МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Н.А. Ерзакова

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ТЕКСТЫ ЛЕКЦИЙ

для студентов III курса
дневного обучения

Москва — 2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**"

Кафедра прикладной математики
Н.А. Ерзакова

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*(шифр **ДС.11**)*

ТЕКСТЫ ЛЕКЦИЙ

*для студентов III курса
дневного обучения*

Специальность 230401 "Прикладная математика"

Москва — 2008

Введение

Один из самых старых и наиболее разработанных разделов нелинейного функционального анализа – **нахождение экстремумов функционалов**. Изучение таких задач составляет содержание **вариационного исчисления**.

Одной из первых задач вариационного исчисления принято считать **задачу** о **брахистохроне** (*βραχιστ ος — кратчайший, χρον ος — время*).

Эта задача о кривой быстрейшего спуска, по которому тяжелый шарик в отсутствие трения быстрее всего скатывается из точки A в точку B. Постановка принадлежит **Галилею**, а в 1696 году **Иоганн Бернулли** выдвинул ее на конкурс в основанном им первом в мире математическом журнале "Acta Auditorum". Поступило три решения: от **Лопиталя**, **Якоба Бернулли** и анонимное, по поводу которого И.Бернулли заметил: "Льва узнают по когтям", - имея в виду **Ньютона**.

Начало вариационного исчисления можно связывать также с **изопериметрическими задачами**. Многие решения были известны за несколько веков до нашей эры: окружность, ограничивающая максимум площади при заданной длине; сфера, заключающая максимальный объем при фиксированной площади.

Задача Дидоны базируется на античной легенде. Финикийская царица Дидона**,** бежав в Африку по семейным обстоятельствам, купила у царя берберов Ярба "клочок земли, который можно огородить бычьей шкурой ". Ярбу потом мало не показалось. Покупательница разрезала шкуру на ремни, связала их и окружила приличную территорию, заложив Карфаген и **положив начало решению изопериметрических задач**. ([5], с.119)

1. Простейшая задача вариационного исчисления. Примеры.

Напомним некоторые определения.

Определение (**линейного нормированного пространства)**. Линейное пространство E называется линейным нормированным пространством, если каждому элементу $x \in E$ поставлено в соответствие действительное число $\|x\|$, называемое **нормой** элемента x, при этом выполняются следующие условия:

1) $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

для любых $x, y \in E$ и любого действительного числа λ .

Замечание. В линейном нормированном пространстве E можно следующим образом определить расстояние $\rho(x, y)$ между двумя элементами x, y:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Из свойств нормы 1) - 3) непосредственно следует, что расстояние $\rho(x, y)$ обладает такими свойствами:

1) $\rho(x,y) \geq 0$, причем $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Определение (**функционала**). Функционалом в линейном нормированном пространстве E называется функция, принимающая действительные значения и определенная на всем E или на некотором множестве $M \subset E$ (**области определения функционала**).

Определение (**непрерывного функционала**). Функционал v называется непрерывным в точке $y^* \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех y, удовлетворяющих условию $\rho(y^*, y) < \delta$, выполняется неравенство

$$\rho[v(y^*), v(y)] < \varepsilon .$$

Если функционал v непрерывен в каждой точке пространства E, то говорят, что v **- непрерывный функционал на** E.

Определение (ε **– окрестности**). Пусть $y^* \in E$ и $\varepsilon > 0$- произвольное число. Множество элементов $y \in E$, для которых выполняется неравенство

$$\rho(y^*, y) < \varepsilon ,$$

называется ε **– окрестностью** y^***.**

Определение (**локального экстремума). Функционал** v **достигает** на элементе y^* **локального или относительного минимума (максимума)**, если для всех y **из некоторой** ε **– окрестности кривой** y^* выполняется неравенство

$$v(y^*) \leq v(y) \quad (v(y^*) \geq v(y)) . \qquad (1.1)$$

Локальные минимумы и максимумы функционала v называются его л**окальными экстремумами**.

Если (1.1) выполняется для всех y, принадлежащих некоторому множеству $M \subset E$, то говорят, что на y^* **достигается абсолютный экстремум** функционала v на множестве M.

Определение (**линейного функционала**). Функционал v называется **линейным**, если для любых y, y_1, y_2 из E и любого действительного числа λ выполняются следующие свойства:

1) $v(y_1 + y_2) = v(y_1) + v(y_2)$;

2) $v(\lambda y) = \lambda v(y)$.

Пример 1.1. Пусть $F(x,y,z)$ – функция, имеющая непрерывные частные производные до 3-го порядка включительно по всем своим аргументам. Тогда интеграл

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx \qquad (1.2)$$

является функционалом J, численное значение которого определяется выбором функции $y(x)$ на $[a,b]$ из **линейного нормированного пространства**.□

Дальнейшее изложение этого раздела связано с функционалом специального вида J.

В качестве линейного нормированного пространства для $J[y(x)]$ в вариационном исчислении используются пространства $C^n[a,b]$, $n = 0,1,...$, состоящие из функций $y(x)$, непрерывных вместе со всеми производными порядка, не превышающего n, на отрезке $[a,b]$, включая граничные точки (под производной $y^{(0)}(x)$ здесь понимается сама функция $y(x)$) с нормой

$$\|y\|_n = \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in[a,b]} \left| y^{(k)}(x) \right|. \qquad (1.3)$$

Расстояние в этом пространстве, определяемое через норму, выглядит так:

$$\rho(y_1, y_2)_n = \|y_1 - y_2\|_n = \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in[a,b]} \left| y_1^{(k)}(x) - y_2^{(k)}(x) \right|, \; n = 0,1,... . \qquad (1.4)$$

Пусть функция $y^*(x) \in C^n[a,b]$ и $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Множество функций (кривых) $y(x) \in C^n[a,b]$, для которых выполняется неравенство

$$\rho(y^*, y)_n < \varepsilon,$$

называется ε – окрестностью n-го порядка кривой $y^*(x)$.

Пусть функционал $J[y(x)]$ определен на множестве $M \subset C^1[a,b]$. Функции $y(x) \in M$ можно рассматривать не только как элементы пространства $C^1[a,b]$, но и как элементы $C^0[a,b]$. Л**окальный экстремум** функционала $J[y(x)]$ **в пространстве** $C^0[a,b]$ называется **сильным,** а **в пространстве** $C^1[a,b]$**- слабым** л**окальным экстремумом**. Всякий **сильный экстремум** функционала является и **слабым, а обратное,** вообще говоря**, неверно.**

Отметим, что всякий **абсолютный экстремум** функционала $J[y(x)]$ является **сильным** и **слабым** л**окальным экстремумом,** но не всякий локальный экстремум является абсолютным экстремумом.

Основная лемма вариационного исчисления. Если для каждой непрерывной функции $\eta(x)$

$$\int_a^b \Phi(x)\eta(x)dx = 0,$$

где функция $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $\Phi(x) \equiv 0$.

Замечание. Утверждение леммы и ее доказательство не изменяются, если на функцию $\eta(x)$ наложить следующие ограничения: $\eta(a) = \eta(b) = 0$; $\eta(x)$ имеет непрерывные производные до порядка n, $\left|\eta^{(k)}(x)\right| < \varepsilon_1$ ($k = 0,1,...,n$).

Доказательство. Предположив, что в точке $x = \tilde{x}$, лежащей на отрезке $[a,b]$, $\Phi(x) \neq 0$, придем к противоречию. Действительно, из непрерывности $\Phi(x)$ следует, что если $\Phi(\tilde{x}) \neq 0$, то $\Phi(x)$ сохраняет знак в некоторой ε - окрестности $(\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon) \subset [a,b]$, $\varepsilon > 0$, точки $\tilde{x}$. Выберем функцию $\eta(x)$ также сохраняющую знак в этой окрестности и равную нулю вне этой окрестности, получим

$$\int_a^b \Phi(x)\eta(x)dx = \int_{\tilde{x}-\varepsilon}^{\tilde{x}+\varepsilon} \Phi(x)\eta(x)dx \neq 0.$$

В качестве $\eta(x)$ мы можем взять, например, функцию $\eta(x) = k(x - \tilde{x} + \varepsilon)^{2n}(x - \tilde{x} - \varepsilon)^{2n}$ на интервале $(\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon)$, равную 0 вне интервала. Итак, мы пришли к противоречию, следовательно, $\Phi(x) \equiv 0$.□

Сформулируем **простейшую задачу вариационного исчисления**.

Пусть $F(x, y, z)$ – функция, имеющая непрерывные частные производные до 3-го порядка включительно по всем своим аргументам. Требуется среди всех функций $y(x) \in C^1[a,b]$ (имеющих непрерывную производную) и удовлетворяющих условиям

$$y(a) = A,\ y(b) = B, \tag{1.5}$$

найти ту функцию, при которой достигается слабый экстремум функционала

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx.$$

Кривые $y(x)$, на которых сравниваются значения функционала, называются **допустимыми кривыми** или **кривыми сравнения**.

Обозначим через $y^*(x)$ допустимую кривую, на которой функционал достигает экстремума, а через $y(x)$ произвольную допустимую кривую. Разность $y(x) - y^*(x) = \delta y(x)$ называется **вариацией кривой** $y^*(x)$.

Вариация $\delta y(x)$ есть функция x и принадлежит тому же функциональному пространству, что и функция $y(x)$. Поэтому, если $y(x) \in C^n[a,b]$, то вариацию $\delta y(x)$ можно дифференцировать, причем

$$(\delta y)' = y' - (y^*)' = \delta y', \ldots, (\delta y)^{(k)} = y^{(k)} - y^{*(k)} = \delta y^{(k)}, \ldots, (\delta y)^{(n)} = y^{(n)} - y^{*(n)} = \delta y^{(n)}. \tag{1.6}$$

Используя вариацию $\delta y(x)$, можно представить любую допустимую кривую $y(x)$ в виде

$$y(x) = y^*(x) + \delta y(x).$$

Рассмотрим семейство кривых

$$y(x,\alpha) = y^*(x) + \alpha\,\delta y(x). \tag{1.7}$$

В выражении (1.7) $\delta y(x)$ - фиксированная функция, а α - числовой параметр. Очевидно, что при $\alpha = 0$ справедливо $y(x) = y^*(x)$.

Если рассматривать значения функционала (1.2) только на кривых семейства $y(x,\alpha)$, то функционал J превращается в функцию числового параметра α:

$$J[y(x,\alpha)] = \varphi(\alpha). \tag{1.8}$$

Теорема 1.1 (**уравнение Эйлера**). Для того чтобы функционал (1.2) **достигал слабого экстремума** на функции $y^*(x) \in C^1[a,b]$ **необходимо**, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0. \tag{1.9}$$

Доказательство. Так как $y^*(x)$ - кривая, на которой функционал (1.2) достигает экстремума, то функция $\varphi(\alpha)$ достигает своего экстремума при $\alpha = 0$ в силу (1.7) и (1.8).

Необходимым условием экстремума функции $\varphi(\alpha)$ при $\alpha = 0$ является:

$$\varphi'\big|_{\alpha=0} = 0. \tag{1.10}$$

Запишем в развернутом виде (1.8)

$$\varphi(\alpha) = J[y(x,\alpha)] = \int_a^b F(x, y(x,\alpha), y'_x(x,\alpha))dx,$$

откуда следует, что

$$\varphi'(\alpha) = \int_a^b \left[F'_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x,\alpha) + F'_{y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x,\alpha) \right] dx .$$

Принимая во внимание (1.6) и равенства

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}[y(x) + \alpha\,\delta y] = \delta y,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}[y'(x) + \alpha\,\delta y'] = \delta y',$$

получим

$$\varphi'(\alpha) = \int_a^b \left[F'_y(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha))\delta y + F'_{y'}(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha))\delta y'\right]dx;$$

$$\varphi'(0) = \int_a^b \left[F'_y(x, y(x), y'(x))\delta y + F'_{y'}(x, y(x), y'(x))\delta y'\right]dx .$$

Поскольку $(\delta y)' = \delta y'$, интегрируя второе слагаемое по частям, получим $\varphi'(0) = \int_a^b \left[F'_y(x, y(x), y'(x))\delta y + F'_{y'}(x, y(x), y'(x))\delta y'\right]dx = \left[F'_{y'}\delta y\right]_a^b + \int_a^b \left(F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} \right)\delta y dx$.

Но $\delta y|_{x=a} = y(a) - y^*(a) = 0$, $\delta y|_{x=b} = y(b) - y^*(b) = 0$ в силу (1.5). Следовательно, условие (1.11) влечет равенство

$$\varphi'(0) = \int_a^b \left(F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} \right)\delta y dx = 0,$$

справедливое для любого значения δy. Применяя основную лемму вариационного исчисления, получаем утверждение теоремы. □

Определение (**экстремали**). **Решения** (интегральные кривые) **уравнения Эйлера** называют экстремалями функционала (1.2).

Пример 1.2. Найти все экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^1 \left(y'^2 - 12xy\right)dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y(0) = y(1) = 0$.

Решение. В данном случае $F(x, y, y') = y'^2 - 12xy$, поэтому уравнение Эйлера (1.9) имеет вид $y'' + 6x = 0$. Его общее решение $y(x) = -x^3 + C_1 x + C_2$. Из условий $y(0) = y(1) = 0$ получим систему уравнений для определения C_1 и C_2:

$$y(0) = C_2 = 0,$$

$$y(1) = -1 + C_1 + C_2 = 0,$$

откуда находим $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Следовательно, в рассматриваемой задаче существует единственная экстремаль $y(x) = -x^3 + x$. □

2. Производные Фреше и Гато

Пусть E_1, E_2 - два линейных нормированных пространства и F - отображение, действующее из некоторого открытого подмножества $U \subseteq E_1$ в E_2. Если $E_2 = R$ (R - пространство вещественных чисел, где нормой служит абсолютная величина), то отображение F - это функционал. Непрерывность и линейность F определяются аналогично.

Определение (**дифференциал Фреше**). Пусть E_1, E_2 - два линейных нормированных пространства и F - отображение, действующее из некоторого открытого подмножества $U \subseteq E_1$ в E_2. Отображение F называется **дифференцируемым** в данной точке $x \in U$, если существует такой ограниченный линейный оператор $L_x \in L(E_1, E_2)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, при котором из неравенства $\|h\| < \delta$ следует неравенство

$$\|F(x+h) - F(x) - L_x h\| \leq \varepsilon \|h\|. \qquad (2.1)$$

То же самое сокращенно записывают так:

$$F(x+h) - F(x) - L_x h = O(h).$$

Выражение $L_x h$ (представляющее собой, очевидно, при некотором h элемент пространства E_2) называется **сильным дифференциалом** или дифференциалом Фреше.

Сам линейный оператор L_x называется **сильной производной** или **производной Фреше**. Будем обозначать производную $F'(x)$.

Замечание. Из (2.1) следует, что дифференцируемое в точке x отображение непрерывно в этой точке.

Теорема 2.1 (**единственности производной Фреше**). Если отображение F дифференцируемо в точке x, то соответствующая производная определяется единственным образом.

Доказательство. Допустим, что существует две производные L_1, L_2 в одной точке x. Тогда $\|L_1 h - L_2 h\| = O(h)$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, при котором из неравенства $\|h\| < \delta$ следует неравенство

$$\|(L_1 - L_2)h\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

Последнее означает, что $\|L_1 - L_2\| \leq \varepsilon$, где норма линейного оператора определяется как обычно

$$\|L\| = \sup_{\|h\|=1} \|Lh\|.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ заключаем, что $\|L_1 - L_2\| = 0$, а это возможно, если $L_1 = L_2$.□

Следствие. Производная непрерывного линейного отображения L есть само это отображение, т.е. $L'(x) = L$.

Действительно, по определению имеем $F(x+h) - F(x) - L_x h = O(h)$, а в данном случае

$$L(x+h) - L(x) - L_x h = Lh - L_x h.□$$

Замечание. По аналогии с обычной производной записываются производная сложной функции и свойства линейности для производная Фреше.

Определение (**дифференциал Гато**). Пусть E_1, E_2 - два линейных нормированных пространства и F - отображение, действующее из некоторого открытого подмножества $U \subseteq E_1$ в E_2. **Слабым дифференциалом** или дифференциалом Гато отображения F в точке x (при приращении h) называется **предел**

$$DF(x,h) = \frac{d}{d\alpha} F(x+\alpha h)\Big|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{[F(x+\alpha h) - F(x)]}{\alpha},$$

где α - числовой параметр, а сходимость понимается как сходимость по норме E_2.

Замечание. Слабый дифференциал $DF(x,h)$ может и не быть линеен по h. Если же такая линейность имеет место, т.е. если

$$DF(x,h) = F'_C(x)h,$$

где $F'_C(x)$ - ограниченный линейный оператор, то этот оператор называется слабой производной (или **производной Гато**).

Иногда, следуя Лагранжу, выражение $DF(x,h)$ называют **первой вариацией** отображения F. Будем обозначать **первую вариацию функционала** v как δv.

Пример 2.1. Для функции двух переменных

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & если(x,y) \neq (0,0), \\ 0, & если(x,y) = (0,0), \end{cases}$$

найти $F'(0,0)$ и $F'_C(0,0)$.

Решение. Функция $f(x,y)$ непрерывна всюду на плоскости, включая точку $(0,0)$. В точке $(0,0)$ ее слабый дифференциал существует и равен 0, поскольку

$$f(0+\alpha h_1, 0+\alpha h_2) - f(0,0) = \frac{\alpha^4 h_1^3 h_2}{\alpha^4 h_1^4 + \alpha^2 h_2^2} = 0,$$

если $h_2 = 0$ и

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{[f(0+\alpha h_1, 0+\alpha h_2) - f(0,0)]}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{h_1^3 h_2}{h_1^4 + h_2^2/\alpha} = 0,$$

если $h_2 \neq 0$.

Вместе с тем этот дифференциал не является главной линейной частью приращения функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$.

Действительно, если положить $h_2 = h_1^2$, $\|(h_1, h_1^2)\| = \sqrt{h_1^2 + h_1^4}$, то

$$\lim_{\|(h_1,h_1^2)\|\to 0}\frac{[f(0+h_1, 0+h_1^2) - f(0,0)]}{\|(h_1,h_1^2)\|} = \lim_{h_1\to 0}\frac{(h_1)^3 h_1^2}{\left[(h_1)^4 + (h_1^2)^2\right]\sqrt{h_1^2+h_1^4}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Поэтому производная Фреше $F'(0,0)$ не существует, в то время как производная Гато $F'_C(0,0) = 0$. □

Теорема 2.2 (**связь производной Фреше и производной Гато**). Если отображение F имеет в точке x производную Фреше, то она имеет в точке x и производную Гато и они совпадают. Обратное, вообще говоря, неверно.

Доказательство. По определению дифференциала Фреше

$$F(x+h) - F(x) - L_x h = O(h).$$

Следовательно,

$$F(x+\alpha h)-F(x)-L_x\alpha h=O(\alpha h)$$

для параметра α. Поэтому

$$DF(x,h)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{[F(x+\alpha h)-F(x)]}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{L_x\alpha h+O(\alpha h)}{\alpha}=L_x h,$$

т.е. $F'(x)=F_C'(x)$. Таким образом, сильная дифференцируемость влечет слабую дифференцируемость. Как показывают примеры обратное утверждение неверно.□

Пример 2.2. Для функционала $v(x)=\|x\|^2$ в действительном гильбертовом пространстве H найти $F'(x)$ и $F_C'(x)$.

Решение. В действительном гильбертовом пространстве H норма определяется через скалярное произведение, т.е. $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$.

Тогда по свойствам скалярного произведения

$$\|x+h\|^2-\|x\|^2=(x+h,x+h)-(x,x)=(x,x)+2(x,h)+(h,h)-(x,x)=2(x,h)+\|h\|^2.$$

Величина $2(x,h)$ представляет собой главную линейную относительно h часть этого выражения, следовательно, $F'(x)=F_C'(x)=2x$.□

Теорема 2.2 (**необходимое условие экстремума функционала**). Необходимым условием достижения функционалом v в точке y^* локального экстремума является равенство первой вариации $\delta v(y^*)$ нулю.

Доказательство. Первой вариации $\delta v(y^*)$ - это по определению дифференциал Гато. Поэтому

$$\delta v(y^*)=Dv(y^*,h)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{[v(y^*+\alpha h)-v(y^*)]}{\alpha}.$$

Если предположить, что $\delta v(y^*)\neq 0$, то в сколь угодно малой окрестности y^* нашлись бы точки, в которых разность $v(y^*+\alpha h)-v(y^*)$ принимала бы значения разных знаков, что противоречит определению экстремума. Полученное противоречие доказывает утверждение.□

Замечание. Если рассматривать значения функционала (1.2)

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

только на кривых семейства (1.7)

$$y(x,\alpha)=y^*(x)+\alpha\,\delta y(x),$$

то функционал J превращается в функцию (1.8) числового параметра α:

$$J[y(x,\alpha)]=\varphi(\alpha)$$

и производная Гато функционала J имеет вид:

$$\varphi'(0)=\int_a^b\left[F_y'(x,y(x),y'(x))\delta y+F_{y'}'(x,y(x),y'(x)\delta y'\right]dx.$$

Если как в простейшей вариационной задаче рассматривать функционал только на функциях, удовлетворяющих условиям (1.5):

$$y(a)=A,\ y(b)=B,$$

то, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы об уравнении Эйлера, мы получим следующую первую вариацию функционала J:

$$\delta J = \int_a^b \left(F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} \right) \delta y dx .$$

3. Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления.

Рассмотрим два обобщения простейшей задачи вариационного исчисления. Первым из них является задача на экстремум функционала $J[y(x)]$, зависящего от производных высших порядков функции $y(x)$:

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y', ..., y^{(n)}) dx , \qquad (3.1)$$

где функция $F(x, y, y', ..., y^{(n)})$ имеет непрерывные частные производные вплоть до $(n+2)$-го порядка по всем аргументам, а $y(x) \in C^n[a,b]$.

Граничные условия в этой задаче имеют вид

$$y(a) = y_0 ,\ y'(a) = y_0^1 ,\ \ldots, y^{(n)}(a) = y_0^n ,\ y(b) = y_1 ,\ y'(b) = y_1^1 ,\ \ldots, y^{(n)}(b) = y_1^n . \qquad (3.2)$$

По аналогии с доказательством теоремы об уравнении Эйлера доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.1 (**уравнение Эйлера-Пуассона**). Для того чтобы функционал (3.1) **достигал** на функции $y(x) \in C^n[a,b]$ **локального экстремума необходимо**, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера-Пуассона

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F'_{y^{(n)}} = 0 . \qquad (3.3)$$

Замечание. Подобно случаю простейшей вариационной задачи **решения уравнения Эйлера-Пуассона** (экстремалями функционала (3.1)), удовлетворяющие граничным условиям (3.2), являются кривыми возможного абсолютного экстремума этого функционала на множестве

$$M = \{ y(x) \in C^n[a,b] : y(a) = y_0 , \ldots, y^{(n)}(a) = y_0^n , y(b) = y_1 , y'(b) = y_1^1 ,..., y^{(n)}(b) = y_1^n \} .$$

Пример 3.1. Найти все экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^1 (240xy - y''^2) dx ,$$

удовлетворяющие граничным условиям:

$$y(0) = y'(0) = 0 ,\ y(1) = 1 ,\ y'(1) = 6 .$$

Решение. Вычисляем

$$F'_y = 240x ,\ F'_{y'} = 0 ,\ F'_{y''} = 2y'' ,\ \frac{d^2}{dx^2} 2y'' = 2y^{(4)} .$$

Запишем уравнение Эйлера-Пуассона (3.3):

$$y^{(4)} = 120x .$$

$$y^{(3)} = 60x^2 + c_1 ,\ y^{(2)} = 20x^3 + c_1 x + c_2 ,\ y' = 5x^4 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

Общее решение $y(x)=x^5+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$. Отсюда с помощью граничных условий получаем систему уравнений для определения постоянных c_1, c_2, c_3, c_4:

$$0=y(0)=c_4,\ 0=y'(0)=c_3,\ 1=y(1)=1+c_1+c_2, 6=y'(1)=5+3c_1+2c_2.$$

Поэтому $c_1=-c_2$, $c_1=1$, $c_2=-1$. Окончательно получим $y(x)=x^5+x^3-x^2$.□

Вторым обобщением простейшей задачи вариационного исчисления является задача на экстремум функционала**,** зависящего от нескольких функций**:**

$$J[y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)]=\int_a^b F(x,y_1(x),...,y_n(x),y_1'(x),...,y_n'(x))dx, \tag{3.4}$$

где функция F имеет непрерывные частные производные вплоть до 2-го порядка по всем аргументам, а $y_k(x)\in C^1[a,b]$, $k=1,2,...,n$.

Граничные условия в этой задаче имеют вид

$$y_k(a)=y_{k0},\ y_k(b)=y_{k1},\ k=1,2,...,n. \tag{3.5}$$

По аналогии с доказательством теоремы об уравнении Эйлера доказывается следующее утверждение.

<u>Теорема</u> 3.2 (**система дифференциальных уравнений Эйлера**). Для того чтобы набор $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)\in C^1[a,b]$ доставлял **слабый экстремум** функционалу (3.4) **необходимо**, чтобы эта функция удовлетворяла системе уравнений Эйлера

$$F'_{y_k}-\frac{d}{dx}F'_{y'_k}=0, \qquad k=1,2,...,n. \tag{3.6}$$

<u>Пример</u> 3.2. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)\in C^2[a,b]$, на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1,y_2)$ при указанных граничных условиях:

$$J(y_1,y_2)=\int_0^{\pi/2}\left(y_1'^2+y_2'^2+2-2y_1y_2\right)dx;\ y_1(0)=y_2(0)=0,\ y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

<u>Решение</u>. Система уравнений Эйлера имеет вид

$$y_2''+y_1=0,\ y_1''+y_2=0.$$

Из второго уравнения $y_2=-y_1''$ получим. Поэтому первое уравнение запишем как $y_1^{(4)}-y_1=0$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y_1(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

Отсюда находим

$$y_2(x)=-C_1e^x-C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

Из граничных условий следует, что $C_1=C_2=C_3=0, C_4=1$, поэтому $y_1(x)=\sin x$ $y_2(x)=\sin x$.□

4. Простейшая задача с подвижными границами

Краткая запись простейшей задачи **с неподвижными границами**

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx \to extr,$$

$$y(a) = A, \; y(b) = B. \qquad (4.1)$$

Предположим теперь, что одна или обе граничные точки могут перемещаться. Тогда класс допустимых кривых расширяется – кроме кривых сравнения, имеющих общие граничные точки с исследуемой кривой, можно уже брать и кривые со смещенными точками.

Поэтому если на какой-нибудь кривой $y = y(x)$ достигается экстремум в задаче с подвижными граничными точками, то экстремум тем более достигается по отношению к более узкому классу кривых, имеющих общие граничные точки с кривой $y = y(x)$, и следовательно, должно быть выполнено основное, необходимое для достижения экстремума в задаче с неподвижными границами условие – функция $y(x)$ должна быть решением уравнения Эйлера

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0.$$

Общее решение уравнения Эйлера содержит две произвольные постоянные, для определения которых необходимо иметь два условия. В задаче с неподвижными границами условия (4.1) служили для определения констант. В задаче с подвижными границами одно или оба этих условия отсутствуют, и недостающие условия для определения произвольных постоянных общего решения уравнения Эйлера должны быть получены из основного необходимого условия экстремума – равенства нулю вариации δJ.

Так как в задаче с подвижными границами экстремум достигается лишь на решениях $y = y(x, c_1, c_2)$ уравнения Эйлера, то в дальнейшем можно рассматривать значение функционала лишь на функциях этого семейства. При этом функционал $J[y(x, c_1, c_2)]$ превращается в функцию параметров c_1 и c_2 и пределов интегрирования x_0, x_1, а вариация функционала совпадает с дифференциалом этой функции.

Простейшей задача вариационного исчисления с подвижными границами состоит в определении функции $y(x) \in C^1[a,b]$ и точек x_0, x_1 из $[a,b]$, $x_0 < x_1$, для которых функционал

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \qquad (4.2)$$

достигает слабого экстремума при условиях

$$y(x_0) = \varphi_0(x_0), \quad y(x_1) = \varphi_1(x_1). \qquad (4.3)$$

(Здесь $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ - заданные функции из $C^1[a,b]$, $F(x, y, z)$ – функция, имеющая непрерывные частные производные до 3-го порядка включительно по всем своим аргументам.)

<u>Замечание</u>. Эту задачу можно сформулировать и следующим образом. Пусть на плоскости XOY гладкие кривые γ_1: $y = \varphi_0(x)$ и γ_2: $y = \varphi_1(x)$, $x \in [a,b]$. Требуется найти такую гладкую кривую $y = y(x)$, которая соединяет какую-

либо точку кривой γ_1 с какой-либо точкой кривой γ_2 и доставляет слабый экстремум функционалу (4.2).

Теорема 4.1 (**простейшая задача вариационного исчисления с подвижными границами**). Для того чтобы функционал (4.2) **достигал слабого экстремума** на функции $y(x)\in C^1[a,b]$ при условиях (4.3) **необходимо**, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0. \qquad (4.4)$$

и **условиям трансверсальности**

$$\left[F + (\varphi'_0 - y')F'_{y'}\right]_{x=x_0} = 0,\quad \left[F + (\varphi'_1 - y')F'_{y'}\right]_{x=x_1} = 0. \qquad (4.5)$$

Замечание. Для определения экстремалей в простейшей вариационной задаче с подвижными границами необходимо найти общее решение $y(x,c_1,c_2)$ уравнения Эйлера, после чего из условий (4.5) и уравнений

$$y(x_0,c_1,c_2) = \varphi_0(x_0),\qquad y(x_1,c_1,c_2) = \varphi_1(x_1) \qquad (4.6)$$

определить постоянные c_1 и c_2 и концы отрезка $[x_0,x_1]$.

Если на одном из концов искомой кривой $y(x)$ задано обычное граничное условие (4.1), то условие (4.5) следует записать только для другого конца кривой.

Частным случаем задачи с подвижными границами является задача, в которой задана абсцисса одного из концов кривой $y(x)$, например, $x_2 = b$, но граничное условие для $x = b$ отсутствует. Это означает, что граничная точка $(b, y(b))$ кривой $y(x)$ может перемещаться по вертикальной прямой $x = b$, и вместо второго условия трансверсальности (4.5) следует записать **естественное граничное условие**

$$\left[F'_{y'}\right]_{x=b} = 0. \qquad (4.7)$$

Условия (4.5) и (4.7) - это следствие равенства $\delta J = 0$, уравнения Эйлера и условий (4.6).

Пример 4.1. Найти экстремали функционала $J(y)$ с подвижными границами**:**

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx;\quad y(x_0) = x_0^2 + 2,\ y(x_1) = x_1.$$

Решение. Имеем функцию $F(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$, зависящую только от y'. Так как

$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'},$$

то развернутая запись формулы Эйлера следующая:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \qquad (4.8)$$

Поэтому равенство (4.8) влечет равенство $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'' = 0$. Отсюда $y'' = 0$ или $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(y') = 0$. Если $y'' = 0$, то

$$y(x) = c_1 x + c_2 . \qquad (4.9)$$

Пусть уравнение $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(y') = 0$ имеет один или несколько действительных корней $y' = k_i$. Тогда $y(x) = k_i x + c$ и мы получаем однопараметрическое семейство прямых, содержащееся в полученном выше двухпараметрическом семействе $y(x) = c_1 x + c_2$.

Запишем **условие трансверсальности** (4.5)

$$\left[\sqrt{1+y'^2} + (2x - y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_0} = 0, \quad \left[\sqrt{1+y'^2} + (1 - y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_1} = 0.$$

Из (4.9) находим $y'(x_0) = y'(x_1) = c_1$. Отсюда с учетом равенства (4.6) получаем систему четырех уравнений для определения c_1, c_2, x_0 и x_1

$$\sqrt{1+c_1^2} + (2x_0 - c_1)\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} = 0, \quad \sqrt{1+c_1^2} + (1 - c_1)\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} = 0,$$

$$c_1 x_0 + c_2 = x_0^2 + 2, \quad c_1 x_1 + c_2 = x_1,$$

решив которую, находим $c_1 = -1$, $c_2 = 11/4$, $x_0 = 1/2$, $x_1 = 11/8$.

Следовательно, уравнение экстремали имеет вид $y(x) = -x + \frac{11}{4}$.

Отметим, что функционал $J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \frac{7}{8}\sqrt{2}$ представляет собой длину дуги кривой между точками $(x_0, y(x_0))$ и $(x_1, y(x_1))$. Поэтому геометрический смысл этой задачи состоит в определении гладкой кривой минимальной длины, соединяющей параболу $y = x^2 + 2$ и прямую $y = x$. □

Пример 4.2. Найти экстремали функционала $J(y)$ в следующей задаче:

$$J(y) = \int\limits_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2)\,dx; \; y(0) = 1.$$

Решение. В этой задаче отсутствует граничное условие при $x = \frac{\pi}{4}$, следовательно, правый конец кривой $y(x)$ может перемещаться по прямой $x = \frac{\pi}{4}$ и необходимо использовать естественное граничное условие (4.7)

Уравнение Эйлера имеет вид $y'' + y = 0$, а его общее решение $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Из условия $y(0) = c_1 = 1$ находится постоянная $c_1 = 1$. А из условия (4.9)

$$2y'\frac{\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} + c_2 \cos\frac{\pi}{4} = 0$$

постоянная $c_2 = 1$. Следовательно, $y(x) = \cos x + \sin x$. □

К задачам вариационного исчисления с подвижными границами относится и **задача Больца.**

Задача Больца состоит в определении функции $y(x) \in C^1[a,b]$, для которой функционал

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx + f(y(a), y(b)) \qquad (4.10)$$

достигает слабого экстремума, где $f(u,v)$ - заданная функция, имеющая непрерывные частные производные по u и v, $F(x,y,z)$ – функция, имеющая непрерывные частные производные до 3-го порядка включительно по всем своим аргументам.

Теорема 4.2 (**задача Больца**). Для того чтобы функционал (4.10) **достигал слабого экстремума** на функции $y(x) \in C^1[a,b]$ **необходимо**, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0.$$

и **условиям трансверсальности для задачи Больца**

$$\left[F'_{y'} - \frac{\partial f}{\partial y(a)}\right]_{x=a} = 0, \; \left[F'_{y'} + \frac{\partial f}{\partial y(a)}\right]_{x=b} = 0. \qquad (4.11)$$

Пример 4.3. Найти экстремали функционала $J(y)$ с подвижными границами**:**

$$J(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)dx - y^2(0) + 2y(\pi/2).$$

Решение. Уравнение Эйлера имеет вид $y'' + y = 0$, а его общее решение $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Записав условие трансверсальности (4.11)

$$0 = \left[F'_{y'} - \frac{\partial f}{\partial y(0)}\right]_{x=0} = 2y'(0) + 2y(0) = 2c_2 + 2c_1,$$

$$0 = \left[F'_{y'} - \frac{\partial f}{\partial y(\pi/2)}\right]_{x=\pi/2} = 2y'(\pi/2) + 2 = 2 - 2c_1,$$

находим $c_1 = 1, c_2 = -1$. Таким образом, функция $y(x) = \cos x - \sin x$ является единственной кривой возможного экстремума функционала $J(y)$.□

5. Задачи на условный экстремум

Задачи вариационного исчисления, в которых на искомые функции накладываются, помимо граничных условий, дополнительные ограничения, называются задачами на условный экстремум.

Рассмотрим следующую задачу на **экстремум функционала, зависящего от нескольких функций:**

$$J[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_1(x), ..., y_n(x), y'_1(x), ..., y'_n(x))dx, \qquad (5.1)$$

где функция F имеет непрерывные частные производные вплоть до 3-го порядка по всем аргументам, а $y_k(x) \in C^1[a,b]$, $k = 1,2,...,n$.

Граничные условия в этой задаче имеют вид

$$y_k(a) = y_{k0}, y_k(b) = y_{k1}, \; k = 1,2,...,n, \qquad (5.2)$$

дополнительные ограничения заданы уравнениями связи

$$\varphi_i(x, y_1, ..., y_n, y'_1, ..., y'_n) = 0, \; i = 1,2,...,m, \; m < n. \qquad (5.3)$$

Эта задача вариационного исчисления называется **задачей Лагранжа**.

Введем **функцию Лагранжа** рассматриваемой задачи

$$L(x, y_1,..., y_n, y_1',..., y_n', \lambda_1,..., \lambda_m) = F(x, y_1,..., y_n, y_1',..., y_n') +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i(x, y_1,..., y_n, y_1',..., y_n') \qquad (5.4)$$

где $\lambda_i(x) \in C^1[a,b]$ - произвольные функции (**множители Лагранжа**).

При решении задачи Лагранжа используется следующее **необходимое условие экстремума функционала** (5.1).

Теорема 5.1 (**задача Лагранжа**). Если функции $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x) \in C^1[a,b]$ доставляют **слабый экстремум** функционалу (5.1) при условиях (5.2), (5.3), то существуют множители Лагранжа $\lambda_i(x)$, $i = 1,2,...,m$, при которых эти функции удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$L'_{y_k} - \frac{d}{dx} L'_{y_k'} = 0, \qquad k = 1,2,...,n, \qquad (5.5)$$

записанных для функционала $I(y_1, y_2,..., y_n) = \int_a^b L dx$.

Замечание. С помощью теоремы 5.1. решение задачи об условном экстремуме функционала $J(y_1, y_2,..., y_n)$ сводится к исследованию экстремума функционала $I(y_1, y_2,..., y_n)$ без дополнительных условий (5.4).

При использовании теоремы 5.1 для решения задачи Лагранжа искомые функции $y_k(x)$, $k = 1,2,...,n$ и множители Лагранжа $\lambda_i(x)$, $i = 1,2,...,m$ определяются из системы $n + m$ уравнений (5.3) и (5.5).

Пример 5.1. Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ в следующей задаче Лагранжа:

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 \left(y_1'^2 + y_2'^2\right)dx; \; y_1(0) = y_2(0) = 0, \; y_1(1) = 2ch1, \; y_2(1) = 2sh1, \; y_1' - y_2 = 0.$$

Решение. Функция Лагранжа данной задачи имеет вид $L = y_1'^2 + y_2'^2 + \lambda(y_1' - y_2)$.

Для определения функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ и $\lambda(x)$ запишем систему уравнений Эйлера (5.5):

$$2y_1'' + \lambda' = 0, \; 2y_2'' + \lambda = 0, \; y_1' - y_2 = 0.$$

Исключая из этой системы сначала функцию $\lambda(x)$, а затем $y_1(x)$, получим $y_2''' - y_2' = 0$. Обозначим y_2' буквой z, тогда $z'' - z = 0$. Общее решение этого уравнения $z(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$. Отсюда последовательно находим $y_2(x) = \int z(x)dx = C_1e^x - C_2e^{-x} + C_3$, $y_1(x) = \int y_2(x)dx = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3x + C_4$,

$$y_2(x) = -C_1e^x - C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

Из граничных условий следует, что

$$y_1(0) = C_1 + C_2 + C_4 = 0, \; y_2(0) = C_1 - C_2 + C_3 = 0, \; y_1(1) = C_1e + C_2e^{-1} + C_3 + C_4 = 2ch1,$$
$$y_2(1) = C_1e - C_2e^{-1} + C_3 = 2sh1,$$

откуда находим $C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = C_4 = 0$, поэтому в данной задаче функционал $J(y_1, y_2)$ может достигать экстремума при $y_1(x) = e^x + e^{-x} = 2ch1$ $y_2(x) = e^x - e^{-x} = 2sh1$.□

6.10. Основные и обобщенные функции

Обычное понятие функции $y = f(x)$ иногда совсем не работает. Как математически выразить, например, плотность точечного заряда? Прежде чем вести понятие обобщенной функции необходимо определить пространство основных функций.

Пусть G - открытое множество R^n.

Определение (**носителя**). Носителем функции $\varphi \in C(G)$ называется замыкание множества $x \in G$, таких, что $\varphi(x) \neq 0$. Носитель φ обозначается suppφ .

Определение (**компакта**). Компакт K в R^n - это **замкнутое ограниченное множество**.

Пусть $D(G) = C_0^\infty(G)$ - пространство всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в G.

Определение (**финитной функции**). Функция $\varphi(x) \in D(G)$, имеющая непрерывные частные производные всех порядков, носитель которой содержится внутри G, называется финитной в G.

Замечание. Если финитную функцию доопределить 0 вне области G, то получим бесконечно дифференцируемую функцию в R^n.

Финитные в области G функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$ образуют линейное пространство. Более того, для любой функции u пространства $L_p(G)$ при $1 \le p < \infty$ найдется последовательность функций из $C_0^\infty(G)$, сходящаяся по норме пространства $L_p(G)$ к функции u, т.е., $C_0^\infty(G)$ **плотно** в $L_p(G)$.

Определение (**основных функций**). Все финитные бесконечно дифференцируемые в R^n функции из $D(G) = C_0^\infty(G)$ называются основными функциями.

Определение (**обобщенной функции**). Пространством обобщенных функций $D'(G)$ называется множество всех линейных функционалов f на $D(G)$, сужение которых непрерывно на множестве функций $\varphi \in D(G)$ с supp $\varphi \subseteq K$ для произвольного компакта $K \subset G$.

Замечание. Условие, касающееся непрерывности сужения функционалов на множестве функций $\varphi \in D(G)$ с supp$\varphi \subseteq K$ для произвольного компакта $K \subset G$, связано с определением сходимости в пространстве $D(G)$.

Определение (**локально суммируемой функции**). Функция $g(x)$ называется локально суммируемой (интегрируемой) в G, если она суммируема по всякой подобласти, лежащей вместе со своим замыканием в G.

Замечание. Все функции $u(x)$ **локально интегрируемые** (суммируемые) в R^n являются **обобщенными функциями**. Функционал на $D(G)$ задается посредством интеграла:

$$\langle u,\varphi\rangle = \int_K u(x)\varphi(x)dx$$

для любой $\varphi \in D(G)$ с supp$\varphi \subseteq K$.

Определение (δ **-функции Дирака**). δ - функция Дирака – это функционал на $D(G)$, определяемый формулой

$$\langle \delta(x - x_0),\varphi(x)\rangle = \varphi(x_0).$$

Следствие. $\langle \delta(x),\varphi(x)\rangle = \varphi(0)$.

Замечание. δ - **функция Дирака** - это пример обобщенной функции, **не** являющейся **локально интегрируемой**. В теории электрических цепей δ - функция Дирака – это “**единичный импульс**”.

Определение (δ **- образной последовательности**). Множество функций $\varphi_\varepsilon(x) \in D(R^n)$ образуют δ - образную последовательность, если

а) $\varphi_\varepsilon(x) \geq 0$ при всех x;

б) $\int \varphi_\varepsilon(x)dx = 1$;

в) $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ при $|x| \geq \varepsilon$.

Теорема 6.10.1 (δ **- образная последовательность**). Для δ - образной последовательности справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varphi_\varepsilon(x) = \delta(x) \tag{6.10.1}$$

в $D'(R^n)$.

Доказательство. Так как $\varphi_\varepsilon(x)$ - локально интегрируемая функция, то она задает функционал на $D(G)$ посредством интеграла:

$$\langle \varphi_\varepsilon(x),\varphi\rangle = \int \varphi_\varepsilon(x)\varphi(x)dx.$$

Учитывая свойство б),

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\langle \varphi_\varepsilon(x),\varphi\rangle - \varphi(0)\right] = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int \varphi_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \int \varphi_\varepsilon(x)\varphi(0)dx\right] = \lim_{\varepsilon\to+0}\int \varphi_\varepsilon(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]dx;$$

$$\int \varphi_\varepsilon(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]dx \leq \sup_{|x|\leq\varepsilon}|\varphi(x) - \varphi(0)|\int \varphi_\varepsilon(x)dx = \sup_{|x|\leq\varepsilon}|\varphi(x) - \varphi(0)|.$$

Поскольку в силу непрерывности φ

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\sup_{|x|\leq\varepsilon}|\varphi(x) - \varphi(0)| = 0,$$

получим

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left[\langle \varphi_\varepsilon(x),\varphi\rangle - \varphi(0)\right] = \lim_{\varepsilon\to0}\int \varphi_\varepsilon(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]dx \leq \lim_{\varepsilon\to0}\sup_{|x|\leq\varepsilon}|\varphi(x) - \varphi(0)| = 0. \tag{6.10.2}$$

Равенство (6.10.1), означающее, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}\langle \varphi_\varepsilon(x),\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to0}\int \varphi_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \langle \delta(x),\varphi\rangle = \varphi(0)$$

для любой функции $\varphi \in D(R^n)$, следует из (6.10.2). □

Следствие.

$$\lim_{\varepsilon\to0}\langle \varphi_\varepsilon(x - x_0),\varphi(x)\rangle = \lim_{\varepsilon\to0}\int \varphi_\varepsilon(x - x_0)\varphi(x)dx = \langle \delta(x - x_0),\varphi(x)\rangle = \varphi(x_0). \tag{6.10.3}$$

Замечание. Напомним, что сверткой обычных функций f и h на R^n называют интеграл

$$(f*h)(x)=\int f(\xi)h(x-\xi)d\xi=\int f(x-\xi)h(\xi)d\xi,$$

который берется на R^n.

В частности,

$$(\varphi_\varepsilon*\varphi)(x)=\int\varphi_\varepsilon(\xi)\varphi(x-\xi)d\xi=\int\varphi_\varepsilon(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

где функции $\varphi_\varepsilon(x)\in D(R^n)$ образуют δ - образную последовательность, а $\varphi(x)$ любая функция из $D(R^n)$.

Из (6.10.3) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\varphi_\varepsilon(x-x_0),\varphi(x)\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}(\varphi_\varepsilon*\varphi)(x_0)=\langle\delta(x-x_0),\varphi(x)\rangle=\varphi(x_0).$$

Последнее равенство дает основание полагать

$$\delta*f=f*\delta=f.$$

<u>Пример</u> 6.10.1. Пусть $\varphi\in D(R^n)$. Вычислить

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-n}\int_{|x|=\varepsilon}\varphi(x)ds.$$

<u>Решение</u>. Заметим, что для любого $\varepsilon>0$

$$\varepsilon^{1-n}\int_{|x|=\varepsilon}ds=\sigma_{n-1},$$

где σ_{n-1} - площадь сферы радиуса 1, или

$$\frac{\varepsilon^{1-n}}{\sigma_{n-1}}\int_{|x|=\varepsilon}ds=1.$$

Напомним, что множество финитных в R^n функций $\varphi\in D(R^n)$ **плотно** в $L_p(R^n)$. В частности, функцию

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}1, & |x|=\varepsilon;\\ 0 & |x|\neq\varepsilon\end{cases}$$

можно аппроксимировать с любой точностью функцией $\varphi_\varepsilon(x)\in D(R^n)$.

Поэтому соответствующая последовательность $\dfrac{\varepsilon^{1-n}}{\sigma_{n-1}}\varphi_\varepsilon(x)\in D(R^n)$ является δ - образной последовательностью. Отсюда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-n}\int_{|x|=\varepsilon}\varphi(x)ds=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-n}\int_{|x|=\varepsilon}f_\varepsilon(x)\varphi(x)ds=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-n}\int_{|x|=\varepsilon}\varphi_\varepsilon(x)\varphi(x)ds=\sigma_{n-1}\varphi(0)=\langle\sigma_{n-1}\delta(x),\varphi\rangle,$$

где σ_{n-1} - площадь сферы радиуса 1. □

6.11. Обобщенная производная

Пусть $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ - целочисленный неотрицательный вектор (**мультииндекс**) и $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$. Пусть символ D^α означает частную производную

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Как обычно, $C^{|\alpha|}(\overline{G})$ обозначает множество функций непрерывных вместе со всеми производными порядка, не превышающего $|\alpha|$ во всей области G, включая границу. Пусть $\varphi(x)$ - произвольная финитная в G функция, а $f(x)$ - функция из $C^{|\alpha|}(\overline{G})$, тогда справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_G \varphi(x)D^\alpha f(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_G D^\alpha\varphi(x)f(x)dx.$$

Это тождество положено в основу определения обобщенной производной по С.Л.Соболеву.

<u>Определение</u> (**обобщенной производной**). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - две обобщенные в G функции, такие, что для любой финитной в G функции $\varphi(x)$ выполняется равенство

$$\langle f(x),\varphi(x)\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle g(x), D^\alpha\varphi(x)\rangle.$$

Тогда $g(x)$ называют обобщенной производной порядка α функции $f(x)$ в области G и обозначают $g(x) = D^\alpha f(x)$.

<u>Следствие</u>**.** Если $f(x)$ и $g(x) = D^\alpha f(x)$ - локально суммируемые в G функции, то для любой финитной в G функции $\varphi(x)$ выполняется равенство

$$\int_G f(x)D^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_G g(x)D^\alpha\varphi(x)dx.$$

<u>Пример</u> 6.11.1. Пусть u принадлежит пространству обобщенных функций $D'(R^n)$. Тогда по определению обобщенной производной для оператора Лапласа $\Delta u \in D'(R^n)$, $\varphi \in D(G) = C_0^\infty(G)$ справедливо равенство

$$\langle \Delta u,\varphi\rangle = \langle u,\Delta\varphi\rangle.$$

Если $u \in D'(R^n)$, $\Delta u \in D'(R^n)$ - локально суммируемые в G функции, то

$$\langle \Delta u,\varphi\rangle = \int_G \Delta u\varphi(x)dx = \int_G u\Delta\varphi(x)dx = \langle u,\Delta\varphi\rangle. \Box$$

<u>Пример</u> 6.11.2. Найти производную для δ - функции Дирака.

<u>Решение</u>. Пусть $\varphi \in D(G) = C_0^\infty(G)$. Тогда для δ - функции Дирака справедливо равенство

$$\langle \delta'(x-x_0),\varphi(x)\rangle = -\langle \delta(x-x_0),\varphi'(x)\rangle = -\varphi'(x_0).$$

Отсюда производная δ - функции Дирака – это функционал на $D(G)$, определяемый формулой

$$\langle \delta'(x-x_0),\varphi(x)\rangle = -\varphi'(x_0). \Box$$

<u>Пример</u> 6.11.3. Найти производную для $\sigma(t)$ - единичной функции или функции Хевисайда $\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ в смысле обобщенных функций.

<u>Решение</u>. Пусть $\varphi \in D(R^1) = C_0^\infty(R^1)$. По определению обобщенной производной

$$\langle \sigma'(t),\varphi(t)\rangle = -\langle \sigma(t),\varphi'(t)\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(t)dt = \varphi(0),$$

т.е. $\sigma'(t) = \delta(t)$. $\Box$

7.1. **Мера Лебега множеств**

Понятие меры $\mu(A)$ множества A является естественным обобщением понятий длины, площади, объема и т.д.

Мера Лебега вводится последовательно, сначала для **элементарных множеств**.

<u>Определение</u> (**меры n-мерного замкнутого интервала**). Мерой n-мерного замкнутого интервала (**параллелепипеда**)

$$I = \{x : a_i \le x_i \le b_i, i = 1,...,n\}$$

в евклидовом пространстве R^n называется число

$$\mu(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

<u>Замечание.</u> Всякое открытое множество $G \subset R^n$ можно представить в виде не более чем счетного объединения замкнутых интервалов $I_k, k = 1,2,...$, **без общих внутренних точек:**

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k. \tag{7.1.1}$$

<u>Определение</u> (**меры открытого множества** R^n). Мера Лебега открытого множества $G \subset R^n$ определяется как

$$\mu(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k),$$

где $I_k, k = 1,2,...$, из разложения (7.1.1).

<u>Замечание.</u> Очевидно, мера принимает действительные неотрицательные значения. Кроме того, можно показать, что определенная таким образом мера (возможно, равная $+\infty$) не зависит от способа представления множества G в виде объединения замкнутых интервалов без общих внутренних точек.

В частности, силу определения меры открытого множества, мера открытого $I = \{x : a_i < x_i < b_i, i = 1,...,n\}$ в R^n и замкнутого интервалов совпадают, т.е. $\mu(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

<u>Определение</u> (**внешней меры**). Внешняя мера **произвольного** множества $A \subset R^n$ определяется как

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset G} \mu(G),$$

причем нижняя грань берется по всем открытым множествам G, содержащим A.

<u>Определение</u> (**множества измеримого по Лебегу**). Множество $A \subset R^n$ называется измеримым по Лебегу, если

$$\inf_{A \subset G} \mu^*(G \setminus A) = 0,$$

нижняя грань берется по всем открытым множествам G, содержащим A. В этом случае определяют **меру Лебега** $\mu(A)$, полагая $\mu(A) = \mu^*(A)$.

<u>Замечание.</u> Особую роль играют измеримые множества с мерой, равной нулю (**множества меры нуль**). При этом каждое подмножество множества меры нуль является множеством меры нуль и объединение счетного числа множеств меры нуль является множеством меры нуль. Принято говорить, что некоторое условие выполняется **почти всюду** на множестве $A \subset R^n$ (или **для**

почти всех его точек), если множество точек, где это условие выполняется, имеет нулевую меру.

Пример 7.1.1. Найти меру произвольного одноточечного множества в R^n.

Решение. Произвольное одноточечное множество является частным случаем замкнутого интервала. Поэтому из определения меры n-мерного замкнутого интервала следует, что это **множество меры нуль**.□

Пусть P означает систему **всех измеримых по Лебегу множеств** $A \subset R^n$.

Замечание. Система P есть σ **- алгебра**. А это означает, в частности, что пустое множество измеримо, разность измеримых множеств является измеримым множеством, пересечение или объединение счетного числа измеримых множеств является измеримым множеством.

Кроме того, условие

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

для любой последовательности попарно не пересекающихся множеств $A_k \in P$, $k = 1,2,...$, влечет равенство

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

т.е. $\mu : P \to R$ **- счетно-аддитивная мера**.

Пример 7.1.2. Найти меру множества

$$\left\{ \frac{1}{2^n} : n = 1,2,... \right\}$$

в R.

Решение. Так как множество является счетным объединением множеств нулевой меры, то оно также множество нулевой меры.□

Замечание. Здесь сознательно не приводится общее определение меры, введение которой начинается с задания аддитивной функции на кольце множеств, называемых **элементарными множествами**, а затем рассматривается ее продолжение.

В общем случае мерой может служить, в частности, интеграл от неотрицательной функции, взятый по некоторой линейной, плоской или пространственной области, и т.п.

7.2. Интеграл Лебега

Определение (**измеримой функции**). Вещественная функция u, определенная на измеримом множестве $G \subset R^n$, называется измеримой, если для каждого вещественного числа α измеримо множество

$$E = \{ s \in G : u(s) \geq \alpha \}.$$

Замечание. Любая непрерывная на замкнутом или открытом множестве $G \subset R^n$ функция измерима.

Определение (**простой функции**). Функция u, определенная на $G \subset R^n$, называется простой, если она измерима и принимает не более чем счетное число значений.

Пример 7.2.1. Проверить, является ли функция $u:(0,1)\to R$:

$$u(s)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(s),\ u_n(s)=\begin{cases}2^n, & \frac{1}{2^n}<s<\frac{1}{2^{n-1}},\\ 0, & s\notin\left(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right),\end{cases}$$

$n=1,2,\ldots$, измеримой?

Решение. Открытые интервалы $(0,1)$, $I_n=\left\{s:\frac{1}{2^n}<s<\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$, $n=1,2,\ldots$ измеримы в R. Множество $E=\{s\in(0,1):u(s)\geq\alpha\}$ для любого вещественного α есть либо пустое множество, либо не более чем счетное объединение измеримых множеств, а потому измеримо. Следовательно, функция u измерима. Так как u принимает не более чем счетное число значений, то u простая функция.□

Замечание. **Для измеримости функции u необходимо и достаточно, чтобы она могла быть представлена в виде предела равномерно сходящейся последовательности простых функций**.

Определение (**интеграла от простой функции**). Интегралом от простой функции u:

$$u(s)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(s);\ u_k(s)=\begin{cases}c_k, & s\in G_k,\\ 0, & s\notin G_k,\end{cases}$$

$k=1,2,\ldots$ по множеству G, где

$$G=\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k$$

представимо в виде объединения попарно не пересекающихся множеств $G_k\in P$, называется число

$$\int_G u(s)ds=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\mu(G_k).$$

Замечание. Функцию $u(s)$ можно записать как $u(s)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\chi_{G_k}(s)$, где $\chi_{G_k}(s)$ - характеристическая функция множества G_k т.е. $\chi_{G_k}(s)=\begin{cases}1, & s\in G_k,\\ 0, & s\notin G_k.\end{cases}$

Пример 7.2.2. Вычислить $\int_{(0,1)}u(s)ds$ для простой функции $u:(0,1)\to R$:

$$u(s)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(s),\ u_n(s)=\begin{cases}2^{-n}, & \frac{1}{2^n}<s<\frac{1}{2^{n-1}},\\ 0, & s\notin\left(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right),\end{cases}\quad n=1,2,\ldots.$$

Решение. По определению меры $\mu(I_n)=\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$, где

$$I_n=\left\{s:\frac{1}{2^n}<s<\frac{1}{2^{n-1}}\right\},\ n=1,2,\ldots.$$

Поэтому

$$\int_{(0,1)} u(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} = \frac{1}{3}.\square$$

<u>Определение</u> (**интегрируемой по Лебегу функции**). Функция u, определенная почти всюду на G, называется интегрируемой (по Лебегу) по множеству (или на множестве) G, если существует последовательность $\{u_j\}$ простых функций, которая почти всюду на G сходится к u и для которой

$$\left\{\int_G u_j(s)ds\right\}$$

сходится. В этом случае интеграл (Лебега) от функции u по G

$$\int_G u(s)ds = \lim_{j\to\infty}\int_G u_j(s)ds.$$

<u>Замечание</u>. Так как для измеримости функции u необходимо и достаточно, чтобы она могла быть представлена в виде предела равномерно сходящейся последовательности простых функций, то для измеримой функции всегда существует последовательность $\{u_j\}$ простых функций, которая почти всюду на G сходится к u.

Интеграл Лебега обладает свойством линейности.

Если существует интеграл Римана функции u, то существует интеграл Лебега и оба интеграла совпадают. Однако существуют примеры функций, не интегрируемых по Риману, но интегрируемых по Лебегу.

<u>Пример</u> 7.2.3. Пусть функция u, заданная на отрезке $[0,1]$, равна 1 для рациональных чисел и равна 0 для иррациональных чисел. Найти интеграл Лебега.

<u>Решение</u>. Так как множество рациональных чисел является счетным, а мера одноэлементного множества равна нулю, то, по определению интеграла простой функции, интеграл Лебега функции u равен нулю. Заметим, что данная функция не интегрируема по Риману.$\square$

<u>Определение</u> (**эквивалентных функций**). Пусть функции u_1 и u_2 определены на G. Функции u_1 и u_2 называются эквивалентными, если $u_1(s) = u_2(s)$ для почти всех $s \in G$.

<u>Замечание</u>. Эквивалентные функции не различаются, т.е. под **функцией** подразумевается **класс эквивалентных функций**.

<u>Определение</u> (**пространства** $L_p(G)$). Через $L_p(G)$, $1 \le p < \infty$, обозначается множество всех измеримых функций $u \in (G \to R^1)$, для которых

$$\int_G |u(s)|^p\, ds < \infty.$$

<u>Определение</u> (**нормы в пространстве** $L_p(G)$). Пусть $u \in L_p(G)$, $1 \le p < \infty$. Число

$$\|u\|_{L_p} = \left\{\int_G |u(s)|^p\, ds\right\}^{1/p} \qquad (7.2.1)$$

называется нормой функции $u \in L_p(G)$.

Замечание. Метрическое пространство называется **полным**, если предел любой сходящейся последовательности принадлежит этому пространству.

Пример 7.2.4. Проверить, является ли полным метрическим пространством множество всех рациональных чисел с метрикой равной абсолютной величине разности двух чисел?

Решение. Как известно, иррациональное число можно с любой точностью приблизить рациональным числом. Поэтому множество всех рациональных чисел не является полным метрическим пространством. □

Замечание. Пространства $L_p(G)$, $1 \le p < \infty$ - это **бесконечномерные банаховы пространства**, т.е. **полные линейные нормированные пространства бесконечной размерности**.

Пример 7.2.5. Пусть $\alpha = 1/p$, $1 \le p < \infty$. Вычислить нормы в пространстве $L_p(0,1)$ функций $x_n(s) = \begin{cases} 2^{n\alpha}, & \dfrac{1}{2^n} \le s < \dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ 0, & s \notin \left[\dfrac{1}{2^n}, \dfrac{1}{2^{n-1}}\right]. \end{cases}$

Решение. Получаем по определению нормы:

$$\|x_n\|_{L_p} = \left\{ \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} |x_n(s)|^{1/\alpha} ds \right\}^{\alpha} = \left\{ \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} |2^{n\alpha}|^{1/\alpha} ds \right\}^{\alpha} = \left\{ 2^n \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} \right) \right\}^{\alpha} = 1 . \square$$

Напомним аксиомы скалярного произведения:

1) $(u,u) \ge 0$, причем $(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

2) $(u,v) = (v,u)$;

3) $(u,v+h) = (u,v) + (u,h)$;

4) $(u,\alpha v) = \alpha(u,v)$, если α - вещественное число.

Замечание. Пространства $L_2(G)$, - это **гильбертово пространство**, скалярное произведение в котором задается равенством

$$(u,v)_{L_2} = \int_G u(s)v(s)ds$$

для любых двух функций $u \in L_2(G), v \in L_2(G)$.

Теорема 7.2.1 (**неравенство Коши–Буняковского**). Справедливо неравенство

$$(u,v)^2 \le (u,u)(v,v) .$$

Доказательство. В силу аксиомы скалярного произведения для любого числа α имеем

$$0 \le (u + \alpha v, u + \alpha v) = (u,u) + 2\alpha(u,v) + \alpha^2(v,v) .$$

Следовательно, рассматривая правую часть как квадратное выражение относительно α, имеем отрицательный дискриминант

$$D = 4(u,v)^2 - 4(v,v)(u,u) \le 0 ,$$

что и завершает доказательство утверждения. □

Следствие. Неравенство Коши – Буняковского в случае пространств $L_2(G)$: для любых двух функций $u \in L_2(G), v \in L_2(G)$ справедлива оценка

$$(u,v)_{L_2} \le \sqrt{\int_G u^2(s)ds}\sqrt{\int_G v^2(s)ds} \qquad (7.2.2)$$

или $(u,v)_{L_2} \le \|u\|_{L_2}\|v\|_{L_2}$.

Замечание. Неравенство (7.2.2) является частным случаем **неравенства Гельдера**

$$\int_G |u(s)v(s)|\,ds \le \left\{\int_G |u(s)|^p\,ds\right\}^{1/p}\left\{\int_G |v(s)|^q\,ds\right\}^{1/q}, \qquad (7.2.3)$$

где $u \in L_p(G)$, $v \in L_q(G)$, $1 < p < \infty$, p и q связаны соотношением

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Неравенство (7.2.3) можно записать также следующим образом:

$$\int_G |u(s)v(s)|\,ds \le \|u\|_{L_p}\|v\|_{L_q}.$$

Теорема 7.2.2 (**неравенство Коши**). Справедливо неравенство

$$\sqrt{\int_G (u(s)+v(s))^2 ds} \le \sqrt{\int_G u^2(s)ds} + \sqrt{\int_G v^2(s)ds}. \qquad (7.2.4)$$

Доказательство. В силу линейности интеграла имеем

$$\int_G (u(s)+v(s))^2 ds = \int_G u^2(s)ds + 2\int_G u(s)v(s)ds + \int_G v^2(s)ds.$$

Применим неравенство (7.2.2) Коши - Буняковского, получим

$$\int_G (u(s)+v(s))^2 ds \le \int_G u^2(s)ds + 2\sqrt{\int_G u^2(s)ds}\sqrt{\int_G v^2(s)ds} + \int_G v^2(s)ds = \left(\sqrt{\int_G u^2(s)ds} + \sqrt{\int_G v^2(s)ds}\right)^2,$$

что и завершает доказательство утверждения.□

Замечание. Неравенство (7.2.4) является частным случаем **неравенства Минковского**

$$\sqrt[p]{\int_G |u(s)+v(s)|^p\,ds} \le \sqrt[p]{\int_G |u(s)|^p\,ds} + \sqrt[p]{\int_G |v(s)|^p\,ds}, \qquad (7.2.5)$$

где $u \in L_p(G)$, $v \in L_p(G)$, $1 \le p < \infty$.

Неравенство (7.2.5) - это **неравенство треугольника**

$$\|u+v\|_{L_p} \le \|u\|_{L_p} + \|v\|_{L_p}$$

для нормы (7.2.1) в пространстве $L_p(G)$.

7.3. Пространства Соболева

Определение (**пространства Соболева**). Обозначим через $W_p^k(G)$ множество всех функций из $L_p(G)$, имеющих обобщенные производные до k-ого порядка включительно из $L_p(G)$.

Замечание. Пространства $W_p^k(G)$ при $1 \le p < \infty$ с нормой

$$\|u\|_{W_p^k} = \left(\int_G \left(\sum_{|\alpha| \le k} \left|D^\alpha u(x)\right|^2\right)^{p/2} dx\right)^{1/p}$$

являются **банаховыми** пространствами С.Л.Соболева.

В частности, если $k = 1$, то

$$\|u\|^p_{W^1_p} = \int_G \left(\sum_{|\alpha|=0} \left|D^\alpha u(x)\right|^2 + \sum_{|\alpha|=1} \left|D^\alpha u(x)\right|^2 \right)^{p/2} dx = \int_G \left(|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2\right)^{p/2} dx,$$

где $|\nabla u(x)|^2$ - это квадрат модуля градиента $grad\, u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\}$ в точке x.

Если $k = 1$, $p = 2$, то

$$\|u\|^2_{W^1_2} = \int_G |u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 dx = \|u\|^2_{L_2} + \|\nabla u\|^2_{L_2}.$$

<u>Определение</u> (**гильбертова пространства Соболева**). Пространство Соболева $W^k_2(G)$ при $p = 2$ (обозначаемое через $H^k(G)$) - это гильбертово пространство, в котором скалярное произведение определяется следующим образом:

$$(u, v)_{H^k(G)} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_G D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

для любых $u(x), v(x) \in H^k(G)$. Соответственно норма в $H^k(G)$ определяется равенством

$$\|u\|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_G \left|D^\alpha u(x)\right|^2 dx \right)^{1/2}$$

<u>Определение</u> (**вложения**). Пусть E_1 и E_2 - два нормированных пространства с нормой $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, соответственно. Пространство E_2 вложено в E_1, если каждый элемент из E_2 является элементом из E_1 и, кроме того, существует число $M > 0$, такое что

$$\|u\|_1 \le M \|u\|_2$$

для любого элемента u из пространства E_2.

<u>Замечание</u>. Пространство Соболева $W^k_p(G)$ вложено в пространство Лебега $L_p(G)$, так как

$$\|u\|_{L_p} \le \|u\|_{W^k_p}. \tag{7.3.1}$$

Действительно,

$$\|u\|_{W^k_p} = \left(\int_G \left(\sum_{|\alpha| \le k} \left|D^\alpha u(x)\right|^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p} = \left(\int_G \left(\sum_{|\alpha|=0} \left|D^\alpha u(x)\right|^2 + \sum_{0<|\alpha| \le k} \left|D^\alpha u(x)\right|^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p}.$$

Поэтому

$$\|u\|^p_{W^k_p} = \int_G \left(\sum_{|\alpha|=0} \left|D^\alpha u(x)\right|^2 + \sum_{0<|\alpha| \le k} \left|D^\alpha u(x)\right|^2 \right)^{p/2} dx = \int_G \left(|u(x)|^2 + \sum_{0<|\alpha| \le k} \left|D^\alpha u(x)\right|^2 \right)^{p/2} dx$$

и

$$\|u\|^p_{L_p} = \int_G |u(x)|^p dx = \int_G \left(|u(x)|^2\right)^{p/2} dx \le \int_G \left(|u(x)|^2 + \sum_{0<|\alpha| \le k} \left|D^\alpha u(x)\right|^2 \right)^{p/2} dx = \|u\|^p_{W^k_p}.$$

Определение (**эквивалентных норм**). Пусть E - произвольное нормированное пространство, в котором введены две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ называются эквивалентными, если существуют две постоянные $m > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$m\|u\|_1 \le \|u\|_2 \le M\|u\|_1$$

для любого элемента u из пространства E.

Замечание. Два скалярных произведения в гильбертовом пространстве H называются **эквивалентными**, если порождаемые ими нормы эквивалентны.

Обозначим через $\overset{0}{H}{}^{k}(G)$ замыкание множества всех функций из $u \in C_0^\infty(G)$ по норме из $H^k(G)$.

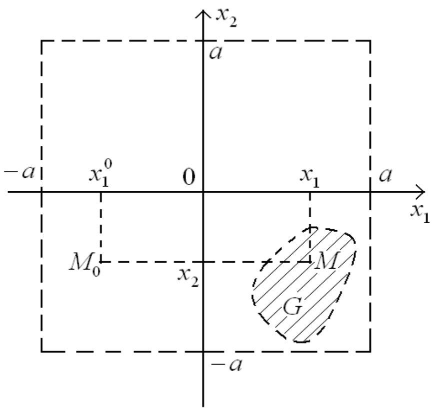

Рис. 7.3.1

Теорема 7.3.1 (**неравенство Фридрихса**). Пусть G - ограниченная область. Если $u \in \overset{0}{H}{}^{1}(G)$, то справедливо неравенство

$$\int_G |u(x)|^2\, dx \le c\int_G |\nabla u(x)|^2\, dx, \tag{7.3.2}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от выбора функции $u(x)$.

Доказательство. Заметим, что норма в $H^1(G)$ записывается следующим образом

$$\|u\|_{H^1} = \left(\sum_{|\alpha|\le 1}\int_G |D^\alpha u(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_G |u(x)|^2\, dx + \int_G |\nabla u(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{7.3.3}$$

Пусть $u \in \overset{0}{H}{}^{1}(G)$. По определению пространства $\overset{0}{H}{}^{1}(G)$ существует последовательность функций из $C_0^\infty(G)$, сходящаяся по норме $H^1(G)$ к u. Поэтому достаточно доказать утверждение для произвольной функции $u \in C_0^\infty(G)$, затем, перейдя к пределу в неравенстве, получить утверждение для $u \in \overset{0}{H}{}^{1}(G)$.

Для простоты рассуждений ограничимся доказательством случая $n = 2$. Так как область G ограничена (рис. 7.3.1), то найдется число $a > 0$ такое, что G будет **строго** вложена в квадрат $D_a = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 : -a < x_1 < a,\ -a < x_2 < a\}$. Продолжим функцию $u \in C_0^\infty(G)$ нулем на $D_a \setminus G$. Пусть точка $M_0(x_1^0, x_2) \in D_a \setminus G$, а $M(x_1, x_2) \in G$. Тогда

$$|u(x_1, x_2)| = \left|\int_{x_1^0}^{x_1} \frac{\partial u(\xi, x_2)}{\partial \xi} d\xi\right|.$$

Применяя неравенство Коши – Буняковского, получим

$$|u(x_1, x_2)| \le \left(\int_{x_1^0}^{x_1}\left|\frac{\partial u(\xi, x_2)}{\partial \xi}\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \sqrt{|x_1 - x_1^0|} \le \sqrt{2a}\left(\int_{-a}^{a}\left|\frac{\partial u(\xi, x_2)}{\partial \xi}\right|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Возведем обе части в квадрат и проинтегрируем по D_a. Получим

$$\int_{D_a} |u(x_1,x_2)|^2 dx \le 2a \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{a}\left|\frac{\partial u(\xi,x_2)}{\partial \xi}\right|^2 d\xi\right) dx_1 dx_2 =$$

$$= 2a\int_{-a}^{a} dx_1 \left(\int_{D_a}\left|\frac{\partial u(\xi,x_2)}{\partial \xi}\right|^2 d\xi\, dx_2\right) = 4a^2 \int_{D_a}\left|\frac{\partial u(\xi,x_2)}{\partial \xi}\right|^2 d\xi\, dx_2 .$$

Так как $u(x) = 0$ на $D_a \setminus G$, то из последнего неравенства следует

$$\int_G |u|^2 dx \le 4a^2 \int_G \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 dx_1 dx_2 \le 4a^2 \int_G |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 .\square$$

Теорема 7.3.2 (**эквивалентность норм**). Пусть $k(x) \ge k_0 > 0$, $k(x) \in C^1(\overline{G})$, $a(x) \in C(\overline{G})$, $a(x) \ge 0$. В пространстве $\overset{0}{H}{}^1(G)$ помимо нормы (7.3.3)

$$\|u\|_{H^1} = \left(\sum_{|\alpha|\le 1}\int_G |D^\alpha u(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_G |u(x)|^2 dx + \int_G |\nabla u(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

зададим норму

$$\|u\|_2^2 = \int_G (k(x)\,|\nabla u|^2 + a(x)\,|u|^2) dx, \qquad (7.3.4)$$

порожденную скалярным произведением

$$(u,v)_2 = \int_G (k(x)\nabla u \nabla v + a(x) uv) dx \qquad (7.3.5)$$

Тогда норма (7.3.4) эквивалентна норме (7.3.3).

Доказательство. Так как функции $k(x)$, $a(x)$ непрерывны и неотрицательны в замкнутой области $\overline{G}$, то существуют постоянные M_1 и M_2, такие, что $|a(x)| = a(x) \le M_1$, $|k(x)| = k(x) \le M_2$. Пусть $M = \max\{M_1, M_2\}$, тогда

$$\|u\|_2^2 = \int_G (k(x)\,|\nabla u|^2 + a(x)\,|u|^2) dx \le M\int_G (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \le M\|u\|_{H^1}^2 . \qquad (7.3.6)$$

По предположению теоремы $k(x) \ge k_0 > 0$. Поэтому

$$\|u\|_2^2 \ge k_0 \int_G |\nabla u|^2\, dx = k_0 \|\nabla u\|_{L_2}^2 .$$

В силу неравенства Фридрихса (7.3.2)

$$\|u\|_{L_2}^2 = \int_G |u(x)|^2\, dx \le c\int_G |\nabla u(x)|^2 dx = c\|\nabla u\|_{L_2}^2$$

или $\|\nabla u\|_{L_2}^2 \ge \|u\|_{L_2}^2 / c$ для всех $u \in \overset{0}{H}{}^1(G)$. Пусть $m = \min\{k_0/2, k_0/(2c)\}$, тогда

$$\|u\|_2^2 \ge k_0 \int_G |\nabla u|^2\, dx = k_0\|\nabla u\|_{L_2}^2 = (k_0/2)\|\nabla u\|_{L_2}^2 + (k_0/2)\|\nabla u\|_{L_2}^2 ,$$

$$\|u\|_2^2 \ge (k_0/2)\|\nabla u\|_{L_2}^2 + (k_0/(2c))\|u\|_{L_2}^2 \ge m\left(\|\nabla u\|_{L_2}^2 + \|u\|_{L_2}^2\right),$$

т.е.

$$\|u\|_2^2 \ge m\left(\|\nabla u\|_{L_2}^2 + \|u\|_{L_2}^2\right) = m\|u\|_{H^1}^2 ,$$

откуда

$$\|u\|_2 \ge \sqrt{m}\|u\|_{H^1} .$$

Учитывая, что в силу (7.3.6) $\|u\|_2 \le \sqrt{M}\|u\|_{H^1}$, окончательно получим

$$\sqrt{m}\|u\|_{H^1} \le \|u\|_2 \le \sqrt{M}\|u\|_{H^1} .\square$$

7.4. Обобщенное решение

Запишем постановку краевой задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в следующем виде:

Найти в области $G \subset R^n$ регулярное (**классическое**) решение $u(x) \in C^2(G) \cap C(G \cup \partial G)$ эллиптического уравнения

$$Lu = div(k(x) grad u) - a(x)u = f(x), \tag{7.4.1}$$

где $k(x) \geq k_0 > 0$, $k(x) \in C^1(\overline{G})$, $a(x) \in C(\overline{G})$, удовлетворяющее граничным условиям

$$u(x)|_{\partial G} = \varphi(x). \tag{7.4.2}$$

Определение (**обобщенного решения**). Пусть $f(x) \in L_2(G)$ в (7.4.1). Функция $u(x)$, принадлежащая $H^1(G)$, называется обобщенным решением задачи (7.4.1)-(7.4.2), если для любой функции $v \in \overset{0}{H}{}^1(G)$ верно тождество

$$\int_G (k(x)\nabla u \nabla v + a(x)uv)dx = -\int_G fvdx, \tag{7.4.3}$$

причем след функции $u(x)$ на ∂G равен $\varphi(x)$, где след при $n \geq 2$ понимается в смысле равенства

$$\int_{\partial G} |u - \varphi|^2 ds = 0.$$

Замечание. Так как в интегральное тождество входят только производные первого порядка, то, в отличие от классического решения, существование производных второго порядка для обобщенного решения не предполагается.

Аналогично вводится понятие обобщенного решения и для других основных краевых задач для эллиптического уравнения.

Теорема 7.4.1 (**соотношение классического решения краевой задачи с обобщенным**). Любое классическое решение задачи (7.4.1)-(7.4.2) является и обобщенным решением, обратное, вообще говоря, неверно.

Доказательство. Пусть функция $u(x)$ - классическое решение задачи (7.4.1)-(7.4.2). Умножим (7.4.1) на произвольную функцию $v \in C_0^\infty(G)$ и воспользуемся формулой интегрирования по частям, тогда

$$\int_G div(k(x) grad\, u)vdx = \sum_{i=1}^n \int_G \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)vdx =$$

$$= -\sum_{i=1}^n \int_G k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \sum_{i=1}^n \int_{\partial G} k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} v\cos(n, x_i)ds.$$

В силу финитности функции $v(x)$ интеграл по поверхности ∂G равен нулю, поэтому

$$\int_G div(k(x)\nabla u)vdx = -\int_G k(x)\nabla u \nabla vdx.$$

Тогда для решения $u(x)$ уравнения (7.4.1) получаем тождество (7.4.3)

$$\int_G (k(x)\nabla u \nabla v + a(x)uv)dx = -\int_G fvdx,$$

которое верно для всех $v \in C_0^\infty(G)$. Пусть $v \in \overset{0}{H}{}^1(G)$. По определению пространства $\overset{0}{H}{}^1(G)$ существует последовательность функций из $C_0^\infty(G)$, сходящаяся по норме $H^1(G)$ к v. Поэтому, перейдя к пределу в равенстве (7.4.3), получим утверждение для $v \in \overset{0}{H}{}^1(G)$. □

<u>Теорема</u> 7.4.2 (**существования и единственности обобщенного решения**). Пусть $f(x) \in L_2(G)$, $\varphi(x) \equiv 0$, $k(x) \geq k_0 > 0$, $k(x) \in C^1(\overline{G})$, $a(x) \in C(\overline{G})$. Тогда для задачи Дирихле (7.4.1)-(7.4.2) существует единственное обобщенное решение $u(x)$ из пространства $\overset{0}{H}{}^1(G)$.

Доказательство. Интегральное тождество (7.4.3) можно записать как

$$(u,v)_2 = -(f,v)_{L_2},$$

где $(u,v)_2 = \int\limits_G (k(x)\nabla u \nabla v + a(x)uv)dx$ из (7.3.5).

Покажем, что $-(f,v)_{L_2}$ - это линейный ограниченный функционал на $\overset{0}{H}{}^1(G)$.

Действительно, для любых двух функций $u \in L_2(G), v \in L_2(G)$ в силу неравенства Коши – Буняковского справедлива оценка

$$|(u,v)_{L_2}| \leq \sqrt{\int\limits_G u^2(s)ds}\sqrt{\int\limits_G v^2(s)ds}$$

или $|(u,v)_{L_2}| \leq \|u\|_{L_2}\|v\|_{L_2}$.

Поэтому $|(f,v)| \leq \|f\|_{L_2}\|v\|_{L_2}$, а в силу вложения (7.3.1) $H^1(G)$ в $L_2(G)$ и эквивалентности нормы $\| \ \|_2$ в $\overset{0}{H}{}^1(G)$ норме $H^1(G)$ существует постоянная $C > 0$, не зависящая от функций $f(x)$ и $v(x)$, такая что

$$|(f,v)| \leq \|f\|_{L_2}\|v\|_{L_2} \leq C\|f\|_{L_2}\|v\|_2.$$

Поэтому $-(f,v)_{L_2}$ - это линейный ограниченный функционал в гильбертовом пространстве $\overset{0}{H}{}^1(G)$. **По теореме Рисса** существует единственный элемент $F(x) \in \overset{0}{H}{}^1(G)$, такой, что $-(f,v)_{L_2} = (F,v)_2$, т.е. F удовлетворяет интегральному тождеству и, следовательно, F - это обобщенное решение задачи Дирихле (7.4.1)-(7.4.2). Существование обобщенного решения доказано.

Пусть существует еще одно обобщенное решение $u \in \overset{0}{H}{}^1(G)$. Так как $(u,v)_2 = -(f,v)_{L_2}$, то получим, что для любого $v \in \overset{0}{H}{}^1(G)$

$$(u,v)_2 = (F,v)_2$$

или $(u-F,v)_2 = 0$. В частности, если $v = u - F$, то $(u-F,u-F)_2 = 0$. Последнее возможно в силу аксиом скалярного произведения только, если $u = F$. Полученное противоречие завершает доказательство единственности обобщенного решения. □

<u>Определение</u> (**функционала энергии**). Пусть $\widetilde{H}^1(G)$ любое подпространство в $H^1(G)$, в котором скалярное произведение эквивалентно

обычному скалярному произведению в $H^1(G)$. Пусть $f(x)$ - произвольный элемент из $L_2(G)$. Тогда функционал

$$E(v) = \|v\|^2_{\widetilde{H}^1(G)} + 2(f, v)_{L_2}, \tag{7.4.4}$$

определенный для любого элемента $v \in \widetilde{H}^1(G)$, называется функционалом энергии.

Теорема 7.4.3 (**о существовании точной нижней грани**). Пусть $\widetilde{H}^1(G)$ любое подпространство в $H^1(G)$, в котором скалярное произведение эквивалентно обычному скалярному произведению в $H^1(G)$. Пусть $f(x)$ - произвольный элемент из $L_2(G)$. Тогда для функционала энергии существует точная нижняя грань.

Доказательство. Итак, в пространстве $H^1(G)$ рассмотрим произвольное подпространство $\widetilde{H}^1(G)$ с эквивалентной пространству $H^1(G)$ нормой. Возьмем произвольный элемент $f(x)$ из $L_2(G)$ и рассмотрим функционал (7.4.4)

$$E(v) = \|v\|^2_{\widetilde{H}^1(G)} + 2(f, v)_{L_2}$$

на подпространстве $\widetilde{H}^1(G)$.

Из неравенства Коши – Буняковского, в случае пространства $L_2(G)$, следует
$\left|(f, v)_{L_2}\right| \le \|f\|_{L_2}\|v\|_{L_2}$, а в силу вложения $H^1(G)$ в $L_2(G)$ и эквивалентности нормы $\widetilde{H}^1(G)$ норме $H^1(G)$ существует постоянная $C > 0$, не зависящая от функций $f(x)$ и $v(x)$, такая что

$$\left|(f, v)_{L_2}\right| \le \|f\|_{L_2}\|v\|_{L_2} \le C\|f\|_{L_2}\|v\|_{\widetilde{H}^1(G)}.$$

Отсюда и из (7.4.4) получаем

$$\begin{aligned} E(v) &\ge \|v\|^2_{\widetilde{H}^1(G)} - 2\left|(f, v)_{L_2}\right| \ge \|v\|^2_{\widetilde{H}^1(G)} - 2C\|f\|_{L_2}\|v\|_{\widetilde{H}^1(G)} = \\ &= \|v\|^2_{\widetilde{H}^1(G)} - 2C\|f\|_{L_2}\|v\|_{\widetilde{H}^1(G)} + C^2\|f\|^2_{L_2} - C^2\|f\|^2_{L_2} = \\ &= \left(\|v\|^2_{\widetilde{H}^1(G)} - C\|f\|_{L_2}\right)^2 - C^2\|f\|^2_{L_2} \ge -C^2\|f\|^2_{L_2}. \end{aligned}$$

Следовательно, функционал $E(v)$ ограничен снизу, поэтому $E(v)$ имеет точную нижнюю грань на $\widetilde{H}^1(G)$.□

Определение (**минимизирующей последовательности**). Пусть элемент $\bar{v}$ доставляет минимум функционалу $E(v)$, т.е.

$$E(\bar{v}) = d,$$

где $d = \inf\limits_{v \in \widetilde{H}^1(G)} E(v)$.

Последовательность $\{v_m(x)\}$ $(m = 1,2,...)$ из $\widetilde{H}^1(G)$ называется минимизирующей функционал $E(v)$ на $\widetilde{H}^1(G)$, если

$$\lim_{m \to \infty} E(v_m) = d.$$

Теорема 7.4.4 (**существование и единственность функции, доставляющей минимум**). Для **замкнутого** подпространства $\widetilde{H}^1(G)$ пространства $H^1(G)$ существует единственная функция $\bar{u} \in \widetilde{H}^1(G)$, доставляющая минимум функционалу $E(v)$. Любая последовательность $\{v_m(x)\}, (m = 1,2,...)$, минимизирующая функционал $E(v)$, сходится к $\bar{u}$ по норме пространства $H^1(G)$.

Доказательство. Пусть $\{v_m(x)\} \in \tilde{H}^1(G)$ и $d = \inf\limits_{v \in \tilde{H}^1(G)} E(v)$. Так как $d = \inf\limits_{v \in \tilde{H}^1(G)} E(v)$, то $d \le E(v_n)$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N(\varepsilon)$, такое, что для всех $n \ge N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $E(v_n) \le d + \varepsilon$. Итак,

$$d \le E(v_n) \le d + \varepsilon, \quad \forall n \ge N(\varepsilon). \tag{7.4.5}$$

По свойствам скалярного произведения

$$\left\| \frac{v_m \pm v_s}{2} \right\|^2_{\tilde{H}^1(G)} = \frac{1}{4} \|v_m\|^2_{\tilde{H}^1(G)} + \frac{1}{4} \|v_s\|^2_{\tilde{H}^1(G)} \pm \frac{1}{2} (v_m, v_s)_{\tilde{H}^1(G)}.$$

Отсюда

$$\left\| \frac{v_m + v_s}{2} \right\|^2_{\tilde{H}^1(G)} + \left\| \frac{v_m - v_s}{2} \right\|^2_{\tilde{H}^1(G)} = \frac{1}{2} \left(\|v_m\|^2_{\tilde{H}^1(G)} + \|v_s\|^2_{\tilde{H}^1(G)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\|v_m\|^2_{\tilde{H}^1(G)} + 2(f, v_m)_{L_2} + \|v_s\|^2_{\tilde{H}^1(G)} + 2(f, v_s)_{L_2} \right) - 2\left(f, \frac{v_m + v_s}{2} \right)_{L_2}.$$

Итак,

$$\left\| \frac{v_m - v_s}{2} \right\|^2_{\tilde{H}^1(G)} = \frac{1}{2} \left(E(v_m) + E(v_s) \right) - \left(\left\| \frac{v_m + v_s}{2} \right\|^2_{\tilde{H}^1(G)} + 2\left(f, \frac{v_m + v_s}{2} \right)_{L_2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(E(v_m) + E(v_s) \right) - E\left(\frac{v_m + v_s}{2} \right).$$

Отсюда, в силу (7.4.5)

$$\left\| \frac{v_m - v_s}{2} \right\|^2_{\tilde{H}^1(G)} \le \frac{1}{2} \left(d + \varepsilon + d + \varepsilon \right) - E\left(\frac{v_m + v_s}{2} \right). \tag{7.4.6}$$

В силу определения числа d из (7.4.6) следует оценка

$$\left\| \frac{v_m - v_s}{2} \right\|^2_{\tilde{H}^1(G)} \le d + \varepsilon - d = \varepsilon.$$

Итак, последовательность $\{v_m(x)\}$ фундаментальна в $\tilde{H}^1(G)$. Так как пространстве $H^1(G)$ полное, то полное и произвольное замкнутое подпространство $\tilde{H}^1(G)$. Поэтому в силу полноты пространства $\tilde{H}^1(G)$ последовательность $\{v_m(x)\}$ сходится к элементу $u(x) \in \tilde{H}^1(G)$, т.е. $\|v_m(x) - u(x)\|_{\tilde{H}^1(G)} \to 0$ при $m \to \infty$. В силу неравенства треугольника

$$\left| \|v_m(x)\|_{\tilde{H}^1(G)} - \|u(x)\|_{\tilde{H}^1(G)} \right| \le \|v_m(x) - u(x)\|_{\tilde{H}^1(G)} \to 0$$

при $m \to \infty$. Поэтому

$$\|v_m(x)\|_{\tilde{H}^1(G)} \to \|u(x)\|_{\tilde{H}^1(G)}.$$

Как уже было замечено, из неравенства Коши – Буняковского, в силу вложения $H^1(G)$ в $L_2(G)$ и эквивалентности нормы $\tilde{H}^1(G)$ норме $H^1(G)$ существует постоянная $C > 0$, не зависящая от функций $f(x)$ и $v_m(x)$, такая что

$$\left|(f, v_m - u)_{L_2}\right| \le \|f\|_{L_2}\|v_m - u\|_{L_2} \le C\|f\|_{L_2}\|v_m - u\|_{\widetilde{H}^1(G)}.$$

Другими словами, $(f, v_m) \to (f, u)$ при $m \to \infty$ и, следовательно,

$$d = \lim_{m\to\infty} E(v_m) = \lim_{m\to\infty}\|v_m(x)\|^2_{\widetilde{H}^1(G)} + \lim_{m\to\infty} 2(f, v_m)_{L_2} =$$

$$= \|u(x)\|^2_{\widetilde{H}^1(G)} + 2(f,u)_{L_2} = E(u).$$

Покажем, что функция, реализующая минимум функционала $E(v)$, единственная. Пусть найдутся две минимизирующие функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ из $\widetilde{H}^1(G)$. Рассмотрим последовательность: $u_1(x), u_2(x), u_1(x), u_2(x),...$. Данная последовательность имеет два предела, а потому не является сходящейся. Очевидно, что $\lim_{j\to\infty} E(u_j) = d$, т.е. построенная последовательность есть минимизирующая последовательность, поэтому, как уже было доказано, любая минимизирующая последовательность должна быть сходящейся. Полученное противоречие завершает доказательство.□

Теорема 7.4.5 (**равносильность задачи вариационного исчисления с задачей нахождения обобщенного решения краевой задачи**). Пусть $k(x) \ge k_0 > 0$, $a(x) \ge 0$ и эти функции непрерывны в $\overline{G}$. Пусть $f(x)$ принадлежит пространству $L_2(G)$. Тогда **функция** $u(x)$, **доставляющая минимум** функционалу

$$E(v) = \int_G \left(k(x)|\nabla v|^2 + a(x)v^2\right)dx + 2\int_G fvdx$$

в $\overset{0}{H}{}^1(G)$, является **обобщенным решением** задачи

$$div(k(x)\nabla u) - a(x)u = f(x), \ x \in G, \tag{7.4.7}$$

$$u(x) = 0, \ x \in \partial G. \tag{7.4.8}$$

Справедливо и обратное утверждение.

Доказательство. Нормы $\| \|_{H^1}$ и $\| \|_2$, где

$$\|u\|_2^2 = \int_G (k(x)|\nabla u|^2 + a(x)|u|^2)dx,$$

эквивалентны в $\overset{0}{H}{}^1(G)$ по теореме 7.3.2. Поэтому по теореме 7.4.4 существует единственная функция $\overline{u}(x) \in \overset{0}{H}{}^1(G)$, доставляющая минимум функционалу E, т.е.

$$d = \inf_{v\in \overset{0}{H}{}^1(G)} E(v) = E(\overline{u}).$$

Покажем, что $\overline{u}(x)$ - обобщенное решение задачи (7.4.7)-(7.4.8).

Пусть t - любое число. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = E(\overline{u} + tv)$, где $v(x)$ - произвольная функция из $\overset{0}{H}{}^1(G)$. Очевидно, что при $t = 0$ функция $\varphi(t)$ принимает минимальное значение, следовательно, $\varphi'(0) = 0$. Найдем $\varphi'(t)$. Имеем

$$\varphi(t) = E(\overline{u} + tv) = \int_G \left(k(x)\left|\nabla(\overline{u} + tv)\right|^2 + a(x)(\overline{u} + tv)^2 \right)dx + 2\int_G f(x)(\overline{u} + tv)dx$$

или $\varphi(t) = \left(\bar{u} + tv, \bar{u} + tv\right)_2 + 2\left(f, \bar{u} + tv\right)_{L_2}$. Применяя свойства скалярного произведения, получим

$$\varphi(t) = \left(\bar{u} + tv, \bar{u} + tv\right)_2 + 2\left(f, \bar{u} + tv\right)_{L_2} = \left(\bar{u}, \bar{u}\right)_2 + 2t\left(\bar{u}, v\right)_2 + t^2\left(v, v\right)_2 + 2\left(f, \bar{u}\right)_{L_2} + 2t\left(f, v\right)_{L_2}.$$

Тогда производная $\varphi'(t)$ равна

$$\varphi'(t) = 2\left(\bar{u}, v\right)_2 + 2t\left(v, v\right)_2 + 2\left(f, v\right)_{L_2}.$$

Отсюда получаем

$$\varphi'(0) = 2\left(\bar{u}, v\right)_2 + 2\left(f, v\right)_{L_2} = 0$$

или

$$\int_G (k(x)\nabla u \nabla v + a(x)uv)dx = -\int_G fvdx$$

для любой функции $v(x) \in \overset{0}{H}{}^1(G)$, что совпадает с (7.4.3).

Обратное утверждение является следствием единственности функции, доставляющей минимум функционалу и единственности обобщенного решения задачи (7.4.7) и (7.4.8) (см. теоремы 7.4.2 и 7.4.4).□

7.5. Метод Ритца

<u>Определение</u> (**системы Ритца**). Пусть $\widetilde{H}^1(G)$ - замкнутое подпространство в $H^1(G)$, на котором задан функционал E. Пусть $\varphi_k(x)$, $k = 1,2,...$ - произвольная линейно независимая система функций в $\widetilde{H}^1(G)$, линейная оболочка которой плотна в $\widetilde{H}^1(G)$. Тогда система

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j (\varphi_i, \varphi_j)_{\widetilde{H}^1(G)} + (f, \varphi_i)_{L_2} = 0, \; i = 1,2,...,k \qquad (7.5.1)$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} \alpha_1(\varphi_1,\varphi_1)_{\widetilde{H}^1(G)} + \alpha_2(\varphi_1,\varphi_2)_{\widetilde{H}^1(G)} + ... + \alpha_k(\varphi_1,\varphi_k)_{\widetilde{H}^1(G)} = -(f,\varphi_1)_{L_2}, \\ \alpha_1(\varphi_2,\varphi_1)_{\widetilde{H}^1(G)} + \alpha_2(\varphi_2,\varphi_2)_{\widetilde{H}^1(G)} + ... + \alpha_k(\varphi_2,\varphi_k)_{\widetilde{H}^1(G)} = -(f,\varphi_2)_{L_2}, \\ \quad ... \qquad ... \qquad ... \qquad ... \\ \alpha_1(\varphi_k,\varphi_1)_{\widetilde{H}^1(G)} + \alpha_2(\varphi_k,\varphi_2)_{\widetilde{H}^1(G)} + ... + \alpha_k(\varphi_k,\varphi_k)_{\widetilde{H}^1(G)} = -(f,\varphi_k)_{L_2} \end{cases}$$

называется системой Ритца, а определитель матрицы $[(\varphi_i, \varphi_j)_{\widetilde{H}^1(G)}]_{i,j}^k$ называется определителем Грамма.

<u>Теорема</u> 7.5.1 (**существование единственного решения системы Ритца**). Существует единственное решение системы Ритца.

Доказательство. Пусть $\widetilde{H}^1(G)$ - подпространство в $H^1(G)$, на котором задан функционал E. Рассмотрим в $\widetilde{H}^1(G)$ линейно независимую систему функций $\varphi_k(x)$, $k = 1,2,...$. Будем считать, что линейная оболочка элементов $\varphi_k(x)$ плотна в $\widetilde{H}^1(G)$. Обозначим через R_k линейную оболочку элементов $\varphi_j(x)$, $j = 1,2,...,k$, т.е. это будут функции вида $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \varphi_j(x)$, где α_j - произвольные вещественные числа. Очевидно, что R_k - подпространство пространства $H^1(G)$, более того, это замкнутое подпространство как любое конечномерное подпространство. Если рассматривать сужение функционала E на R_k, то существует единственный элемент $u_k(x)$, доставляющий минимум функционалу E, т.е.

$$E(u_k(x)) = \inf_{v\in R_k} E(v)$$

по теореме существования и единственности функции, доставляющей минимум.

Далее, пусть $v\in R_k$. Функционал $E(v) = E(\alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_k\varphi_k)$ можно рассматривать как функцию $F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k) = E(\alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_k\varphi_k)$. Необходимым условием минимума функции F является равенство нулю частных производных функции F, т.е.

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j} = 0, \; j = 1,2,\ldots,k.$$

Выпишем функцию $F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$:

$$F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k) = \left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\varphi_j,\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\varphi_j\right)_{\widetilde{H}^1(G)} + 2\left(f,\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\varphi_j\right)_{L_2} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{k}\alpha_i\alpha_j(\varphi_i,\varphi_j)_{\widetilde{H}^1(G)} + 2\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(f,\varphi_j)_{L_2}.$$

Тогда получим систему Ритца (7.5.1)

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = 2\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(\varphi_i,\varphi_j)_{\widetilde{H}^1(G)} + 2(f,\varphi_i)_{L_2} = 0, \; i = 1,2,\ldots,k.$$

Как уже было замечено, существует единственный элемент $u_k(x)$, доставляющий минимум функционалу E на R_k. Поэтому существует и притом единственное решение системы Ритца.□

Определение (**последовательности Ритца**). Пусть числа α_i, $i = 1,2,\ldots,k$, являются решением системы Ритца. Последовательность $\{v_k(x)\}$, где $v_k(x) = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j\varphi_j(x)$, называется последовательностью Ритца.

Теорема 7.5.2 (**последовательность Ритца**). Последовательность Ритца $\{v_k(x)\}$ является минимизирующей для функционала E и сходится в $\widetilde{H}^1(G)$ к функции, реализующий минимум функционала E.

Доказательство. По теореме существования и единственности существует единственная функция $\bar{u}(x)$, реализующая минимум функционала E на $\widetilde{H}^1(G)$:

$$E(\bar{u}) = \inf_{v\in \widetilde{H}^1(G)} E(v) = d.$$

По построению пространств R_k имеем $R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset \widetilde{H}^1(G)$. На каждом R_k функционал E реализует минимум на элементе $v_k(x)$, построенном по методу Ритца:

$$E(v_k) = \inf_{v\in R_k} E(v) = d_k.$$

Тогда, очевидно, что

$$E(v_1) \geq E(v_2) \geq \ldots \geq d = E(\bar{u}). \qquad (7.5.2)$$

Так как $\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$ всюду плотно в $\widetilde{H}^1(G)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $u_N(x) \in R_N$, такая, что

$$\left\| u_N - \bar{u} \right\|_{\widetilde{H}^1(G)} \le \varepsilon \quad . \tag{7.5.3}$$

Далее, можно записать

$$d \le E(u_N) = E(u_N - \bar{u} + \bar{u}) = \left\| u_N - \bar{u} + \bar{u} \right\|^2_{\widetilde{H}^1(G)} + 2(f, u_N - \bar{u} + \bar{u})_{L_2}$$

или

$$d \le E(u_N) = \left\| \bar{u} \right\|^2_{\widetilde{H}^1(G)} + \left\| u_N - \bar{u} \right\|^2_{\widetilde{H}^1(G)} + 2(u_N - \bar{u}, \bar{u})_{\widetilde{H}^1(G)} + 2(f, \bar{u})_{L_2} + 2(f, u_N - \bar{u})_{L_2} .$$

Следовательно,

$$d \le E(u_N) = E(\bar{u}) + \left\| u_N - \bar{u} \right\|^2_{\widetilde{H}^1(G)} + 2(u_N - \bar{u}, \bar{u})_{\widetilde{H}^1(G)} + 2(f, u_N - \bar{u})_{L_2} .$$

Отсюда и из соотношений (7.5.2), (7.5.3) получаем

$$d \le E(u_N) \le d + \varepsilon^2 + 2(u_N - \bar{u}, \bar{u})_{\widetilde{H}^1(G)} + 2\left| (f, u_N - \bar{u})_{L_2} \right| . \tag{7.5.4}$$

Так как из неравенства Коши – Буняковского, а также в силу вложения $H^1(G)$ в $L_2(G)$ и эквивалентности нормы $\widetilde{H}^1(G)$ норме $H^1(G)$, существует постоянная $C > 0$, не зависящая от функций $f(x)$ и $u_N(x)$, такая что

$$\left| (f, u_N - \bar{u})_{L_2} \right| \le \| f \|_{L_2} \left\| u_N - \bar{u} \right\|_{L_2} \le C \| f \|_{L_2} \left\| u_N - \bar{u} \right\|_{\widetilde{H}^1(G)} \le \varepsilon C \| f \|_{L_2}$$

и

$$\left| (u_N - \bar{u}, \bar{u})_{\widetilde{H}^1(G)} \right| \le \varepsilon \left\| \bar{u} \right\|_{\widetilde{H}^1(G)} ,$$

то из оценки (7.5.4) следует оценка

$$d \le E(u_N) \le d + \varepsilon^2 + \varepsilon \left(\left\| \bar{u} \right\|_{\widetilde{H}^1(G)} + C \| f \|_{L_2} \right) \le d + \bar{C}\varepsilon \ ,$$

где постоянная $\bar{C} > 0$ и не зависит от N.

Функция $v_N(x)$ доставляет минимум функционалу E на R_N, поэтому

$$d \le E(v_N) \le E(u_N) \le d + \bar{C}\varepsilon \ .$$

Откуда получаем

$$\left| E(v_N) - d \right| < \bar{C}\varepsilon \ .$$

Итак, последовательность $\{v_k(x)\}$ - минимизирующая, и как доказано в теореме 7.4.4 она фундаментальная и сходится к $\bar{u}(x)$ по норме пространства $\widetilde{H}^1(G)$. □

8.Условия второго порядка

Исследуем достаточные условия простейшей задачи вариационного исчисления

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx \to extr,$$

$$y(a) = A, \ y(b) = B . \tag{8.1}$$

<u>Замечание</u>. Задачу на максимум можно свести к задаче на минимум, рассмотрев $-J[y(x)]$.

<u>Пример</u> 8.1. Решить вариационную задачу

$$J(y)=\int_0^1 \left(y'^2-12xy\right)dx \to \min,\; y(0)=y(1)=0.$$

Решение. Функционал $J(y)$ является частным случаем функционала энергии

$$\int_G (k(x)\,|\nabla v|^2+a(x)\,|v|^2)dx+2\int_G f(x)v(x)dx$$

с $k(x)=1$, $a(x)=0$, $f(x)=-6x$.

Очевидно, $k(x)=1=k_0>0$, $k(x)\in C^1(\overline{G})$, $a(x)\geq 0$, $a(x)\in C(\overline{G})$. Поэтому выполнены все предположения теоремы о равносильности вариационной задачи и задачи на нахождение обобщенного решения

$$y''=-6x, \tag{8.2}$$

$$y(0)=v(1)=0. \tag{8.3}$$

Решение уравнения (8.2) имеет вид $y=-x^3+c_1x+c_2$. Краевая задача (8.2), (8.3) имеет единственное классическое решение $y=-x^3+x$, которое в силу теоремы 7.4.1 является обобщенным решением этой же задачи и, следовательно, функцией, реализующей минимум функционала $J(y)$. Вычисляем

$$J(-x^3+x)=\int_0^1 \left((-3x^2+1)^2-12x(-x^3+x)\right)dx=(21x^4-18x^2+1)\Big|_0^1=4.\square$$

Замечание. В примере 8.1 решение вариационной задачи было найдено без использования понятия вариации, уравнения Эйлера.

Рассуждения на языке вариаций относится к так называемой **наивной теории вариационного исчисления**, которая имела самостоятельное развитие.

Из теоремы 1.1 следует, что уравнение Эйлера (1.9)

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$$

является **необходимым условием** экстремума.

Если использовать в качестве достаточного условия экстремума дифференциал Фреше второго порядка $d^2J(y^*)$, то $d^2J(y^*)$- сильно положительный квадратичный функционал в случае минимума. Однако на практике это редко выполняется. Поясним на примере.

Пример 8.2. Рассечем график функции двух переменных $z=\varphi(x,y)$ вертикальной плоскостью, проходящей через 0. Допустим, что в любом сечении получается кривая, имеющая минимум в нулевой точке. Обязана ли в этом случае функция $z=\varphi(x,y)$ тоже иметь минимум в нуле? Ответ получим отрицательный. Действительно, если $z=\varphi(x,y)=\left(y-x^2\right)\left(y-2x^2\right)$, а $y=\alpha x$ $(\alpha\neq 0)$, то получим

$$\psi(x)=\varphi(x,\alpha x)=\alpha^2x^2-3\alpha x^3+2x^4.$$

Функция $\psi(x)$ принимает в нуле минимальное значение, так как $\psi'(x)=2\alpha^2x-9\alpha x^2+8x^3$ и $\psi'(0)=0$, при этом $\psi''(0)=2\alpha^2>0$. В этом случае $x=0$, $y=\alpha x=0$, $\varphi(0{,}0)=0$. Однако, 0 не является минимальным значением функции $z=\varphi(x,y)$, поскольку, если $y=\beta x^2$, $1<\beta<2$, то

$$z=\varphi(x,\beta x^2)=\left(\beta x^2-x^2\right)\left(\beta x^2-2x^2\right)=x^4(\beta-1)(\beta-2)<0.\square$$

Поэтому имеет смысл искать достаточные условия второго порядка, отличные от дифференциала Фреше второго порядка.

Так как

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}=\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'},$$

то развернутая запись формулы Эйлера следующая:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0. \qquad (8.4)$$

<u>Определение</u> (**условия Лежандра**). Условия Лежандра имеют вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\geq 0 \text{ или } \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\leq 0.$$

Усиленные условия Лежандра имеют вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}> 0 \text{ или } \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}< 0.$$

<u>Замечание</u>. При выполнении усиленного условия Лежандра можно делением свести уравнение (8.4) к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''=\Psi(x,y,y'). \qquad (8.5)$$

Поэтому экстремали – это решения краевой задачи (8.5), (8.1).

Уравнение Эйлера, определяющее экстремали, зависит лишь от $F(x,y,y')$ и не меняется при изменении краевых условий.

<u>Определение</u> (**собственного поля экстремалей**). Поле экстремалей в области G на плоскости XOY называется собственным, если **через каждую точку G проходит единственное решение уравнения Эйлера.**

<u>Определение</u> (**центрального поля экстремалей**). Поле экстремалей в области G на плоскости XOY называется центральным, если **все экстремали выходят из одной точки (a,A) и однократно накрывают $G\setminus(a,A)$.**

Для формулировки достаточных условий экстремума, в частности, используется **условие Якоби,** которое выполняется если **уравнение Якоби**

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\right]u(x)-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y'}u'(x)\right]=0, \qquad (8.6)$$

где $\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y}$,, $\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y'}$ - соответствующие производные подынтегральной функции, вычисленные на экстремали $y^*(x)$, удовлетворяющей уравнению Эйлера и граничным условиям, имеет нетривиальное решение $u(x)$, которое:

а) удовлетворяет условию $u(a)=0$;

б) не обращается в нуль ни при каких значениях $x\in(a,b]$.

<u>Замечание</u>. Нули $u(x)$, отличные от a называются **сопряженными точками** (точке a). Условие Якоби является условием включения экстремали $y^*(x)$ в центральное поле экстремалей с центром в точке (a,A).

Пусть $y^*(x)$ - экстремаль или кривая C^* в G функционала $J[y(x)]$, $y(x)$ - другая кривая C в G. Для оценки разности $J[y(x)] - J[y^*(x)]$ рассматривается интеграл

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

как криволинейный интеграл, т.е. подыскиваются такие функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, что

$$J[y^*(x)] = \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

не зависит от пути интегрирования.

Задачу решает так называемый **инвариантный интеграл Гильберта**:

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_C \left[F(x, y, p) + \left(\frac{dy}{dx} - p \right) F'_p(x, y, p) \right] dx, \qquad (8.7)$$

где $p(x, y)$ обозначает **геодезический наклон** – производную той экстремали в точке x, которая проходит через точку (x, y).

Обоснование независимости интеграла (8.7) от пути интегрирования C может иметь два направления, либо интуитивный поиск функции $S(x, y)$, такой, что $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dS$, либо сразу полагают

$$P(x, y) = F(x, y, p) - pF'_p(x, y, p), \quad Q(x, y) = F'_p(x, y, p)$$

и проверяют равенство перекрестных производных, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[F(x, y, p) - p\frac{\partial F}{\partial p} \right] = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}.$$

Последнее гарантирует, собственно, существование подходящей функции $S(x, y)$, равно как и независимость интеграла (8.7) от пути интегрирования.

Это позволяет оценить разность $J[y(x)] - J[y^*(x)]$ как интеграл

$$\int_C \left[F(x, y, y') - F(x, y, p) - \left(\frac{dy}{dx} - p \right) F'_p(x, y, p) \right] dx, \qquad (8.8)$$

взятый вдоль произвольной кривой C.

Для достижения минимума **достаточно**, чтобы подынтегральное выражение в (8.8) было неотрицательно, что представляет собой **условие Вейерштрасса**

$$E\left(x, y, \frac{dy}{dx}, p \right) = F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \right) - F(x, y, p) - \left(\frac{dy}{dx} - p \right) F'_p(x, y, p) \geq 0. \qquad (8.9)$$

Напомним, что если функционал $J[y(x)]$ определен на множестве $M \subset C^1[a, b]$ и неравенство $J(y^*) \leq J(y)$ выполнено при всех $\{y : \rho\,(y^*, y)_1 = \|y^* - y\|_1 < \varepsilon\}$ и не выполнено при всех $\{y : \rho\,(y^*, y)_0 = \|y^* - y\|_0 < \varepsilon\}$ то y^* доставляет функционалу $J[y(x)]$ слабый л**окальный минимум.**

Если неравенство $J(y^*) \leq J(y)$ выполнено при всех $\{y : \rho\,(y^*, y)_0 = \|y^* - y\|_0 < \varepsilon\}$ то y^* доставляет функционалу $J[y(x)]$ сильный л**окальный минимум.**

Теорема 8.1 (**достаточные условия слабого минимума**). Если на экстремали $y^*(x)$, удовлетворяющей уравнению Эйлера и граничным условиям, выполняются:

а) условие Якоби;

б) либо условие Вейерштрасса для точек (x,y), близких к точкам на экстремали $y^*(x)$, и для $\frac{dy}{dx}$ **близких к** p, либо **усиленное условие Лежандра** $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0$ **на экстремали** $y^*(x)$,

то на $y^*(x)$ достигается слабый минимум.

Теорема 8.2 (**достаточные условия сильного минимума**). Если на экстремали $y^*(x)$, удовлетворяющей уравнению Эйлера и граничным условиям, выполняются:

а) условие Якоби;

б) либо условие Вейерштрасса для точек (x,y), близких к точкам на экстремали $y^*(x)$, и **для произвольных** $\frac{dy}{dx}$, либо **условие Лежандра** $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0$ для **точек** (x,y)**, близких к точкам на исследуемой экстремали** $y^*(x)$**, и для произвольных значениях** $\frac{dy}{dx}$**,** то на $y^*(x)$ достигается сильный минимум.

Пример 8.3. Найти экстремум функционала

$$J[y(x)] = \int_1^2 \left[y'(x) + 2y'^3(x)\right]dx,\ y(1) = 2,\ y(2) = 6.$$

Решение. Найдем экстремаль $y^*(x)$, удовлетворяющую уравнению Эйлера и граничным условиям. Так как подынтегральная функция $F(x,y,y') = y'(x) + 2y'^3(x)$ не зависит от x и y явно, то уравнение Эйлера имеет общее решение $y(x) = c_1x + c_2$. Из граничных условий $c_1 + c_2 = 2$, $c_1 2 + c_2 = 6$, находим $c_1 = 4$, $c_2 = -2$. В результате получаем экстремаль $y^*(x) = 4x - 2$.

Проверим достаточные условия сильного минимума:

а) для проверки условия Якоби составим уравнение Якоби. Так как на экстремали $y^*(x) = 4x - 2$ производная равна $y^{*'}(x) = 4$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y} = 0$,. $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} = 0$, $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'}\right|_{y^*(x)} = 12 y^{*'}(x) = 48$, то уравнение (8.7) имеет вид $-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} u'(x)\right] = -\frac{d}{dx}[48u'(x)] = 0$. Отсюда $u(x) = c_1x + c_2$. Из условия $u(1) = 0$ следует $c_1 + c_2 = 0$ и $c_1 = -c_2$. Так как нетривиальное решение $c_1 \neq 0$ уравнения Якоби $u(x) = c_1x - c_1 = c_1(x-1) \neq 0$ при $t \in (1,2]$, то условие Якоби выполняется;

б) так как функция $F(x,y,y') = y'(x) + 2y'^3(x)$ трижды дифференцируема по y', то применим условие Лежандра. Поскольку $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'}\right|_{y'(x)} = 12y'(x)$ не сохраняет знака при любых y', то достаточные условия сильного минимума не выполнены. Вопрос о наличии сильного минимума остается открытым.

Проверим достаточные условия слабого минимума:

а) условие Якоби выполняется;

б) применим усиленное условие Лежандра. Поскольку $\left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'}\right|_{y^*(x)} = 48 > 0$ на экстремали $y^*(x) = 4x - 2$, то **достаточные условия слабого минимума выполнены**. Экстремаль $y^*(x) = 4x - 2$ доставляет слабый минимум функционалу. □

9. Вариационные методы в задачах о собственных значениях

Понятие собственного значения является чрезвычайно важным как для чистой, так и прикладной математики. В прикладных вопросах **собственные значения** выступают в роли определяющих числовых характеристик физических систем. Например, для **маятника** такой характеристикой является **период колебаний**, для **струны** – **частоты** различных обертонов, для **вращающего вала критическая угловая скорость**, при которой произойдет изгиб вала, и т.д.

Собственные значения можно рассматривать с двух точек зрения: дифференциальной и вариационной. С дифференциальной точки зрения **собственные значения** представляют собой некоторые специальные значения параметра в дифференциальном уравнении; с вариационной – они являются **максимумами** или **минимумами** некоторых выражений (под вариационной задачей мы понимаем задачу об отыскании экстремумов, т.е. максимумов или минимумов). Если собственные значения дифференциального уравнения не удается найти явно, то построить процесс последовательных приближений довольно трудно. Но если задача допускает эквивалентную вариационную формулировку, то можно указать два приема, позволяющих заменить вариационную задачу другой, которую во многих случаях удается решить.

Прием, позволяющий **заменить дифференциальную задачу соответствующей вариационной**, допускает наглядную иллюстрацию в случае конечномерных систем, примерами которых могут служить **волчок** или **маятник, в отличие** от упругих тел, таких, как **струна** или **пластина**.

Рекурсивное определение собственных значений: r**-е** собственное значение λ_r оператора H и r**-й** собственный вектор u_r являются соответственно минимальным значением и минимизирующим вектором функции $\dfrac{(Hu,u)}{(u,u)}$, при этом минимум берется по всем векторам, ортогональным $r-1$ предыдущим собственным векторам $u_1, u_2, \ldots, u_{r-1}$.

Рекурсивное определение принадлежит Веберу (Weber H.).

Теорема 9.1. Пусть H - линейный, самосопряженный оператор в конечномерном пространстве R^n. Тогда $Hu_r = \lambda_r u_r$, т.е. рекурсивные собственные значения и собственные векторы являются обычными собственными значениями и собственными векторами.

Доказательство. Из теоремы Вейерштрасса следует, что непрерывная функция на ограниченном замкнутом множестве конечномерного пространства достигает своего минимума и максимума. Отсюда существует по крайней мере одно решение u_1 уравнения:

$$(Hu_1, u_1) = \min\{(Hu,u) : (u,u) = 1\}$$

(в случае кратного собственного значения решение не будет единственным). Так как $(u_1,u_1) = 1$ и H - линейный оператор, то по рекурсивному определению

$$\min\frac{(Hu,u)}{(u,u)} = \min\{(Hu,u) : (u,u) = 1\} = \frac{(Hu_1,u_1)}{(u_1,u_1)} = \lambda_1 .$$

Кроме того, $\frac{(Hu,u)}{(u,u)} \ge \lambda_1$ при любом u, или, другими словами,

$$(Hu_1,u_1) - \lambda_1(u_1,u_1) = 0 \quad \text{и} \quad (Hu,u) - \lambda_1(u,u) \ge 0 .$$

Таким образом, обозначая оператор $H - \lambda_1 I$ (который, очевидно, является самосопряженным) через L_1, мы можем написать $(L_1u_1,u_1) = 0$ и $(L_1u,u) \ge 0$. Отсюда следует, что функция (L_1u,u) имеет минимум при $u = u_1$, и, значит, в этой точке ее частные производные по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (координатам u в фиксированном базисе) должны обращаться в нуль. Для достижения единообразия терминологии выразим этот результат на языке вариационного исчисления. Положим $(L_1u,u) = J(u)$. Тогда $J(u_1) = 0$, а при $u = u_1 + \varepsilon v$ имеем

$$J(u_1 + \varepsilon v) = (L_1(u_1 + \varepsilon v), u_1 + \varepsilon v) = (L_1u_1,u_1) + 2\varepsilon (L_1u_1, v) + \varepsilon^2 (L_1v,v) \ge 0 ,$$

каковы бы ни были вектор v и вещественное число ε .

Таким образом, при фиксированном v разность $J(u_1 + \varepsilon v) - J(u_1)$ является функцией только ε ; мы обозначим ее через $\Phi(\varepsilon)$. При $\varepsilon = 0$ эта функция принимает минимальное значение $\Phi(0)$, так что ее дифференциал $d\Phi = \Phi'(0)d\varepsilon$, который называется **вариацией** $J(u_1)$, должен обращаться в нуль. Но для $\Phi(\varepsilon)$ имеет место следующее выражение:

$$\Phi(\varepsilon) = J(u_1 + \varepsilon v) - J(u_1) = 2\varepsilon (L_1u_1, v) + \varepsilon^2 (L_1v, v) .$$

Тогда

$$\Phi'(0) = 2(L_1u_1, v) = 0$$

при любом v, в частности при $v = L_1u_1$. Отсюда следует, что вектор L_1u_1, будучи ортогональным самому себе, равен нулю. Таким образом, $L_1u_1 = Hu_1 - \lambda u_1 = 0$, т.е. u_1 является собственным вектором, отвечающим собственному значению λ_1, что и требовалось доказать.

Итак, мы доказали, что λ_1 и u_1, которые дают решение рассмотренной выше задачи на минимум, является в то же время собственным значением и собственным вектором оператора H. (Заметим, что тем самым мы доказали существование по крайней мере одного собственного значения H независимо от характеристического уравнения.) Аналогичные рассуждения показывают, что решения λ_r и u_r остальных вариационных задач также являются собственными значениями и собственными векторами оператора H.

Действительно, в общем случае мы видим, что r-е минимальное значение λ_r и r-й минимизирующий вектор u_r удовлетворяют соотношениям

$$\frac{(Hu_r, u_r)}{(u_r, u_r)} = \lambda_r \quad \text{и} \quad \frac{(Hu, u)}{(u, u)} \geq \lambda_r \quad \text{или} \quad (Hu, u) - \lambda_r (u, u) \geq 0$$

при любых u, для которых $(u, u_1) = \ldots = (u, u_{r-1}) = 0$. Отсюда, рассуждая так же, как и в предыдущем случае, мы получаем, что $(L_r u_r, u) = 0$ для любых u, таких, что $(u, u_i) = 0$, $i = 1,2,\ldots, r-1$.

Таким образом, $L_r u_r$ ортогонален любому вектору, ортогональному $(r-1)$-мерному подпространству $L(u_1, u_2, \ldots, u_{r-1})$, натянутому на векторы $u_1, u_2, \ldots, u_{r-1}$. Отсюда следует, что $L_r u_r \in L(u_1, u_2, \ldots, u_{r-1})$. Но для любого базисного вектора $u_i \in L(u_1, u_2, \ldots, u_{r-1})$ мы получаем, учитывая **самосопряженность** оператора H, что

$$(L_r u_r, u_i) = (Hu_r, u_i) - \lambda_r (u_r, u_i) = (u_r, Hu_i) - \lambda_r (u_r, u_i) = \lambda_i (u_r, u_i) - \lambda_r (u_r, u_i) = 0.$$

Следовательно, вектор $L_r u_r$ ортогонален любому вектору из R^n и потому равен нулю, а это означает, что $Hu_r = \lambda_r u_r$. Итак, мы полностью доказали, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, определенные рекурсивно как минимумы, совпадают с собственными значениями H. Других собственных значений оператор H не имеет, так как минимизирующие векторы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ уже образуют **полную ортонормированную систему**.□

Список используемой литературы

1. Эльсгольц Л. Э. – Вариационное исчисление. М.: МГУ, 2006 г. 206 с.
2. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. - М.: Мир, 1970.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.- М.: Наука, 1976.
4. Пантелеев А.В. Вариационное исчисление.-М.: Высшая школа.2006 г.
5. Босс В. Лекции по математике. Т7: Оптимизация: Учебное пособие.- КомКнига, 2006.
6. Сборник задач по математике для втузов. Под. ред. А.В. Ефимова, А.С.Поспелова. В 4-х частях. Ч 3.: Учебное пособие для втузов- М.: Изд-во физ.- мат.литературы, 2003.