Практические и семинарские занятия
по вариационному исчислению
(шифр **ДС.11**)

Специальность 230401 "Прикладная математика"
Факультет ФПМ и ВТ
Кафедра прикладной математики
Курс 3, Форма обучения - дневная, Семестр - 5
Объем в часах: (объем каждого ПЗ - 2 часа; общий объем - 12 час.)

1.Тема: Простейшие задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

1.0.1. Одной из первых задач вариационного исчисления была задача о *брахистохроне*, которую предложил Бернулли в 1696 году(*βραχιστ ος — кратчайший, χρον ος — время*).

Эта задача состоит в следующем:

Даны две точки **A** и **B** в вертикальной плоскости, не лежащие на одной вертикальной прямой; требуется соединить их такой кривой, чтобы материальная точка **M**, падая вдоль этой кривой без начальной скорости и при отсутствии сопротивления, пробегала кривую в кратчайшее время.

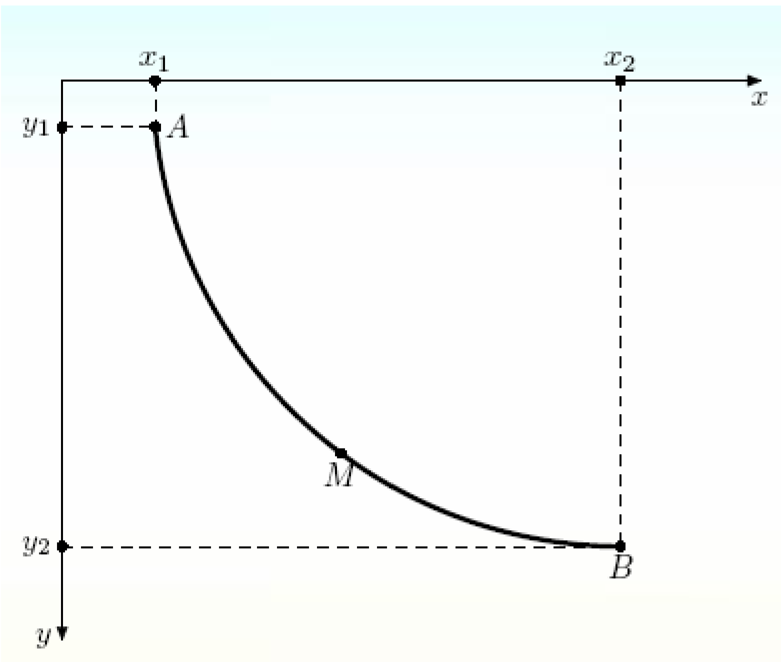


Рис.1.1. К задаче о брахистохроне

1.0.2. Изопериметрическая задача.

Ее формулировка приписывается первой карфагенской царице Дидо (*задача Дидоны*).

Среди всех гладких кривых длины **L**,соединяющих заданные точки $\mathbf{P_1}$ и $\mathbf{P_2}$ (**L >** | $\mathbf{P_1}$ $\mathbf{P_2}$ |) найти ту, которая ограничивает наибольшую возможную площадь,заключенную между отрезками двух перпендикуляров, идущих от точек $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$ к заданной оси. Положим $\mathbf{P_1 = P_1 (x1 , y1)}$, $\mathbf{P_2 = P_2 (x2 , y2)}$ и пусть **y = y(x)** — искомая кривая, **y > 0**, см. **рис. 1.2**.

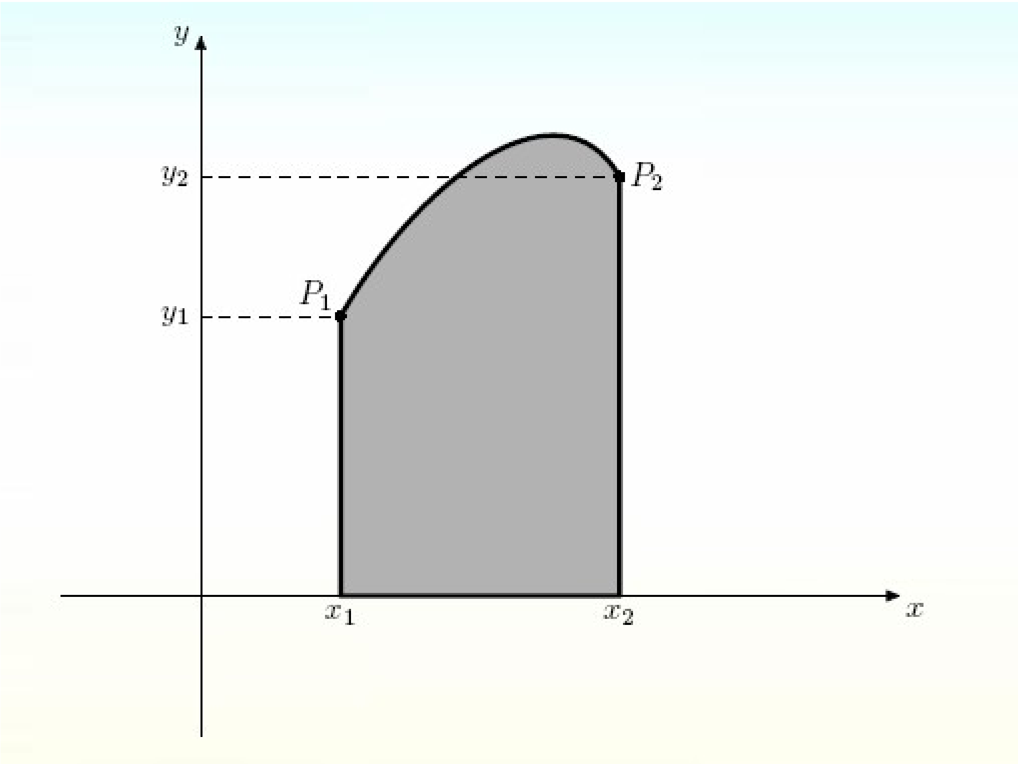
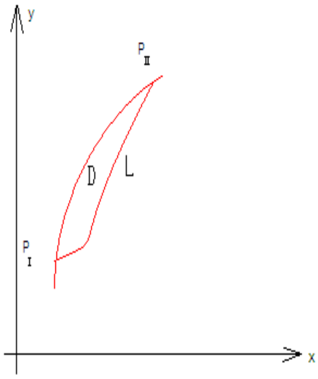


Рис.1.2. К задаче Дидоны

Пример №3
Задача Кельвина.
Постановка задачи
В плоскости $x, y,$ которая покрыта массой с непрерывной плотностью $\mu\,(x, y),$ дана кусочно-гладкая кривая С и на ней две точки $P_1, P_2,$ Среди всех кривых заданной длины L, соединяющих точки $P_1, P_2,$ найти ту, которая вместе с дугой $P_1P_2,$ кривой С ограничивает область с максимальной массой. При этом точки $P_1, P_2,$ могут совпадать.
Решение.



Введём функцию

$V(x,y) = \int \mu(x,y)dx.$

Тогда

$\iint_D \mu(x,y)dxdy =$

$\iint_D \frac{\partial V}{\partial x} dxdy = \oint V dy.$

Правая часть равна сумме двух интегралов: одного, взятого вдоль кривой L, и другого, взятого вдоль дуги P_1P_2, кривой C и имеющего наперёд известное значение, которое мы обозначим через K. Поэтому

$$\iint_D \mu(x,y)dxdy = \int_{t_1}^{t_2} V(x,y)\dot{y}dt + K,$$

и задача состоит в нахождении максимума функционала

$$\int_{t_1}^{t_2} V(x,y)\dot{y}dt$$

при условии, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = L.$$

Вводим вспомогательную функцию

$$F = V\dot{y} - \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

и составляем уравнение Эйлера—Лагранжа в форме Вейерштрасса.
Оно имеет вид

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где ρ —радиус кривизны искомой кривой. В силу определения функции V полученное уравнение (1) приводится к следующему:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mu(x,y)}{\lambda} \cdot (2)$$

В частном случае, когда μ = const, мы получаем изопериметрическую задачу в узком смысле, а из уравнения (2) следует, что в этом случае экстремалями являются окружности.

Пример №4

Задача о мыльной пленке.

Постановка задачи

Найти минимальную площадь поверхности натянутой на данный контур C.

Решение

Задача сводится к исследованию на минимум функционала

$$S[z(x,y)] = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

Уравнение Остроградского в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial \left\{ \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right\}}{\partial x} + \frac{\partial \left\{ \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right\}}{\partial y} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] = 0$$

т.е. средняя кривизна в каждой точке равна нулю. Физической реализацией минимальных поверхностей являются мыльные пленки, натянутые на заданный контур C.

Пример №5

Задача навигации (авиация)

Постановка задачи

Как изменится курс движения воздушного судна (далее- в.с.), если на одном из участков движения оно попадает в зону усиленного потока воздуха?

В задачи рассматривается прямоугольный коридор с усиленным потоком воздуха ширины b. Считая одну из длин коридора совпадающей с осью y введем скорость потока воздуха $v = v(x)$. **В.с.** с постоянной скоростью c (c-величина скорости), c> max $v = v(x)$, за кратчайшее время должно пересечь воздушный коридор.

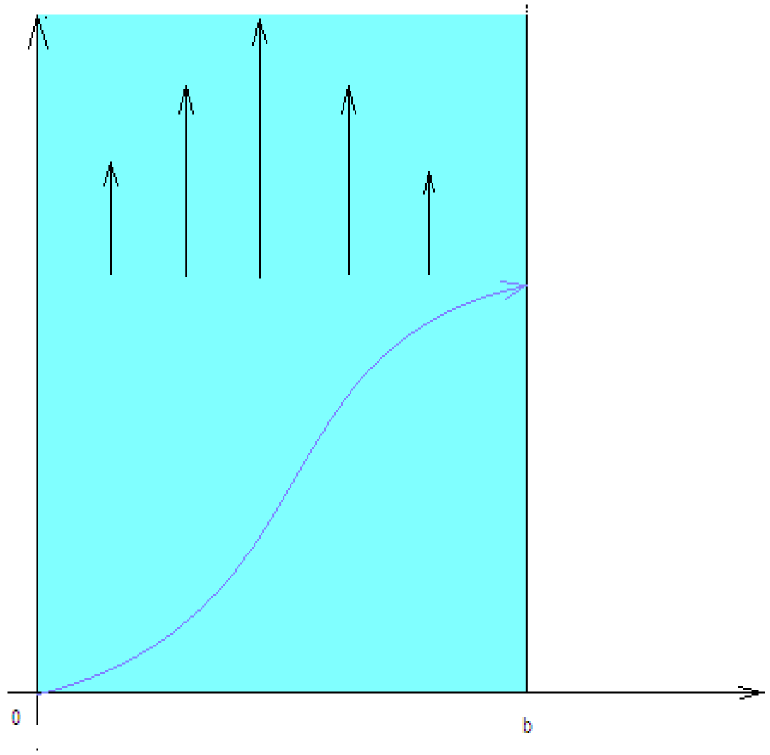
Решение

Обозначим через α угол, который зависит от курса в.с.. Тогда реальная скорость движения в.с. определяется равенствами

$$\frac{dx}{dt} = c * \cos\alpha, \frac{dy}{dt} = v + c * \sin\alpha$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v+c*\sin\alpha}{c*\cos\alpha},$$



что позволяет выразить α через $y'=\frac{dy}{dx}$:

$$\left(y'-\frac{v}{c*\cos\alpha}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\Rightarrow$$

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{2vy'}{c}*\frac{1}{\cos\alpha}-\left(1+y'^2\right)=0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{vy'}{c}\pm\sqrt{\frac{v^2y'^2}{c^2}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1+y'^2\right)}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{c*\cos\alpha}=\frac{\sqrt{c^2\left(1+y'^2\right)-v^2}-vy'}{c^2-v^2}.$$

Для времени пересечения воздушного коридора находим

$$t=\int_0^b\frac{dt}{dx}dx=\int_0^b\frac{dx}{c*\cos\alpha}=\int_0^b\frac{\sqrt{c^2\left(1+y'^2\right)-v^2}-vy'}{c^2-v^2}dx.$$

Последний интеграл должен быть минимизирован за счет выбора функции $y(x)$ при условии

$$y(0)=0.$$

Правый конец искомой задачи заранее не определен. Выбор начальной точки движения никак не сказывается на форме *оптимального* курса и условие

$y(0)=0$ оказывается несущественным. Приходим к задачи со свободными концами.

$$F=\frac{\sqrt{c^2\left(1+y'^2\right)-v^2}-vy'}{c^2-v^2}$$

Поскольку F не зависит явно от y, выписываем первый интеграл

$\frac{\partial F}{\partial y'}=C_1,$ т.е.

$$\frac{1}{c^2-v^2}\left[\frac{c^2y'}{\sqrt{c^2(1+y'^2)-v^2}}-v\right]=C_1.$$

В силу естественного условия

$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_2}$ =0, находим $C_1=0.$ Как следствие,

$$c^2y'=v\sqrt{c^2(1+y'^2)-v^2}\Rightarrow$$
$$c^4y'^2=v^2c^2(1+y'^2)-v^4\Rightarrow$$
$$c^2\left(c^2-v^2\right)y'^2=v^2(c^2-v^2)\Rightarrow$$
$$y'=\frac{v}{c}\Rightarrow$$
$$y=\frac{1}{c}\int_0^x v(s)ds.$$

Если предположить, что $v(b)=0$ то и $y'(b)=0$, что означает, что в.с. будет располагаться перпендикулярно воздушному коридору в момент вылета из него.

Пример №6

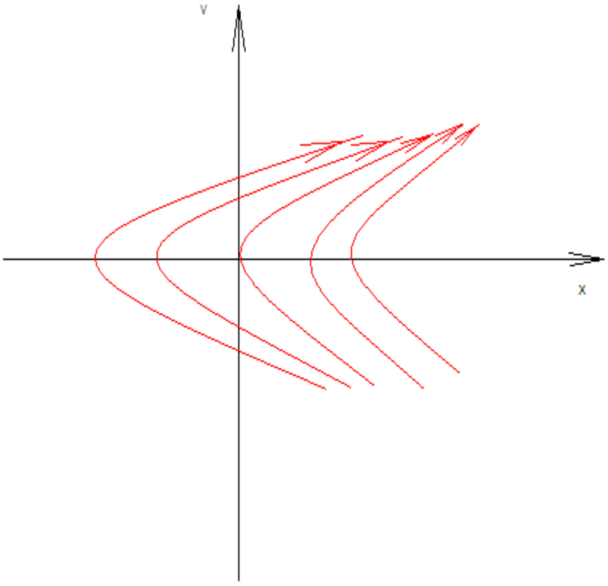
<u>Постановка задачи</u>

В системе д.у.

$$\frac{dx}{dt}=v,\frac{dv}{dt}=u,t-\text{ время,}$$

описывающей движение точки в плоскости с координатами x,v, определить управляющую функцию $u(t)$ так, чтобы точка A(x_0,v_0) переместилась в точку B(0,0) за наименьший промежуток времени, причем $|u|\le 1$ (так как $u=\frac{d^2x}{dt^2}$, то u можно считать силой действующей на точку с единичной массой). Управляющая функция $u(t)$ кусочно непрерывна. Для упрощения рассуждений предположим, что она имеет не более одной точки разрыва, однако окончательный результат верен и без этого утверждения.

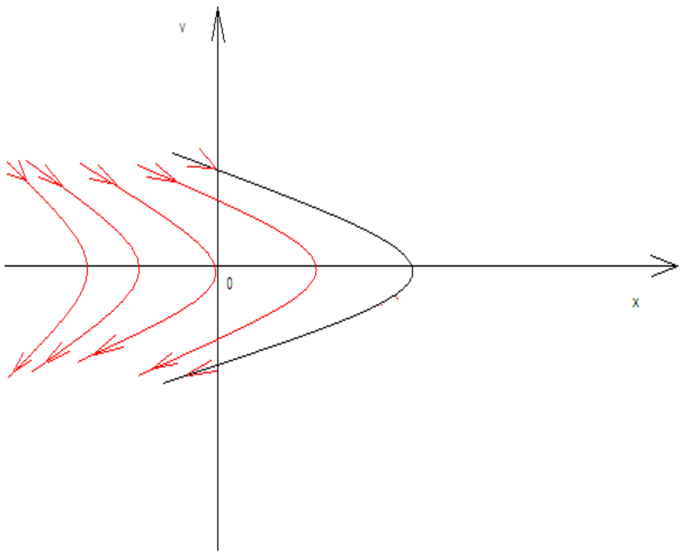
На оптимальных траекториях $u=\pm 1$, так как при этих значения $\left|\frac{dx}{dt}\right|,\left|\frac{dv}{dt}\right|$ достигает наибольших значений, и следовательно, точка движется с наибольшей скоростью. Полагая в $u=1$, получим



$$v = t + C_1,$$
$$x = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$
или
$$v^2 = 2(x - C)$$

рис.1

и аналогично при $u = -1$;



$$v = -t + C_1,$$
$$x = -\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2,$$
$$v^2 = -2(x - C).$$

рис.2

На рисунках 1, 2 изображены эти семейства парабол, причем стрелки указывают направление движения при возрастании параметра t. Если точка A(x_0, v_0) лежит на проходящих через начало координат дугах парабол

$$v = -\sqrt{x} \text{ или } v = \sqrt{-x}$$

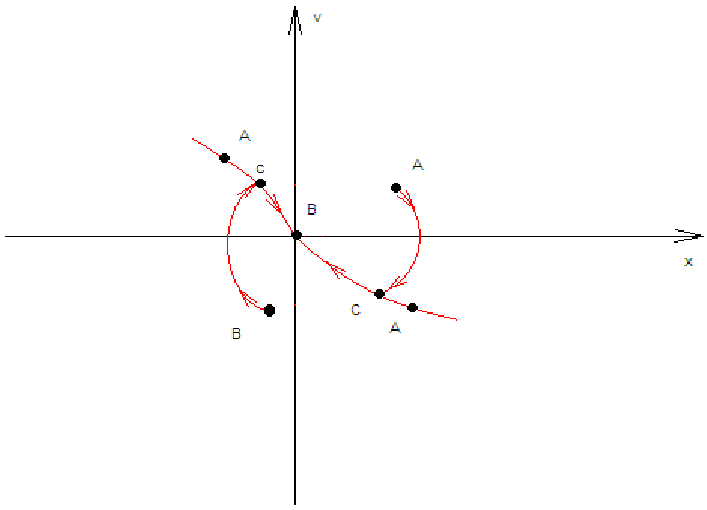


рис.3

(рис.3)то оптимальной траекторией является дуга одной из этих парабол, соединяющих точку А с точкой В. Если же точка А не лежит на параболах, то оптимальной траекторией будет дуга параболы АС, проходящие через точку А, и дуга СВ одной из парабол.

Найти все экстремали функционала $J(y)$, удовлетворяющие указанным граничным условиям в следующих задачах 1.0.3-1.0.8**:**

1.0.3. $J(y)=\int_0^1\left(y'^2+xy\right)dx;\ y(0)=y(1)=0$.

1.0.4. $J(y)=\int_0^{\pi}\left(4y\cos x+y'^2-y^2\right)dx;\ y(0)=y(\pi)=0$.

1.0.5. $J(y)=\int_0^{e}\left(2y-x^2y'^2\right)dx;\ y(0)=y(e)=0$.

1.0.6. $J(y)=\int_0^1\left(y'^2+yy'+12xy\right)dx;\ y(0)=y(1)=0$.

1.0.7. $J(y)=\int_0^1\left(e^y+xy'\right)dx;\ y(0)=y(1)=0$.

1.0.8. $J(y)=\int_0^1\left(y'^2+y^2+xy\right)dx;\ y(0)=y(1)=0$.

2.Тема: Обобщение простейших задач вариационного исчисления.

Найти все экстремали функционала $J(y)$, удовлетворяющие указанным граничным условиям в следующих задачах 2.0.1-2.0.6**:**

2.0.1. $J(y) = \int_0^1 y'' dx;\ y(0) = y(1) = y'(1) = 0,\ y'(0) = 1$.

2.0.2. $J(y) = \int_0^1 \left(48y - y''^2\right)dx;\ y(0) = y'(0) = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 4$.

2.0.3. $J(y) = \int_0^1 \left(y''^2 - 24xy\right)dx;\ y(0) = y'(0) = 0,\ y(1) = \frac{1}{5},\ y'(1) = 1$.

2.0.4. $J(y) = \int_0^{\pi/2} \left(y''^2 - y'^2\right)dx;\ y(0) = y'(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

2.0.5. $J(y) = \int_0^b \left(y''^2 + y'^2\right)dx;\ y(0) = y'(0) = y(b) = y'(b) = 0$.

2.0.6. $J(y) = \int_0^1 e^{-x} y'' dx;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y(1) = e,\ y'(1) = 2e$.

Найти функции $y_1(x)$ и $y_2(x) \in C^2[a,b]$, на которых может достигаться экстремум функционала $J(y_1, y_2)$ при указанных граничных условиях в следующих задачах 2.0.7-2.0.9:

2.0.7. $J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} \left(y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1y_2\right)dx;\ y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

2.0.8. $J(y_1, y_2) = \int_0^1 \left(y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_1y_2\right)dx;\ y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1(1) = sh1,\ y_2(1) = -sh1$.

2.0.9. $J(y_1, y_2) = \int_0^{\pi/2} \left(y_1'y_2' - y_1y_2\right)dx;\ y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

3.Тема: Задачи с подвижными границами.

Найти экстремали функционала $J(y)$ с подвижными границами в следующих задачах 3.0.1-3.0.6**:**

3.0.1. $J(y) = \int_0^{x_1} y'^2 dx;\ y(0) = 0,\ y(x_1) = -x_1 - 1$.

3.0.2. $J(y) = \int_0^{x_1} y'^2 dx;\ y(0) = 0,\ y(x_1) = 2/(1 - x_1)$.

3.0.3. $J(y) = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx;\ y(0) = 0,\ y(x_1) = 1/x_1^2$.

3.0.4. $J(y)=\int\limits_0^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx;\ y(x_0)=x_0^2,\ y(x_1)=x_1-5$.

3.0.5. $J(y)=\int\limits_0^{1/2}\left(y-y'^2\right)dx;\ y(0)=0$.

3.0.6. $J(y)=\int\limits_0^{1}\left(y+y'^2\right)dx;\ y(1)=0$.

Найти экстремали функционала $J(y)$ с подвижными границами в следующих задачах Больца 3.0.7-3.0.8**:**

3.0.7. $J(y)=\int\limits_0^{x_1} y'^2dx+y^2(0)-2y^2(1)$.

3.0.8. $J(y)=\int\limits_0^{1}\left(y^2+y'^2\right)dx-2sh1y(1)$.

4.Тема: Прямые методы вариационного исчисления. Методы Ритца и Галеркина.

Методом Ритца найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала $J(y)$ в следующих задачах 4.0.1-4.0.3**:**

4.0.1. $J(y)=\int\limits_0^{2}\left(y'^2+y^2+2xy\right)dx;\ y(0)=y(2)=0,\ n=2$.

4.0.2. $J(y)=\int\limits_1^{2}\left(xy'^2-\dfrac{x^2-1}{x}y^2-2x^2y\right)dx;\ y(1)=y(2)=0,\ n=2$.

4.0.3. $J(y)=\int\limits_0^{1}\left(y'^2-y^2-2xy\right)dx;\ y(0)=y(1)=0,\ n=2$.

Методом Галеркина найти приближенное решение задачи об экстремуме функционала $J(y)$ в следующих задачах 4.0.4-4.0.6**:**

4.0.4. $J(y)=\int\limits_0^{2}\left(xy'+y'^2\right)dx;\ y(0)=y(2)=0$.

4.0.5. $J(y)=\int\limits_0^{1}\left(y'^2+y^2-2y\sin x\right)dx;\ y(0)=y(1)=0$.

4.0.6. $J(y)=\int\limits_0^{1}\left(y'^2+y^2+2ye^x\right)dx;\ y(0)=y(1)=0$.

Ограничиться приближениями искомой экстремали в виде

$$y_n(x) = \varphi(x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n),$$
где $\varphi(x)$ выбирается из условия выполнения граничных условий, а $n = 1$.

5.Тема: Вариационный метод решения краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка.

Пример 2: Найти приближенно первое собственное значение задачи

$$y'' + \lambda^2 y = 0; \qquad y(-1) = y(1) = 0$$

Решение:

Задача о минимуме функционала

$$\int_{-1}^{1} y'^2 dx$$

при условиях $y(-1) = y(1) = 0$ $\quad \int_{-1}^{1} y^2(x)dx = 1$

является изометрической задачей (т.е. среди всех кривых $y = y(x) \in C_1[x_0, x_1]$, вдоль которых функционал $K[y] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')dx$ принимает заданное значение 1, определить ту, для которой функционал $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ принимает экстремальное значение) и сводится к задаче о минимуме функционала

$$J = \int_{-1}^{1} (y'^2 - \lambda^2 y^2)dx$$

для которой уравнение Эйлера совпадает с заданным дифференциальным уравнением $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(-1) = y(1) = 0$.

Общее решение уравнения есть $y(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x$. Из граничных условий находим

$$\begin{cases} C_1 \cos\lambda - C_2 \sin\lambda = 0 \\ C_1 \cos\lambda + C_2 \sin\lambda = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

так что условием существования ненулевого решения системы (10) является условие $\sin 2\lambda = 0$ èëè $\lambda = \frac{n\pi}{2}$.

Таким образом, для первого собственного значения имеем $\lambda_1^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ и основной тон струны точно дается решением $y = \cos\frac{\pi x}{2}$, $\lambda = \frac{\pi}{2}$; первый обертон $y = \sin\pi x$, $\lambda = \pi$; второй обертон $y = \cos\frac{3\pi x}{2}$, $\lambda = \frac{3}{2}$ и т.д.

Будем искать для сравнения приближенно четные решения (четыре тона струны) в виде многочлена, расположенного по четным степеням x. Возьмем координатные функции в виде $\varphi_k(x) = x^{2k-2} - x^{2k}$ $(k = 1,2,\ldots)$ и будем минимизировать функционал J на функциях $y_m(x)=\sum_{k=1}^{m} c_k\varphi_k(x)$. Ограничиваясь $y_1(x)=c_1\varphi_1(x)$, будем иметь $J=c_1^2\left(\frac{8}{3}-\frac{16}{15}\lambda^2\right)$, так что для определения c_1 получаем $\frac{\partial J}{\partial c_1}=2c_1\left(\frac{8}{3}-\frac{16}{15}\lambda^2\right)=0$.

И так как должно быть $c_1\neq 0$, то $\lambda^2=2{,}5$. Беря в качестве у

$$y=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x),$$

найдем $J=c_1^2\left(\frac{8}{3}-\frac{16}{15}\lambda^2\right)+2c_1c_2\left(\frac{8}{15}-\frac{16}{105}\lambda^2\right)+c_2^2\left(\frac{88}{105}-\frac{16}{315}\lambda^2\right)$,

и для определения c_1,c_2 получаем систему

$$\begin{cases}\frac{\partial J}{\partial c_1}=c_1\left(\frac{16}{3}-\frac{32}{15}\lambda^2\right)+c_2\left(\frac{16}{15}-\frac{32}{105}\lambda^2\right)=0\\ \frac{\partial J}{\partial c_2}=c_1\left(\frac{16}{15}-\frac{32}{105}\lambda^2\right)+c_2\left(\frac{176}{105}-\frac{32}{315}\lambda^2\right)=0\end{cases}$$

Условием существования ненулевых решений c_1,c_2 последней системы является равенство нулю определителя системы, что дает $\lambda^4-28\lambda^2+63=0$, откуда $\lambda_1^2=2{,}46744,\ \lambda_2^2=25{,}53256$. Сравним найденные приближенные значения $\lambda_1^2,\ \lambda_2^2$ с точными. Точное значение $\lambda_1^2=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\approx 2{,}46740$, точное значение $\lambda_2^2=\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2\approx 22{,}20661$, так что полученное приближение для λ_1^2 весьма точно, в то время как для второго собственного значения получено грубое приближение. □

Поставить краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, обобщенное решение которой является экстремалью функционала, найти экстремаль методами вариационного исчисления в следующих задачах:

5.0.1. $E(v)=\int_0^1\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+4v^2+2v\sin 5x\right]dx$. $v(0)=v(1)=0$.

5.0.2. $E(v)=\int_0^2\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+9v^2+2v\cos 5x\right]dx$, $v(0)=v(2)=0$.

5.0.3. $E(v)=\int_0^3\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+4v^2+2v\cos 3x\right]dx$, $v(0)=v(3)=0$.

5.0.4. $E(v)=\int_0^4\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+4v^2+2v\sin 4x\right]dx$, $v(0)=v(4)=0$.

5.0.5. $E(v)=\int\limits_0^5\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+16v^2+2v\sin 5x\right]dx$, $v(0)=v(5)=0$.

Поставить краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, обобщенное решение которой является экстремалью функционала, найти член минимизирующей последовательности по методу Ритца для сетки с шагом h в следующих задачах:

5.0.6. $E(v)=\int\limits_0^1\left[\left(1+x^2\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+4v^2+2v\sin 5x\right]dx$. $v(0)=v(1)=0$, $h=0{,}2$.

5.0.7. $E(v)=\int\limits_0^2\left[\left(1+x^2\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+9v^2+2v\cos 5x\right]dx$, $v(0)=v(2)=0$, $h=0{,}4$.

5.0.8. $E(v)=\int\limits_0^3\left[\left(1+x^2\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+4v^2+2v\cos 3x\right]dx$, $v(0)=v(3)=0$, $h=0{,}6$.

5.0.9. $E(v)=\int\limits_0^4\left[\left(1+x^2\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+4v^2+2v\sin 4x\right]dx$, $v(0)=v(4)=0$, $h=0{,}8$.

5.0.10. $E(v)=\int\limits_0^8\left[\left(1+x^2\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+25v^2+2vch8x\right]dx$, $v(0)=v(8)=0$, $h=1.6$.

6. Задачи на условный экстремум

Пример №1
Катеноид

<u>Постановка задачи</u>

Даны две точки $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ плоскости xy, пусть $x_1<x_2$. Пусть далее $y=y(x)$ - уравнение кривой, соединяющей точки P_1 и P_2, т.е.

$$y_1=y(x_1),y_2=y(x_2).$$

Кривая вращается вокруг оси x, заметая некоторую поверхность вращения. Спрашивается, что представляет собой поверхность вращения, имеющая наименьшую возможную площадь.

<u>Решение</u>

Мы приходим к проблеме выбора функции y(x), для которой интеграл

$$S=2\pi\int\limits_{x_1}^{x_2}y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

- площадь поверхности вращения- минимален. Такие минимальные поверхности вращения называют *катеноидами.*

Функция Лагранжа в этом случае имеет вид

$$F=y\sqrt{1+y'^2}$$

Первый интеграл дает равенство

$$y' \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} - y\sqrt{1+y'^2} = C_1$$

и тогда

$$yy'^2 - y(1+y'^2) = C_1\sqrt{1+y'^2} \Rightarrow$$

$$C_1^2(1+y'^2) = y^2 \Rightarrow$$

$$y'^2 = \frac{y^2 - C_1^2}{C_1^2} \Rightarrow$$

$$x = \int \frac{C_1 dy}{\sqrt{y^2 - C_1^2}}.$$

Положим $y = C_1 cht.$ Тогда

$$x = \int \frac{C_1^2 shtdt}{C_1 sht} = C_1 t + C_2.$$

Тогда окончательно

$y = C_1 ch\frac{x - C_2}{C_1}$, - искомая кривая(цепная линия)

Пример №2

Задача С. А. Чаплыгина. (авиация)

Постановка задачи

По какой замкнутой кривой в горизонтальной плоскости должен двигаться центр тяжести самолёта, имеющего собственную скорость v_0, чтобы за время T облететь наибольшую площадь, если даны постоянное направление и постоянная величина а < v_0 скорости ветра?

Решение.

Направим ось Ox по скорости ветра. Пусть a— угол между направлением оси самолёта и осью Ox, а $x = x(t)$, $y = y(t)$ — координаты центра тяжести самолёта. Тогда проекции

абсолютной скорости самолёта будут

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha + a,$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha, \qquad \textbf{(1)}$$

а площадь, которую самолёт облетит, равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T (x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt})dt.$$

Мы имеем здесь задачу Лагранжа при двух неголономных связях.

Составляем вспомогательный функционал

$$\int_0^T \left\{ \frac{1}{2}(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}) + \lambda_1\left[\frac{dx}{dt} - v_0\cos\alpha - a\right] + \lambda_2\left[\frac{dy}{dt} - v_0\sin\alpha\right]\right\} dt$$

где $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ — неизвестные функции от t .
Уравнения Эйлера—Лагранжа имеют вид

$$\frac{d(-\frac{1}{2}y+\lambda_1)}{dt}-\frac{1}{2}\frac{dy}{dt}=0, \quad \frac{d(\frac{1}{2}x+\lambda_2)}{dt}+\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}=0,$$

$$-\lambda_1 v_0\cos\alpha+\lambda_1 v_0\sin\alpha=0. \quad \textbf{(2)}$$

Первые два из них немедленно интегрируются и дают

$$\lambda_1=y, \lambda_2=-x$$

если произвольные постоянные интегрирования считать равными нулю за счёт параллельного переноса осей. Из уравнений (2) и (3) следует $x\cos\alpha+y\sin\alpha=0$. Поэтому можно положить $x=r\sin\alpha$, $y=-r\cos\alpha$, а из уравнений (1) следует, что

$$\frac{dr}{dt}-a\sin\alpha=0.$$

А так как

$$\sin\alpha=\frac{1}{v_0}\frac{dy}{dt},'$$

то

$$\frac{dr}{dt}=\frac{a}{v_0}\frac{dy}{dt}$$

Интегрирование итого уравнения даёт

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{a}{v_0}y+C.$$

Это есть уравнение эллипса с фокусом в начале координат, большой осью, перпендикулярной к направлению ветра, и эксцентриситетом $\frac{a}{v_0}$.

Найти функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционала $J[y_1(x), y_2(x)]$ в следующих задачах Лагранжа.

6.0.1. $J(y_1,y_2)=\int_0^{\pi/2}\left(y_1^2+y_2^2-y_1'^2-y_2'^2+\cos x\right)dx;$ $y_1(0)=y_2(0)=y_1(\pi/2)=1$, $y_2(\pi/2)=-1$; $y_1-y_2-\sin x=0$.

6.0.2. $J(y_1,y_2)=\int_0^1\left(y_2^2+y_1'^2+y_2'^2\right)dx;$ $y_1(0)=-2$, $y_2(0)=1$, $y_1(1)=-e^{-1}$, $y_2(1)=0$; $y_1-y_2'^2=0$.

6.0.3. $J(y_1,y_2)=\int_0^1\left(y_1'^2+y_2'^2+x^3\right)dx;$ $y_1(0)=y_2(1)=2$, $y_1(1)=y_2(0)=1$, $y_1-2y_2+3x=0$.

6.0.4. $J(y_1,y_2)=\int_0^1\left(y_1'^2+y_2'^2+1\right)dx;$ $y_1(0)=y_2(0)=y_2(1)=0$, $y_1(1)=2$, $y_1+y_2-2x^2=0$.

6.0.5. $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^1 \left(y_1'^2 + y_2'^2\right)dx;\ y_1(0) = y_2(1) = 0,\ y_2(0) = y_1(1) = 1,\ \ y_1' - y_2 = 0.$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1.Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление.-М.: КомКнига,2006.

2.Пантелеев А.В. Вариационное исчисление.-М.: Высшая школа,2006.

3.Сборник задач по математике для втузов /Под. ред. А.В. Ефимова, А.С.Поспелова. В 4-х частях. Ч 3.: Учебное пособие для втузов- М.: Изд-во физ.-мат.литературы, 2003.