 7.2. Игнатов В.А. Теория информации и передачи сигналов. М.: Сов. радио, 1979.
- 7.3. Котиков В.И. Методическое пособие по выполнению лабораторных работ по курсу "Математические модели сигналов". М: МГТУ ГА, 2007.

Лабораторная работа № 2

ИЗУЧЕНИЕ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИГНАЛОВ С АМПЛИТУДНОЙ И УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

1. Цель работы

Выработка у студентов инженерного подхода к анализу модулированных сигналов, умения использовать математические методы и модели при расчетах временных и спектральных характеристик модулированных сигналов с использованием современных технических средств.

2. Общие сведения

Сигналы, поступающие от источников сообщений, как правило, не могут быть непосредственно переданы по каналу связи. Это обусловлено тем, что подобные сигналы чаще всего имеют неэлектрическую природу. Кроме того, они обладают спектрами, лежащими в низкочастотной области, и поэтому не могут передаваться на большие расстояния. Для решения проблемы передачи информации на большие расстояния используется модуляция, которая обеспечивает перенос спектра исходного низкочастотного сигнала, содержащего информацию, в область высоких частот.

Идея способа, позволяющего переносить спектр сигнала в область высоких частот, заключается в следующем. Предположим, что у нас имеется высокочастотный сигнал $s_{вч}(t)$, который назовем несущим колебанием. Его математическая модель может быть записана следующим образом

$$S_{вч}(t) = f(t, a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (2.1)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n – параметры, определяющие форму колебания.

Пусть $s_{нч}(t)$ - низкочастотный сигнал, содержащий сообщение, который необходимо передать по каналу связи. Если, по крайней мере, один из параметров высокочастотного сигнала (1) изменяется во времени пропорционально низкочастотному сигналу $s_{нч}(t)$, то несущее колебание приобретает новое свойство - оно несет информацию, которой первоначально обладал низкочастотный сигнал $s_{нч}(t)$. В процессе модуляции осуществляется перенос информации из низкочастотного в высокочастотный сигнал путем изменения одного из его параметров.

Физический процесс управления параметрами высокочастотного несущего колебания и называется **модуляцией**.

В качестве такого несущего колебания используется гармонический сигнал с тремя свободными параметрами: амплитудой S_m , частотой ω и фазой φ

$$S_{вч}(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) = S_m \cos \psi(t) \quad (2.2)$$

Изменение во времени амплитуды несущего колебания S_m по закону низкочастотного сигнала принято называть амплитудной модуляцией, а частоты ω или фазы φ - частотной или фазовой модуляцией. Последние объединяются в одно общее понятие – угловая модуляция. При амплитудной модуляции частота ω и фаза φ несущего высокочастотного сигнала остаются неизменными.

2.1. Математическая модель АМ сигнала. Основные свойства

Математическая модель амплитудно-модулированного сигнала в обобщенном виде имеет следующий вид

$$S_{ам}(t) = S_m(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.3)$$

Связь между огибающей $S_m(t)$ амплитудно-модулированного сигнала и модулирующим сигналом $s_{нч}(t)$ в общем случае может быть представлена следующим образом:

$$S_m(t) = U_{мвч} [1 + k s_{нч}(t)], \quad (2.4)$$

где: $U_{мвч}$ - амплитуда высокочастотного несущего колебания в отсутствие модуляции; k – коэффициент пропорциональности.

При модуляции однотоновым гармоническим низкочастотным сигналом $s_{мч}(t) = U_{мч} \cos \Omega_0 t = U_{мч} \cos 2\pi F_0 t$ математическая модель АМ колебания принимает следующий вид

$$S_{ам}(t) = U_{мвч} [1 + k U_{мч} \cos \Omega_0 t] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_{мвч} [1 + M \cos 2\pi F_0 t] \cos 2\pi f_0 t + \varphi_0]. \quad (2.5)$$

Величину $M = k U_{мч}$ принято называть коэффициентом глубины амплитудной модуляции. Он изменяется в пределах от 0 до 1 в зависимости от значения амплитуды низкочастотного модулирующего сигнала $U_{мч}$. Чаще всего коэффициент глубины модуляции M задается в процентах. Если модуляция осуществляется одним низкочастотным гармоническим колебанием, то коэффициент глубины модуляции M может быть определен по форме АМ колебания (рис. 2.1).

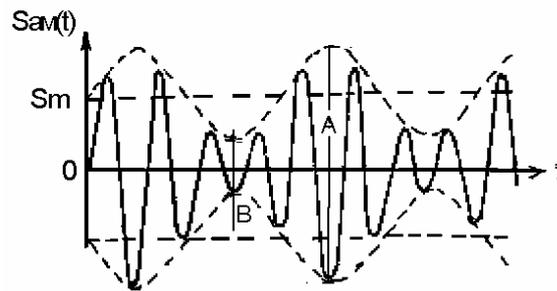


Рис. 2.1. Временная характеристика АМ сигнала

Для этого необходимо знать максимальный A и минимальный B размах АМ колебания (рис. 2.1) и затем по формуле (2.6) провести расчет величины M .

$$M, \% = \frac{(A - B)}{(A + B)} \times 100, \% \quad (2.6)$$

Зная спектральный состав такого АМ колебания (рис. 2.2а), т.е. уровни значений его отдельных спектральных составляющих, можно также определить коэффициент глубины амплитудной модуляции M

$$M, \% = \frac{2S_m(\omega_0 \pm \Omega)}{S_m(\omega_0)} 100, \% \quad (2.7)$$

где $S_m(\omega_0 \pm \Omega)$ - амплитуда верхней или нижней боковой составляющей спектра АМ колебания; $S_m(\omega_0)$ - амплитуда несущего колебания.

При модуляции несущего колебания сложным низкочастотным сигналом (речь, музыка) математическая модель АМ сигнала имеет следующий вид

$$S_{ам}(t) = U_{мвч} [1 + k \sum_{i=1}^N U_{mi} \text{Cos } \Omega_i t] \text{Cos } (\omega_0 t + \varphi_0) = \quad (2.8)$$

$$= U_{мвч} [1 + \sum_{i=1}^N M_i \text{Cos } \Omega_i t] \text{Cos } (\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $\Omega_1 \triangleleft \Omega_2 \triangleleft \dots \triangleleft \Omega_N$.

Спектр АМ колебания, как и при модуляции тональным сигналом, оказывается **линейчатым**. Он включает три группы спектральных составляющих: верхнюю и нижнюю группу боковых частот $\omega_0 \pm \Omega_i$ (где $i = 1 \div N$) и несущее колебание на частоте ω_0 (рис. 2.2б).

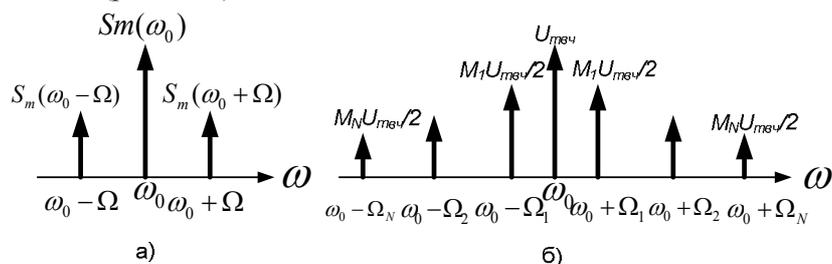


Рис. 2.2. Спектры АМ колебаний

К многотональным АМ сигналам относятся так называемые манипулированные сигналы. В простейшем случае они представляют собой периодическую последовательность радиоимпульсов. Такие сигналы используются в дискретных системах

передачи информации. Цифре «1» соответствует радиоимпульс с определенной амплитудой, а цифре «0» – пауза той же длительности. В этом случае амплитудно-манипулированный сигнал описывается следующей математической моделью

$$S_{\text{ам}}(t) = U_{\text{мвч}} S_{\text{в}}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ = \frac{U_{\text{мвч}} A}{Q} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^N \frac{\sin(n\pi/Q)}{(n\pi/Q)} \cos n\Omega_0 t \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.9)$$

где $S_{\text{в}}(t)$ – временная характеристика периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов; A – высота прямоугольного видеоимпульса; $Q = T/\tau_{\text{и}}$ – скважность; n – номер гармоники НЧ модулирующего сигнала; $\Omega_0 = 2\pi F_0$ – основная круговая частота НЧ модулирующего сигнала; $\omega_0 = 2\pi f_0$ – круговая частота ВЧ несущего колебания.

Вывод: Ширина спектра АМ колебания при модуляции одним гармоническим сигналом равна удвоенному значению этой частоты: $\Delta\omega_{\text{ам}} = 2\Omega$ или $\Delta f_{\text{ам}} = 2F_0$, а при модуляции сложным сигналом ширина спектра АМ колебания равна удвоенному значению наивысшей частоты модуляции: $\Delta\omega_{\text{ам}} = 2\Omega_{\text{в}}$ или $\Delta f_{\text{ам}} = 2F_{\text{в}}$.

2.2. Балансная амплитудная модуляция. Модуляция с одной боковой полосой (ОБП). Математические модели и спектры

Для более эффективного использования мощности передающего устройства применяют амплитудную балансную модуляцию, в спектре которой отсутствует несущее колебание. Математическая модель такого колебания может быть представлена следующим выражением

$$S_{\text{БМ}}(t) = S_m M \cos(\Omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.10)$$

Спектр АМ сигнала с балансной модуляцией содержит только две группы боковых частот

$$S_{\text{БМ}}(t) = \frac{S_m M}{2} \text{Cos}[(\omega_0 + \Omega_0)t + (\varphi_0 + \varphi)] + \frac{S_m M}{2} \text{Cos}[(\omega_0 - \Omega_0)t + (\varphi_0 - \varphi)]. \quad (2.11)$$

Из представленного на рис. 2.3 спектра сигнала, полученного в результате балансной модуляции, видно, что его ширина не изменяется и оказывается равной $\Delta\omega_{\text{БМ}} = 2\Omega_0$ или $\Delta f_{\text{БМ}} = 2F_{\text{НЧ}}$.

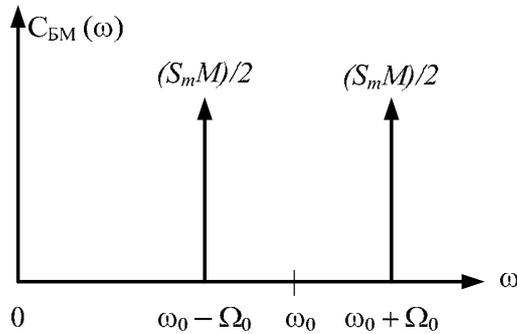


Рис. 2.3. Спектр сигнала при балансной модуляции

Так как при амплитудной модуляции информация переносится в равной степени в каждую боковую полосу частот, то с целью сужения полосы АМ колебания *в два раза* применяют однополосную балансную модуляцию. Математическая модель сигнала с одной боковой полосой (ОБП) содержит пилот-сигнал на несущей частоте ω_0 и одну боковую полосу частот $\omega_0 - \Omega_0$:

$$S_{\text{ОБП}}(t) = S_m \text{Cos}(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{S_m M}{2} \text{Cos}[(\omega_0 - \Omega_0)t + (\varphi_0 - \varphi)] \quad (2.12)$$

2.3. Математическая модель сигнала с угловой модуляцией. Основные свойства

Если в несущем колебании изменяются частота или фаза по закону низкочастотного модулирующего сигнала, то в этом случае изменяется полный фазовый угол $\psi(t) = (\omega t + \varphi)$ и такая модуляция носит название **угловой**.

Если полный фазовый угол $\psi(t)$ высокочастотного колебания связан с модулирующим сигналом $s_{нч}(t)$ зависимостью

$$\psi(t) = \omega_0 t + ks_{нч}(t), \quad (2.13)$$

где ω_0 – значение частоты при отсутствии модулирующего сигнала $s_{нч}(t)$; k - коэффициент пропорциональности, то имеет место фазовая модуляция. Обобщенная математическая модель для фазо-модулированного сигнала имеет следующий вид

$$S_{фм}(t) = U_{мвч} \text{Cos}[\omega_0 t + ks_{нч}(t)] \quad (2.14)$$

При максимальном значении низкочастотного модулирующего сигнала $s_{нч}(t)$ фазовый сдвиг $\psi(t)$ достигает предельных значений. Этот сдвиг по фазе принято называть **девиацией фазы** $\Delta\psi$. Чем больше амплитуда модулирующего однотонового гармонического сигнала $s_{нч}(t)$, тем значительнее девиация фазы.

Мгновенная частота $\omega(t)$ сигнала с угловой модуляцией определяется как первая производная от полной фазы $\psi(t)$

$$\omega(t) = \frac{d\psi}{dt}. \text{ Откуда следует: } \psi(t) = \int_{-\infty}^t \omega(\tau) d\tau + const. \quad (2.15)$$

При частотной модуляции (ЧМ) высокочастотного сигнала между модулирующим сигналом $s_{нч}(t)$ и мгновенной частотой $\omega(t)$ существует следующая связь

$$\omega(t) = \omega_0 + ks_{нч}(t) \quad (2.16)$$

Максимальное изменение частоты при ЧМ колебании принято называть **девиацией частоты** $\Delta\omega = ks_{макс}$.

Математическая модель сигнала с частотной модуляцией с учетом (2.2, 2.15, 2.16) принимает следующий вид

$$S_{чм}(t) = U_{мвч} \text{Cos}[\omega_0 t + k \int_{-\infty}^t s_{нч}(\tau) d\tau] \quad (2.17)$$

Следует отметить, что хотя внешне формы сигналов ФМ и ЧМ не отличаются друг от друга, если модулирующий сигнал $s_{нч}(t)$ представляет собой гладкую функцию, однако между ними имеется и принципиальное различие. Так фазовый сдвиг между ФМ колебанием и немодулированным ВЧ сигналом пропорцио-

нален $s_{нч}(t)$, а для ЧМ сигнала этот сдвиг пропорционален интегралу от НЧ колебания (2.17).

При модуляции простейшим гармоническим сигналом мгновенная частота ЧМ сигнала изменяется по закону

$$\omega(t) = \omega_0 + kU_{мнч} \text{Cos}(\Omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 + \Delta\omega \text{Cos}(\Omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.18)$$

где $\Delta\omega = kU_{мнч}$ – девиация частоты.

С учетом (2.15) мгновенная фаза такого ЧМ сигнала изменяется по следующему закону

$$\psi(t) = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \text{Cos}(\Omega_0 t + \varphi_{нч0}) + \varphi_0 \quad (2.19)$$

Отношение девиации частоты $\Delta\omega$ к частоте модулирующего сигнала Ω_0 принято называть **индексом угловой модуляции** $m = \Delta\omega/\Omega_0$ (2.20)

Математическая модель ЧМ и ФМ сигналов при модуляции простейшим низкочастотным гармоническим сигналом и при ($\varphi_0=0, \varphi_{нч0}=0$) имеет следующий вид

$$S_{чм}(t) = U_{мвч} \text{Cos}(\omega_0 t + m \text{Sin} \Omega_0 t). \quad (2.21)$$

Форма ЧМ сигнала при модуляции простейшим гармоническим сигналом показана на рис. 2.4.

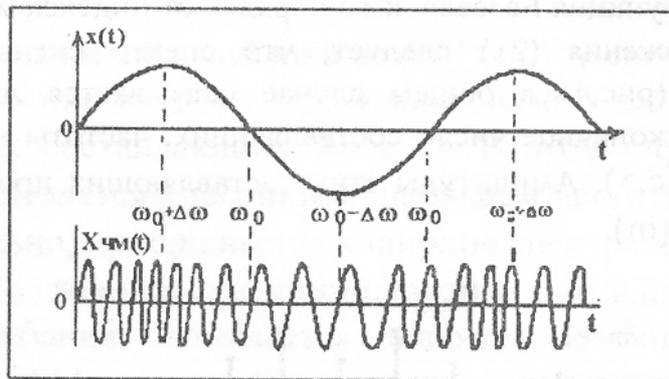


Рис. 2.4. Форма ЧМ сигнала при модуляции тональным низкочастотным сигналом

2.4. Спектральный состав сигналов с угловой модуляцией при произвольном индексе модуляции m . Ширина спектра

Математическую модель сигнала с однотоновой угловой модуляцией (2.21) можно представить следующим образом

$$S_{\text{ЧМ}}(t) = U_{\text{мвч}} \text{Cos}(m \text{Sin} \Omega_0 t) \text{Cos} \omega_0 t - U_{\text{мвч}} \text{Sin}(m \text{Sin} \Omega_0 t) \text{Sin} \omega_0 t. \quad (2.22)$$

Математическую модель ЧМ или ФМ сигнала для произвольного значения m можно представить в виде суммы гармонических составляющих, если учесть, что экспонента с мнимым показателем специального вида $\exp(jm \text{Sin} x)$, периодическая на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$, разлагается в комплексный ряд Фурье:

$$S_{\text{ЧМ}}(t) = U_{\text{мвч}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(m) \text{Cos}(\omega_0 + k\Omega_0)t, \quad (2.23)$$

где $J_k(m)$ – функция Бесселя k -го порядка от индекса модуляции m .

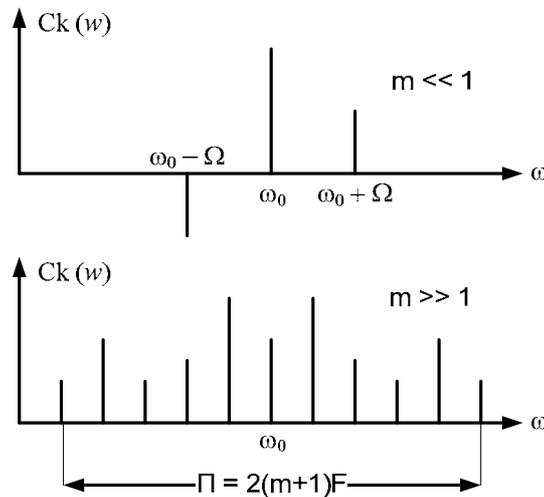


Рис. 2.5. Спектральный состав сигналов с угловой модуляцией при различных индексах модуляции m

Из выражения (2.23) следует, что спектр сигнала с угловой модуляцией (рис. 2.4) в общем случае оказывается **линейчатым** и содержит бесконечное число составляющих, частоты которых равны $\omega_0 \pm k\Omega_0$ (рис. 2.5). Амплитуды отдельных составляющих пропорциональны значениям $J_k(m)$.

3. Лабораторное задание

3.1. Построить временную характеристику АМ колебания для случая модуляции однотоновым НЧ сигналом (табл.1), используя программу «Mathcad», рассчитать уровни всех спектральных составляющих и построить спектр АМ колебания, а также определить ширину спектра для такого сигнала.

Таблица 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,2
U _m , mB	10	20	30	40	50	60	70	80	90	25
f ₀ кГц	100	140	160	180	200	220	240	260	280	300
F _{0нч} кГц	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

3.2. Рассчитать и построить спектр амплитудно-манипулированного сигнала при F₀= 1 кГц и N=12 по данным, приведенным в табл. 2. Определить ширину спектра с учетом ширины спектра НЧ модулирующего сигнала.

Таблица 2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
U _m mB	10	20	40	60	40	30	50	90	40	80
Q	5	10	4	6	8	10	5	10	4	8
f ₀ кГц	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280

3.3. Рассчитать и построить спектр ЧМ колебания по данным, приведенным в табл.3. Определить ширину спектра сигнала с угловой модуляцией.

Таблица 3

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	2,4	3	4	5	6	5,5	4,5	3,5	8,6	10
F, кГц	10	15	20	18	12	8	13	16	25	22
U _{мвч} mB	4	6	8	10	12	14	16	18	20	25

3.4. Определить глубину модуляции АМ сигнала и зарисовать формы колебаний: модулирующего, несущего и АМ сигнала для случая модуляции одним низкочастотным гармоническим сигналом. Для этого необходимо подключить генератор ГЗ-33 ко входу генератора ГЗ-102, а его выход соединить с одним из входов осциллографа. Установить на генераторах ГЗ-33 и ГЗ-102 частоты колебаний в соответствии с табл. 1. Изменяя уровень низкочастотного модулирующего сигнала добиться заданной глубины модуляции. Зарисовать осциллограммы на выходе генераторов.

3.5. Зарисовать формы колебаний: модулирующей последовательности периодических видеоимпульсов ($Q=2$) и $F_{нч} = 1$ кГц и амплитудно-манипулированного колебания. Для этого необходимо подключить генератор ГЗ-102 к генератору ГЗ-33. Установить на генераторе прямоугольных импульсов значения длительности прямоугольных импульсов и частоту их периодической последовательности в соответствии с табл. 2.

4. Краткое описание лабораторной установки

Исследуемые низкочастотные модулирующие сигналы формируются с помощью генераторов гармонических колебаний ГЗ-33 и прямоугольных импульсов Г5-54. Высокочастотные и

амплитудно-модулированные сигналы создаются генератором ГЗ-102. Наблюдение формы исследуемых сигналов осуществляется с помощью осциллографа С1-55 (рис. 2.6).

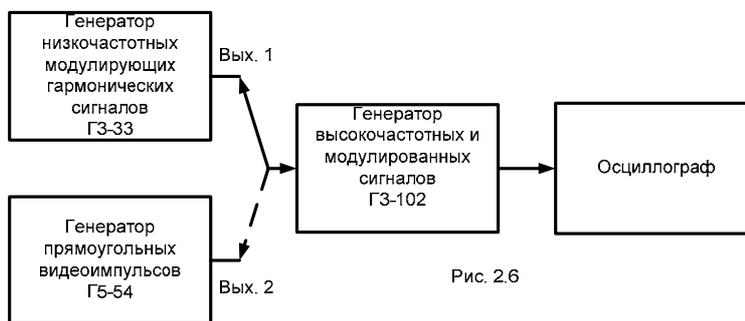


Рис. 2.6

5. Содержание отчета

- 5.1. Цель работы.
- 5.2. Функциональная схема измерительной установки.
- 5.3. Теоретический расчет спектральных характеристик исследуемых моделей сигналов
- 5.4. Временные характеристики исследуемых сигналов.
- 5.5. Основные выводы по работе.

6. Контрольные вопросы

- 6.1. Что называется амплитудной модуляцией?
- 6.2. Чем характеризуется спектр АМ колебания?
- 6.3. Что такое балансная и с ОБП модуляции?
- 6.4. Как изменяется ширина спектра АМ колебания с изменением амплитуды и частоты модулирующего сигнала?
- 6.5. Что такое угловая модуляция?
- 6.6. В чем состоит различие между ЧМ и ФМ сигналами?
- 6.7. Чем определяется ширина спектра при угловой модуляции?

6.8. Что понимается под девиацией частоты и индексом угловой модуляции?

6.9. От чего зависит девиация частоты и индекс модуляции при ЧМ и ФМ?

7. Литература

7.1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Высшая школа, 1988.

7.2. Игнатов В.А. Теория информации и передачи сигналов. - М.: Сов. радио, 1979.

7.3. Котиков В.И. Методическое пособие по выполнению лабораторных работ по курсу “Математические модели сигналов”. - М.: МГТУГА, 2007.

Лабораторная работа №3

ИЗУЧЕНИЕ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ

1. Цель работы

Выработка у студентов инженерного подхода к вопросам дискретизации непрерывных сигналов, умения применять математические методы при их расчетах с использованием современных программных и технических средств.

2. Общие сведения

Под временной дискретизацией непрерывных сигналов обычно понимается процесс преобразования этих сигналов в последовательность мгновенных значений или отсчетов, соответствующих определенным временным точкам $t = k\Delta t$, где Δt – интервал или период дискретизации, k – номер отсчетной точки ($k \in \{\dots, -1, 0, +1, \dots\}$).

Физический отсчет непрерывной временной функции $x(t)$ в точке $t = k\Delta t$ представляется коротким импульсом высотой или амплитудой равной $x(k\Delta t)$. Последовательность таких коротких импульсов образует сигнал амплитудной импульсной модуляции (АИМ).

Простейшая схема временного дискретизатора может быть представлена в виде ключа (рис.1), который периодически, с периодом Δt , замыкается на время τ ($\tau \ll \Delta t$).

Если теперь принять, что коэффициент передачи подобного ключа равен A ($A \in \{0, \infty\}$) то математическая модель сигнала на выходе этой схемы может быть записана в следующем виде:

$$x_{\text{д}}^*(t) = x(t)h_{\Delta t}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - k\Delta t), \quad (3.1)$$

$$\text{где } h_{\Delta t}(t) = \begin{cases} A, & |t| < \tau/2 \\ 0, & \tau/2 < |t| < \Delta t/2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Таким образом работа ключевой схемы (рис. 3.1) сводится к балансной модуляции периодической последовательности прямоугольных отсчетных импульсов высотой A и длительностью τ непрерывной функцией времени $x(t)$ (рис. 3.2).

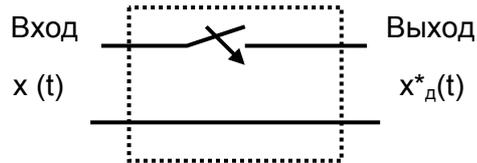


Рис.3.1. Модель ключевой схемы дискретизации непрерывных во времени сигналов

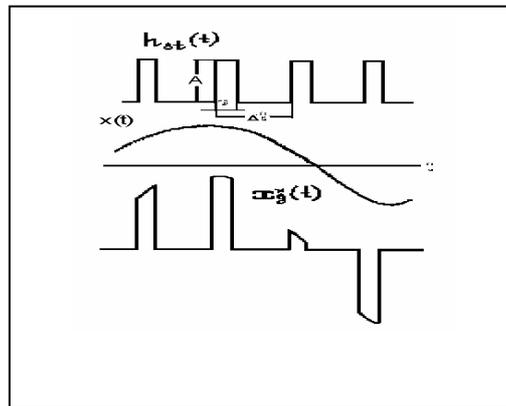


Рис. 3.2. Временные характеристики сигналов дискретизации, непрерывного входного и дискретного выходного сигнала

Математическая модель дискретизации получается из АИМ сигнала $x^*_o(t)$ предельным переходом при $\tau \rightarrow 0$ ($A\tau = \text{const} = 1$). Результат предельного перехода – дискретная функция времени $x_o(t)$ – представляет собой периодическую последовательность δ -импульсов, промодулированных по амплитуде

$$x_d(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty, A\tau=1} x_d(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) \quad (3.3)$$

Перейдем теперь к рассмотрению спектральных характеристик исследуемых сигналов.

2.1. Спектры АИМ сигнала $x^*_o(t)$ и дискретной математической функции $x_o(t)$

Так как $x^*_d(t)$ есть результат перемножения периодической последовательности импульсов с сигналом $x(t)$, то спектр АИМ сигнала $x^*_d(t)$ будет связан со спектром колебания $x(t)$. Это есть сумма спектров, возникающих за счет балансной модуляции функцией $x(t)$ каждой гармоники импульсного несущего колебания $h_{\Delta t}(t)$. Представим $h_{\Delta t}(t)$ в виде косинус-ряда Фурье

$$h_{\Delta t}(t) = \frac{h_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \text{Cos} n \omega_d t, \quad (3.4)$$

$$\text{где } h_n = \frac{2}{\Delta t} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \text{Cos} n \omega_d t dt, \quad n = 0, 1, \dots; \quad \omega_d = 2\pi f_d = 2\pi / \Delta t.$$

Подставляя (3.4) в (3.1) и осуществляя преобразование Фурье от обеих частей (3.1), получаем

$$S_{x^*_d}(\omega) = \frac{h_0}{2} S_x(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{2} [S_x(\omega + n\omega_d) + S_x(\omega - n\omega_d)], \quad (3.5)$$

где $S_x(\omega)$ - спектр исходного сигнала $x(t)$,

$S_{x^*_d}(\omega)$ – спектр АИМ сигнала $x^*_d(t)$.

Из выражения (3.5) легко понять, как выглядит спектр АИМ колебания $x^*_d(t)$. Он представляет собой сумму спектров исход-

ной функции $x(t)$, сдвинутых вправо и влево по частотной оси на $n\omega_0$ ($n = 0, 1, \dots$). Ординаты сдвинутых спектров в $h_n/2$ раз отличаются от ординат спектра $S_x(\omega)$ исходной функции непрерывного сигнала $x(t)$.

При предельном переходе ($\tau \rightarrow 0, \Delta\tau = 1$) в (3.5) меняются только значения h_n . Нетрудно показать, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0, \Delta\tau = 1} h_n = \frac{2}{\Delta t}. \quad (3.6)$$

Подставляя предельное значение для h_n из (3.6) в (3.5), получим

$$S_{x_d}(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \left\{ S_x(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} [S_x(\omega + n\omega_d) + S_x(\omega - n\omega_d)] \right\}. \quad (3.7)$$

Полученное выражение (3.7) отражает спектр дискретной функции $x_d(t)$.

Связь спектров $S_x(\omega), S_{x_d^*}(\omega), S_{x_d}(\omega)$ показана на рис.3.3.

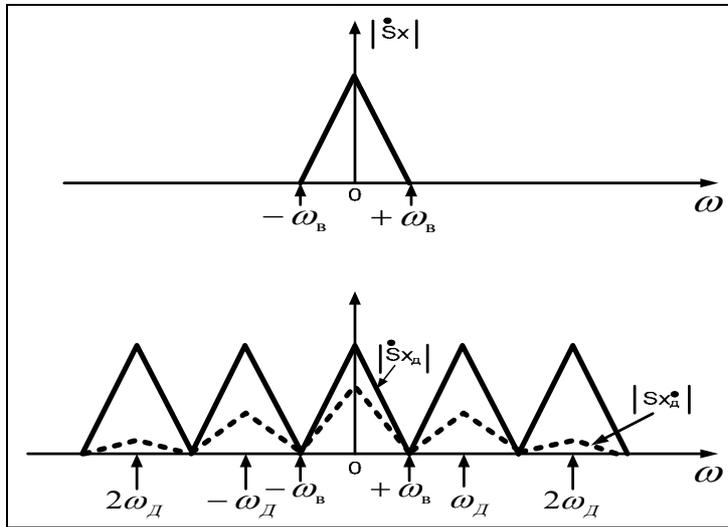


Рис. 3.3. Спектры исходного и дискретизированного сигналов

2.2. Восстановление исходного сигнала $x(t)$ по его отсчетам

Восстановить исходный непрерывный сигнал по его отсчетам означает сформировать из дискретизированного колебания $x_o(t)$ некоторое колебание $x'(t)$, в определенном смысле близкое к исходному $x(t)$.

В математическом отношении задача восстановления исходной функции есть задача интерполяции ее отсчетов.

Понять процесс восстановления помогает идеализация свойств реальных непрерывных сигналов. Идеализация непосредственно связана с понятием функции с ограниченным спектром.

Предположим, что спектр $S_x(\omega)$ исходного сигнала $x(t)$ ограничен по протяженности

$$S_x(\omega) = 0, \text{ если } |\omega| > \omega_g, \quad (3.8)$$

где $\omega_g = 2\pi F_g$ – верхняя граничная частота спектра исходного сигнала.

Сигнал $x(t)$, для которого выполняется условие (3.8), называется сигналом с ограниченным спектром.

Если выбрать частоту дискретизации $\omega_o = 2\pi/\Delta t \geq 2\omega_g$, то, как ясно из рис. 3.3, сдвинутые спектры $S_x(\omega \pm \omega_o)$ ни при каких значениях ω не будут перекрываться. Это означает, что при этих условиях в колебании $x_o(t)$, как и в колебании $x_d^*(t)$, имеется аддитивная компонента, изменяющаяся строго по закону $x(t)$, отличаясь от него лишь масштабным множителем. Причем в полосу частот этой компоненты не попадает помеха от соседних, сдвинутых по частоте, спектров. Следовательно, выделяя различными методами полосу частот, соответствующих этой компоненте, можно сформировать колебание, с точностью до масштаба повторяющее $x(t)$.

Из всего сказанного вытекает и способ восстановления исходного сигнала $x(t)$ по его отсчетам. Для решения этой задачи колебание $x_o(t)$, а практически – АИМ сигнал $x_o(t)$, следует по-

дать на вход фильтрующего устройства, который пропускает без искажений полосу частот до ω_c и полностью подавляет частоты, лежащие выше ω_c ($\omega > \omega_c$).

Предположим, что частота дискретизации выбрана в соответствии с теоремой Котельникова, т.е. из условия: $\omega_d = 2\omega_B$ ($F_d = 2F_B$). В этом случае интервал дискретизации оказывается

$$\text{равным: } \Delta t = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{1}{2F_B}.$$

Тогда дискретизированный сигнал $x_d(t)$ можно описать следующей математической моделью:

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{2F_B}\right) \delta\left(t - \frac{k}{2F_B}\right). \quad (3.9)$$

Пусть фильтр, используемый для восстановления сигнала, имеет коэффициент передачи следующего вида

$$K_{\text{ифнч}}(\omega) = \begin{cases} \Delta t, & \omega \leq \omega_B \\ 0, & \omega > \omega_B \end{cases} \quad (3.10)$$

Линейный четырехполосник с коэффициентом передачи (3.10) называется идеальным фильтром нижних частот (ФНЧ). Он определяется с точностью до фазо-частотной характеристики.

Если на входе идеального ФНЧ действует дискретная функция $x_d(t)$, то на его выходе возникает низкочастотное колебание, спектр которого описывается следующим математическим выражением

$$S_{x'}(\omega) = S_{x_d}(\omega) K_{\text{ифнч}}(\omega) = \begin{cases} S_x(\omega), & |\omega| \leq \omega_B \\ 0, & |\omega| > \omega_B. \end{cases} \quad (3.11)$$

Из равенства $S_{x'}(\omega) = S_x(\omega)$ следует $x'(t) = x(t)$, т.е. возможность точного восстановления исходного колебания с ограниченным спектром по его отсчетам, взятым с интервалом дискретизации

$$\Delta t = 1/2F_B.$$

Приведенное рассмотрение процесса восстановления сигнала доказывает теорему дискретизации, полученную В.А. Котельниковым:

Функция времени $x(t)$, в спектре которой не содержится частот выше граничной частоты F_0 , полностью определяется своими мгновенными временными значениями (отсчетами), отстоящими друг от друга на интервал $\Delta t = 1/2F_0$.

Слова «полностью определяется» надо понимать в смысле – «может быть точно восстановлена по своим отсчетам».

2.3. Процесс восстановления сигнала на основе временных характеристик сигнала и идеального ФНЧ

Если на входе линейного четырехполюсника с импульсной реакцией $g(t)$ действует дискретная функция времени (3.3), то сигнал на его выходе может быть найден через интеграл Дюамеля, используя основное свойство-определение δ -функции

$$\begin{aligned} x'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{\Delta}(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(\tau-k\Delta t)g(t-\tau)d\tau = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)g(t-k\Delta t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таким образом, восстановленный сигнал $x'(t)$ формируется как сумма запаздывающих откликов (импульсных реакций) четырехполюсника на каждый δ -импульс входного воздействия. Можно сказать, что фильтр-восстановитель интерполирует отсчеты своей импульсной реакцией.

Для линейной цепи импульсная реакция $g(t)$ и комплексный коэффициент передачи однозначно связаны преобразованиями Фурье

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt,$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{j\omega t} d\omega . \quad (3.13)$$

Если воспользоваться (3.9) и (3.12), то для ИФНЧ можно получить импульсную реакцию в следующем виде

$$g_{\text{ифнч}}(t) = \frac{\text{Sin } 2\pi F_{\text{B}} t}{2\pi F_{\text{B}} t}, t \in (-\infty, \infty). \quad (3.14)$$

Если подставить (3.14) в (3.12), то можно получить разложение функции с ограниченным спектром в ряд Котельникова, коэффициентами которого являются отсчеты функции, а базисом – последовательность запаздывающих функций (3.14):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{2F_{\text{B}}}\right) \frac{\text{Sin } 2\pi F_{\text{B}} \left(t - \frac{k}{2F_{\text{B}}}\right)}{2\pi F_{\text{B}} \left(t - \frac{k}{2F_{\text{B}}}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\text{Sin } 2\pi F_{\text{B}} (t - k\Delta t)}{2\pi F_{\text{B}} (t - k\Delta t)} \quad (3.15)$$

Ряд (3.15), представляющий любую функцию с ограниченным спектром, играет важнейшую роль при исследовании сигналов с ограниченным спектром.

2.4. Восстановление непрерывного сигнала по его отсчетам в реальных условиях

Реальные непрерывные сигналы и сообщения всегда удовлетворяют принципу причинности, так как имеют начало и конец во времени, и, следовательно, уже поэтому их спектры принципиально не ограничены по частотной оси.

Это обстоятельство приводит к тому, что изложенная выше теория временной дискретизации (теорема Котельникова) имеет лишь приближенный характер и тем точнее описывают процессы дискретизации и восстановления, чем ближе свойства реальных сигналов и фильтров-интерполяторов отсчетов к теорети-

ческим моделям функции с ограниченным спектром и идеального фильтра нижних частот.

В реальных условиях временная дискретизация и последующее восстановление непрерывного сигнала по его отсчетам сопровождаются неустранимой ошибкой. Восстановленный сигнал всегда отличается от исходного непрерывного сигнала:

$$x'(t) = x(t) + \varepsilon(t). \quad (3.16)$$

Степень близости исходного $x(t)$ и восстановленного $x'(t)$ сигналов принято характеризовать энергией сигнала неточности E_ε

$$E_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2(t) dt \quad (3.17)$$

или, что используется чаще, средней мощностью ошибки восстановления

$$\overline{E}_\varepsilon^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int \varepsilon^2(t) dt, \quad (3.18)$$

где $\varepsilon(t)$ – ошибка восстановления.

Энергия E_ε зависит как от свойств дискретизируемого сигнала $x(t)$, так и от способа его восстановления, т.е. частотной характеристики реальных ФНЧ, используемых для фильтрации АИМ сигнала $x^*_\delta(t)$.

Если пренебречь влиянием свойств реального ФНЧ, т.е. считать, что его комплексный коэффициент передачи «достаточно близок» к коэффициенту передачи идеального ФНЧ с частотой среза $\omega_s = \omega_\delta/2$, то можно показать, что потенциальная точность процесса дискретизации-восстановления определяется только спектром $S_x(\omega)$ дискретизируемой функции $x(t)$. В этих условиях минимально возможная энергия ошибки восстановления $E_{\varepsilon \min}$ может быть рассчитана следующим образом

$$E_{\varepsilon \min} = \int_{\omega_s/2}^{\infty} |S_x(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.19)$$

Формула (3.19) имеет простой физический смысл: потенциальная точность дискретизации-восстановления непрерывного сигнала с ограниченным спектром определяется той частью его спектра, который лежит за пределами полосы частот $|\omega| < \omega_b/2$.

2.5. Дельта-функция и ее спектральные характеристики

Дельта-функция, как модель бесконечно короткого импульса, математически определяется как линейный функционал со следующим основным свойством. Если $f(x)$ – непрерывная в точке x_0 функция, то

$$\int_{x_0-0}^{x_0+0} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \quad (3.20)$$

Запись указанных пределов в (3.20) означает, что путь интегрирования должен включать точку x_0 , ширина же интервала интегрирования никакой роли не играет.

Спектр одиночного δ -импульса, возникающего в момент времени $t = t_0$, в соответствии с (3.20) можно записать в виде следующего математического выражения

$$S_{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}. \quad (3.21)$$

Спектральный состав периодической последовательности временных δ -импульсов, для которых математическая модель имеет следующий вид

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k\Delta t) = \delta_{\Delta t}(t), \quad (3.22)$$

может быть получен на основании формального ряда Фурье для функции $\delta_{\Delta t}(t)$, который получается из (3.4), если вместо h_n подставить их предельные значения при $\tau \rightarrow 0$, $A\tau = 1$

$$S_{\delta_{\Delta t}}(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n \frac{2\pi}{\Delta t}). \quad (3.23)$$

Из представленного аналитического выражения (3.23) следует: периодической последовательности δ -импульсов, представленных во временной области и имеющей период $T = \Delta t$, в спектральной области будет соответствовать периодическая последовательность частотных δ -импульсов, но уже с частотным периодом $F_{\Delta t} = 1/\Delta t$. Амплитудой частотных δ -импульсов оказывается круговая частота временной последовательности $2\pi/\Delta t$.

3. Лабораторное задание

3.1. Изучить принципиальные основы теории временной дискретизации и теорему Котельникова.

3.2. Построить графики спектров одиночного δ -импульса и периодической последовательности δ -импульсов с периодом Δt по данным, приведенным в табл. 1.

Таблица 1

№ Вар-та	1	2	3	4	5	6
Δt, мсек.	1,57	4,71	3,14	1,57	7,85	6,28
№ Вар-та	7	8	9	10	11	12
Δt, мсек.	31,4	47,1	15,7	78,5	9,42	62,8

3.3. Построить на одном графике спектры АИМ сигналов с длительностью дискретизирующих импульсов τ и при дискретной функции времени $\delta_{\Delta t}(t)$ с периодом Δt , полученных из одного и того же непрерывного сигнала, спектр которого $S_x(\omega)$ приведен в табл. 2.

Таблица 2

№	1	2	3	4	5	6
Δt , мс	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0
τ	$0,1\Delta t$	$0,2\Delta t$	$0,2\Delta t$	$0,1\Delta t$	$0,2\Delta t$	$0,1\Delta t$
ω_d	$2\pi/\Delta t$	$6\pi/\Delta t$	$\pi/\Delta t$	$2\pi/\Delta t$	$3\pi/\Delta t$	$\pi/\Delta t$
ω_B	$\pi/\Delta t$	$3\pi/2\Delta t$	$\pi/2\Delta t$	$\pi/\Delta t$	$3\pi/2\Delta t$	$\pi/2\Delta t$
$S_x(\omega)$						
№	7	8	9	10	11	12
Δt , мс	5,0	8,0	10,0	12,0	14,0	16,0
τ	$0,1\Delta t$	$0,2\Delta t$	$0,1\Delta t$	$0,2\Delta t$	$0,1\Delta t$	$0,2\Delta t$
ω_d	$2\pi/\Delta t$	$6\pi/\Delta t$	$\pi/\Delta t$	$2\pi/\Delta t$	$3\pi/\Delta t$	$\pi/\Delta t$
ω_B	$\pi/\Delta t$	$3\pi/2\Delta t$	$\pi/2\Delta t$	$\pi/\Delta t$	$3\pi/2\Delta t$	$\pi/2\Delta t$
$S_x(\omega)$						

3.4. Рассчитать минимально возможную энергию E_{emin} ошибки восстановления непрерывного сигнала в виде экспоненциального импульса по данным табл. 2 и 3.

$$X(t) = \begin{cases} \sqrt{2} \exp(-\alpha t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Таблица 3

№	1	2	3	4	5	6
α	$\pi/\Delta t$	$\pi/2\Delta t$	$\pi/3\Delta t$	$\pi/4\Delta t$	$\pi/5\Delta t$	$\pi/6\Delta t$
№	7	8	9	10	11	12
α	$\pi/7\Delta t$	$\pi/8\Delta t$	$\pi/9\Delta t$	$\pi/10\Delta t$	$\pi/11\Delta t$	$\pi/12\Delta t$

4. Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- формулировку целей работы;
- исходные данные, результаты расчетов и спектры;
- анализ и объяснение полученных результатов, а также краткие выводы по работе.

5. Контрольные вопросы

5.1. Объяснить математическую модель временной дискретизации.

5.2. Объяснить связь спектров непрерывного $x(t)$ и дискретного $x_d(t)$ сигналов.

5.3. Объяснить физическую сущность процесса восстановления непрерывного сигнала по его отсчетам.

5.4. Объяснить причины возникновения ошибок при восстановлении непрерывного сигнала по его отсчетам.

5.5. Записать ряд Котельникова для сигнала с ограниченным спектром.

5.6. Объяснить, как ошибка восстановления зависит от частоты дискретизации и характеристик фильтра-интерпретатора.

5.7. Дать определение δ -функции и объяснить структуру спектра периодической последовательности δ -импульсов.

6. Литература

6.1. Зюко А.Г. и др. Теория передачи сигналов. - М.: Радио и связь, 1986.

6.2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 2003.

6.3. Котиков В.И. Методическое пособие по выполнению лабораторных работ по курсу «Математические модели сигналов». – М.: МГТУ ГА, 2007.

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа №1 «Спектральные характеристики периодических и непериодических сигналов»	2
Лабораторная работа №2 «Изучение и анализ математических моделей сигналов с амплитудной и угловой модуляцией»	17
Лабораторная работа №3 «Изучение и анализ математических моделей дискретизированных непрерывных сигналов»	30

Редактор

Печать офсетная	Подписано в печать 00.00.2007 г.	
0,0 усл. печ. л.	Формат 60x84/16	0,0 уч.-изд. л.
	Заказ № 0000/0000	Тираж 150 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д. 6а