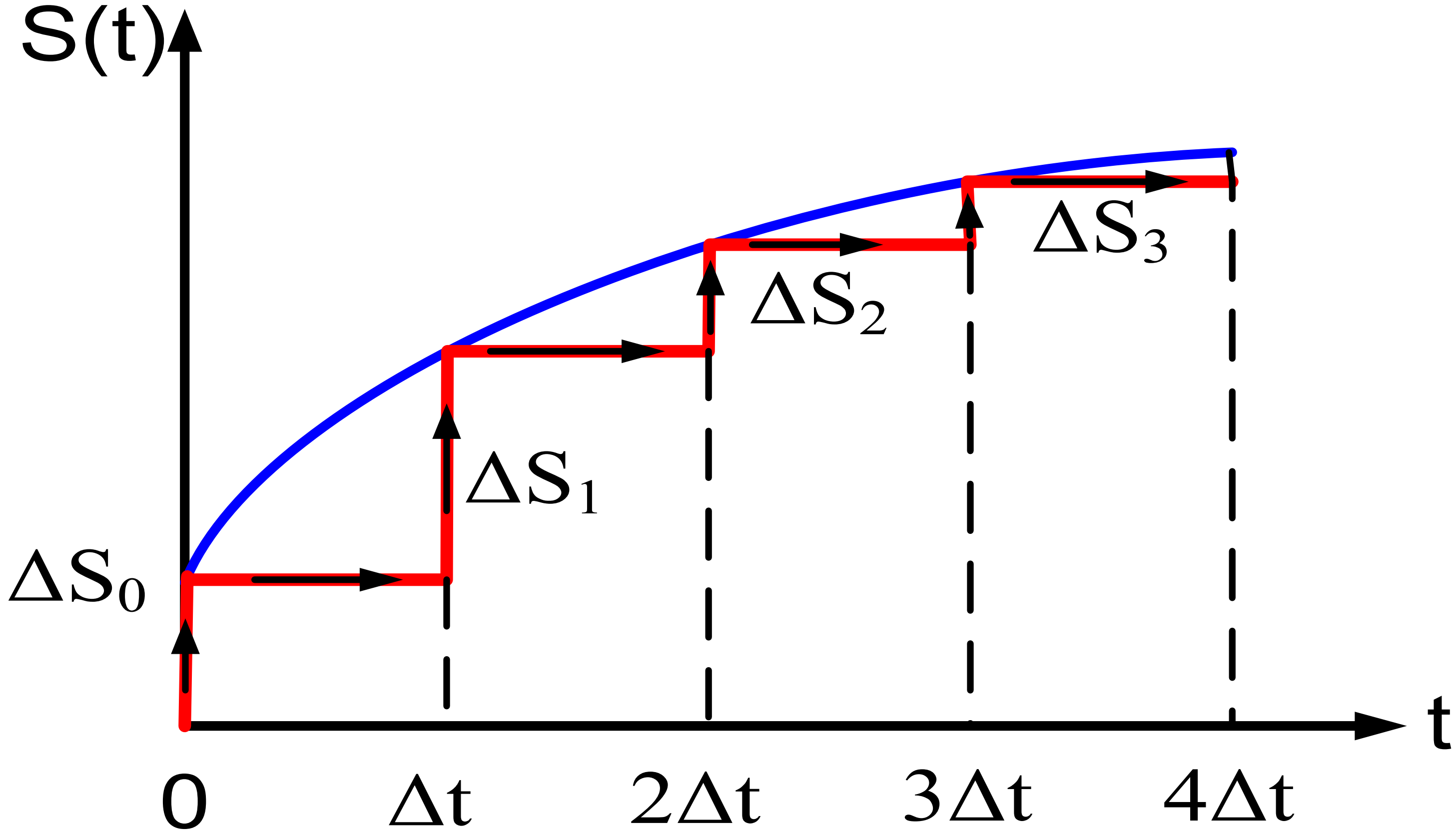
Лекция 2. Общие вопросы теории сигналов

Динамическое представление сигналов

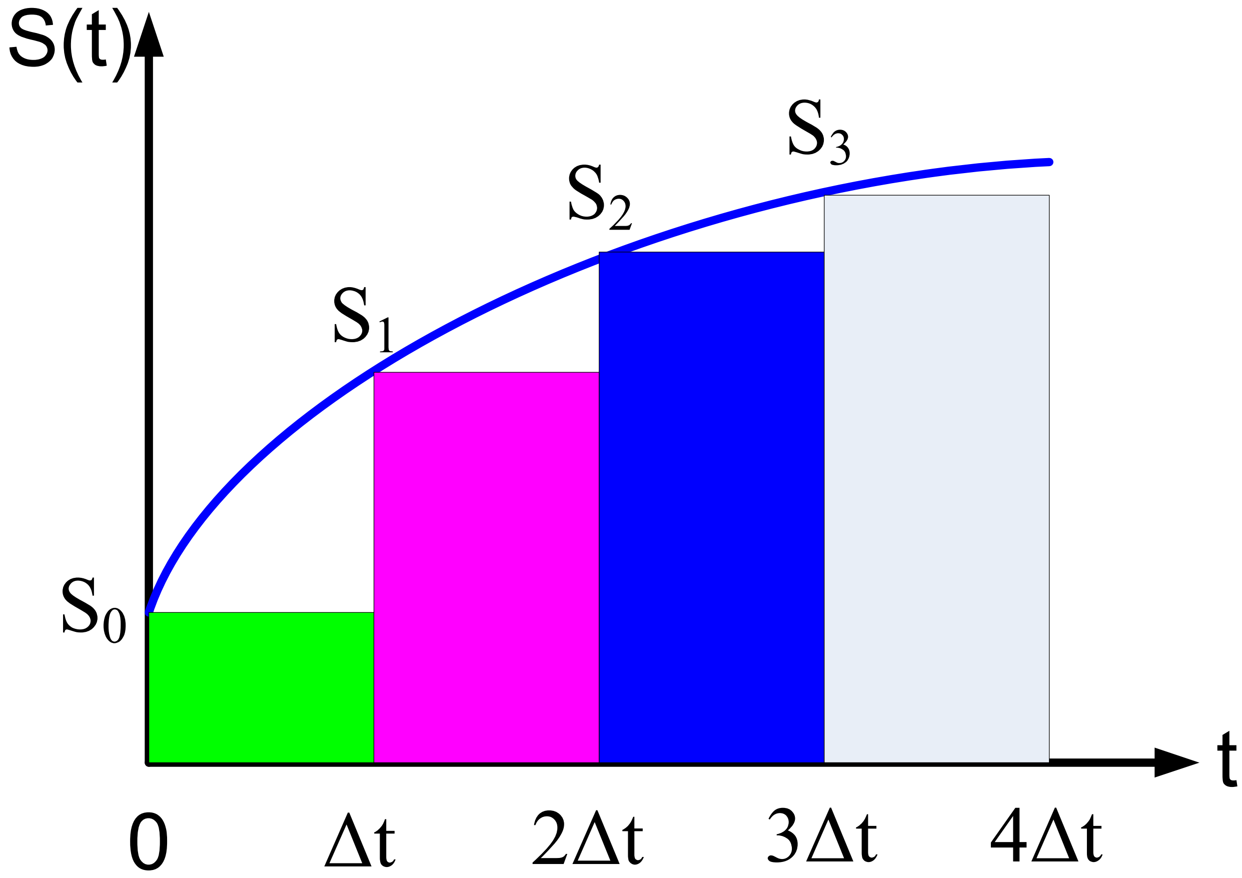
При анализе различных систем требуется знание не только мгновенного значения сигнала S(t), но и его поведение на всей временной оси. Для этих целей служит динамическое представление сигнала в виде некоторых математических моделей. Реальный сигнал приближенно представляется некоторой суммой элементарных сигналов, возникающих в последовательные моменты времени.

Два способа динамического представления сигналов

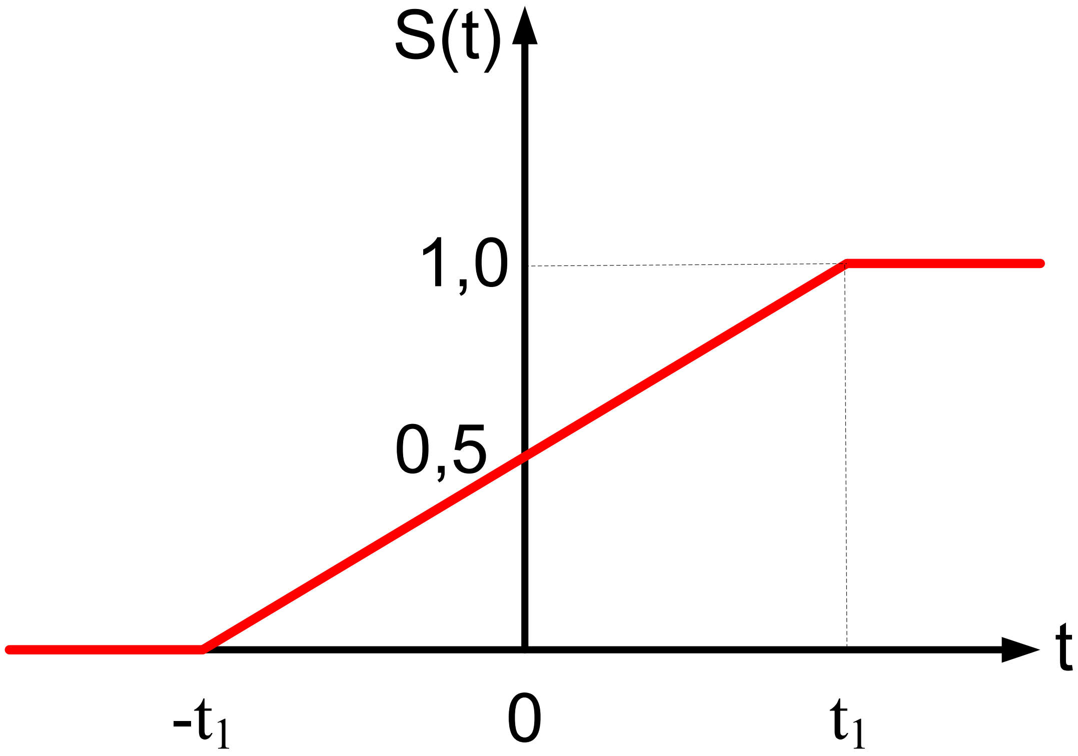
1. Представление сигнала в виде элементарных ступенчатых функций



2. Представление сигнала в виде элементарных прямоугольных видеоимпульсов



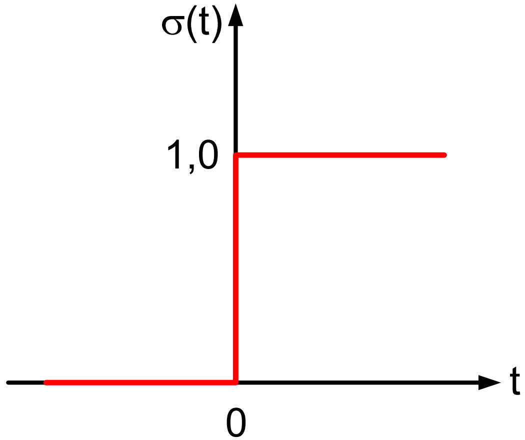
Свойства сигнала, соответствующего элементарной ступенчатой функции



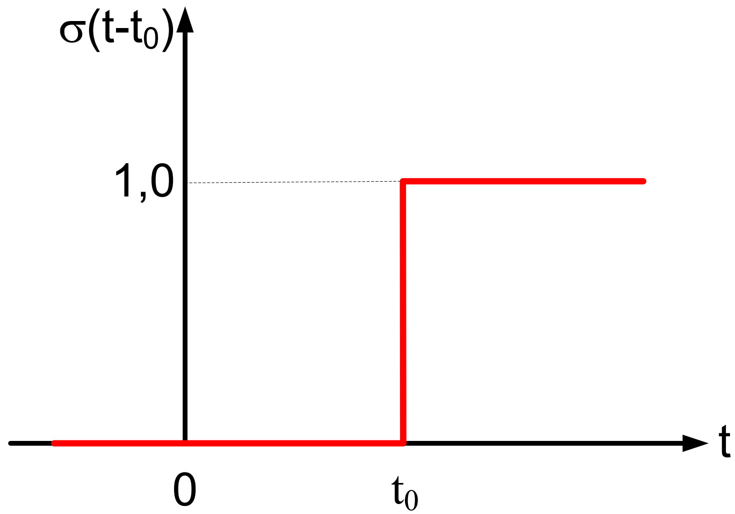
$$S(t)=\begin{cases} 0 & \text{при } t < -t_1 \\ 0{,}5\,(t/t_1+1) & -t_1 \le t \le t_1 \\ 1{,}0 & t > t_1 \end{cases}$$

Функция включения $\sigma(t)$ или функция Хэвисайда

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 0{,}5 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

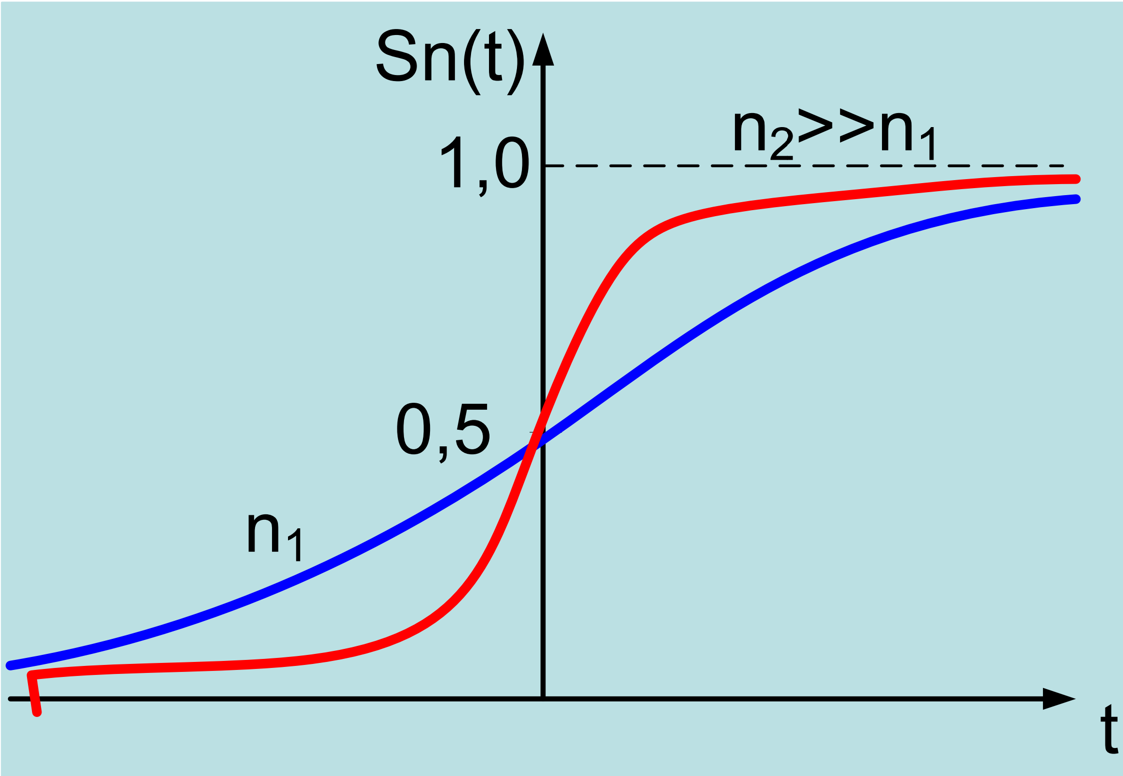


$$\sigma(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

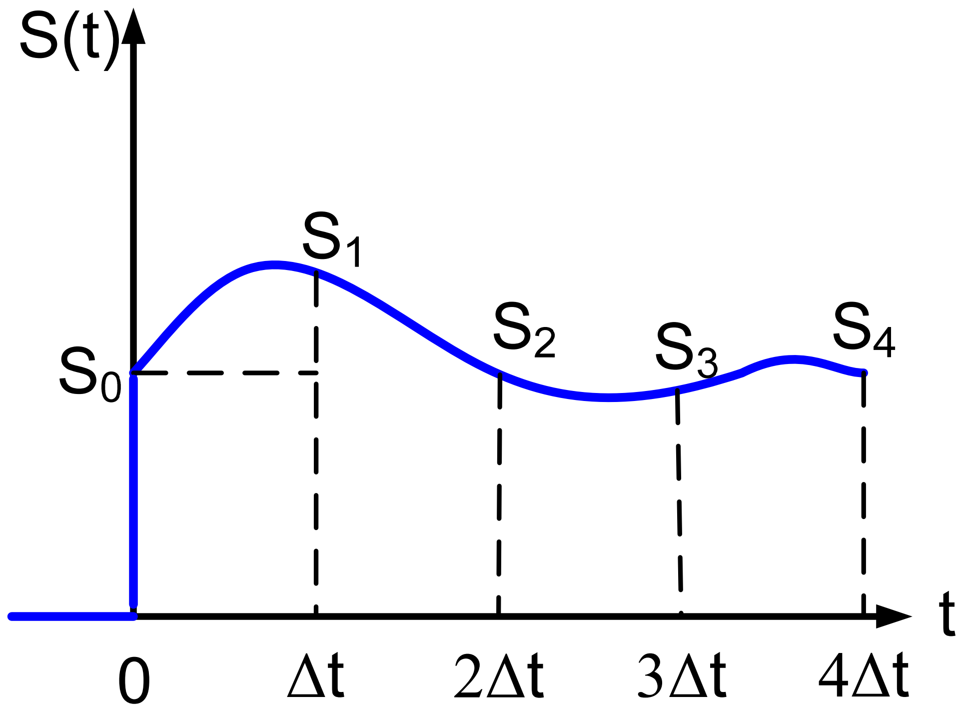


Формирование функции включения σ(t) с использованием дискретных характеристик

$$S_n(t) = \frac{1}{1 + \exp(-nt)}$$



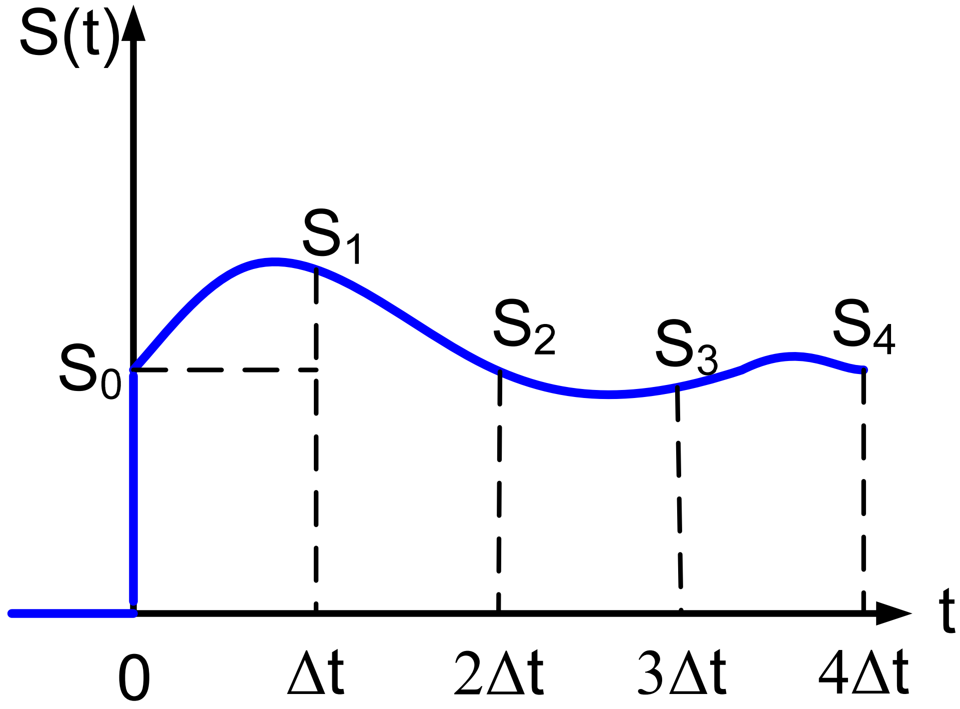
Динамическое представление произвольного сигнала посредством функции включения $\sigma(t)$



$$S(t) \cong S_0\sigma(t) + (S_1 - S_0)\sigma(t - \Delta t) + (S_2 - S_1)\sigma(t - 2\Delta t) + \ldots =$$

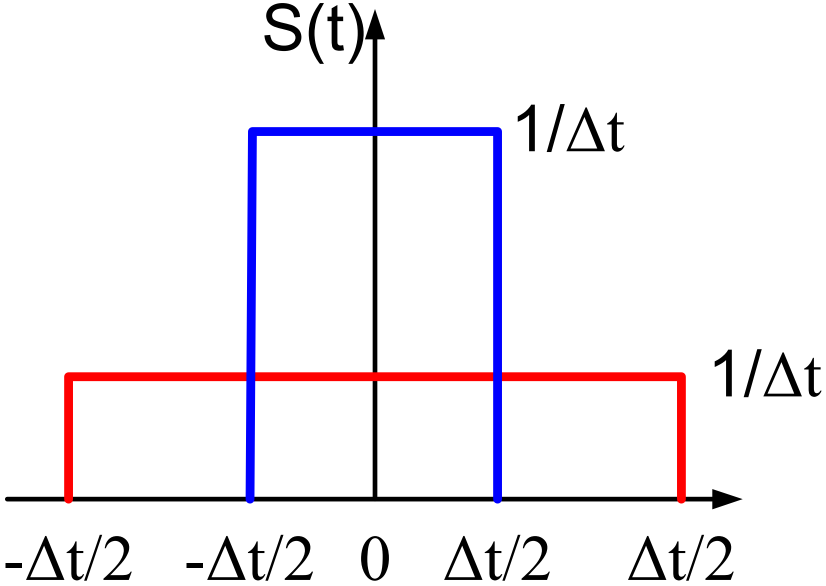
$$= S_0\sigma(t) + \sum_{n=1}^{n=\infty} (S_n - S_{n-1})\sigma(t - n\Delta t)$$

Динамическое представление произвольного сигнала посредством функции включения σ(t)

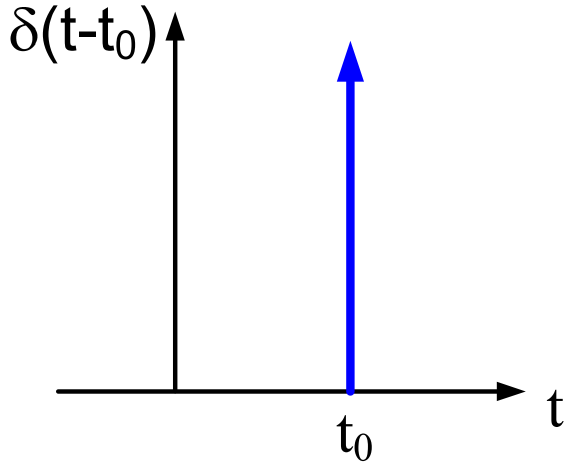


$$S(t) = = S_0\sigma(t) + \int_0^{\infty} dS/d\tau \; \sigma\,(t - \tau)d\tau$$

Динамическое представление сигнала с применением δ-функции



$$\Pi_s = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)\,dt = 1$$

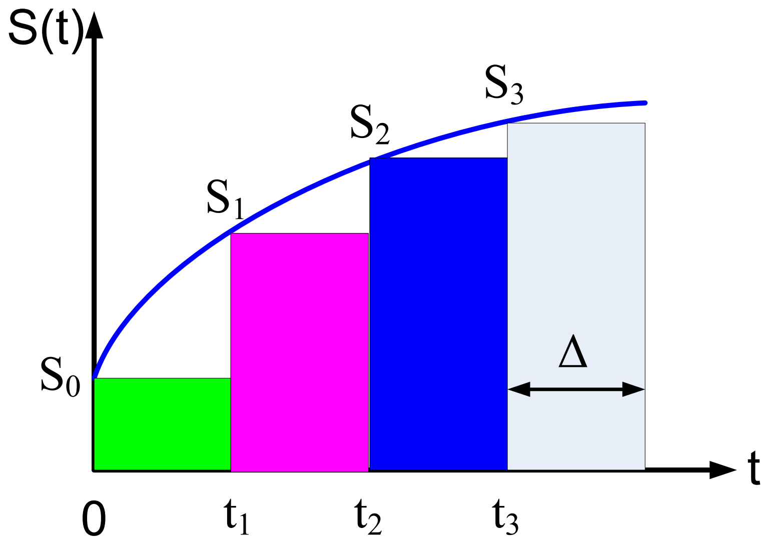


$$S(t,\Delta t) = \frac{1}{\Delta t}\left[\sigma\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right) - \sigma\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)\right]$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} S(t,\Delta t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

Динамическое представление аналогового сигнала посредством δ-функции



$$\alpha_k(t) = S_k\left[\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t - \Delta)\right]$$

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k(t)$$

$$t_k \lhd t \lhd t_{k+1}$$

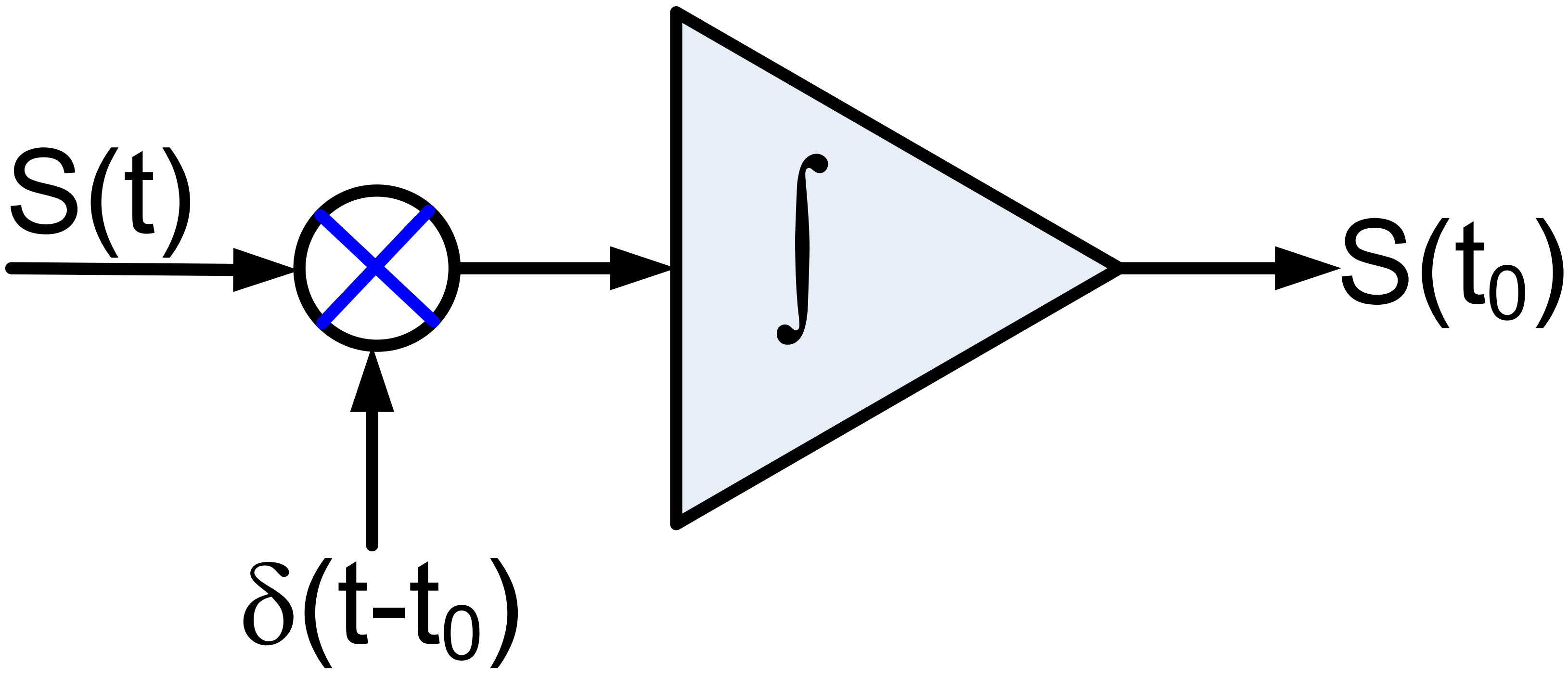
Динамическое представление аналогового сигнала посредством δ-функции

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k \frac{1}{\Delta}\left[\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta)\right]\Delta$$

$$\lim_{\Delta \to 0}\left[\sigma(t-\tau) - \sigma(\mathrm{t} - \tau - \Delta)\right]\frac{1}{\Delta} = \delta(t-\tau)$$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Структурная модель измерителя мгновенных значений аналогового сигнала



Обобщенные функции как математические модели сигналов

Аналогом проекций исследуемой функции y(t) может служить значение интеграла при известной функции φ(t), которую называют ***пробной функцией***

$$(y,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\varphi(t)dt$$

Данная формула задает некоторый функционал на множестве пробных функций φ(t).

Данный функционал оказывается линеен

$$(y, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(y, \varphi_1) + \beta(y, \varphi_2)$$

Но, если этот функционал к тому же оказывается непрерывен, то в этом случае можно сказать, что на множестве пробных функций φ(t) задана обобщенная функция y(t).

Производная пробной функции

$$(y', \varphi) = y(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\varphi'(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\varphi'(t)dt = -(y, \varphi')$$