МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Кафедра физики

С.К. Камзолов

ФИЗИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
по выполнению домашних заданий

Для студентов специальности
190701 (653400) –
– Организация перевозок и управление на транспорте

Москва – 2010

ПРЕДИСЛОВИЕ

Домашние задания являются формой самостоятельной работы студентов, направленной на формирование у них практических навыков решения задач. Учитывая, что каждая задача – это своего рода небольшое научное исследование, можно считать комплексное домашнее задание по физике первой курсовой работой студента.

Предлагаемое издание предназначено для студентов специальности 190701 (653400) – Организация перевозок и управление на транспорте. Учебный план этой специальности предполагает изучение физики лишь в течение одного семестра (всего 20 часов лекций). Поэтому содержащийся в пособии набор задач ограничен по тематике: из обычно рассматриваемых для других технических специальностей 45-47 тем здесь выбрано только 20, на взгляд автора – наиболее важных.

Пособие может быть использовано и для студентов других специальностей университета, в первую очередь, изучающих дисциплину «Концепции современного естествознания».

В пособии собраны как задачи из задачников различных авторов (главным образом, изданий разных лет авторов А.Г. Чертова и А.А. Воробьева), так и оригинальные задачи автора.

Для удобства и экономии времени студентов в начале каждой темы приведены основные её формулы, которые даются, как правило, без подробных пояснений. Предполагается, что смысл входящих в формулы величин уже известен студенту, приступающему к решению задач.

Каждая тема содержит также примеры решения типовых задач с достаточно подробными пояснениями.

Автор благодарен профессору кафедры физики МГТУГА В.Д. Козлову за внимательное рецензирование рукописи и ценные замечания.

ПОРЯДОК ВЫБОРА ВАРИАНТА И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Распределение задач по вариантам обеспечивает студентам индивидуальные наборы задач по всем темам. Комплект задач задания каждого студента определяется по **таблице вариантов** следующим образом:

– номера задач в пособии содержат два числа, разделенные точкой (например, **1.1**, ..., **2.9**, ..., **14.7** и т.д.). Первое число (левее точки) соответствует номеру темы. Число правее точки соответствует номеру задачи данной темы;

– верхняя строка таблицы отражает последнюю цифру номера темы;

– левый столбец в таблице содержит номера вариантов от 01 до 50. Горизонтальная строка, начинающаяся с номера варианта (последующие 10 столбцов) содержит номера задач соответствующих тем в данном варианте (число после точки в номере задачи).

Например, в варианте № 12 выполняются задачи **1.2**, **2.7**, **3.3**, **4.8**, **5.4**, **6.9**, **7.5**, **8.10**, **9.6**, **10.1**, **11.2**, **12.7**, **13.3**, **14.8**, **15.4**, **16.9**, **17.5**, **18.10**, **19.6**, **20.1**.

При оформлении домашнего задания необходимо соблюдать следующие требования:

1. Номер варианта для студентов первой группы потока определяется порядковым номером студента в групповом журнале; для студентов второй группы потока к номеру в журнале необходимо прибавить число 25.
2. Работу следует выполнять в отдельной тонкой тетради (12 листов), аккуратно, без черновых записей, оставляя поля 3-4 см для вопросов и замечаний преподавателя.
3. Условия задач переписываются полностью, без сокращений.
4. Решение необходимо начинать с краткой записи заданных и определяемых величин: этот этап решения является анализом условия задачи.
5. Рисунки обязательны (кроме случаев, когда их просто невозможно себе представить) и выполняются аккуратно с помощью чертежных принадлежностей.
6. Используемые законы и формулы, а также ход решения задач должны сопровождаться исчерпывающими пояснениями.
7. Рекомендуется сначала получить ответ в общем виде (в виде расчетной формулы), а затем подставить заданные величины и произвести вычисления.

Задания, оформленные с нарушением этих требований или содержащие ошибки, возвращаются на доработку, которая производится в той же тетради.

ТАБЛИЦА ВАРИАНТОВ

Номер ва-рианта	Цифра перед точкой в номере задачи (в номере параграфа)									
	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**0.**
	Цифры после точки в номере задачи									
01	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
02	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
03	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2
04	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
05	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4
06	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
07	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
08	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
09	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	1	6	2	7	3	8	4	9	5	10
12	2	7	3	8	4	9	5	10	6	1
13	3	8	4	9	5	10	6	1	7	2
14	4	9	5	10	6	1	7	2	8	3
15	5	10	6	1	7	2	8	3	9	4
16	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
17	7	2	8	3	9	4	10	5	1	6
18	8	3	9	4	10	5	1	6	2	7
19	9	4	10	5	1	6	2	7	3	8
20	10	5	1	6	2	7	3	8	4	9
21	1	5	9	2	6	10	3	7	8	4
22	2	6	10	3	7	1	4	8	9	5
23	3	7	1	4	8	2	5	9	10	6
24	4	8	2	5	9	3	6	10	1	7
25	5	9	3	6	10	4	7	1	2	8
26	6	10	4	7	1	5	8	2	3	9
27	7	1	5	8	2	6	9	3	4	10
28	8	2	6	9	3	7	10	4	5	1
29	9	3	7	10	4	8	1	5	6	2
30	10	4	8	1	5	9	2	6	7	3
31	1	5	7	9	2	6	8	10	3	4
32	2	6	8	10	3	7	9	1	4	5
33	3	7	9	1	4	8	10	2	5	6
34	4	8	10	2	5	9	1	3	6	7
35	5	9	1	3	6	10	2	4	7	8
36	6	10	2	4	7	1	3	5	8	9
37	7	1	3	5	8	2	4	6	9	10
38	8	2	4	6	9	3	5	7	10	1
39	9	3	5	7	10	4	6	8	1	2
40	10	4	6	8	1	5	7	9	2	3
41	1	3	5	10	7	2	4	6	8	9
42	2	4	6	1	8	3	5	7	9	10
43	3	5	7	2	9	4	6	8	10	1
44	4	6	8	3	10	5	7	9	1	2
45	5	7	9	4	1	6	8	10	2	3
46	6	8	10	5	2	7	9	1	3	4
47	7	9	1	6	3	8	10	2	4	5
48	8	10	2	7	4	9	1	3	5	6
49	9	1	3	8	5	10	2	4	6	7
50	10	2	4	9	6	1	3	5	7	8

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

§ 1. КИНЕМАТИКА

Основные формулы

Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором $\vec{r}$:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} ,$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы направлений (орты); x, y, z – координаты точки.

Закон движения в координатной форме:

$$x = f_1(t);\ \ y = f_2(t);\ \ z = f_3(t),$$

где t – время.

Скорость $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} ,$$

где $v_x = \dfrac{dx}{dt};\ \ v_y = \dfrac{dy}{dt};\ \ v_z = \dfrac{dz}{dt}$ – проекции вектора скорости на оси координат.

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} .$$

Средняя скорость

$$< \vec{v} > = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

где $\Delta\vec{r}$ – вектор перемещения материальной точки за интервал времени Δt.

Средняя путевая скорость

$$< v > = \frac{S}{\Delta t},$$

где S – путь, пройденный точкой за интервал времени Δt**.**

Ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} ,$$

где $a_x = \dfrac{dv_x}{dt};\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt};\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$ – проекции ускорения a на оси координат.

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

Примеры решения задач

Пример 1а. Закон движения материальной точки по прямой (ось x) имеет вид:

$$x=A+Bt+Ct^3,$$

где A=4 м, B=2 м/с, C=-0,5 м/с^3. Определите для момента времени t_1=2 с: 1) координату x_1 точки, 2) скорость v_1, 3) ускорение a_1.

Решение. 1) Координату точки, для которой известен закон движения, найдем, подставив в уравнение вместо t заданное значение времени t_1:

$$x_1=A+Bt_1+Ct_1^3.$$

Подставим в это выражение значения A, B, C, t_1 и произведем вычисления:

$$x_1 = (4+4- 0,5\ 2^3)\text{ м} = 4\text{ м}.$$

2) Скорость в произвольный момент времени найдем, продифференцировав координату x по времени: $v=\frac{dx}{dt}=B+3Ct^2$.

Тогда в заданный момент времени t_1 скорость

$$v_1 = B+3Ct_1^2.$$

Подставим в полученное выражение значения B, C, t_1 и, произведя вычисления, получим: v_1=-4 м/с.

Знак минус указывает на то, что в момент времени t_1=2 с точка движется в направлении, противоположном положительному направлению координатной оси.

3) Ускорение в произвольный момент времени найдем, взяв производную от скорости v по времени или вторую производную от координаты x по времени:

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=6Ct.$$

Ускорение в заданный момент времени t_1 равно: a_1=6Ct_1. Подставим значения C и t_1 и произведем вычисления:

$$a_1 = -6\cdot 0,5\cdot 2\text{ м/с} = -6\text{ м/с}.$$

Знак минус указывает на то, что направление вектора ускорения совпадает с отрицательным направлением координатной оси, причем в условиях данной задачи это имеет место для любого момента времени.

Пример 1б. Закон движения материальной точки по прямой (ось x) имеет вид: $x=A+Bt+Ct^2$, где A=5 м, B=4 м/с, C=-1 м/с^2. 1) Построить график зависимости координаты x и пути S от времени. 2) Определить среднюю скорость $\langle v_x \rangle$ за интервал времени от t_1=1 с до t_2=6 с. 3) Найти среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ за тот же интервал времени.

Решение. 1) Для построения графика зависимости координаты точки от времени найдем характерные значения координаты – начальное и максимальное, а также моменты времени, соответствующие указанным координатам и координате, равной нулю.

Начальная координата соответствует времени t=0. Ее значение равно:

$$x_0 = x|_{t=0} = A = 5 \text{ м}.$$

Максимального значения координата достигает в тот момент, когда точка начинает двигаться обратно (скорость меняет знак). Этот момент времени t_3 найдем, приравняв нулю первую производную от координаты по времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = B + 2Ct; \;\; B + 2Ct_3 = 0,$$

откуда t_3=-$B/2C$ = -4/2(-1)(с) = 2 с.

Тогда максимальная координата

$$x_{\max} = x/_{t=2} = 9 \text{ м}.$$

Момент времени t_4, когда координата $x=0$, найдем из выражения:

$$x=A+Bt_4+Ct_4^2=0.$$

Решим полученное квадратное уравнение относительно t:

$$t_4 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}.$$

Подставим значения A, B, C и произведем вычисления: t_4=(2±3) с.

Таким образом, получаем два значения времени: t_4'=5 с и t_4''= -1 с. Второе значение времени отбрасываем, так как оно не удовлетворяет условию задачи (t >0).

Для более точного построения графика найдем еще два значения координаты, соответствующие, допустим, моментам времени t_1=l с и t_2=6 с:

$$x_1 = A + Bt_1 + Ct_1^2 = 8 \text{ м},$$

$$x_2 = A + Bt_2 + Ct_2^2 = -7 \text{ м}.$$

Полученные данные представим в виде таблицы:

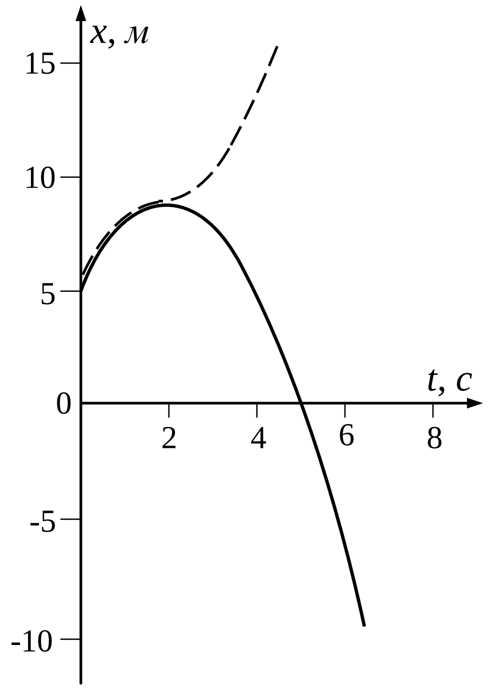

Рис. 1.1

Время, с Координата, м	t_0=0 x_0=A=5	t_1=1 x_1=8	t_3=2 x_{max}=9	t_4=5 x=0	t_2=6 x_2=-7

Используя данные таблицы, строим график зависимости координаты от времени (рис. 1.1). При этом исходим из следующих соображений:

1) путь и координата до момента изменения знака скорости совпадают; 2) начиная с момента возврата (t_3) точки, она движется в обратном направлении и, следовательно, координата ее убывает, а путь продолжает возрастать по тому же закону, по которому убывает координата.

Следовательно, график пути до момента времени t_3 =2 с совпадает с графиком координаты, но, начиная с этого момента, является зеркальным отображением графика координаты (см. рис.1.1).

2) Средняя скорость $<v_x>$ за интервал времени t_2-t_1 определяется выражением:

$$\langle v_x \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} .$$

Подставим значения x_1, x_2, t_1, t_2 из таблицы и произведем вычисления:

$<v_x>$ = (-7-8) / (6-1) м/с = -3 м/с.

3) Среднюю путевую скорость $<v>$ находим из выражения:

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t_2 - t_1} ,$$

где S – путь, пройденный точкой за интервал времени t_2-t_1. Из графика на рис. 1.1 видно, что этот путь складывается из двух отрезков пути: $S_1=x_{max}-x_1$, который точка прошла за интервал времени t_3-t_1, и $S_2=x_{max}+|x_2|$, который она прошла за интервал времени t_2-t_3. Таким образом, путь

$$S = S_1 + S_2 = (x_{max}-x_1) + (x_{max} + |x_2|) = 2x_{max} + |x_2|-x_1.$$

Подставим в это выражение значения x_{max} , $|x_2|$, x_1 и произведем вычисления:

$$S = 2\cdot 9+7-8 \text{ (м)} = 17 \text{ м}.$$

Тогда искомая средняя путевая скорость

$<v>$ = 17/(6-1) м/с = 3,4 м/с.

Заметим, что средняя путевая скорость всегда положительна.

Задачи

1.1. Уравнение прямолинейного движения имеет вид $x=At+Bt^2$, где A=3 м/с, B=-0,25 м/с^2. Построить графики зависимости координаты и пути от времени для заданного движения.

1.2. Движение материальной точки задано уравнением $x=At+Bt^2$, где A=4 м/с, B=-0,05 м/с^2. Определить момент времени, в который скорость v точки равна нулю. Найти координату и ускорение в этот момент. Построить графики зависимости координаты, пути, скорости и ускорения этого движения от времени.

1.3. Движения двух материальных точек выражаются уравнениями:

$$x_1 = A_1+B_1t+C_1t^2, \quad x_2 = A_2+B_2t+C_2t^2,$$

где A_1=20 м, A_2=2 м, $B_1=B_2$=2 м/с, C_1=-4 м/с^2, C_2=0,5 м/с^2. В какой момент времени t скорости этих точек будут одинаковыми? Определить скорости v_1 и v_2, а также ускорения a_1 и a_2 точек в этот момент.

1.4. Две материальные точки движутся согласно уравнениям:

$$x_1=A_1t+B_1t^2+C_1t^3, \quad x_2=A_2t+B_2t^2+C_2t^3,$$

где A_1=4 м/с, B_1=8 м/с^2, C_1=-16 м/с^3, A_2=2 м/с, B_2=- 4 м/с^2, C_2=1 м/с^3. В какой момент времени t ускорения этих точек будут одинаковы? Найти скорости v_1 и v_2 точек в этот момент.

1.5. Движение точки по прямой задано уравнением $x=At+Bt^2$, где A=2 м/с, B=-0,5 м/с^2. Определить среднюю путевую скорость $\langle v\rangle$ движения точки в интервале времени от t_1=l с до t_2=3 с.

1.6. Точка движется по прямой согласно уравнению $x=At+Bt^3$, где A=6 м/с, B=-0,125 м/с^3. Определить среднюю путевую скорость $\langle v\rangle$ точки в интервале времени от t_1=2 с до t_2=6 с.

1.7. Две материальные точки движутся вдоль одной прямой со скоростями:

$$v_1=A_1t+B_1t^2, \quad v_2=A_2t+B_2t^2,$$

где A_1=4 м/с^2, B_1=3 м/с^3, A_2=12 м/с^2, B_2=-1 м/с^3. В какой момент времени t ускорения этих точек будут одинаковы? Найти скорости точек и расстояние между точками в этот момент, если в начальный момент расстояние между ними было равно 2 м.

1.8. Две материальные точки движутся вдоль одной прямой со скоростями:

$$v_1=A_1+B_1t+C_1t^2, \quad v_2=A_2+B_2t+C_2t^2,$$

где A_1=-3 м/с, A_2=2 м/с, B_1=2 м/с^2, B_2=4 м/с^2, C_1=3 м/с^3, C_2=1 м/с^3. Найти расстояние между точками в тот момент, когда их ускорения будут одинаковы. В начальный момент времени расстояние между точками составляло 4 м.

1.9. Материальная точка движется по прямой с ускорением $a=A+Bt$, где A=6 м/с^2, B=-0,5 м/с^3. Определить пройденное точкой расстояние за первую секунду, если начальная скорость была равна 9 м/с.

1.10. Две материальные точки движутся вдоль одной прямой с ускорениями:

$$a_1=A_1+B_1t, \quad a_2=A_2+B_2t,$$

где A_1=4 м/с^2, B_1=3 м/с^3, A_2=12 м/с^2, B_2=-1 м/с^3. Начальные скорости этих точек были равны, соответственно, 8 м/с и 12,5 м/с. В какой момент времени t скорости точек будут одинаковы?

§ 2. ДИНАМИКА ТЕЛ, ДВИЖУЩИХСЯ ПОСТУПАТЕЛЬНО

Основные формулы

Уравнение движения материальной точки (второй закон Ньютона):

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i, \quad \text{или} \quad m\vec{a}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i,$$

где $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$ – векторная сумма сил, действующих на материальную точку; m – её масса; a – ускорение; $p=mv$ – импульс; N – число сил, действующих на точку.

Примеры решения задач

Пример 2. Шар массой m=0,3 кг, двигаясь со скоростью v=10 м/с, упруго ударяется о гладкую неподвижную стенку так, что скорость его направлена под углом α=30° к нормали. Определить импульс p, получаемый стенкой.

Решение. Поскольку удар шара о стенку упругий, то можно воспользоваться законом сохранения механической энергии. А так как масса стенки много больше массы шара, из него следует равенство модулей скоростей шара до и после удара: $v = u$.

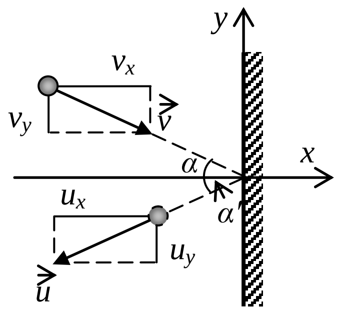

Рис. 2.1

Покажем, что угол α' отражения шара от стенки равен углу α падения шара. Спроецируем векторы начальной и конечной скоростей на координатные оси x и y (рис. 2.1). Так как стенка гладкая, то u_y=v_y. Учитывая, кроме того, равенство модулей скоростей шара v до и u после удара, получим u_x=-v_x , а отсюда следует равенство углов падения и отражения (α'= α).

Для определения импульса p, полученного стенкой, воспользуемся законом сохранения импульса. Для нашего случая этот закон можно записать в виде:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p},$$

где $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_1'$ – импульсы шара до и после удара (при этом их модули равны). Отсюда импульс, полученный стенкой, равен:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_1'.$$

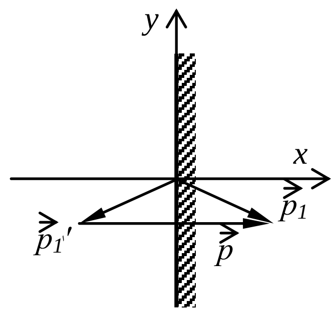

Рис. 2.2

Из рис. 2.2 видно, что вектор $\vec{p}$ сонаправлен с осью x и его модуль p=2$p_1$cosα . Подставив сюда выражение импульса p_1=mv, получим:

$$p=2mv\cos\alpha .$$

Произведем вычисления:

$$p = 2\ 0{,}3\cdot 10\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{кг·м/с} = 5{,}20\ \text{кг·м/с}.$$

Задачи

2.1. Молот массой m=1 т падает с высоты h=2 м на наковальню. Длительность удара t=0,01 с. Определить среднее значение силы <F> удара, считая удар абсолютно неупругим.

2.2. Материальная точка массой m=1 кг, двигаясь равномерно, описывает четверть окружности радиусом r=1,2 м в течение времени t=2 с. Найти изменение импульса точки Δp.

2.3. Тело массой m=5 кг брошено под углом α=30° к горизонту с начальной скоростью v_0=20 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти изменение Δp импульса тела за время полета.

2.4. Шарик массой m=100 г упал с высоты h=2,5 м на горизонтальную плиту, масса которой много больше массы шарика, и отскочил от нее вверх. Считая удар абсолютно упругим, определить импульс p, полученный плитой.

2.5. Мяч массой m=200 г ударился о стену и отскочил от нее. Определить изменение импульса Δp мяча, если перед ударом он имел скорость v_0=20 м/с, направленную под углом α =30° к поверхности стены. Удар считать абсолютно упругим.

2.6. Шар массой m=0,2 кг соскальзывает без трения по желобу высотой h=2 м. Начальная скорость v_0 шара равна нулю. Найти изменение Δp импульса шара и импульс p, полученный желобом при движении тела.

2.7. Мячик массой m=150 г ударяется о гладкую стенку под углом 30^o к ней и отскакивает без потери скорости. Найти среднюю силу, действующую на мячик со стороны стенки, если его скорость v=10 м/с, а продолжительность удара Δt=0,1 с.

2.8. Падающий вертикально шарик массой m=200 г ударился об пол со скоростью v=5 м/с и подпрыгнул на высоту h=46 см. Найти изменение импульса Δp шарика при ударе.

2.9. Шарик массой m=20 г движется по гладкому столу со скоростью v=2 м/с. Под действием некоторой силы он поворачивает на угол 90^o без изменения модуля скорости. Определить среднюю величину этой силы, если она действовала в течение времени Δt=0,1 с.

2.10. Мяч массой m=400 г брошен горизонтально со скоростью v_0=15 м/с и через время t=1,5 с падает на землю под углом 45^o со скоростью v=20 м/с. Определить среднюю суммарную силу, действующую на мяч во время полёта.

§ 3. ИМПУЛЬС И ЭНЕРГИЯ

Основные формулы

Закон сохранения импульса для замкнутой системы:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const ,$$

где N – число материальных точек (или тел), входящих в систему.

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно:

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad \text{или} \quad T = \frac{p^2}{2m} .$$

Потенциальная энергия тела, находящегося в однородном поле силы тяжести:

$$П = mgh,$$

где h – высота, на которой находится центр тяжести тела, относительно уровня, принятого за нулевой. Эта формула справедлива при условии $h << R$, где R – радиус Земли.

Полная механическая энергия тела:

$$E_{мех} = T + П.$$

В однородном поле силы тяжести суммарная механическая энергия замкнутой системы тел сохраняется:

$$\sum_i T_i + П_i = const$$

при отсутствии потерь на трение и неупругие взаимодействия.

Пример 3а. Шар массой m_1, движущийся горизонтально с некоторой скоростью v_1, столкнулся с неподвижным шаром массой m_2. Шары абсолютно упругие, удар прямой. Какую долю ω своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Решение. Доля энергии, переданной первым шаром второму, выразится соотношением:

$$\omega = \frac{T_2'}{T_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 v_1^2} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{u_2}{v_2}\right)^2, \qquad (1)$$

где T_1 – кинетическая энергия первого шара до удара; u_2 и T'_2 – соответственно скорость и кинетическая энергия второго шара после удара.

Как видно из выражения (1), для определения ω надо найти u_2. Воспользуемся тем, что при ударе абсолютно упругих тел одновременно выполняются два закона сохранения: импульса и механической энергии.

По закону сохранения импульса, учитывая, что второй шар до удара покоился, имеем:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \qquad (2)$$

По закону сохранения энергии в механике:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_1 u_2^2}{2}. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (2) и (3), найдем:

$$u_2 = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Подставив это выражение u_2 в равенство (1), получим:

$$\omega = \frac{m_2}{m_1}\left[\frac{2 m_1 v_1}{v_1 (m_1 + m_2)}\right]^2 = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Из этого соотношения видно, что доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров. Доля передаваемой энергии не изменится, если шары поменяются местами.

Пример 3б. Молот массой m_1=200 кг падает на поковку, масса m_2 которой вместе с наковальней равна 2500 кг. Скорость v_1 молота в момент удара равна 2 м/с. Найти: 1) кинетическую энергию T_1 молота в момент удара; 2) энергию T_2, переданную фундаменту; 3) энергию T, затраченную на деформацию поковки; 4) коэффициент полезного действия η (КПД) удара молота о поковку. Удар молота о поковку рассматривать как неупругий.

Решение. 1) Кинетическую энергию молота в момент удара найдем по формуле $T_1=m_1v_1^2/2$. Подставив значения m_1, v_1 и произведя вычисления, получим:

$$T_1=400\ \text{Дж}.$$

2) Энергия, переданная фундаменту, равна кинетической энергии системы молот – поковка (с наковальней) непосредственно после удара. Определим скорость этой системы, применив закон сохранения импульса, который в случае неупругого удара двух тел выражается формулой:

$$m_1v_1+m_2v_2 = (m_1+m_2)u, \tag{1}$$

где v_2 – скорость поковки (вместе с наковальней) перед ударом; u - скорость молота и поковки (вместе с наковальней) непосредственно после удара. Так как поковка с наковальней до удара находилась в состоянии покоя, то v_2=0. При неупругом ударе молот и поковка (с наковальней) движутся как одно целое, т. е. с одинаковой скоростью u. Из формулы (1) найдем эту скорость:

$$u=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1. \tag{2}$$

Определим теперь кинетическую энергию, которой обладает система молот – поковка (с наковальней) и которая передается фундаменту. Эту энергию находим по формуле:

$$T_2=\frac{m_1+m_2}{2}u^2.$$

Заменим скорость u ее выражением (2):

$$T_2=\frac{m_1^2v_1^2}{2(m_1+m_2)},$$

или, учитывая, что $T_1=m_1v_1^2/2$, запишем:

$$T_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}T_1. \tag{3}$$

Подставив в уравнение (3) значения m_1, m_2, T_1 и произведя вычисления, получим:

$$T_2=29{,}6\ \text{Дж}.$$

3) Молот до удара обладал энергией T_1, T_2 – энергия, переданная фундаменту. Следовательно, на деформацию поковки использовалась энергия $T=T_1-T_2$.

Подставив в это выражение значения T_1 и T_2, получим:

$$T=370 \text{ Дж.}$$

4) Назначение молота – деформация поковки, находящейся на наковальне. Т.е. энергию T следует считать полезной. КПД удара молота о поковку равен отношению энергии T, затраченной на деформацию поковки, ко всей затраченной энергии T_1:

$$\eta = \frac{T}{T_1}, \text{ или } \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Подставив в последнее выражение T_2 из формулы (3), получим:

$$\eta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

После подстановки значений m_1 и m_2 получим искомый КПД:

$$\eta=92{,}6\ \%.$$

Задачи

3.1. При выстреле из орудия снаряд массой m_1=10 кг получает кинетическую энергию T_1=1,8 МДж. Определить кинетическую энергию T_2 ствола орудия вследствие отдачи, если масса m_2 ствола орудия равна 600 кг.

3. 2. Ядро атома распадается на два осколка массами $m_1=1{,}6\cdot10^{-25}$ кг и $m_2=2{,}4\cdot10^{-25}$ кг. Определить кинетическую энергию T_2 второго осколка, если энергия T_1 первого осколка равна 18 нДж.

3.3. Конькобежец, стоя на льду, бросил вперед гирю массой m_1=5 кг и вследствие отдачи покатился назад со скоростью v_2=1 м/с. Масса конькобежца m_2=60 кг. Определить работу A, совершенную конькобежцем при бросании гири.

3.4. Молекула распадается на два атома. Масса одного из атомов в n=3 раза больше, чем другого. Пренебрегая начальной кинетической энергией и импульсом молекулы, определить кинетические энергии T_1 и T_2 атомов, если их суммарная кинетическая энергия T=0,032 нДж.

3.5. На рельсах стоит платформа, на которой закреплено орудие без противооткатного устройства так, что ствол его расположен в горизонтальном положении. Из орудия производят выстрел вдоль железнодорожного пути. Масса m_1 снаряда равна 10 кг и его скорость u_1=1 км/с. На какое расстояние l откатится платформа после выстрела, если коэффициент сопротивления k=0,002? Масса платформы $M_{пл}$=20 т.

3.6. Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров больший шар покоится. В результате прямого удара меньший шар потерял ω=3/4 своей кинетической энергии T_1. Определить отношение $k=M/m$ масс шаров.

3.7. Определить максимальную часть ω кинетической энергии T_1, которую может передать частица массой $m_1=2\cdot10^{-25}$ кг, сталкиваясь упруго с покоящейся частицей массой $m_2=6\cdot10^{-25}$ кг.

3.8. Два груза массами $m_1=10$ кг и $m_2=15$ кг подвешены на нитях длиной $l=2$ м так, что грузы соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол $\varphi=60°$ и выпущен. Определить высоту h, на которую поднимутся оба груза после удара. Удар грузов считать неупругим.

3.9. Шар массой m_1, летящий со скоростью $v_1=5$ м/с, ударяет неподвижный шар массой m_2. Удар прямой, неупругий. Определить скорость u шаров после удара, а также долю ω кинетической энергии летящего шара, израсходованной на увеличение внутренней энергии этих шаров. Рассмотреть два случая: 1) $m_1=2$ кг, $m_2=8$ кг; 2) $m_1=8$ кг, $m_2=2$ кг.

3.10. Шар массой $m=1{,}8$ кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы M. В результате прямого упругого удара малый шар потерял $\omega=0{,}36$ своей кинетической энергии. Определить массу большего шара.

§ 4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

Основные формулы

Момент инерции относительно оси вращения:

а) материальной точки

$$I = mr^2,$$

где m – масса точки; r – расстояние ее от оси вращения;

б) системы материальных точек (в том числе – абсолютно твердого тела):

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_1 r_i^2\ ,$$

где m_i – масса i-й материальной точки (i-го элемента тела, который можно считать материальной точкой); r_i – расстояние от этой точки (этого элемента) до оси вращения; N – число элементов тела;

Для расчёта момента инерции твердого тела применяют интегрирование:

$$I = \int r^2 dm\ ,$$

При этом, если тело однородно, т. е. его плотность ρ одинакова по всему объему, то

$$dm=\rho dV \quad \text{и} \quad I = \rho\int_V r^2 dV\ ,$$

где V – объем тела.

В таблице 4.1 даны моменты инерции некоторых тел:

Таблица 4.1

Тело	Ось, относительно которой определяется момент инерции	Формула момента инерции
Однородный тонкий стержень массой m и длиной l	Проходит через центр тяжести стержня перпендикулярно стержню	$ml^2/12$
	Проходит через конец стержня перпендикулярно стержню	$ml^2/3$
Тонкое кольцо, обруч, тонкостенная труба радиусом R и массой m	Проходит через центр перпендикулярно плоскости основания	mR^2
Круглый однородный диск (цилиндр) радиусом R и массой m	Проходит через центр диска перпендикулярно плоскости основания	$mR^2/2$
Однородный шар массой m и радиусом R	Проходит через центр шара	$2mR^2/5$

Теорема Штейнера. Момент инерции тела относительно произвольной оси:

$$I = I_0 + ma^2,$$

где I_0 – момент инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно заданной оси; a – расстояние между осями; m –масса тела.

Примеры решения задач

Пример 4. Физический маятник представляет собой однородный стержень длиной l=1 м и массой m_1=l кг с прикрепленным к одному из его концов однородным сплошным диском массой m_2=0,5 m_1 и радиусом $R=l/4$. Определить момент инерции I_z такого маятника относительно оси $0z$, проходящей через точку 0 на стержне перпендикулярно плоскости чертежа (рис.4.1).

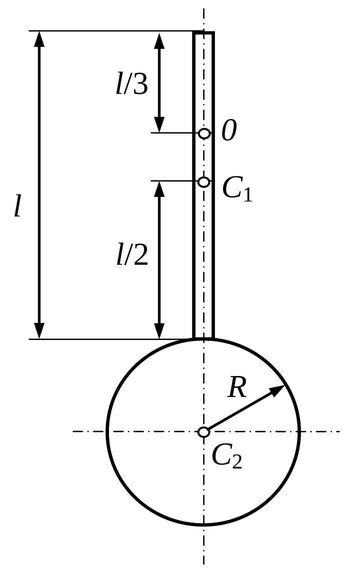

Рис.4.1

Решение. Общий момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня I_1 и диска I_2

$$I = I_1 + I_2 \qquad (1)$$

Формулы, по которым вычисляются моменты инерции стержня I_1 и диска I_2 относительно осей, проходящих через их центры масс, даны в табл. 4.1. Чтобы определить моменты инерции I_1 и I_2, надо воспользоваться теоремой Штейнера:

$$I = I_c + ma^2. \qquad (2)$$

Выразим момент инерции стержня согласно формуле (2):

$$I_1 = \frac{m_1 l^2}{12} + m_1 a_1^2.$$

Расстояние a_1 между осью 0_z и параллельной ей осью, проходящей через центр масс C_1 стержня, как следует из рис. 4.1, равно $l/2\text{-}l/3=l/6$. С учетом этого запишем:

$$I_1 = m_1 l^2/12 + m_1 (l/6)^2 = m_1 l^2/9 = 0{,}111 m_1 l^2.$$

Момент инерции диска в соответствии с формулой (2) равен:

$$I_2 = m_2 R^2/2 + m_2 a_2^2,$$

где R – радиус диска; $R=l/4$. Расстояние a_2 между осью O_z и параллельной ей осью, проходящей через центр масс диска, равно (рис. 4.1): $R+l–l/3=5l/4\text{-}l/3=11l/12$. С учетом этого запишем:

$$I_2 = \frac{m_2 (0{,}25l)^2}{2} + m_2 \left(\frac{11l}{12}\right)^2 = (0{,}0312 + 0{,}840) m_2 l^2 = 0{,}871 m_2 l^2.$$

Подставив полученные выражения I_1 и I_2 в формулу (1), найдем:

$$I_z = (0{,}111 m_1 + 0{,}871\, m_2) l^2,$$

или, учитывая, что $m_2=0{,}5\, m_1$:

$$I_z = 0{,}547 m_1 l^2.$$

Произведя вычисления, получим значение момента инерции физического маятника относительно оси 0_z:

$$I_z = 0{,}547 \cdot 1 \cdot 1 \text{ кг м}^2 = 0{,}547 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Задачи

4.1. Два шара массами m и $2m$ (m=10 г) закреплены на тонком невесомом стержне длиной l=40 см так, как это указано на рис. 4.2 (*а, б*). Определить моменты инерции I системы относительно оси 0, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец в этих двух случаях. Размерами шаров пренебречь.

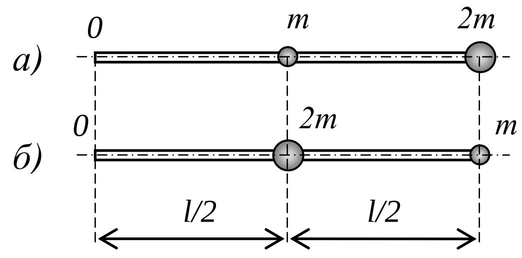

Рис.4.2

4.2. Три маленьких шарика массой m=10 г каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной a =20 см и скреплены между собой. Определить момент инерции I системы относительно оси: 1) перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через центр описанной окружности; 2) лежащей в плоскости треугольника и проходящей через центр описанной окружности и одну из вершин треугольника. Массой стержней, соединяющих шары, пренебречь.

4.3. Определить момент инерции I тонкого однородного стержня длиной l=30 см и массой m=100 г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: 1) его конец; 2) его середину; 3) точку, отстоящую от конца стержня на 1/3 его длины.

4.4. Определить момент инерции I тонкого однородного стержня длиной l=60 см и массой m=100 г относительно оси, перпендикулярной ему и проходящей через точку стержня, удаленную на расстояние a=20 см от одного из его концов.

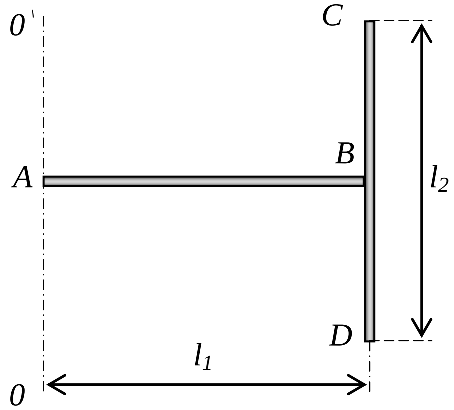

Рис.4.3

4.5. Вычислить момент инерции I проволочного прямоугольника со сторонами a=12 см и b=16 см относительно оси, лежащей в плоскости прямоугольника и проходящей через середины малых сторон. Масса равномерно распределена по длине проволоки с линейной плотностью τ=0,1 кг/м.

4.6. Два однородных тонких стержня: AB длиной l_1=40 см и массой m_1=900 г и CD длиной l_2=40 см и массой m_2=400 г скреплены под прямым углом (рис. 4.3). Определить момент инерции I системы стержней относительно оси 00', проходящей через конец стержня AB параллельно стержню CD.

4.7. На концах тонкого однородного стержня длиной l и массой $3m$ прикреплены маленькие шарики массами m и $2m$. Определить момент инерции I такой системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. При расчетах принять l=1 м, m=0,1 кг. Шарики рассматривать как материальные точки.

4.8. Найти момент инерции I тонкого однородного кольца радиусом R=20 см и массой m=100 г относительно оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей через его центр.

4.9. Диаметр диска d=20 см, масса m=800 г. Определить момент инерции I диска относительно оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска.

4.10. Найти момент инерции I плоской однородной прямоугольной пластины массой m=800 г относительно оси, совпадающей с одной из ее сторон, если длина a другой стороны равна 40 см.

§ 5. УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Основные формулы

Момент силы $\vec{F}$ **,** действующей на тело, относительно оси вращения *0:*

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы относительно точки 0 (рис.5.1).

По модулю:

$$M = r \cdot F \sin\alpha = F \cdot h,$$

где h – плечо силы (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы, рис.5.1).

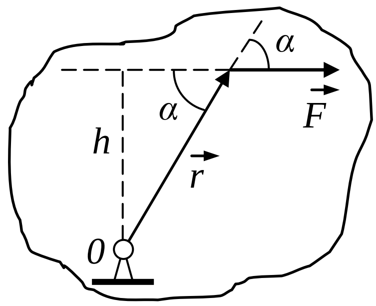

Рис.5.1

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси:

$$I\vec{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i,$$

где I – момент инерции тела; ε – угловое ускорение, $\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i$ – векторная сумма моментов сил, действующих на тело.

Связь углового ускорения с тангенциальным ускорением точки, находящейся на расстоянии r от оси вращения:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r.$$

Пример 5а. Вал в виде сплошного цилиндра массой m_1=10 кг насажен на горизонтальную ось так, как это указано на рис. 5.2. Трение между валом и осью отсутствует. На цилиндр намотан шнур, к свободному концу которого подвешена гиря массой m_2=2 кг. С каким ускорением a будет опускаться гиря, если ее предоставить самой себе?

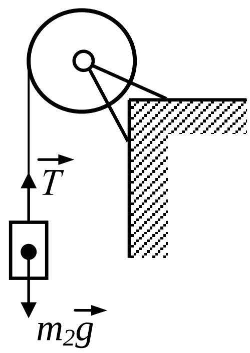

Рис.5.2

Решение. Ускорение a гири равно тангенциальному ускорению точек вала, лежащих на его цилиндрической поверхности, и связано с угловым ускорением ε вала соотношением:

$$a = \varepsilon R, \qquad (1)$$

где R – радиус вала.

Угловое ускорение вала определяется уравнением динамики вращающегося тела:

$$I \cdot \varepsilon = M, \qquad (2)$$

где M — вращающий момент, действующий на вал; I — момент инерции вала относительно оси вращения. Рассматриваем вал как сплошной цилиндр. Тогда его момент инерции относительно оси симметрии равен:

$$I=m_1R^2/2.$$

Величина вращающего момента M, действующего на вал, равна произведению силы натяжения T шнура на радиус вала (плечо силы):

$$M=TR.$$

Силу натяжения шнура найдем из следующих соображений. На гирю действуют две силы: сила тяжести m_2g, направленная вниз, и сила натяжения T шнура, направленная вверх (рис.5.2). По второму закону Ньютона:

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T}\ .$$

В проекции на ось, положительное направление которой совпадает с направлением вектора ускорения:

$$m_2a = m_2g - T,$$

откуда

$$T = m_2(g - a).$$

Таким образом, вращающий момент

$$M=m_2(g - a)R.$$

Подставив в формулу (2) полученные выражения M и I, найдем угловое ускорение вала:

$$\varepsilon = \frac{2m_2(g-a)}{m_1R}\ .$$

Для определения ускорения гири подставим это выражение ε в формулу (1) и решим полученное уравнение относительно ускорения a:

$$a = \frac{2m_2}{m_1+2m_2}g = 2{,}80\ \text{м/с}^2\,.$$

Пример 5б. Через блок в виде диска, имеющий массу m=80 г, перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы массами m_1=100 г и m_2=200 г (рис.5.3). С каким ускорением будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе? Трением в оси блока пренебречь. Проскальзывание нити относительно блока отсутствует.

Решение. Применим к решению задачи динамические законы поступательного и вращательного движения. На каждый из движущихся грузов действуют две силы: сила тяжести mg, направленная вниз, и сила T натяжения нити, направленная вверх.

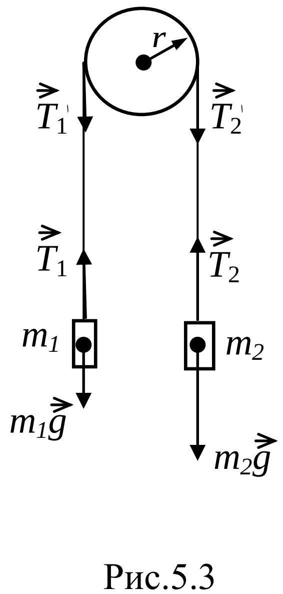

Рис.5.3

Так как левый груз легче правого, то вектор ускорения a груза m_1 направлен вверх, следовательно, $T_1 > m_1 g$. По второму закону Ньютона:

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 .$$

В проекции на направленную вверх вертикальную ось:

$$m_1 a = T_1 - m_1 g ,$$

откуда

$$T_1 = m_1 g + m_1 a . \qquad (1)$$

Вектор ускорения a груза m_2 направлен вниз; следовательно, $T_2 < m_2 g$. По второму закону Ньютона для этого груза:

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 ,$$

или в проекции на ось, направленную вниз:

$$m_2 a = m_2 g - T_2 ,$$

откуда

$$T_2 = m_2 g - m_2 a. \qquad (2)$$

Согласно уравнению динамики вращательного движения, вращающий момент M, приложенный к диску, равен произведению момента инерции I диска на его угловое ускорение ε:

$$M = I\varepsilon. \qquad (3)$$

Определим вращающий момент. Силы натяжения нитей действуют не только на грузы, но и на диск. Вследствие невесомости нитей силы T_1' и T_2', приложенные к ободу диска, равны соответственно силам T_1 и T_2, но по направлению им противоположны. При движении грузов диск ускоренно вращается по часовой стрелке; следовательно, $T_2' > T_1'$. Вращающий момент, приложенный к диску, равен произведению разности этих сил на плечо, равное радиусу диска, т. е.

$$M = (T_2' - T_1')\, r = (T_2 - T_1)\, r .$$

Момент инерции диска $I = mr^2/2$, угловое ускорение связано с линейным ускорением грузов соотношением $\varepsilon = a/r$. Подставив в формулу (3) выражения M, I и ε, получим:

$$T_2 - T_1 = \frac{ma}{2} .$$

Подставляем в полученное соотношение выражения по формулам (1) и (2):

$$(m_2 - m_1)\, g = (m_2 + m_1 + m/2)\, a ,$$

откуда получаем окончательно:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}}\, g . \qquad (4)$$

Отношение масс в правой части формулы (4) есть величина безразмерная. Поэтому значения масс m_1, m_2 и m можно выразить в граммах, как они даны в условии задачи. После подстановки получим:

$$a = \frac{0,2-0,1}{0,2+0,1+0,04} 9,81\ \text{м/с}^2 = 2,88\ \text{м/с}^2.$$

Задачи

5.1. Тонкий однородный стержень длиной $l = 1$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку *0* на стержне (рис. 5.4). Стержень отклонили от вертикали на угол $\alpha = 60^{\circ}$ и отпустили. Определить для начального момента времени угловое ε и тангенциальное a_τ ускорения точки B на конце стержня.

5.2. Тонкий однородный стержень длиной $l = 50$ см и массой $m = 400$ г вращается с угловым ускорением ε=3 рад/с^2 вокруг оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определить вращающий момент *M*.

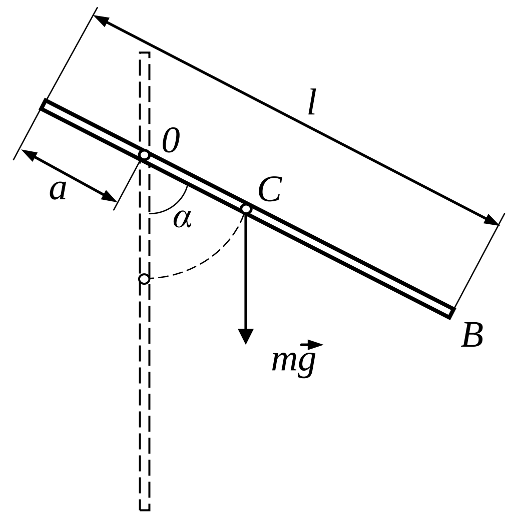

Рис.5.4

5.3. На неподвижную горизонтальную ось насажены маховик и легкий шкив радиусом R=5 см. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой $m = 0,4$ кг. Опускаясь равноускоренно, груз прошел путь $S = 1,8$ м за время t=3 с. Определить момент инерции I маховика. Массу шкива считать пренебрежимо малой.

5.4. Вал массой $m = 100$ кг и радиусом R=5 см вращался вокруг оси симметрии с частотой n=8 с$^{-1}$. К боковой поверхности вала прижали тормозную колодку с силой F= 40 Н, под действием которой вал остановился через t =10 с. Определить коэффициент трения k колодки о вал.

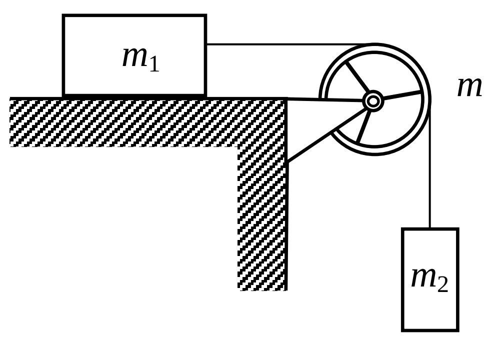

Рис.5.5

5.5. На цилиндр намотана тонкая гибкая нерастяжимая лента, массой которой по сравнению с массой цилиндра можно пренебречь. Свободный конец ленты прикрепили к кронштейну и предоставили цилиндру опускаться под действием силы тяжести. Определить линейное ускорение a оси цилиндра, если цилиндр: 1) сплошной; 2) полый тонкостенный.

5.6. Через блок, имеющий форму диска, перекинут нерастяжимый шнур. К концам шнура привязали грузики массой m_1=100 г и m_2=110 г. С каким ускорением a будут двигаться грузики, если масса m блока равна 400 г? Трение в оси при вращении блока ничтожно мало. Массой шнура пренебречь.

5.7. Два тела массами m_1=0,25 кг и m_2=0,15 кг связаны тонкой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок (рис. 5. 5). Блок укреплен на краю горизонтального стола, по поверхности которого скользит тело массой m_1. С каким ускорением a движутся тела и каковы силы T_1 и T_2 натяжения нити по обе стороны от блока? Коэффициент трения k тела о поверхность стола равен 0,2. Масса m блока равна 0,1 кг и ее можно считать равномерно распределенной по ободу. Массой нити и трением в подшипниках оси блока пренебречь.

5.8. Через блок массой m=0,2 кг перекинут нерастяжимый шнур, к концам которого подвесили грузы массами m_1=0,3 кг и m_2=0,5 кг. Определить силы натяжения T_1 и T_2 шнура по обе стороны блока во время движения грузов, если масса блока равномерно распределена по ободу. Массой шнура пренебречь.

5.9. Шар массой m=10 кг и радиусом R=20 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение для угла поворота при вращении шара имеет вид $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где B=4 рад/с^2, C=-1 рад/с^3. Найти зависимость момента сил, действующих на шар, от времени. Определить момент сил M в момент времени t=2 с.

5.10. Маховик в виде сплошного диска массой 5 кг и радиусом 20 см вращается по закону $\varphi = Bt+Ct^2$, где B=5 рад/с, C=4 рад/с^2. Найти вращающий момент, действующий на маховик, и число оборотов, которое он сделал за первые 10 с после начала вращения.

§ 6. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Основные формулы

Момент импульса осесимметричного вращающегося тела относительно оси симметрии:

$$\vec{L} = I\vec{\omega},$$

где ω – угловая скорость вращения тела вокруг этой оси, I – момент инерции тела относительно этой оси.

Закон сохранения момента импульса для замкнутой системы, состоящей из N тел:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = const\ ,$$

где L_i — момент импульса i-го тела, входящего в состав системы.

Закон сохранения момента импульса для одного тела, момент инерции которого меняется:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2\,,$$

где I_1, I_2 – начальный и конечный моменты инерции; ω_1, ω_2 – начальная и конечная угловые скорости тела.

Пример 6а. Платформа в виде диска радиусом R = 1,5 м и массой m_1=180 кг вращается по инерции около вертикальной оси симметрии с частотой n=10 мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой m_2=60 кг. Какую линейную скорость относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Решение. По закону сохранения момента импульса:

$$(I_1 + I_2)\omega = (I_1 + I_2')\omega'\,, \tag{1}$$

где I_1 – момент инерции платформы; I_2 – момент инерции человека, стоящего в центре платформы; ω – угловая скорость платформы с человеком, стоящим в ее центре; I_2' – момент инерции человека, стоящего на краю платформы; ω'– угловая скорость платформы с человеком, стоящим на ее краю.

Линейная скорость человека, стоящего на краю платформы, связана с угловой скоростью соотношением:

$$v = \omega' R\,. \tag{2}$$

Определив из уравнения (1) ω' и подставив полученное выражение в формулу (2), будем иметь:

$$v = \frac{(I_1 + I_2)\omega R}{I_1 + I_2'} \tag{3}$$

Момент инерции платформы рассчитываем, как для диска; следовательно:

$$I_1 = m_1R^2/2.$$

Момент инерции человека рассчитываем, как для материальной точки. Поэтому I_2=0, $I'_2=m_2R^2$. Угловая скорость платформы до перехода человека

$$\omega = 2\pi n.$$

Подставив все эти данные в формулу (3), получим:

$$v = \frac{m_1}{m_1 + 2m_2}2\pi nR\,.$$

Сделав подстановку значений m_1, m_2, n и R, найдем линейную скорость человека:

$$v = \frac{180}{180 + 2\cdot 60}\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot\frac{10}{60}\cdot 1{,}5\,м/с = 0{,}942\,м/с\,.$$

Пример 6б. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается по инерции с частотой n_1=0,5 с$^{-1}$. Момент инерции I_0 тела человека относительно оси вращения равен 1,6 кг·м^2. В вытянутых в стороны руках человек держит по гантели массой m=2 кг каждая (рис.6.1). Расстояние между гантелями l_1=l,6 м. Определить частоту вращения n_2 скамьи с человеком, когда он опустит руки и расстояние l_2 между гантелями станет равным 0,4 м. Моментом инерции скамьи пренебречь.

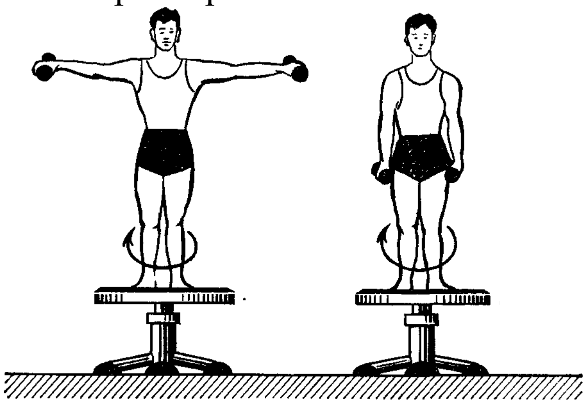

Рис.6.1

Решение. Человек, держащий гантели (рис. 6.1), составляет вместе со скамьей систему, причем суммарный момент сил, действующих на эту систему, равен нулю. Поэтому момент импульса $L=I\omega$ этой системы должен иметь постоянное значение. Следовательно, по закону сохранения момента импульса для данного случая:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \qquad (1)$$

где I_1 и ω_1 – момент инерции тела человека и угловая скорость скамьи и человека с вытянутыми руками; I_2 и ω_2 момент инерции тела человека и угловая скорость скамьи и человека с опущенными руками.

Учитывая, что угловая скорость связана с частотой вращения ($\omega = 2\pi n$), из уравнения (1) можно получить:

$$n_2=(I_1/I_2)n_1. \qquad (2)$$

Момент инерции системы, рассматриваемой в данной задаче, равен сумме момента инерции тела человека I_0 и момента инерции гантелей в руках человека. Так как размер гантели много меньше расстояния от неё до оси вращения, то момент инерции каждой гантели можно определить по формуле момента инерции материальной точки: $I = mr^2$. Следовательно,

$$I_1=I_0+2m(l_1/2)^2; \qquad I_2=I_0+2m(l_2/2)^2,$$

где m – масса каждой гантели; l_1 и l_2 – первоначальное и конечное расстояние между ними. Подставив выражения I_1 и I_2 в уравнение (2), получим:

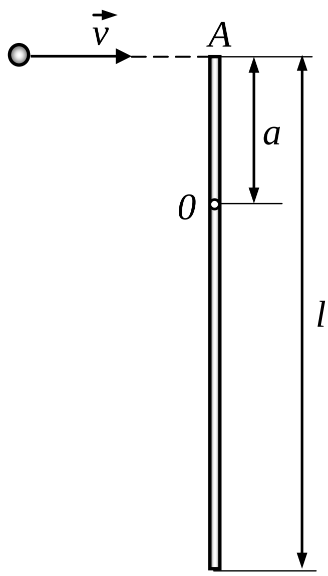

Рис.6.2

$$n_2 = \frac{I_0 + 2m(l_1/2)^2}{I_0 + 2m(l_2/2)^2} n_1 .$$

Выполнив вычисления по полученной формуле, найдем искомую частоту вращения:

$$n_2=1{,}18\ \text{с}^{-1}.$$

Задачи

6.1. Однородный тонкий стержень массой m_1=0,2 кг и длиной l=1 м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси z, проходящей через точку *0* (рис. 6.2). В точку *A* на стержне попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпендикулярно оси *z*) со скоростью v = 10 м/с, и прилипает к стержню. Масса m_2 шарика равна 10 г. Определить угловую скорость ω стержня и линейную скорость нижнего конца стержня в начальный момент времени. Расстояние a между точками *A* и *0* равно четверти длины стержня l.

6.2. Однородный диск массой m_1= 0,2 кг и радиусом R=20 см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси z, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр (точка *0*, рис. 6.3). В точку *A* на краю диска попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпендикулярно оси z) со скоростью v =10 м/с, и прилипает к его поверхности. Масса m_2 шарика равна 10 г. Определить угловую скорость ω диска и линейную скорость точки *B* на диске в начальный момент времени. Вычисления выполнить для a=2R/3, b=R/2.

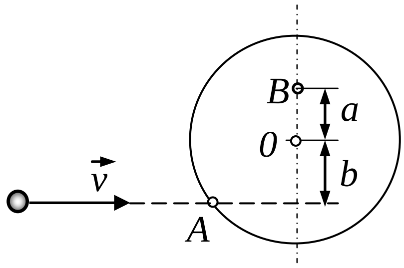

Рис.6.3

6.3. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой m=0,4 кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью v=20 м/с. Траектория мяча проходит на расстоянии r =0,8 м от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья Жуковского с человеком, поймавшим мяч, если суммарный момент инерции I человека и скамьи равен 6 кг·м^2?

6.4. Маховик, имеющий вид диска радиусом R=40 см и массой m_1=48 кг, может вращаться вокруг горизонтальной оси. К его боковой поверхности прикреплен конец нерастяжимой нити, к другому концу которой подвешен груз массой m_2= 0,2 кг (рис. 6.4). Груз был приподнят и затем опущен. Упав свободно с высоты h=2 м, груз натянул нить и благодаря этому привел маховик во вращение. Ка-

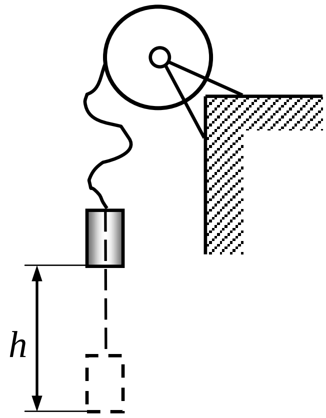

Рис.6.4

кую угловую скорость ω груз сообщил при этом маховику?

6.5. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом R=2 м, стоит человек массой m_1=80 кг. Масса m_2 платформы равна 240 кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Пренебрегая трением, найти, с какой угловой скоростью ω будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью v=2 м/с относительно платформы. Считать момент инерции человека как для материальной точки.

6.6. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси, совпадающей с осью его симметрии. На краю платформы стоит человек массой m_1=60 кг. На какой угол φ повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя его, вернется в исходную точку на платформе? Масса m_2 платформы равна 240 кг. Момент инерции I человека рассчитывать как для материальной точки.

6.7. Платформа в виде диска радиусом R=1 м вращается по инерции вокруг оси симметрии с частотой n_1=6 мин$^{-1}$. На краю платформы стоит человек, масса m которого равна 80 кг. С какой частотой n будет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции I платформы равен 120 кг·м^2. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

6.8. В центре скамьи Жуковского стоит человек и держит в руках стержень длиной l=2,4 м и массой m=8 кг, расположенный вертикально вдоль оси вращения скамейки. Скамья с человеком вращается с частотой n_1=1 с$^{-1}$. С какой частотой n_2 будет вращаться скамья с человеком, если он повернет стержень в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции I человека и скамьи равен 6 кг·м^2.

6.9. Человек стоит на скамье Жуковского и держит в руках стержень, расположенный вертикально вдоль оси вращения скамейки. Стержень служит осью вращения колеса, расположенного на верхнем конце стержня. Скамья неподвижна, колесо вращается с частотой n=10 с$^{-1}$. Радиус R колеса равен 20 см, его масса m=3 кг. Определить частоту вращения n_2 скамьи, если человек повернет стержень на угол 180°? Суммарный момент инерции I человека и скамьи равен 6 кг·м^2. Массу колеса можно считать равномерно распределенной по ободу.

6.10. Платформа, имеющая форму диска радиусом R=2 м, может вращаться около вертикальной оси, проходящей через её центр. На краю платформы стоит человек массой m_1=70 кг с гирей массой m_2=10 кг. С какой угловой скоростью ω начнёт вращаться платформа, если человек бросит гирю горизонтально по касательной к краю платформы со скоростью v=10 м/с? Масса платформы m_3 =150 кг. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

§ 7. МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Основные формулы

Расход жидкости в трубке тока (рис. 7.1):

а) объемный расход $Q_V = v\,S$;

б) массовый расход $Q_m=\rho vS$, где S – площадь поперечного сечения трубки тока; v – скорость жидкости; ρ – её плотность.

Уравнение неразрывности струи:

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 ,$$

где S_1 и S_2 – площади поперечного сечения трубки тока в двух местах; v_1 и v_2 – соответствующие скорости течений; ρ_1 и ρ_2 – плотности.

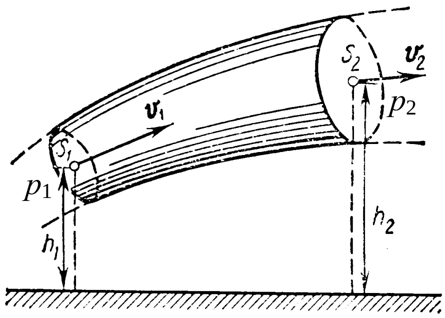

Рис. 7.1

Уравнение Бернулли для идеальной несжимаемой жидкости в общем случае:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 ,$$

где p_1 и p_2 – статические давления жидкости в двух сечениях трубки тока; v_1 и v_2 – скорости жидкости в этих сечениях; $\rho v_1^2/2$ и $\rho v_2^2/2$ – динамические давления жидкости в этих же сечениях; h_1 и h_2 – высоты этих сечений над некоторым уровнем (рис. 7.1).

Уравнение Бернулли в случае, когда оба сечения находятся на одной высоте ($h_1=h_2$), имеет вид:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} .$$

Скорость течения жидкости из малого отверстия в открытом широком сосуде:

$$v = \sqrt{2gh} ,$$

где h – глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости в сосуде.

Примеры решения задач

Пример 7. Вода подается в фонтан из большого цилиндрического бака (рис. 7.2) и бьет из отверстия II со скоростью v_2=12 м/с. Диаметр D бака равен 2 м**,** диаметр d сечения II равен 2 см. Найти: 1) скорость v_1 снижения уровня воды в баке; 2) давление p_1, под которым вода подается в фонтан; 3) высоту h_1 уровня воды в баке и высоту h_2 струи, выходящей из фонтана.

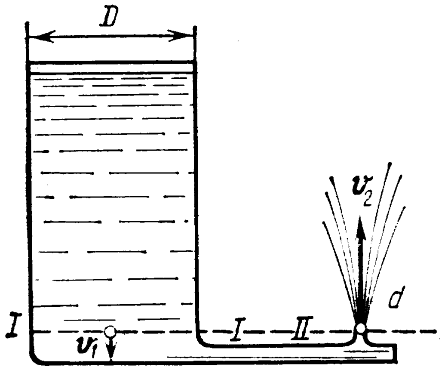

Рис. 7.2

Решение. 1. Проведем сечение I в баке на уровне сечения II фонтана. Так как площадь сечения бака S_1 (сечение *I*, рис. 7.2) много больше площади отверстия S_2 (сечение *II*), то высоту h_1 уровня воды в баке можно считать для малого промежутка времени постоянной, а поток – установившимся. Для установившегося потока несжимаемой жидкости справедливо условие неразрывности струи в следующем виде:

$$v_1S_1=v_2S_2\,,\quad \text{откуда}\quad v_1=v_2\mathrm{S}_2/\mathrm{S}_1,\quad \text{или}$$

$$v_1=v_2\,(\mathrm{d}/\mathrm{D})^2. \tag{1}$$

Подставив в равенстве (1) значения заданных величин и произведя вычисления, найдем скорость снижения уровня воды в баке:

$$v_1=0{,}0012\ \text{м/с}.$$

Как видно из ответа, эта скорость очень мала по сравнению со скоростью струи.

2. Давление p_1, под которым вода подается в фонтан, найдем по уравнению Бернулли. Поскольку рассматриваемые сечения находятся на одном уровне, оно имеет вид:

$$p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_2+\frac{\rho v_2^2}{2}\,. \tag{2}$$

Учтя, что давление p_2 во втором сечении равно атмосферному давлению p_0, из уравнения (2) получим:

$$p_1=p_0+\frac{\rho v_2^2}{2}-\frac{\rho v_1^2}{2}\,. \tag{3}$$

Так как $v_1<<v_2$, то из равенства (3) следует

$$p_1=p_0+\rho v_2^2/2\,.$$

Если рассматривать избыточное давление, равное $\Delta p_1=p_1-p_0$, то после вычислений, произведенных по этой формуле, найдем:

$$\Delta p_1=72\ \text{кПа}.$$

3. Высоту h_1 уровня воды в баке найдем из соотношения $p_1=p_0+\rho g h_1$, откуда

$$h_1=\frac{\Delta p_1}{\rho g}\,.$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем: h_1=7,35 м.

Зная скорость v_2, с которой вода выбрасывается фонтаном, в соответствии с законом сохранения энергии найдем высоту фонтана h_2:

$$h_2=v_2^2/(2g)=7{,}35\ \text{м}.$$

Подчеркнем, что высота уровня воды в баке равна высоте, на которую поднимается фонтан воды. Это замечание справедливо, если пренебречь сопротивлением воздуха.

Задачи

7.1. Вода течет в горизонтально расположенной трубе переменного сечения. Скорость v_1 воды в широкой части трубы равна 20 см/с. Определить скорость v_2 в узкой части трубы, диаметр d_2 которой в 1,5 раза меньше диаметра d_1 широкой части.

7.2. В широкой части горизонтально расположенной трубы нефть течет со скоростью v_1=2 м/с. Определить скорость v_2 нефти в узкой части трубы, если разность давлений в широкой и узкой частях ее равна 6,65 кПа.

7.3. В горизонтально расположенной трубе с площадью S_1 поперечного сечения, равной 20 см^2, течет жидкость. В одном месте труба имеет сужение, в котором площадь S_2 сечения равна 12 см^2. В широкой и узкой частях трубы установлены манометрические трубки, измеряющие статическое давление. Разность Δh уровней в трубках равна 8 см. Определить объемный расход Q_V жидкости.

7.4. Горизонтальный цилиндр насоса имеет диаметр d_1=20 см. В нем движется со скоростью v_1=1 м/с поршень, выталкивая воду через отверстие диаметром d_2=2 см. С какой скоростью v_2 будет вытекать вода из отверстия? Каково будет избыточное давление Δp воды в цилиндре?

7.5. К поршню спринцовки, расположенной горизонтально, приложена сила F=15 Н. Определить скорость v истечения воды из наконечника спринцовки, если площадь S поршня равна 12 см^2.

7.6. Давление p ветра на стену равно 200 Па. Определить скорость v ветра, если он дует перпендикулярно стене. Плотность ρ воздуха равна 1,29 кг/м^3.

7.7. Струя воды диаметром d=2 см, движущаяся со скоростью v=10 м/с, ударяется о неподвижную плоскую поверхность, поставленную перпендикулярно струе. Найти силу F давления струи на поверхность, считая, что после удара о поверхность скорость частиц воды равна нулю.

7.8. Бак высотой h=1,5 м, наполненный до краев водой, стоит на земле. На расстоянии d=1 м от верхнего края в стенке бака образовалось отверстие малого диаметра. На каком расстоянии l от бака падает на землю струя, вытекающая из отверстия?

7.9. Струя воды с площадью S_1 поперечного сечения, равной 4 см^2, вытекает в горизонтальном направлении из брандспойта, расположенного на высоте H=2 м над поверхностью Земли, и падает на эту поверхность на расстоянии l=8 м. Пренебрегая сопротивлением воздуха движению воды, найти избыточное давление Δp воды в рукаве, если площадь S_2 поперечного сечения рукава равна 50 см^2?

7.10. Бак высотой H=2 м, наполненный до краев водой, стоит на земле. На какой высоте h должно быть проделано отверстие в стенке бака, чтобы место падения струи, вытекающей из отверстия на землю, было на максимальном от бака расстоянии?

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

§ 8. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ. ПОТЕНЦИАЛ. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ

Основные формулы

Напряженность электрического поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}},$$

где F – сила, действующая на пробный точечный положительный заряд $q_{пр}$, помещенный в данную точку поля.

Сила, действующая на точечный заряд q, помещенный в электрическое поле напряженностью E:

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом Q на расстоянии r от заряда:

$$E = k\frac{Q}{r^2},$$

где константа $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

Принцип суперпозиции (наложения) электрических полей, согласно которому напряженность результирующего поля, создаваемого в данной точке пространства несколькими точечными зарядами, равна векторной (геометрической) сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n.$$

Потенциал электрического поля есть величина, равная отношению потенциальной энергии $П$ пробного точечного положительного заряда $q_{пр}$, помещенного в данную точку поля, к величине этого заряда:

$$\varphi = \frac{П}{q_{пр}},$$

или потенциал электрического поля есть величина, равная отношению работы A сил поля по перемещению точечного положительного заряда q из данной точки поля в бесконечность к величине этого заряда:

$$\varphi = \frac{A}{q}.$$

При этом потенциал электрического поля в бесконечности принят равным нулю.

Потенциал электрического поля, создаваемый точечным зарядом Q на расстоянии r от заряда:

$$\varphi = k\frac{Q}{r}.$$

Потенциал электрического поля, созданного системой из n точечных зарядов в данной точке, в соответствии с принципом суперпозиции электрических полей равен алгебраической сумме потенциалов φ_1, φ_2, ... , φ_N, создаваемых отдельными точечными зарядами Q_1, Q_2, ..., Q_N:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i .$$

Энергия взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии r друг от друга:

$$W = k\frac{Q_1 Q_2}{r}.$$

Энергия W взаимодействия системы неподвижных точечных зарядов Q_1, Q_2, ..., Q_N выражается формулой:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i\varphi_i ,$$

где φ_i – потенциал поля, которое создаётся всеми остальными N–1 зарядами в точке, где расположен заряд Q_i.

Примеры решения задач

Пример 8а. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами: Q_1=30 нКл и Q_2= –10 нКл. Расстояние d между зарядами равно 20 см. Определить напряженность и потенциал электрического поля в точке A, находящейся на расстоянии r_1=15 см от первого и на расстоянии r_2=10 см от второго заряда.

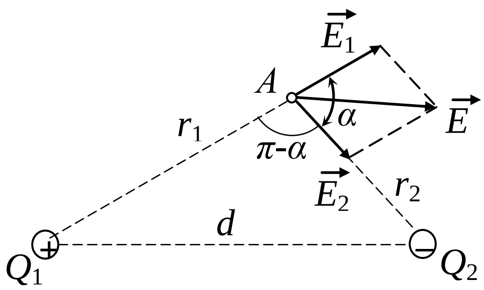

Рис. 8.1

Решение. Согласно принципу суперпозиции электрических полей, каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряженность электрического поля в искомой точке может быть найдена как векторная сумма напряженностей и полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 .$$

Напряженности электрического поля, создаваемого первым и вторым зарядами, соответственно равны:

$$E_1 = k\frac{Q_1}{r_1^2}; \quad E_2 = k\frac{Q_2}{r_2^2}. \tag{1}$$

Направление векторов напряженностей показано на рис.8.1.

Модуль вектора E найдем по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}, \tag{2}$$

где угол α может быть найден из треугольника со сторонами r_1, r_2 и d:

$$\cos\alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

В данном случае во избежание громоздких записей вычислим отдельно значение $\cos\alpha$. По этой формуле найдем: $\cos\alpha = 0{,}25$.

Подставляя выражения E_1 и E_2, вычисленные по формулам (1), в равенство (2) и вынося общий множитель k за знак корня, получим:

$$E = k\sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4} + 2\frac{|Q_1||Q_2|}{r_1^2r_2^2}\cos\alpha}.$$

Подставив значения величин k, Q_1, Q_2, r_1, r_2 и α в последнюю формулу и произведя вычисления, найдем:

$$E = 9\cdot10^9\sqrt{\frac{(30\cdot10^{-9})^2}{0{,}15^4} + \frac{(10\cdot10^{-9})^2}{0{,}1^4} + \frac{30\cdot10^9\cdot10^{-9}}{0{,}15^2\cdot0{,}1^2}\cos\alpha}\ \text{В/м} = 1{,}67\cdot10^4\ \text{В/м}.$$

Потенциал определяем, также исходя из принципа суперпозиции:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

где φ_1 и φ_2 – потенциалы, создаваемые в точке A каждым из зарядов Q_1 и Q_2, т. е.

$$\varphi = k\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right).$$

Произведём вычисления:

$$\varphi = 9\cdot10^9\left(\frac{30\cdot10^{-9}}{0{,}15} + \frac{10\cdot10^{-9}}{0{,}1}\right)В = 2700\,В = 2{,}7\,кВ.$$

Пример 8б. Определить энергию взаимодействия системы из трёх точечных зарядов Q_1=4 нКл, Q_2=5 нКл и Q_3=-3 нКл, расположенных по трём вершинам квадрата (рис.8.2), если его сторона a = 10 см.

Решение. Можно воспользоваться приведённой выше формулой для энергии системы зарядов:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i \varphi_i \ .$$

Но поскольку зарядов всего три, то в этом случае проще рассмотреть энергию системы как сумму энергий взаимодействия трёх пар зарядов:

$$W = k\left(\frac{Q_1Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2Q_3}{r_{23}}\right),$$

где расстояния между зарядами (рис. 8.2) равны, соответственно:

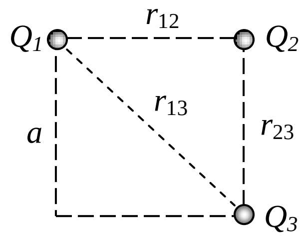

Рис.8.2

$$r_{12} = r_{23} = a, \quad r_{13} = a\sqrt{2}.$$

Тогда можно записать:

$$W = \frac{k}{a}\left(Q_1Q_2 + Q_2Q_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}Q_1Q_3\right).$$

Вычислим искомую энергию, учитывая знаки зарядов:

$$W = \frac{9\cdot 10^9}{0{,}1}\left(4\cdot 10^{-9}\cdot 5\cdot 10^{-9} - 5\cdot 10^{-9}\cdot 3\cdot 10^{-9} - \frac{\sqrt{2}}{2}4\cdot 10^{-9}\cdot 3\cdot 10^{-9}\right) =$$

$$= 3{,}49\cdot 10^{-8} \text{ Дж} = 34{,}9 \text{ нДж}$$

Задачи

8.1-8.10. Определить напряженность и потенциал электрического поля в центре *0* квадрата (рис. 8.3), в вершинах которого находятся заряды Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4, а также энергию взаимодействия данной системы зарядов. Сторона квадрата a = 5 см, величины зарядов указаны в табл. 8.1 в соответствии с номером задачи.

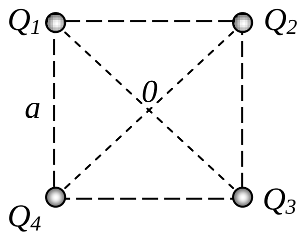

Рис.8.3

Таблица 8.1

№ задачи	Знак и величина заряда, нКл			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
8.1	2	3	1	-4
8.2	3	2	-1	5
8.3	4	-3	2	1
8.4	-1	4	3	2
8.5	4	2	-3	-5
8.6	3	-2	-5	1
8.7	-2	-4	3	5
8.8	5	-2	1	-4
8.9	-3	1	4	-2
8.10	-4	3	-2	5

§ 9. ЗАРЯЖЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Основные формулы

Сила, действующая на точечный заряд q, помещенный в электрическое поле:

$$\vec{F} = q\vec{E} .$$

Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении точечного заряда q из одной точки поля, имеющей потенциал φ_1, в другую, имеющую потенциал φ_2:

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU,$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов (напряжение) между этими точками.

Связь напряженности и напряжения между двумя точками однородного электрического поля, лежащими на прямой, совпадающей с силовой линией поля:

$$E = \frac{U}{d} .$$

Здесь d – расстояние между этими точками.

Примеры решения задач

Пример 9а. Электрон со скоростью v=1,83·10^6 м/с влетел в однородное электрическое поле в направлении, противоположном вектору напряженности поля. Какую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы при столкновении с атомом водорода смог ионизировать его? Энергия ионизации водорода E_i=13,6 эВ.

Решение. Электрон должен пройти такую разность потенциалов U, чтобы его кинетическая энергия T при соударении с атомом водорода была равна энергии ионизации водорода E_i. Работа, совершаемая электрическим полем над электроном, идёт на приращение его кинетической энергии:

$$eU = T - T_0,$$

где T_0 – кинетическая энергия электрона до его вхождения в поле. Таким образом:

$$T = eU + T_0 = E_i .$$

Выразив начальную кинетическую энергию через начальную скорость, получим:

$$eU + \frac{mv^2}{2} = E_i ,$$

откуда определим искомую разность потенциалов (или напряжение):

$$U = \frac{2E_i - mv^2}{2e}.$$

При вычислении учтём, что внесистемная единица энергии электрон-вольт (эВ) – это энергия, которую приобретает частица, имеющая заряд, равный заряду электрона, прошедшая разность потенциалов 1 В, т.е. 1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

В результате получаем: U=4,15 В.

Пример 9б. Электрон без начальной скорости прошел разность потенциалов U_0=10 кВ и влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов U=100 В, по линии AB, параллельной пластинам (рис. 9.1). Расстояние d между пластинами равно 2 см. Длина l_1 пластин конденсатора в направлении полета электрона равна 20 см. Определить расстояние BC на экране P, отстоящем от конденсатора на l_2=1 м.

Решение. Пройдя ускоряющую разность потенциалов U_0, электрон приобретает кинетическую энергию

$$\frac{mv_0^2}{2} = eU_0,$$

откуда можно определить скорость, с которой он влетает в конденсатор:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}. \qquad (1)$$

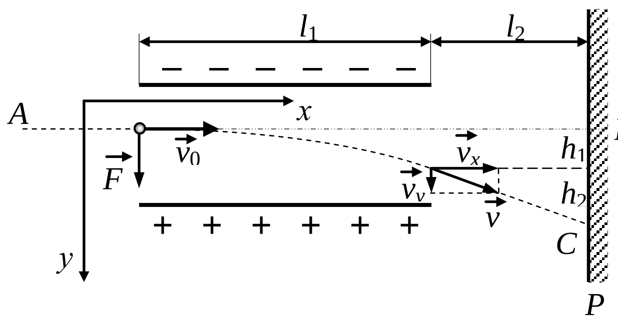

Рис. 9.1

При вхождении электрона в электрическое поле конденсатора на него начинает действовать сила

$$F=eE,$$

где e – заряд электрона, E – напряженность электрического поля. Эта сила вызывает направленное вдоль неё (т.е. вниз, см. рис. 9.1) ускорение a, равное:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}. \qquad (2)$$

Скорость электрона внутри конденсатора определяется этим ускорением:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

В проекциях на горизонтальную и вертикальную оси это уравнение примет вид:

$$v_x = v_0, \quad v_y = at = \frac{eE}{m}t_1.$$

Следовательно, вдоль линии AB скорость электрона в конденсаторе неизменна и равна начальной, а вдоль вертикальной оси к моменту выхода из конденсатора появляется составляющая, определяемая временем прохождения электрона вдоль обкладки конденсатора длиной l_1:

$$t_1 = \frac{l_1}{v_0}, \tag{3}$$

т.е.

$$v_y = \frac{eEl_1}{mv_0}. \tag{4}$$

После выхода из конденсатора электрон будет двигаться равномерно со скоростью v, которую он имел в момент вылета из конденсатора.

Из рис. 9.1 видно, что искомое расстояние $BC=h_1+h_2$, где h_1 - расстояние, на которое сместится электрон в вертикальном направлении во время равноускоренного движения в конденсаторе; h_2 – расстояние, пройденное электроном по вертикали после выхода из конденсатора с постоянной скоростью v_y, определяемой соотношением (4).

Выразим отдельно h_1 и h_2. Пользуясь формулой длины пути при равноускоренном движении, найдем:

$$h_1 = \frac{at_1^2}{2},$$

откуда, используя выражения (2) и (3), получим:

$$h_1 = \frac{eEl_1^2}{2mv_0^2}. \tag{5}$$

Длину отрезка h_2 можно найти из подобия векторного треугольника скоростей и треугольника с катетами l_2 и h_2:

$$\frac{h_2}{l_2} = \frac{v_y}{v_x},$$

откуда с учетом равенства (4) и того, что $v_x=v_0$, определим:

$$h_2 = \frac{eEl_1l_2}{mv_0^2}. \tag{6}$$

Из выражений (5) и (6) найдём искомое расстояние:

$$BC = h_1 + h_2 = \frac{eE}{2mv_0^2} l_1(l_1 + 2l_2). \tag{7}$$

Осталось записать выражение для напряженности однородного электрического поля в конденсаторе:

$$E = \frac{U}{d},$$

где U – напряжение на конденсаторе, d – расстояние между его обкладками, а также использовать выражение (1) для скорости электрона на входе в конденсатор.

Т.е. окончательно:

$$BC = h_1 + h_2 = \frac{U}{4U_0}\frac{l_1(l_1 + 2l_2)}{d}.$$

Подставив значения величин U, U_0, d, l_1 и l_2 в последнее выражение и произведя вычисления, получим: BC = 5,5 см.

Задачи

9.1. Напряжение U между катодом и анодом электронной лампы равно 90 В, расстояние r = 1 мм. С каким ускорением a движется электрон от катода к аноду? Какова скорость v электрона в момент удара об анод? За какое время t электрон пролетает расстояние от катода до анода? Поле считать однородным.

9.2. Протон, начальная скорость v которого равна 100 км/с, влетел в однородное электрическое поле (E=300 В/см) так, что вектор скорости совпал с направлением линий напряженности. Какой путь l должен пройти протон в направлении линий поля, чтобы его скорость удвоилась?

9.3. Электрон, летевший горизонтально со скоростью v=l,6 Мм/с, влетел в однородное электрическое поле с напряженностью E=90 В/см, направленное вертикально вверх. Какова будет по модулю и направлению скорость v электрона через 1 нс?

9.4. Вдоль силовой линии однородного электрического поля движется протон. В точке поля с потенциалом φ_1 протон имел скорость v_1=0,1 Мм/с. Определить потенциал φ_2 точки поля, в которой скорость протона возрастает в $n=2$ раза. Отношение заряда протона к его массе e/m=96 МКл/кг .

9.5. В однородное электрическое поле напряженностью E =1 кВ/М влетает вдоль силовой линии электрон со скоростью v_0= l Мм/с. Определить расстояние l, пройденное электроном до точки, в которой его скорость v_1 будет равна половине начальной.

9.6. Электрон движется вдоль силовой линии однородного электрического поля. В некоторой точке поля с потенциалом φ_1=100 В электрон имел скорость v_1=6 Мм/с. Определить потенциал φ_2 точки поля, в которой скорость v_2 электрона будет равна $0{,}5v_1$.

9.7. Электрон с начальной скоростью v_0=3 Мм/с влетел в однородное электрическое поле напряженностью E=150 В/м. Вектор начальной скорости перпендикулярен линиям напряженности электрического поля. Найти: 1) силу F, действующую на электрон; 2) ускорение a, приобретаемое электроном; 2) скорость v электрона через время t=0,1 мкс.

9.8. Электрон влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора со скоростью v=10 Мм/с, направленной параллельно пластинам. На сколько приблизится электрон к положительно заряженной пластине за время движения внутри конденсатора (поле считать однородным), если расстояние d

между пластинами равно 16 мм, напряжение между ними U=30 В и длина l пластин равна 6 см?

9.9. Электрон влетел в плоский конденсатор, имея скорость v=10 Мм/с, направленную параллельно пластинам. В момент вылета из конденсатора направление скорости электрона составляло угол α=35° с первоначальным направлением скорости. Определить разность потенциалов U между пластинами (поле считать однородным), если длина l пластин равна 10 см и расстояние d между ними равно 2 см.

9.10. Электрон влетел в плоский конденсатор, находясь на одинаковом расстоянии от каждой пластины и имея скорость v=10 Мм/с, направленную параллельно пластинам, расстояние d между которыми равно 2 см. Длина l каждой пластины равна 10 см. Какую наименьшую разность потенциалов U нужно приложить к пластинам, чтобы электрон не вылетел из конденсатора?

§10. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Основные формулы

Плотность тока j, средняя скорость $v_{\partial p}$ упорядоченного движения (скорость дрейфа) носителей заряда q и их концентрация n связаны соотношением:

$$\vec{j} = qn\vec{v}_{\partial p}.$$

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E},$$

где σ – удельная проводимость проводника; E – напряженность электрического поля.

Удельная электрическая проводимость является величиной, обратно пропорциональной удельному сопротивлению (σ=1/ρ), и равна:

$$\sigma = \frac{nq^2\lambda}{2mv_T},$$

где q и m – заряд и масса носителя заряда; n – концентрация носителей заряда; λ – средняя длина их свободного пробега; v_T – средняя скорость хаотического (теплового) движения зарядов. Размерность проводимости – См/м (См – сименс).

Закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме:

$$w = \sigma E^2,$$

где w - объемная плотность тепловой мощности.

Примеры решения задач

Пример 10. По железному проводнику, диаметр сечения которого d=0,6 мм, течет ток I=16 А. Определить среднюю скорость $v_{др}$ направленного движения электронов, считая, что концентрация n свободных электронов равна концентрации n' атомов проводника.

Решение. В металлическом проводнике носителями заряда являются свободные электроны. Средняя скорость их направленного (упорядоченного) движения, т.е. скорость дрейфа можно определить по формуле:

$$v_{др} = l / t, \qquad (1)$$

где t – время, в течение которого все свободные электроны, находящиеся в отрезке проводника между сечениями I и II, пройдя через сечение II (рис. 10.1), перенесут через него заряд $Q=eN$ и создадут ток

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{eN}{t}, \qquad (2)$$

где e – элементарный заряд; N – число электронов в отрезке проводника; l – его длина.

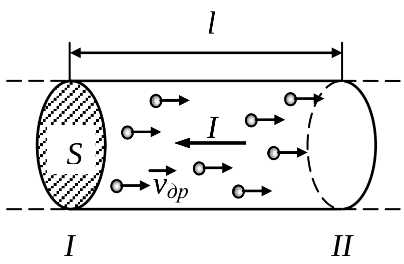

Рис. 10.1

Число свободных электронов в отрезке проводника объемом V можно выразить следующим образом:

$$N=nV=nlS, \qquad (3)$$

где S - площадь сечения проводника.

По условию задачи $n=n'$. Следовательно,

$$n = n' = \frac{N_A}{V_{мол}} = \frac{N_A}{\mu/\rho} = \frac{N_A \rho}{\mu}, \qquad (4)$$

где N_A – постоянная Авогадро; $V_{мол}$ – молярный объем металла; μ – молярная масса металла; ρ – его плотность.

Подставив последовательно выражения n из формулы (4) в равенство (3) и N из формулы (3) в равенство (2), получим:

$$I = \frac{N_A \rho l S e}{\mu t}.$$

Отсюда найдем длину проводника:

$$l = \frac{I \mu t}{N_A \rho S e}.$$

Подставив выражение для l в формулу (1) и выразив площадь S сечения проводника через диаметр d, найдем искомую среднюю скорость направленного движения электронов:

$$v_{др} = \frac{4I\mu}{\pi\, d^2 N_A \rho\, e}.$$

Произведем вычисления по этой формуле:

$$v_{др} = \frac{4 \cdot 16 \cdot 56 \cdot 10^{-3}}{3.14 \cdot (0.6 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} 98 \cdot 10^{-9} 1{,}60 \cdot 10^{-19}}\, м/с = 4{,}20\, мм/с.$$

Задачи

10.1. Сила тока I в металлическом проводнике равна 0,8 А, сечение S проводника 4 мм^2. Принимая, что в каждом кубическом сантиметре металла содержится n=2,5$\cdot$10^{22} свободных электронов, определить среднюю скорость $v_{др}$ их упорядоченного движения.

10.2. Определить среднюю скорость $v_{др}$ упорядоченного движения электронов в медном проводнике при силе тока I=10 А и сечении S проводника, равном 1 мм^2. Принять, что на каждый атом меди приходится два электрона проводимости.

10.3. Плотность тока j в алюминиевом проводе равна 1 А/мм^2. Найти среднюю скорость $v_{др}$ упорядоченного движения электронов, предполагая, что число свободных электронов в 1 см^3 алюминия равно числу атомов в этом объеме.

10.4. Плотность тока в медном проводнике j = 3 А/мм^2. Найти напряженность E электрического поля в проводнике.

10.5. В медном проводнике длиной l=2 м и площадью S поперечного сечения, равной 0,4 мм^2, идет ток. При этом ежесекундно выделяется количество теплоты Q=0,35 Дж. Сколько электронов N проходит за 1 с через поперечное сечение этого проводника?

10.6. В медном проводнике объемом V=6 см^3 при прохождении по нему постоянного тока за время t=1 мин выделилось количество теплоты Q=216 Дж. Вычислить напряженность E электрического поля в проводнике.

10.7. Металлический проводник движется с ускорением a=100 м/с^2. Используя модель свободных электронов, определить напряженность E электрического поля в проводнике.

10.8. Удельная проводимость металла σ=10 МСм/м. Вычислить среднюю длину λ свободного пробега электронов в металле, если концентрация n свободных электронов равна 10^{28} м$^{-3}$. Среднюю скорость v_T хаотического движения электронов принять равной 1 Мм/с.

10.9. Исходя из модели свободных электронов, определить число z соударений, которые испытывает электрон за время t=1 с, находясь в металле, если концентрация n свободных электронов равна 10^{29} м$^{-3}$. Удельную проводимость σ металла принять равной 10 МСм/м.

10.10. Определить объемную плотность тепловой мощности w в металлическом проводнике, если плотность тока j=10 А/мм^2. Напряженность E электрического поля в проводнике равна 1 мВ/м.

§ 11. СИЛА ЛОРЕНЦА

Основные формулы

Сила**,** действующая на заряд q, движущийся со скоростью v в магнитном поле с индукцией B (сила Лоренца), выражается формулой:

$$\vec{F}_Л = q\vec{v} \times \vec{B},$$

или по модулю:

$$F_Л = |q|vB\, sin\alpha,$$

где α – угол, образованный вектором скорости движущейся частицы и вектором индукции магнитного поля.

Примеры решения задач

Пример 11а. Электрон, пройдя из состояния покоя ускоряющую разность потенциалов U=400 В, попал в однородное магнитное поле с индукцией B=1,5 мТл. Определить: 1) радиус R кривизны траектории электрона; 2) частоту n его вращения в магнитном поле. Вектор скорости электрона перпендикулярен линиям индукции.

Решение. 1. Радиус R кривизны траектории электрона определим, исходя из следующих соображений: на движущийся в магнитном поле электрон действует сила Лоренца $F_Л$. Вектор силы Лоренца перпендикулярен вектору скорости v и, следовательно, по второму закону Ньютона сообщает электрону нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

т.е.

$$evB\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}, \tag{1}$$

где e, v, m – заряд, скорость и масса электрона; B – индукция магнитного поля; R – радиус кривизны траектории; α – угол между направлениями векторов скорости и магнитной индукции (в нашем случае α = 90°, sin α =l).

Из формулы (1) найдем:

$$R = \frac{mv}{eB}\,. \qquad (2)$$

Величину скорости определим из кинетической энергии T электрона, которая была приобретена в результате прохождения им ускоряющей разности потенциалов U:

$$T = \frac{mv^2}{2} = eU\,,$$

откуда следует:

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}\,. \qquad (3)$$

Подставляем полученное выражение скорости в уравнение (2) и определяем искомый радиус кривизны:

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}\,.$$

После вычисления по полученной формуле находим: R=45 мм.

2. Для определения частоты вращения воспользуемся формулой, связывающей частоту со скоростью и радиусом кривизны траектории:

$$n = \frac{v}{2\pi R}\,.$$

Подставив в эту формулу R из выражения (2), получаем:

$$n = \frac{1}{2\pi}\frac{eB}{m}\,.$$

Произведя вычисления, находим: $n=4{,}20 \cdot 10^7$ с$^{-1}$.

Пример 11б. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией B=0,03 Тл по окружности радиусом R=10 см. Определить скорость v электрона.

Решение. Движение электрона по окружности в однородном магнитном поле совершается под действием силы Лоренца. Используя полученное в предыдущем примере 11а выражение (2), можно сразу записать:

$$v = \frac{eBR}{m}$$

и, проведя вычисления, получить: $v=5{,}27\cdot10^8$ м/с, что противоречит принципу существования предельной скорости движения материальных объектов, которая не может превышать скорости света в вакууме $c=3\cdot10^8$ м/с.

Следовательно, мы ошиблись, взяв выражение, для получения которого использовалась формула для кинетической энергии $T=mv^2/2$, которая справедлива лишь для относительно малых скоростей ($v \ll c$). В нашем же случае придётся учитывать релятивистские эффекты и использовать соответствующие соотношения.

Поэтому начнём со второго закона Ньютона, согласно которому при движении частицы по окружности произведение её массы на нормальное ускорение равно, в данном случае, силе Лоренца:

$$m\frac{v^2}{R} = evB,$$

откуда найдем импульс электрона:

$$p=mv=eBR. \tag{1}$$

Релятивистский импульс выражается формулой:

$$p = m_o v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_0 c\beta\sqrt{1-\beta^2}\ , \tag{2}$$

где m_0 – масса покоя электрона, β=v/c – его скорость в долях от скорости света.

Сравнив (1) и (2) и выполнив преобразования, получим следующую формулу для определения этой скорости:

$$\beta = \frac{eBR/(m_0 c)}{\sqrt{1+(eBR/(m_0 c))^2}}\ . \tag{3}$$

Поскольку в числитель и знаменатель полученной формулы входит выражение $eBR(m_0\,c)$, удобнее вычислить его отдельно:

$$eBR(m_0\,c) = 1{,}76.$$

Подставив найденное значение отношения в формулу (3), получим окончательно:

$$\beta = 0{,}871,\ \text{или}\ \ v=c\beta = 2{,}61\cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

Таким образом, действительно электрон движется с субсветовой скоростью и является релятивистским.

Задачи

11.1. Ион, несущий один элементарный заряд, движется в однородном магнитном поле с индукцией B=0,015 Тл по окружности радиусом R=10 см. Определить импульс p иона.

11.2. Частица, несущая один элементарный заряд, влетела в однородное магнитное поле с индукцией B=0,5 Тл. Определить момент импульса L, которым обладала частица при движении в магнитном поле, если ее траектория представляла дугу окружности радиусом R=0,2 см.

11.3. Электрон движется в магнитном поле с индукцией B =0,02 Тл по окружности радиусом R=1 см. Определить кинетическую энергию T электрона (в джоулях и электрон-вольтах).

11.4. Заряженная частица влетела перпендикулярно линиям индукции в однородное магнитное поле, созданное в среде. В результате взаимодействия с веществом частица, находясь в поле, потеряла половину своей первоначальной энергии. Во сколько раз будут отличаться радиусы кривизны R траектории начала и конца пути?

11.5. Протон, прошедший ускоряющую разность потенциалов U=600 В, влетел в однородное магнитное поле с индукцией B =0,3 Тл и начал двигаться по окружности. Вычислить ее радиус R.

11.6. Заряженная частица, обладающая скоростью $v=2\cdot10^6$ м/с, влетела в однородное магнитное поле с индукцией B=0,52 Тл. Найти отношение Q/m заряда частицы к ее массе, если частица в поле описала дугу окружности радиусом R =4 см. По этому отношению определить, какая это частица.

11.7. Заряженная частица с энергией T=1 кэВ движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом R=l мм. Найти силу F, действующую на частицу со стороны поля.

11.8. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией B=0,1 Тл перпендикулярно линиям индукции. Определить силу F, действующую на электрон со стороны поля, если радиус R кривизны траектории равен 0,5 см.

11.9. Электрон в однородном магнитном поле с индукцией B=0,1 Тл движется по окружности. Найти силу I эквивалентного кругового тока, создаваемого движением электрона.

11.10. Электрон, влетев в однородное магнитное поле с индукцией B=0,2 Тл, стал двигаться по окружности радиусом R=5 см. Определить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.

§ 12. СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ПРОВОДНИК С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ (СИЛА АМПЕРА)

Основные формулы

Закон Ампера. Сила, действующая на прямолинейный проводник с током в магнитном поле, равна:

$$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B} l,$$

где I – сила тока, B – магнитная индукция поля, l – длина проводника.

Модуль вектора силы определяется выражением:

$$F=IBl\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами I и B.

Сила взаимодействия двух прямых бесконечно длинных параллельных проводников с токами I_1 и I_2, находящихся на расстоянии d друг от друга, рассчитанная на отрезок проводника длиной l, выражается формулой:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l,$$

где магнитная постоянная $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м.

Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a},$$

где a – расстояние от оси проводника.

Примеры решения задач

Пример 12а. По двум параллельным прямым проводам длиной l=2,5 м каждый, находящимся на расстоянии d=20 см друг от друга, текут одинаковые токи I=1 кА. Вычислить силу F взаимодействия токов.

Решение. Взаимодействие двух проводников, по которым текут токи, осуществляется через магнитное поле. Каждый ток создает магнитное поле, которое действует на другой проводник. Предположим, что оба тока I_1 и I_2 текут в одном направлении.

Вычислим силу F_{12}, с которой магнитное поле, созданное током I_1, действует на проводник с током I_2. Поскольку по условию задачи *(l>>d)* проводник можно приближенно рассматривать как бесконечно длинный, то модуль магнитной индукции можно определить соотношением:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}. \tag{1}$$

Согласно закону Ампера, на проводник с током I_2 длиной l_2 действует в магнитном поле сила

$$F_{12}=I_2 B_1 l_2 \sin\alpha.$$

Так как ток I_2 перпендикулярен вектору магнитной индукции B_1 поля, создаваемого первым током I_1, то $\sin\alpha = 1$. Тогда:

$$F_{12}=I_2 B_1 l_2. \tag{2}$$

Подставив в выражение (2) B_1 из формулы (1) и учитывая, что I_1=I_2=I, а l_1=l_2=l, получим:

$$F_{12} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} l .$$

Произведем вычисления:

$$F_{12} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (10^3)^2 \cdot 2{,}5}{2\pi \cdot 0{,}2} \text{ Н} = 2{,}5 \text{ Н}$$

По третьему закону Ньютона, сила F_{21}, действующая на первый проводник со стороны второго, будет равна найденной силе F_{12} по модулю и противоположна по направлению.

Пример 12б. Провод в виде тонкого полукольца радиусом R=10 см находится в однородном магнитном поле (B=50 мТл). По проводу течет ток I=10 А.

Найти силу F, действующую на провод, если плоскость полукольца перпендикулярна линиям магнитной индукции, а подводящие провода находятся вне поля.

Решение. Расположим провод в плоскости чертежа перпендикулярно линиям магнитной индукции (рис. 12.1) и выделим на нем малый элемент dl с током. На этот элемент тока будет действовать по закону Ампера сила, равная:

$$d\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B} \cdot dl \,.$$

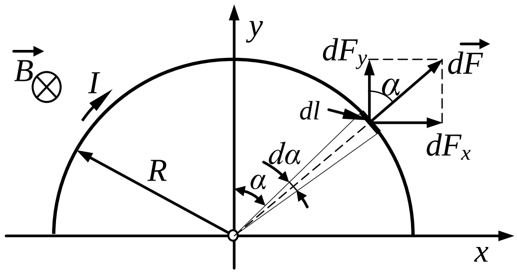

Рис. 12.1

Направление этой силы можно определить по правилу векторного произведения. Модуль силы с учетом того, что угол между направлением тока и направлением магнитной индукции везде равен 90°, равен:

$$dF = IBdl \,. \qquad (1)$$

Выберем координатные оси и разложим силу dF на проекции так, как это изображено на рис. 12.1:

$$dF_x = dF\sin\alpha; \qquad dF_y = dF\cos\alpha.$$

А поскольку длина бесконечно малого отрезка $dl = Rd\alpha$, то проекции можно записать с учетом выражения (1) следующим образом:

$$dF_x = IBR\sin\alpha\, d\alpha; \qquad dF_y = IBR\cos\alpha\, d\alpha.$$

Определим далее составляющие силы F по осям, т.е. F_x и F_y, используя интегрирование по углу α в пределах от $-\pi/2$ до $+\pi/2$ (как это следует из рис. 12.1):

$$F_x = IBR\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\alpha d\alpha = IBR\cos\alpha\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0\,.$$

Как видно из рисунка, этот же результат можно получить из соображений симметрии.

Далее:

$$F_y = IBR\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha = IBR\sin\alpha\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2IBR\,.$$

Таким образом, сила искомая F направлена вдоль оси y и равна по модулю:

$$F = 2IBR$$

Произведем вычисления и получим окончательно:

$$F = 2\cdot10\cdot50\cdot10^{-3}\cdot0{,}1 = 0{,}1 \text{ Н}.$$

Задачи

12.1. Прямой провод, по которому течет ток 1=1 кА, расположен в однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции. С какой силой F действует поле на отрезок провода длиной l=1 м если магнитная индукция B равна 1 Тл?

12.2. Прямой провод длиной l=10 см, по которому течет ток I=20 А, находится в однородном магнитном поле с индукцией B =0,01 Тл. Найти угол α между направлениями вектора магнитной индукции и тока, если на провод действует сила F=10 мН.

12.3. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи I=1 кА. Определить силу F, действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии, равном ее длине.

12.4. Тонкий провод в виде дуги, составляющей треть кольца радиусом R=15 см, находится в однородном магнитном поле (B=20 мТл). По проводу течет ток I=30 А. Плоскость, в которой лежит дуга, перпендикулярна линиям магнитной индукции, и подводящие провода находятся вне поля. Определить силу F, действующую на провод.

12.5. По тонкому проводу в виде кольца радиусом R=20 см течет ток I=100 А. Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено однородное магнитное поле с индукцией B=20 мТл. Найти силу F, которая растягивает кольцо в каждом его сечении.

12.6. Двухпроводная линия состоит из длинных параллельных прямых проводов, находящихся на расстоянии d=4 мм друг от друга. По проводам текут одинаковые токи I=50 А. Определить силу взаимодействия токов, приходящуюся на единицу длины провода.

12.7. Шины генератора представляют собой две параллельные медные полосы длиной l=2 м каждая, отстоящие друг от друга на расстоянии d=20 см. Определить силу F взаимного отталкивания, когда по ним течет ток I =10 кА.

12.8. По двум параллельным проводам длиной l=1 м каждый текут одинаковые токи. Расстояние d между проводами равно 1 см. Токи взаимодействуют с силой F=1 мН. Найти силу тока I в проводах.

12.9. По трем параллельным прямым проводам, находящимся на одинаковом расстоянии a=8 см друг от друга, текут одинаковые по величине токи I=50 А. Вычислить силу F, действующую на отрезок длиной l=1 м каждого провода.

12.10. По трем параллельным прямым проводам, находящимся на одинаковом расстоянии a=10 см друг от друга, текут одинаковые токи I=100 А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить силу F, действующую на отрезок длиной l=1 м каждого провода.

§ 13. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Основные формулы

Закон Био – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r},$$

где dB – магнитная индукция поля, создаваемого элементом dl проводника с током I; μ_0 – магнитная постоянная ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м); r – радиус-вектор, проведенный от элемента проводника к точке, магнитная индукция в которой определяется.

Модуль вектора dB выражается формулой:

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{4\pi r^2} dl,$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$.

Из закона Био – Савара – Лапласа можно получить выражение для величины магнитной индукции поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током в точке, отстоящей на расстоянии r от оси проводника:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Принцип суперпозиции магнитных полей: магнитная индукция результирующего поля равна векторной сумме магнитных индукций складываемых полей, т. е.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \vec{B}_i .$$

В частном случае наложения двух полей:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

а модуль магнитной индукции

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos\alpha},$$

где α – угол между векторами B_1 и B_2.

Примеры решения задач

Пример 13. Два параллельных бесконечно длинных провода, по которым текут в одном направлении одинаковые токи I=60 А, расположены на расстоянии d=10 см друг от друга. Определить магнитную индукцию B в точке A, отстоящей от одного проводника на расстоянии r_1=5 см и от другого – на расстоянии r_2=12 см.

Решение. Для нахождения магнитной индукции в указанной точке A (рис. 13.1) определим направления векторов индукций полей, создаваемых каждым проводником в отдельности, и сложим их геометрически:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 .$$

Модуль индукции найдем по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha} . \qquad (1)$$

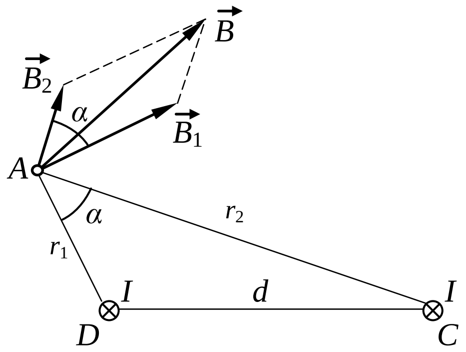

Рис. 13.1

Значения индукций B_1 и B_2 выражаются соответственно через силу тока I и расстояния r_1 и r_2 от провода до точки A:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}; \; B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} . \qquad (2)$$

Подставляя выражения (2) в формулу (1), получим:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2}\cos\alpha} . \qquad (3)$$

Вычисляем $\cos\alpha$ из треугольника со сторонами r_1, r_2, d. По теореме косинусов запишем:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha ,$$

где d – расстояние между проводами. Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2} .$$

Подставив данные, вычислим значение косинуса: $\cos\alpha = 0{,}576$.

Подставив в формулу (3) значения μ_0, I, r_1, r_2 и $\cos\alpha$, найдем:

B=286 мкТл.

13.1-13.10. Магнитное поле создаётся четырьмя длинными прямыми параллельными проводниками с током, оси которых находятся в вершинах квадрата, лежащего в плоскости, перпендикулярной этим осям (рис. 13.2). Сторона квадрата a = 4 см. Определить величину и направление магнитной индукции в точке *0* (центр квадрата). Величины токов указаны в табл. 13.1. Знаком минус обозначены токи, противоположные по направлению токам, указанным на рисунке.

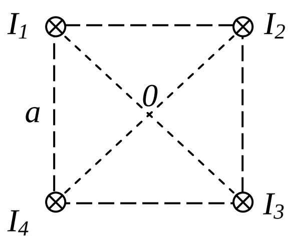

Рис.13.2

Таблица 13.1

№ задачи	Направление и величина тока, А			
	I_1	I_2	I_3	I_4
13.1	2	3	1	-4
13.2	3	2	-1	5
13.3	4	-3	2	1
13.4	-1	4	3	2
13.5	4	2	-3	-5
13.6	3	-2	-5	1
13.7	-2	-4	3	5
13.8	5	-2	1	-4
13.9	-3	1	4	-2
13.10	-4	3	-2	5

§ 14. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Основные формулы

По закону электромагнитной индукции (закону Фарадея – Ленца) электродвижущая сила индукции в контуре равна:

$$\xi_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где Φ – магнитный поток через контур. Для катушки, содержащей N витков:

$$\xi_i = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt},$$

где $\Psi = N\Phi$ – потокосцепление.

Частные случаи применения закона электромагнитной индукции:

а) разность потенциалов U на концах проводника длиной l, движущегося со скоростью v в однородном магнитном поле:

$$U = Blv\sin\alpha,$$

где α – угол между направлением магнитной индукции B и плоскостью, в которой лежат проводник и вектор скорости;

б) электродвижущая сила индукции, возникающая в рамке, содержащей N витков площадью S, при вращении рамки с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B:

$$\xi_i = BNS\omega\sin\varphi = BNS\omega\sin\omega t,$$

где $\varphi = \omega t$ – мгновенное значение угла между вектором B и вектором нормали к плоскости рамки.

Заряд Q, протекающий в контуре, равен:

$$Q = \frac{\Delta\Phi}{R},$$

где R – сопротивление контура; $\Delta\Phi$ — изменение магнитного потока.

Электродвижущая сила самоиндукции, возникающая в замкнутом контуре при изменении силы тока в нем:

$$\xi_c = -L\frac{dI}{dt},$$

где L – индуктивность контура.

Индуктивность длинного соленоида:

$$L = \mu_0 \mu n^2 V,$$

где μ – магнитная проницаемость среды внутри соленоида, V – объем пространства внутри соленоида, n – число витков соленоида, приходящееся на единицу его длины l (плотность намотки): $n=N/l$, N – общее число витков.

Примеры решения задач

Пример 14а. В однородном магнитном поле с индукцией B=0,1 Тл равномерно вращается рамка, содержащая N=1000 витков, с частотой n=10 с$^{-1}$. Площадь S рамки равна 150 см^2. Определить мгновенное значение ЭДС, соответствующее углу поворота рамки 30°.

Решение. Мгновенное значение ЭДС индукции, определяется основным уравнением электромагнитной индукции Фарадея – Максвелла:

$$\xi_i = -N\frac{d\Phi}{dt}.$$

При вращении рамки магнитный поток Ф, пронизывающий рамку в момент времени t, изменяется по закону $\Phi=BS\cos\omega t$, где B – магнитная индукция; S – площадь рамки; ω – угловая частота. Подставив в исходную формулу выражение для Ф и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\xi_i = NBS\omega \sin \omega t.$$

Подставив в полученное уравнение значение циклической частоты, которая связана с частотой n вращения соотношением $\omega=2\pi n$, получим:

$$\xi_i = 2\pi nNBS \sin \omega t.$$

Произведя вычисления и найдем искомую ЭДС:

$$\xi_i = 47{,}1 \text{ В}.$$

Пример 14б. Обмотка соленоида состоит из одного слоя плотно прилегающих друг к другу витков медного провода диаметром d=0,2 мм. Диаметр соленоида D=5 см. По соленоиду течет ток I=1 А. Определить заряд Q, который протечет через обмотку, если ее концы замкнуть накоротко. Толщиной изоляции пренебречь.

Решение. Заряд dQ, который протекает по проводнику за время dt при силе тока I, определяется равенством:

$$dQ = Idt\,.$$

Подставим в это равенство выражение силы тока I через ЭДС индукции и сопротивление R соленоида, т. е.

$$I = \xi_c / \mathrm{R}.$$

Но ЭДС связана со скоростью изменения потокосцепления Ψ по закону Фарадея – Ленца:

$$\xi_c = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}\,,$$

тогда

$$dQ = -\frac{d\Psi}{R}\,.$$

Интегрируя, получаем:

$$Q = -\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{R}\,.$$

Потокосцепление Ψ пропорционально силе тока в соленоиде. Следовательно, $\Psi_1 = LI_0$; $\Psi_2 = 0$, так как Ψ_2 соответствует тому моменту времени, когда ток в цепи обратится в нуль. Подставив выражения Ψ_1 и Ψ_2 в формулу (3), получим $Q = \Psi_1/R$, или

$$Q = \frac{I_0 L}{R}\,.$$

Для определения заряда, протекающего через обмотку соленоида, следует найти индуктивность L соленоида и сопротивление R его обмотки, которые выражаются формулами:

$$L = \mu_0 n^2 V = \mu_0\frac{N^2}{l_1^2}l_1 S_1 = \mu_0\frac{N^2}{l_1}S_1 = \mu_0\frac{\mu_0\pi d_1^2 N^2}{4l_1}; \quad R = \rho\frac{l}{S} = \frac{4\rho l}{\pi d^2}\,.$$

где μ_0 – магнитная постоянная; N – число витков; l_1 – длина соленоида; S_1 – площадь сечения соленоида; ρ – удельное сопротивление провода; l – длина провода; S – площадь сечения провода; d – диаметр провода; d_1 – диаметр соленоида.

Подставив найденные выражения L и R в формулу для искомого заряда, получим:

$$Q = \frac{I_0 L}{R} = \frac{\mu_0 N^2 \pi d_1^2}{4l_1 \cdot 4\rho l}\pi d^2 I_0\,.$$

Заметим, что длина провода l может быть выражена через диаметр d_1 соленоида соотношением $l=\pi d_1 N$, где N – число витков. Тогда полученной формуле можно придать вид:

$$Q = \frac{\mu_0 \pi N d_1 d^2}{16 \rho l_1} I_0 .$$

Но отношение l_1/N равно диаметру провода, если считать, что витки плотно прилегают друг к другу. Следовательно,

$$Q = \frac{\mu_0 \pi}{16 \rho} d d_1 I_0 .$$

Произведя вычисления, получим: Q=363 мкКл.

Задачи

14.1. Магнитный поток Φ=40 мВб пронизывает замкнутый контур. Определить среднее значение ЭДС индукции, возникающей в контуре, если магнитный поток изменится до нуля за время Δt=2 мс.

14.2. Прямой провод длиной l=40 см движется в однородном магнитном поле со скоростью v=5 м/с перпендикулярно линиям индукции. Разность потенциалов между концами провода при этом U=0,6 В. Вычислить индукцию B магнитного поля.

14.3. В однородное магнитное поле с индукцией $B=1$ Тл помещен перпендикулярно силовым линиям поля прямой провод длиной l=20 см, концы которого замкнуты вне поля. Сопротивление R всей цепи равно 0,1 Ом. Найти силу F, которую нужно приложить к проводу, чтобы перемещать его перпендикулярно линиям индукции со скоростью v=2,5 м/с.

14.4. Прямой провод длиной l=10 см помещен в однородное магнитное поле перпендикулярно его силовым линиям. Магнитная индукция поля B=1 Тл. Концы провода замкнуты проводами, находящимися вне поля. Сопротивление всей цепи R =0,4 Ом. Какая мощность P потребуется для того, чтобы двигать провод перпендикулярно линиям индукции со скоростью v=20 м/с?

14.5. В однородном магнитном поле с индукцией B=0,4 Тл в плоскости, перпендикулярной линиям индукции поля, вращается стержень длиной l=10 см. Ось вращения проходит через один из концов стержня. Определить разность потенциалов U на концах стержня при частоте вращения n=16 с$^{-1}$.

14.6. Рамка площадью S=200 см^2 равномерно вращается с частотой n=10 с$^{-1}$ относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля (B=0,2 Тл). Каково среднее значение ЭДС индукции за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменится от нуля до максимального значения?

14.7. В однородном магнитном поле с индукцией B=0,35 Тл равномерно с частотой n=480 мин$^{-1}$ вращается рамка, содержащая N=500 витков площадью

S=50 см^2. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Определить максимальную ЭДС индукции, возникающую в рамке.

14.8. Катушка площадью S=100 см^2 содержит N=10^3 витков провода сопротивлением R_1=12 Ом. К концам обмотки катушки подключено внешнее сопротивление R_2=20 Ом. Катушка равномерно вращается в однородном магнитном поле (B=0,1 Тл) с частотой n=8 с$^{-1}$. Определить максимальную мощность $P_{\max}$ переменного тока в цепи.

14.9. Проволочный виток радиусом r=4 см, имеющий сопротивление R=0,01 Ом, находится в однородном магнитном поле с индукцией B=0,04 Тл. Плоскость рамки составляет угол α=30° с линиями магнитной индукции поля. Какой заряд Q протечет по витку, если магнитное поле исчезнет?

14.10. Проволочное кольцо радиусом r=10 см лежит на столе. Какой заряд Q протечет по кольцу, если его повернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца R=1 Ом. Вертикальная составляющая индукции B магнитного поля Земли равна 50 мкТл.

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

§ 15. ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ.

Основные формулы

Формула Эйнштейна для фотоэффекта:

а) в общем случае

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega = A_{вых} + T_{\max} ,$$

где ε – энергия фотона, падающего на поверхность металла; $A_{вых}$ – работа выхода электрона из металла; $T_{\max}$ – максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона;

б) в случае, если энергия фотона много больше работы выхода ($h\nu >> A_{вых}$),

$$h\nu = T_{\max} , \text{ или } \hbar\omega = T_{\max} .$$

Максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона в двух случаях (нерелятивистском и релятивистском) выражается различными формулами:

а) если фотоэффект вызван фотоном, имеющим незначительную энергию ($h\nu = \hbar\omega \le 5$ кэВ), то

$$T_{\max} = \frac{m_0 v_{\max}^2}{2} ,$$

где m_0 – масса покоя электрона;

б) если фотоэффект вызван фотоном, обладающим большой энергией ($h\nu = \hbar\omega >> 5$ кэВ), то

$$T_{\max} = (m - m_0)c^2,$$

где m_0 – масса покоя электрона, m – его релятивистская масса:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{\max}^2}{c^2}}}.$$

Красная граница фотоэффекта – граничная длина волны электромагнитного излучения, т.е. максимальная длина волны, при которой еще возможен фотоэффект:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A_{вых}},$$

или

$$\nu_0 = \frac{A_{вых}}{h}, \quad \omega_0 = \frac{A_{вых}}{\hbar},$$

где ν_0 и ω_0 – минимальные частота и циклическая частота излучения.

Примеры решения задач

Пример 15а. Определить максимальную скорость $v_{\max}$ фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра: 1) ультрафиолетовым излучением с длиной волны λ_1 =0,155 мкм; 2) γ-излучением с длиной волны λ_2=2,47 пм.

Решение. Максимальную скорость фотоэлектронов определим из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\varepsilon = A_{вых} + T_{\max}. \tag{1}$$

Энергия фотона вычисляется по формуле $\varepsilon = hc/\lambda$. Для серебра $A_{вых}$ =4,7 эВ (табл.8 Приложения).

Кинетическая энергия фотоэлектрона в зависимости от того, какая скорость ему сообщается, может быть выражена или классической формулой:

$$T = \tfrac{1}{2} m_0 v^2 \tag{2}$$

или релятивистской:

$$T = (m - m_0)c^2. \tag{3}$$

Скорость фотоэлектрона зависит от энергии фотона, вызывающего фотоэффект: если энергия фотона ε много меньше энергии покоя электрона $E_0 = m_0 c^2$, то может быть применена формула (2). Если же ε сравнима по размеру с E_0, то вычисление по формуле (2) приводит к грубой ошибке. В этом случае кинетическую энергию фотоэлектрона необходимо выражать формулой (3).

1. В формулу энергии фотона $\varepsilon = hc/\lambda$ подставим значения величин h, c, λ и, произведя вычисления, для ультрафиолетового излучения получим:

$$\varepsilon_1 = 1{,}28 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 8 \text{ эВ}.$$

Это значение энергии фотона много меньше энергии покоя электрона

(0,51 МэВ). Следовательно, для данного случая максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона в формуле (1) может быть выражена классической формулой (2), из которой получается:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_1 - A_{вых})}{m_0}}\,. \qquad (4)$$

Подставив числовые значения в формулу (4), найдем максимальную скорость:

$$v_{\max} = 1{,}08 \cdot 10^6 \text{ м/с} = 1{,}08 \text{ Мм/с}.$$

2. Вычислим теперь энергию фотона γ-излучения:

$$\varepsilon_2 = hc/\lambda_2 = 8{,}04 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 0{,}502 \text{ МэВ}.$$

Работа выхода электрона ($A_{вых}$ = 4,7 эВ) пренебрежимо мала по сравнению с энергией γ-фотона, поэтому можно принять, что максимальная кинетическая энергия электрона равна энергии фотона:

$$T_{\max} = \varepsilon_2 = 0{,}502 \text{ МэВ}.$$

Так как в данном случае кинетическая энергия электрона сравнима с его энергией покоя, то для вычисления скорости электрона следует взять релятивистскую формулу кинетической энергии,

$$T = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right),$$

где $E_0 = m_0c^2$, $\beta = v/c$.

Выполнив преобразования, найдем:

$$\beta = \frac{\sqrt{(2E_0 + T)T}}{E_0 + T}\,.$$

Сделав вычисления, получим: β = 0,755. Следовательно, максимальная скорость фотоэлектронов, вырываемых γ-излучением, равна:

$$v_{\max} = c\,\beta = 2{,}26 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 226 \text{ Мм/с}.$$

Пример 15б. Определить красную границу λ_0 фотоэффекта для цезия, если при облучении его поверхности фиолетовым светом длиной волны λ=400 нм максимальная скорость $v_{\max}$ фотоэлектронов равна 0,65 Мм/с.

Решение. При облучении светом, длина волны λ_0 которого соответствует красной границе фотоэффекта, скорость, а, следовательно, и кинетическая энергия фотоэлектронов равны нулю. Поэтому уравнение Эйнштейна для фотоэффекта в случае красной границы запишется в виде:

$$\varepsilon = A_{вых}, \quad \text{или} \quad hc/\lambda_0 = A_{вых}.$$

Отсюда:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A_{вых}}\,.$$

Работу выхода для цезия определим с помощью уравнения Эйнштейна:

$$A_{вых} = \varepsilon - T = \frac{hc}{\lambda} - \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Подставим числовые значения величин: h=6,62·10^{-34} Дж·с; c = 3·10^{8} м/с; λ=400 нм=4·10^{-7} м; m=9,11·10^{-31} кг; v = 6,5·10^{5} м/с.

Подставив эти значения величин в формулу (2) и вычислив, получим:

$$A=3{,}05\cdot 10^{-19}\text{ Дж} = 2{,}19\text{ эВ}.$$

Для определения красной границы фотоэффекта подставим значения A, h и c в формулу для длины волны λ_0 и вычислим её:

$$\lambda_0=651\text{ нм}.$$

Задачи

15.1. Определить работу выхода A электронов из натрия, если красная граница фотоэффекта λ_0=500 нм.

15.2. Будет ли наблюдаться фотоэффект, если на поверхность серебра направить ультрафиолетовое излучение с длиной волны λ = 300 нм?

15.3. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта λ_0 = 307 нм и максимальная кинетическая энергия $T_{\max}$ фотоэлектрона равна 1 эВ?

15.4. На поверхность лития падает монохроматический свет (λ=310 нм) Чтобы прекратить эмиссию электронов, нужно приложить задерживающую разность потенциалов U не менее 1,7 В. Определить работу выхода $A_{вых}$.

15.5. Для прекращения фотоэффекта, вызванного облучением ультрафиолетовым светом платиновой пластинки, нужно приложить задерживающую разность потенциалов U_1=3,7 В. Если платиновую пластинку заменить другой пластинкой, то задерживающую разность потенциалов придется увеличить до 6 В. Определить работу выхода $A_{вых}$ электронов с поверхности этой пластинки.

15.6. На цинковую пластинку падает монохроматический свет с длиной волны λ=220 нм. Определить максимальную скорость v_{max} фотоэлектронов.

15.7. Определить длину волны λ ультрафиолетового излучения, падающего на поверхность некоторого металла, при максимальной скорости фотоэлектронов, равной 10 Мм/с. Работой выхода электронов из металла пренебречь.

15.8. Определить максимальную скорость v_{max} фотоэлектронов, вылетающих из металла под действием γ-излучения с длиной волны λ=0,3 нм.

15.9. Определить максимальную скорость v_{max} фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении γ-фотонами с энергией ε=1,53 МэВ.

15.10. Максимальная скорость v_{max} фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении его γ-фотонами, равна 291 Мм/с. Определить энергию ε γ-фотонов.

§ 16. СТРОЕНИЕ АТОМА. АТОМ ВОДОРОДА

Основные формулы

Энергия E_n электрона в атоме водорода квантуется, т.е. может принимать только дискретный ряд значений и определяется главным квантовым числом n:

$$E_n = -\frac{k^2 m e^4}{2\hbar^2 n^2},$$

где m и e – масса и заряд электрона, $\hbar$ – постоянная Планка, n – главное квантовое число (n = 1,2,3, ..), k – электрическая константа, равная:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}.$$

Состояние электрона в атоме описывает ψ – функция, которая в сферической системе координат (r, θ, φ) имеет вид:

$$\psi = \psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)$$

и содержит три целочисленных параметра – квантовые числа n, l, m (главное, орбитальное, магнитное), которые могут принимать следующие значения:

$n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$; $l = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$; $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l$.

В атомной физике принята система условных обозначений состояния электрона с различными значениями орбитального квантового числа $\boldsymbol{l}$:

Квантовое число $\boldsymbol{l}$	0	1	2	3	4	5	6	7
Состояние	*s*	*p*	*d*	*f*	*g*	*h*	*i*	*k*

Электрон обладает также собственным моментом импульса – *спином* S, проекция которого на физически выделенную ось также квантуется:

$$S_z = m_s \hbar,$$

где $m_s = \pm s$, $s = ½$ – спиновое квантовое число.

Полное обозначение квантового состояния содержит два символа: первый в виде числа указывает значение квантового числа n, а второй в виде буквы – значение числа l (см. таблицу выше). Например, электрон, находящийся в состоянии с n=3 и l=2, обозначается 3d; 3d^2 означает, что таких электронов в атоме 2, и т. д.С учетом этих обозначений уровни энергии в атоме водорода изображают в виде диаграммы (рис 16.1).

При переходе электрона с одного уровня энергии на другой происходит испускание или поглощение кванта энергии в виде фотона, энергия которого определяется разностью энергий соответствующих состояний:

$$h\nu = \hbar\omega = E_{ni} - E_{nj}.$$

Испущенный или поглощенный фотон обладает моментом импульса. Поэтому закон сохранения момента импульса накладывает ограничение на переходы в виде *правила отбора*: возможны переходы между состояниями, для которых выполняется условие:

$$\Delta l = \pm 1.$$

На рис. 16.1 показаны переходы из состояния 4d в состояния 3p и 2p, а затем из этих состояний – в основное состояние 1s.

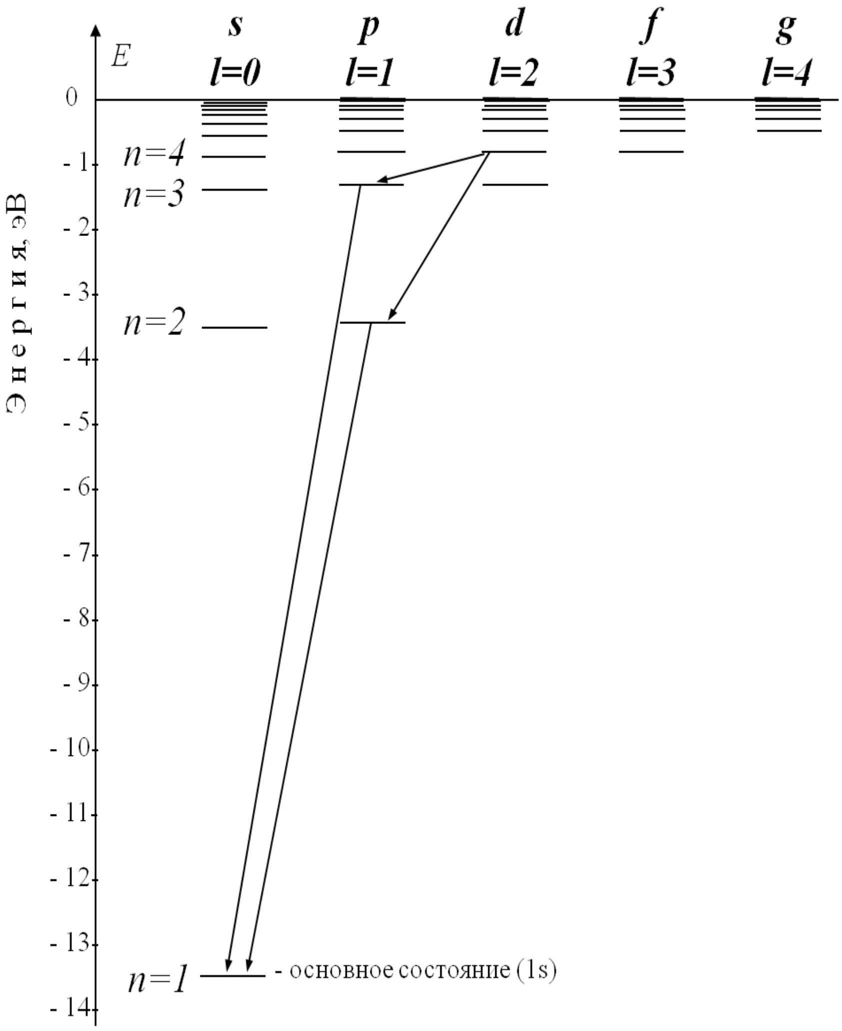

Рис. 16.1

Задачи

16.1 – 16.10. В атоме водорода электрон находится в возбуждённом состоянии, указанном в табл. 16.1. Определите, какая энергия выделяется или поглощается атомом при переходе электрона в другое, указанное в таблице состояние. Укажите, какой процесс (выделение или поглощение энергии) происходит при таком переходе. Покажите данный переход на диаграмме состояний электрона в атоме водорода.

Таблица 16.1

№ задачи	Начальное состояние	Конечное состояние
16.1	3p	6d
16.2	4f	3d
16.3	5d	2p
16.4	4p	2s
16.5	3s	2p
16.6	5p	6d
16.7	3d	2p
16.8	4s	6p
16.9	6f	4d
16.10	5g	7f

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

§ 17. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Основные формулы

Количество вещества, содержащегося в теле (системе):

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

где N – число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т.п.), составляющих тело (систему); N_A – число Авогадро:

$$N_A = 6{,}02\cdot10^{23}\ \text{моль}^{-1} = 6{,}02\cdot10^{26}\ \text{кмоль}^{-1}.$$

Молярная масса вещества:

$$\mu = \frac{M}{\nu},$$

где M – масса однородного тела (системы); ν – количество вещества.

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона):

$$pV = \frac{M}{\mu}RT,$$

где p – давление газа; V – его объём; M – масса газа; μ – его молярная масса; T – термодинамическая температура; R – универсальная газовая постоянная: R = 8,31 Дж/(моль·К) = 8,31·10^3 Дж/(кмоль·К).

Примеры решения задач

Пример 17. В баллоне объемом V = 10 л находится гелий под давлением p_1=l МПа при температуре T_1=300 К. После того как из баллона был израсходован гелий массой m=10 г, температура в баллоне понизилась до T_2=290 К. Определить давление p_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Решение. Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева – Клапейрона, применив его дважды – к начальному и конечному состояниям газа. Для начального состояния уравнение имеет вид:

$$p_1V = \frac{M_1}{\mu}RT_1, \tag{1}$$

а для конечного состояния –

$$p_2V = \frac{M_2}{\mu}RT_2, \tag{2}$$

где M_1 и M_2 – массы гелия в начальном и конечном состояниях, μ – его молярная масса.

Выразим массы M_1 и M_2 гелия из уравнений (1) и (2):

$$M_1 = \frac{\mu\, p_1 V}{RT_1}; \tag{3}$$

$$M_2 = \frac{\mu\, p_2 V}{RT_2}. \tag{4}$$

Вычитая из уравнения (3) уравнение (4), получим:

$$m = M_1 - M_2 = \frac{\mu V}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right).$$

Отсюда найдем искомое давление:

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} - \frac{mRT_2}{\mu V}. \tag{5}$$

Молярная масса гелия μ= 4 кг/кмоль. Подставив значения всех необходимых величин в выражение (5), получим:

$$p_2 = 10^6 \frac{290}{300} - \frac{10\cdot 10^{-3}\cdot 8{,}31\cdot 10^3\cdot 300}{4\cdot 10\cdot 10^{-3}} = 3{,}64\cdot 10^5 \text{ Па} = 364 \text{ кПа}.$$

Задачи

17.1. В цилиндр длиной l=1,6 м, заполненный воздухом при нормальном атмосферном давлении p_0, начали медленно вдвигать поршень площадью S=200 см^2. Определить силу F, которая будет действовать на поршень, если его остановить на расстоянии l_1=10 см от дна цилиндра.

17.2. Колба вместимостью V=300 см^2, закрытая пробкой с краном, содержит разреженный воздух. Для измерения давления в колбе горлышко колбы погрузили в воду на незначительную глубину и открыли кран, в результате чего в колбу вошла вода массой m=292 г. Определить первоначальное давление p в колбе, если атмосферное давление p_0=100 кПа.

17.3. При нагревании идеального газа на ΔT=1 К при постоянном давлении объем его увеличился на 1/350 первоначального объема. Найти начальную температуру T газа.

17.4. Полый шар вместимостью V=10 см^3, заполненный воздухом при температуре T_1=573 К, соединили трубкой с чашкой, заполненной ртутью. Определить массу m ртути, вошедшей в шар при остывании воздуха в нем до температуры T_2=293 К. Изменением вместимости шара пренебречь.

17.5. Оболочка воздушного шара вместимостью V=800 м^3 целиком заполнена водородом при температуре T_1=273 К. На сколько изменится подъемная сила шара при повышении температуры до T_2=293 К? Считать вместимость V оболочки неизменной и внешнее давление нормальным. В нижней части оболочки имеется отверстие, через которое водород может выходить в окружающее пространство.

17.6. В оболочке сферического аэростата находится газ объемом V=1500 м3, заполняющий оболочку лишь частично. На сколько изменится подъемная сила аэростата, если газ в аэростате нагреть от T_0 =273 К до T=293 К? Давления газа в оболочке и окружающего воздуха постоянны и равны нормальному атмосферному давлению.

17.7. Оболочка воздушного шара имеет вместимость V=1600 м^3. Найти подъемную силу F водорода, наполняющего оболочку, на высоте, где давление p=60 кПа и температура T=280 К. При подъеме шара водород может выходить через отверстие в нижней части шара.

17.8. В баллоне вместимостью V=25 л находится водород при температуре T=290 К. После того как часть водорода израсходовали, давление в баллоне понизилось на Δp=0,4 МПа. Определить массу m израсходованного водорода.

17.9. Оболочка аэростата вместимостью V=1600 м^3, находящегося на поверхности Земли, на k=7/8 наполнена водородом при давлении p_1=100 кПа и температуре T=290 К. Аэростат подняли на некоторую высоту, где давление p_2=80 кПа и температура T_2=280 К. Определить массу Δm водорода, вышедшего из оболочки при его подъеме.

17.10. Газ при температуре T=309 К и давлении p=0,7 МПа имеет плотность ρ=12 кг/м^3. О каком газе идёт речь?

§ 18. ТЕПЛОЁМКОСТЬ

Основные формулы

Теплоемкость тела (системы):

$$C = \frac{dQ}{dT},$$

где δQ – получаемое телом (системой) элементарное количество теплоты, вызывающее повышение его температуры на величину dT.

Молярная теплоемкость: $c_\mu = \dfrac{dQ}{\nu\, dT}$, где $\nu = \dfrac{M}{\mu}$ – количество вещества, с

M – его масса, μ – молярная масса.

Удельная теплоемкость вещества $c_{уд}$ и её связь с молярной теплоемкостью c_μ:

$$c_{уд} = \frac{dQ}{M\, dT} = \frac{dQ}{\mu\nu\, dT} = \frac{c_\mu}{\mu}.$$

Молярные теплоемкости идеального газа при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны:

$$c_V = \frac{i}{2}R; \quad c_p = \frac{i+2}{2}R,$$

где i – число степеней свободы молекулы газа, R – универсальная газовая постоянная.

Уравнение Майера: $c_p - c_V = R$.

Показатель адиабаты:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{i+2}{i}.$$

Примеры решения задач

Пример 18а. Вычислить удельные теплоемкости неона и водорода при постоянных объеме (c_V) и давлении (c_p), принимая эти газы за идеальные.

Решение. Удельные теплоемкости идеальных газов выражаются формулами

$$c_V^{уд} = \frac{c_V}{\mu} = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}; \qquad (1)$$

$$c_p^{уд} = \frac{c_p}{\mu} = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}; \qquad (2)$$

Для неона (одноатомный газ) i_1=3, μ_1=20·10^{-3} кг/моль.

Подставив в формулы (1) и (2) значения i_1, μ_1 и R и произведя вычисления, найдем:

$$c_{V1} = 624 \text{ Дж/(кг·К)}; \quad c_{p1} = 1{,}04 \text{ кДж/(кг·К)}.$$

Для водорода (двухатомный газ): i_2=5, μ_2=2·10^{-3} кг/моль.

Вычисление по формулам (1) и (2) дает следующие значения удельных теплоемкостей водорода:

$$c_{V2} = 10{,}4 \text{ кДж/(кг·К)}; \; c_{p2} = 14{,}6 \text{ кДж/(кг·К)}.$$

Пример 18б. Вычислить удельные теплоемкости c_V и c_p смеси неона и водорода. Массовые доли газов соответственно равны ω_1=0,8 и ω_2=0,2. Значения удельных теплоемкостей газов взять из предыдущего примера.

Решение. Удельную теплоемкость смеси при постоянном объеме c_V найдем из следующих рассуждений. Теплоту, необходимую для повышения температуры смеси на ΔT, выразим двумя соотношениями:

$$Q = c_V (M_1+M_2)\, \Delta T,$$

где c_V – удельная теплоемкость смеси; M_1 – масса неона; M_2 – масса водорода и

$$Q = (c_{V1}\cdot M_1 + c_{V1}\cdot M_2)\, \Delta T$$

где c_{V1} и c_{V2} – удельные теплоемкости неона и водорода соответственно.

Приравняв правые части выражений (1) и (2) и разделив обе части полученного равенства на ΔT, найдем:

$$c_V = c_{V1}\frac{M_1}{M_1+M_2} + c_{V2}\frac{M_1}{M_1+M_2}.$$

Отношения $\omega_1=M_1/(M_1+M_2)$ и $\omega_1=M_2/(M_1+M_2)$ выражают массовые доли соответственно неона и водорода. С учетом этих обозначений последняя формула примет вид:

$$c_V = c_{V1}\,\omega_1 + c_{V2}\,\omega_2.$$

Подставив в эту формулу числовые значения величин, найдем:

$$c_V=2{,}58\ \text{кДж/(кг·К)}.$$

Рассуждая таким же образом, получим формулу для вычисления удельной теплоёмкости смеси при постоянном давлении:

$$c_p = c_{p1}\,\omega_1 + c_{p2}\,\omega_2.$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем:

$$c_p=3{,}73\ \text{кДж/(кг·К)}.$$

Задачи

18.1. Разность удельных теплоемкостей $c_p - c_V$ некоторого двухатомного газа равна 260 Дж/(кг·К). Найти молярную массу μ газа, его удельные теплоемкости c_V и c_p.

18.2. Каковы удельные теплоемкости c_V и c_p смеси газов, содержащей кислород массой M_1=10 г и азот массой M_2=20 г?

18.3. Определить удельную теплоемкость c_v смеси газов, содержащей V_1=5 л водорода и V_2=3 л гелия. Газы находятся при одинаковых условиях.

18.4. Определить удельную теплоемкость c_p смеси кислорода и азота, если количество вещества первого компонента ν_1 = 2 моль, а количество вещества второго – ν_2 = 4 моль.

18.5. В баллоне находятся аргон и азот. Определить удельную теплоемкость c_V смеси этих газов, если массовые доли аргона (ω_1) и азота (ω_2) одинаковы и равны ω=0,5.

18.6. Смесь газов состоит из хлора и криптона, взятых при одинаковых условиях и в равных объемах. Определить удельную теплоемкость c_p смеси.

18.7. Определить удельную теплоемкость c_V смеси ксенона и кислорода, если количества вещества газов в смеси одинаковы и равны ν.

18.8. Найти показатель адиабаты γ для смеси газов, содержащей гелий массой M_1=10 г и водород массой M_2=4 г.

18.9. Смесь газов состоит из аргона и азота, взятых при одинаковых условиях и в одинаковых объемах. Определить показатель адиабаты γ такой смеси.

18.10. Найти показатель адиабаты γ смеси газов, содержащей кислород и аргон, если количества вещества того и другого газа в смеси одинаковы и равны ν.

§ 19. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Основные формулы

Первое начало термодинамики в общем случае записывается в виде:

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q – количество теплоты, сообщённое газу; ΔU – изменение его внутренней энергии; A – работа, совершаемая газом против внешних сил. Или в дифференциальной форме:

$$dQ = dU = dA\,.$$

Внутренняя энергия идеального газа:

$$U = N <\varepsilon> \quad \text{или} \quad U = \nu\, c_V T,$$

где $<\varepsilon>$ – средняя кинетическая энергия молекулы; N – число молекул газа; ν – количество вещества.

Работа, совершаемая газом, в общем случае вычисляется по формуле:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV\,,$$

где V_1 – начальный объем газа; V_2 – его конечный объем.

Работа газа при изохорическом процессе (V=const) равна нулю:

$$A_V = 0;$$

при изобарическом процессе (p=const):

$$A_p = p\,(V_2 - V_1);$$

при изотермическом процессе (T=const):

$$A_T = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}\,.$$

Уравнение Пуассона для адиабатического процесса:

$$pV^{\gamma} = const.$$

Показатель адиабаты:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{i+2}{i}\,,$$

где c_p и c_V – молярные теплоемкости идеального газа соответственно при постоянном объеме и постоянном давлении, i – число степеней свободы молекулы газа.

Работа при адиабатическом процессе:

$$A_{ад} = \nu \frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right],$$

где T_1 – начальная температура газа.

Примеры решения задач

Пример 19а. Определить количество теплоты, поглощаемой водородом массой M=0,2 кг при нагревании его от температуры t_1=0°C до температуры t_2=100 °C при постоянном давлении. Найти также изменение внутренней энергии газа и совершаемую им работу.

Решение. Количество теплоты Q, поглощаемое газом при изобарическом нагревании, определяется по формуле:

$$Q = M\, c_p^{уд}\, \Delta T, \qquad (1)$$

где M – масса нагреваемого газа; $c_p^{уд}$ – его удельная теплоемкость при постоянном давлении; ΔT – изменение температуры газа.

Используем выражение для удельной теплоёмкости

$$c_p^{уд} = \frac{c_p}{\mu} = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu},$$

подставив которое в первую формулу, получим:

$$Q = M\,\frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}\Delta T\,.$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем: Q=291 кДж.

Внутренняя энергия выражается формулой:

$$U = \frac{i}{2}\frac{M}{\mu}RT\,,$$

следовательно, изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{M}{\mu}R\Delta T\,.$$

После подстановки в эту формулу числовых значений величин и вычислений получим: ΔU = 208 кДж.

Работу расширения газа определим из первого начала термодинамики: Q=ΔU+A, откуда

$$A = Q - \Delta U.$$

Подставив значения Q и ΔU, найдем: A = 83 кДж.

Пример 19б. Кислород занимает объем V_1=1 м^3 и находится под давлением p_1=200 кПа. Газ нагрели сначала при постоянном давлении до объема V_2=3 м^2, а затем при постоянном объеме до давления p_2=500 кПа. Построить график процесса и найти: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную им работу A; 3) количество теплоты Q, переданное газу.

Решение. Построим график процесса (рис. 19.1). На графике точками 1, 2, 3 обозначены состояния газа, характеризуемые параметрами (p_1, V_1, T_1), (p_1, V_2, T_2), (p_2, V_2, T_3).

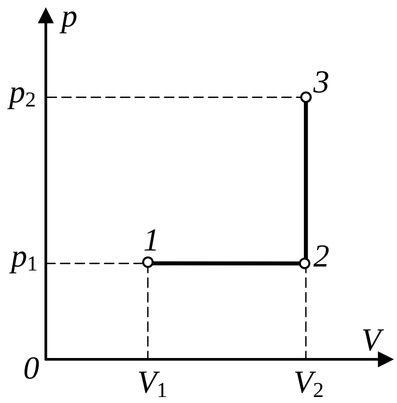

Рис. 19.1

1. Изменение внутренней энергии газа при переходе его из состояния 1 в состояние 3 выражается формулой:

$$\Delta U = c_V M \Delta T, \qquad (1)$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; M – масса газа; ΔT – разность температур, соответствующих конечному 3 и начальному 1 состояниям, т.е. $\Delta T = T_3 - T_1$. Так как

$$c_V^{уд} = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu},$$

где μ — молярная масса газа, то уравнение (1) принимает вид:

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{M}{\mu}R(T_3 - T_1). \qquad (2)$$

Температуры T_1 и T_3 выразим из уравнения Менделеева – Клапейрона ($pV = \frac{M}{\mu}RT$):

$$T_1 = \frac{\mu\, p_1 V_1}{MR}, \qquad T_3 = \frac{\mu\, p_2 V_2}{MR}.$$

С учетом этого равенство (2) перепишем в виде:

$$\Delta U = \frac{i}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1).$$

Подставим сюда значения величин (учтем, что для кислорода, как двухатомного газа, i=5) и произведем вычисления:

$$\Delta U = 3{,}25 \text{ МДж}.$$

2. Полная работа, совершаемая газом, равна $A = A_1 + A_2$, где A_1 – работа на участке 1–2; A_2 – работа на участке 2–3.

На участке 1–2 давление постоянно (p=const). Работа в этом случае выражается формулой $A_1 = p_1 \Delta V = p_1(V_2 — V_1)$. На участке 2–3 объем газа не изменяется и, следовательно, работа газа на этом участке равна нулю (A_2=0). Таким образом,

$$A = A_1 = p_1(V_2 - V_1).$$

Подставив в эту формулу значения физических величин, произведем вычисления:

$$A=0,4 \text{ МДж}.$$

3. Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты Q, переданное газу, равно сумме работы A, совершенной газом, и изменению ΔU внутренней энергии:

$$Q = A + \Delta U, \quad \text{или} \quad Q=3,65 \text{ МДж}.$$

Задачи

19.1. Азот массой M=5 кг, нагретый на ΔT=150 К, сохранил неизменный объем V. Найти: 1) количество теплоты Q, сообщенное газу; 2) изменение ΔU внутренней энергии; 3) совершенную газом работу A.

19.2. Водород занимает объем V_1=10 м^3 при давлении p_1=100 кПа. Газ нагрели при постоянном объеме до давления p_2=300 кПа. Определить: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) работу A, совершенную газом; 3) количество теплоты Q, сообщенное газу.

19.3. Баллон вместимостью V=20 л содержит водород при температуре T=300 К под давлением p=0,4 МПа. Каковы будут температура T_1 и давление p_1, если газу сообщить количество теплоты Q=6 кДж?

19.4. Кислород при неизменном давлении p=80 кПа нагревается. Его объем увеличивается от V_1=l м^3 до V_2=3 м^3**.** Определить: 1) изменение ΔU внутренней энергии кислорода; 2) работу A, совершенную им при расширении; 3) количество теплоты Q, сообщенное газу.

19.5. Азот нагревался при постоянном давлении, причем ему было сообщено количество теплоты Q=21 кДж. Определить работу A, которую совершил при этом газ, и изменение ΔU его внутренней энергии.

19.6. Кислород массой M=2 кг занимает объем V_1=1 м^3 и находится под давлением p_1=0,2 МПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема V_2=3 м^3**,** а затем при постоянном объеме до давления p_2=0,5 МПа. Найти: 1) изменение внутренней энергии ΔU газа; 2) совершенную им работу A; 3) количество теплоты Q, переданное газу. Построить график процесса.

19.7. Гелий массой M=l г был нагрет на ΔT=100 К при постоянном давлении p. Определить: 1) количество теплоты Q, переданное газу; 2) работу A расширения; 3) приращение ΔU внутренней энергии газа.

19.8. Азот массой m=200 г расширяется изотермически при температуре T=280 К, причем объем газа увеличивается в два раза. Найти: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную при расширении газа работу A; 3) количество теплоты Q, полученное газом.

19.9. В вертикальном цилиндре под поршнем находится азот массой M=0,6 кг, занимающий объем V_1=1,2 м^3 при температуре T=560 К. В результате подвода теплоты газ расширился и занял объем V_2=4,2 м^3, причем температура осталась неизменной. Найти: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную им работу A; 3) количество теплоты Q, сообщенное газу.

19.10. Водород массой M=10 г нагрели на ΔT=200 К, причем газу было передано количество теплоты Q=40 кДж. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа и совершенную им работу A.

§ 20. ЦИКЛЫ. КПД ЦИКЛА

Основные формулы

Термический коэффициент полезного действия тепловой машины (КПД цикла) в общем случае равен:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом (газом) от нагревателя; A – работа, совершаемая газом за цикл; Q_2 – количество теплоты, переданное рабочим телом холодильнику.

КПД цикла Карно:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодильника.

Примеры решения задач

Пример 20а. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества ν=1 моль, находится под давлением p_1=250 кПа и занимает объем V_1=10 л. Сначала газ изохорно нагревают до температуры T_2=400 К. Далее, изотермически расширяя, доводят его до первоначального давления. После этого путем изобарного сжатия возвращают газ в начальное состояние. Определить термический КПД η цикла.

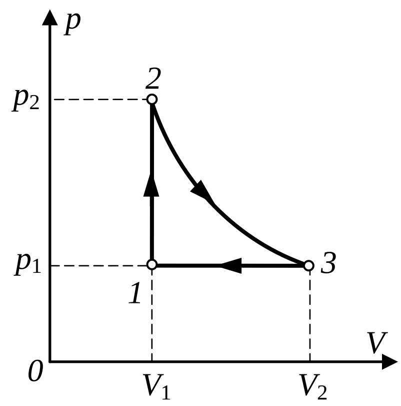

Рис. 20.1

Решение. Для наглядности построим сначала график цикла, который состоит из изохоры, изотермы и изобары. В координатах p,V этот цикл имеет вид, представленный на рис. 20.1. Характерные точки цикла обозначим 1, 2, 3.

Термический КПД любого цикла определяется выражением:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \tag{1}$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное газом за цикл от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, отданное газом за цикл охладителю; A – работа, совершаемая газом за цикл.

Эта работа на графике в координатах p, V (рис. 20.1) изображается площадью цикла.

Рабочее вещество (газ) получает количество теплоты Q_1 на двух участках: $Q_{1\text{-}2}$ на участке 1–2 (изохорический процесс, при котором газ не совершает работы, но его температура повышается вместе с давлением и , следовательно, увеличивается внутренняя энергия) и $Q_{2\text{-}3}$ на участке 2–3 (изотермический процесс, внутренняя энергия не меняется, но газ совершает работу). Таким образом,

$$Q_1 = Q_{1\text{-}2} + Q_{2\text{-}3}. \qquad (2)$$

Количество теплоты, полученное газом при изохорном процессе, в соответствии с первым началом термодинамики равно изменению его внутренней энергии:

$$Q_{1-2} = \nu c_V R(T_2 - T_1)\,, \qquad (3)$$

где c_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме; ν – количество вещества.

Количество теплоты, полученное газом при изотермическом процессе, равно работе этого процесса:

$$Q_{2-3} = \nu R T_2 \ln\frac{V_2}{V_1}\,, \qquad (4)$$

где V_2 – объем, занимаемый газом при температуре T_2 и давлении p_1 (точка 3 на графике).

На изобарическом участке 3–1 газ отдает количество теплоты Q_2, равное:

$$Q_2 = Q_{3-1} = \nu c_p R(T_2 - T_1)\,, \qquad (5)$$

где c_p — молярная теплоемкость газа при изобарическом процессе.

Подставим в формулу (1) найденные значения Q_1 из уравнения (2) с учетом соотношений (3) и (4), а также Q_2 из уравнения(5):

$$\eta = 1 - \frac{\nu c_p R(T_2 - T_1)}{\nu c_V R(T_2 - T_1) + \nu R T_2 \ln(V_2/V_1)}.$$

В полученном выражении заменим отношение объемов V_2/V_1 согласно закону Гей-Люссака отношением температур ($V_2/V_1 = T_2/T_1$) и выразим c_V и c_p через число степеней свободы молекулы:

$$c_V = \frac{i}{2}R; \quad c_p = \frac{i+2}{2}R\,,$$

после сокращения на ν и $R/2$ получим:

$$\eta = 1 - \frac{(i+2)(T_2 - T_1)}{i(T_2 - T_1) + 2T_2\ln(T_2/T_1)}.$$

Температуру T_1 начального состояния газа найдем, воспользовавшись уравнением Менделеева – Клапейрона:

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R},$$

откуда получим: $T_1 = 300$ К.

Подставив значения i, ν, T_1, T_2 и R и произведя вычисления, найдем:

$$\eta = 0{,}041 = 4{,}1\ \%.$$

Пример 20б. Нагреватель тепловой машины, работающей по циклу Карно, имеет температуру t_1=200°С. Определить температуру T_2 холодильника, если при получении от нагревателя количества теплоты Q_1=1 Дж машина совершает работу A=0,4 Дж. Потери на трение и теплоотдачу не учитывать.

Решение. Температуру охладителя найдем, используя выражение для термического КПД машины, работающей по циклу Карно:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

С другой стороны КПД любого цикла, в том числе и цикла Карно, равен:

$$\eta = \frac{A}{Q_1},$$

т.е. термический КПД тепловой машины выражает отношение произведенной ею механической работы A к количеству теплоты Q_1, которое получено рабочим телом тепловой машины из внешней среды (от нагревателя). Решив совместно оба уравнения, найдем:

$$T_2 = T_1\left(1 - \frac{A}{Q_1}\right).$$

Учтём, что T_1=473 К, после подстановки исходных данных получим:

$$T_2 = 284\ \text{К}.$$

Задачи

20.1. Идеальный двухатомный газ, содержащий количество вещества ν=l моль, совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Наименьший объем V_{min}=10 л, наибольший V_{max}=20 л, наименьшее давление p_{min}=246 кПа, наибольшее p_{max}=410 кПа. Построить график цикла. Определить температуру T газа для характерных точек цикла и его термический КПД η.

20.2. Идеальный многоатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем наибольшее давление газа в два раза больше наименьшего, а наибольший объем в четыре раза больше наименьшего. Определить термический КПД η цикла.

20.3. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 2/3 количества теплоты Q_1, полученного от нагревателя, отдает холодильнику. Температура T_2 холодильника равна 280 К. Определить температуру T_1 нагревателя.

20.4. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_2 холодильника равна 290 К. Во сколько раз увеличится КПД цикла, если температура нагревателя повысится от T'_1=400 К до T''_2=600 К?

20.5. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_1 нагревателя в три раза выше температуры T_2 холодильника. Нагреватель передал газу количество теплоты Q_1=42 кДж. Какую работу A совершил газ?

20.6. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_1 нагревателя равна 470 К, температура T_2 холодильника равна 280 К. При изотермическом расширении газ совершает работу A=100 Дж. Определить термический КПД η цикла, а также количество теплоты Q_2**,** которое газ отдает холодильнику при изотермическом сжатии.

20.7. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_1 нагревателя в четыре раза выше температуры T_2 холодильника. Какую долю ω количества теплоты, получаемого за один цикл от нагревателя, газ отдает холодильнику?

20.8. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, получив от нагревателя количество теплоты Q_1=4,2 кДж, совершил работу A=590 Дж. Найти термический КПД η этого цикла. Во сколько раз температура T_1 нагревателя больше температуры T_2 холодильника?

20.9. Идеальный газ совершает цикл Карно. Работа A_1 изотермического расширения газа равна 5 Дж. Определить работу A_2 изотермического сжатия, если термический КПД η цикла равен 0,2.

20.10. Наименьший объем V_1 газа, совершающего цикл Карно, равен 153 л. Определить наибольший объем V_3, если объем V_2 в конце изотермического расширения и объем V_4 в конце изотермического сжатия равны соответственно 600 и 189 л.

ПРИЛОЖЕНИЯ.

1. Формулы дифференциального и интегрального исчислений

$\frac{d}{dx}(uv)=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$	$\int x^m dx=\frac{1}{m+1}x^{m+1}$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$	$\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}$
$\frac{d(x^m)}{dx}=mx^{m-1}$	$\int\frac{dx}{x}=\ln x$
$\frac{d(e^x)}{dx}=e^x$	$\int e^x dx=e^x$
$\frac{d(\ln x)}{dx}=\frac{1}{x}$	$\int\sin x dx=-\cos x$
$\frac{d(a^x)}{dx}=a^x\ln a$	$\int\cos x dx=\sin x$
$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$	$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|$
$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$	$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left\|tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right\|$
$\frac{d}{dx}tgx=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\int\sin^2 x dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$
$\frac{d}{dx}ctgx=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int\cos^2 x dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$

2. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Множитель	Приставка	Обозначение приставки		Множитель	Приставка	Обозначение	
		Международное	Русское			Международное	Русское
10^{18}	экса	E	Э	10^{-1}	деци	d	д
10^{15}	пета	P	П	10^{-2}	санти	c	с
10^{12}	тера	T	Т	10^{-3}	милли	m	м
10^{9}	гига	G	Г	10^{-6}	микро	μ	мк
10^{6}	мега	M	М	10^{-9}	Нано	n	н
10^{3}	кило	k	к	10^{-12}	пико	P	п
10^{2}	гекто	h	г	10^{-15}	фемто	f	ф
10^{1}	дека	da	да	10^{-18}	атто	a	а

Примечание. Приставки *гекто, дека, деци* и *санти* допускается применять только в наименованиях кратных и дольных единиц, уже получивших широкое распространение (гектар, декалитр, дециметр, сантиметр и др.).

Кроме десятичных кратных и дольных единиц допущены к использованию кратные и дольные единицы времени, плоского угла и относительных величин, не являющихся десятичными. Например, единицы времени (минута, час, сутки), единицы плоского угла (градус, минута, секунда).

ТАБЛИЦЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

3. Некоторые астрономические величины

Радиус Земли. . . . . $6{,}37 \cdot 10^{6}$ м
Масса Земли. . . . . $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца. . . . . $6{,}95 \cdot 10^{8}$ м
Масса Солнца. . . . . $1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны. . . . . $1{,}74 \cdot 10^{6}$ м
Масса Луны. . . . . $7{,}33 \cdot 10^{30}$ кг
Расстояние от центра Земли до центра Солнца. . . . $1{,}49 \cdot 10^{11}$ м
То же, до центра Луны. . . . . $3{,}84 \cdot 10^{8}$ м
Период обращения Луны вокруг Земли. . . . . 27,3сут = $2{,}36 \cdot 10^{6}$ с

4. Плотность ρ твердых тел и жидкостей (Мг/м^3, или г/см^3)

Твердые тела

Алюминий. 2.70
Висмут. 9,80
Вольфрам. 19,3
Железо(чугун, сталь). 7,87
Золото. 19,3
Каменная соль. 2,20
Латунь. 8,55
Марганец. 7,40
Медь. 8,93
Никель. 8,80
Платина. 21,4
Свинец. 11,3
Серебро. 10,5
Уран. 18,7

Жидкости (при 15 ^oC)

Вода(дистиллированная при 4°C).. 1,00
Глицерин. .1,26
Керосин. 0,8
Масло(оливковое, смазочное). 0,9
Масло касторовое. 0,96
Ртуть. 13,6
Сероуглерод. 1,26
Спирт. 0,8
Эфир. 0,7

5. Плотность ρ газов при нормальных условиях (кг/м^3)

Азот. 1,25
Аргон. 1,78
Водород 0,09
Воздух. 1,29
Гелий. 0,18
Кислород. 1,43

6. Диэлектрическая проницаемость ε

Вода. 81
Масло(трансформаторное) 2,2
Парафин. 2,0
Слюда. 7,0
Стекло. 7,0
Фарфор. 5,0
Эбонит. 3,0

7. Удельное сопротивление ρ и температурный коэффициент α проводников

Вещество	ρ при 20^0С, нОм·м	α, $^0C^{-1}$
Железо	98	$6{,}2 \cdot 10^{-3}$
Медь	17	$4{,}2 \cdot 10^{-3}$
Алюминий	26	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$
Графит	$3{,}9 \cdot 10^{3}$	$-0{,}8 \cdot 10^{-3}$

8. Работа выхода электронов из металла

Металл	*A*, эВ	*A*, 10^{-19}, Дж
Калий	2,2	3,5
Литий	2,3	3,7
Натрий	2,5	4,0
Платина	6,3	10,1
Серебро	4,7	7,5
Цинк	4,0	6,4

9. Основные физические постоянные
(округленные с точностью до трех значащих цифр)

Нормальное ускорение свободного падения. . . $g = 9{,}81$ м/с^2
Гравитационная постоянная . . . . $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3(кг·с^2)
Число Авогадро . . . . $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная . . . . $R= 8{,}31$ Дж/(К·моль)
Постоянная Больцмана . . . . $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд . . . . $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона . . . . $m_e =9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Удельный заряд электрона . . . . $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Скорость света в вакууме. . . . . $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ м/с
Постоянная Планка . . . . $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
. . . . $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Комптоновская длина волны электрона . . . . $\lambda_C = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м