МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

В.В. Андрианов

П О С О Б И Е

к практическим занятиям

по дисциплине

УПРАВЛЕНЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

для студентов специальности 06.11.00

МОСКВА - 2004

Методические рекомендации издаются в соответствии с учебной программой для студентов специальности 06.11.00.

Рассмотрены и одобрены на заседаниях кафедры Экономика ГА от 6 марта 2004 г. и Методического совета факультета АО по экономическим дисциплинам от 4 апреля 2004 .

Практическое занятие 1

Разработка управленческих решений матричными алгоритмами

Постановка задачи 1.1.

Задана матрица А. Необходимо алгоритмом Жордана-Гаусса, (1.5) или [1, с.121], вычислить матрицу A^{-1} .

Постановка задачи 1.2.

Предприятие, состоит из цехов, производящих продукты питания: двух основных цехов и одного вспомогательного. Каждый цех выпускает один вид продукции. В табл.1.1 даны расходные коэффициенты (прямые затраты) $A = a_{ij}$ - единиц продукции i-го цеха, используемых для выпуска единицы продукции k-го цеха, а также число реализуемых единиц продукции y_i i-го цеха (конечный продукт).

Расходные коэффициенты Таблица 1.1.

Цех	Прямые затраты матрица $A = a_{ij}$			Конечный продукт y_i
1	0.0	0.1	0.0	300
2	0.1	0.0	0.1	200
3	0.0	0.1	0.2	400

В табл.1.2 приведены нормы расхода ресурсов: a - сырья a, b - сырья б, q - топлива и t - трудозатрат на 1 ед. продукции каждого цехам, а также c - стоимость единицы каждого ресурса. Взаимосвязи между цехами отображаются уравнением

$$x_i - (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3) = y_i \qquad (1.1)$$

или

$$X - A * X = Y . \qquad (1.2)$$

Нормы расхода и стоимости единицы ресурсов Таблица 1.2.

Вид ресурса	Нормы расхода ресурсов $R=r_{ij}$			Цена 1 ед.
	1	2	3	c
Сырье а	1.2	2.4	0.9	3.0
Сырье б	0.0	0.7	1.3	10.0
Топливо	2.3	1.5	2.0	2.0
Трудозатраты	10.0	15.0	20.0	1.1

Необходимо определить:

X - валовой выпуск продукции для каждого цеха X = (x1, x2, x3);

Y - производственную программу цехов Y = (y1, y2, y3);

К - коэффициенты косвенных затрат;

P - суммарный расход сырья а, сырья б, топлива и трудовых ресурсов;

RR - коэффициенты прямых затрат сырья а, сырья б, топлива и труда на единицу конечной продукции каждого цеха;

PC - расход сырья, топлива и трудовых ресурсов по цехам;

PR - расходы по цехам на всю производственную программу;

PZ - производственные затраты на единицу конечной продукции;

Преобразуем (1.2) в $(E - A)*X = Y$ и $X = (E-A)^{-1}*Y = S^{-1*} Y$. (1.3)

Матрица $S^{-1}=(E-A)^{-1}$ содержит коэффициенты полных производственных затрат $S=(E - A)$.

Алгоритм решения задачи 1.2.

Шаг 1. Вычисляем матрицу $S = (E - A)$. (1.4)

$$\begin{vmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0.00 & 0.10 & 0.00 \\ 0.10 & 0.00 & 0.10 \\ 0.00 & 0.10 & 0.20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.00 & 0.10 & 0.00 \\ -0.10 & 1.00 & -0.10 \\ 0.00 & -0.10 & 0.80 \end{vmatrix}$$

Шаг 2. Вычисляем матрицу коэффициентов полных производственных затрат $S^{-1} = (E - A)^{-1}$, обращая матрицу (E - A) (см. рис.1.1)

Матрица (E-A)	**[1.00]**	-0.10	0.00	1.00	0.00	0.00	Матрица (E)
	-0.10	0.00	-0.10	0.00	1.00	0.00	
	0.00	-0.00	0.80	0.00	0.00	1.00	
Итерация 1	1.00	-0.10	0.00	1.00	0.00	0.00	
	0.00	**[0.99]**	-0.10	0.10	1.00	0.00	(1.5)
	0.00	-0.10	0.80	0.00	0.00	1.00	
Итерация 2	1.00	0.00	-0.01	1.01	0.10	0.00	
	0.00	1.00	-0.10	0.10	1.01	0.00	
	0.00	0.00	**[0.79]**	0.01	0.10	1.00	
Итерация 3	1.00	0.00	0.00	1.01	0.10	0.01	
	0.00	1.00	0.00	0.10	1.02	0.13	Матрица
Матрица (E)	0.00	0.00	1.00	0.01	0.13	1.27	$S^{-1}=(E - A)^{-1}$

Рис.1.1 Обращение матрицы алгоритмом Жордана-Гаусса

Шаг 3. Вычисляем валовой выпуск продукции цехов $(E - A)^{-1} * Y = X$. (1.6)

$$\begin{vmatrix} 1.01 & 0.10 & 0.01 \\ 0.10 & 1.02 & 0.13 \\ 0.01 & 0.13 & 1.27 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 329 \\ 286 \\ 536 \end{vmatrix}$$

Шаг 4. Программу производства (табл.1.3) $z_{ik}= \sum a_{ik} * x_{k.}$ (1.7)

Программа производства Таблица 1.3.

Цех	Внутреннее потребление			Итого	Конечный Продукт	Валовой продукт
	1	2	3			
1	0	29	0	29	300	329
2	43	0	43	86	200	286
3	0	45	91	136	400	536

Шаг 5. Матрицу коэффициентов косвенных затрат $(E - A)^{-1}$-A=K. (1.8)

$$\begin{vmatrix} 1.01 & 0.10 & 0.01 \\ 0.10 & 1.02 & 0.13 \\ 0.01 & 0.13 & 1.27 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0.00 & 0.10 & 0.00 \\ 0.10 & 0.00 & 0.10 \\ 0.00 & 0.10 & 0.20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.01 & 0.00 & 0.01 \\ 0.00 & 1.02 & 0.03 \\ 0.01 & 0.03 & 1.07 \end{vmatrix}$$

Шаг 6. Расход сырья а и в, топлива и труда R*X=P.   (1.9)

$$\begin{vmatrix} 1.2 & 2.4 & 0.9 \\ 0.0 & 0.7 & 1.3 \\ 2.3 & 1.5 & 2.0 \\ 10.0 & 15.0 & 20.0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 329 \\ 286 \\ 537 \\ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1564 & \text{сырье а;} \\ 897 & \text{сырье б;} \\ 2257 & \text{топливо;} \\ 18299 & \text{ч.-ч.} \end{vmatrix}$$

Шаг 7. Расход ресурсов на ед. конечной продукции $R*(E-A)^{-1}$=RR. (1.10)

$$\begin{vmatrix} 1.2 & 2.4 & 0.9 \\ 0.0 & 0.7 & 1.3 \\ 2.3 & 1.5 & 2.0 \\ 10.0 & 15.0 & 20.0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1.01 & 0.10 & 0.01 \\ 0.10 & 1.02 & 0.13 \\ 0.01 & 0.13 & 1.27 \\ & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.47 & 2.69 & 1.46 \\ 0.09 & 0.88 & 1.74 \\ 2.50 & 2.03 & 2.75 \\ 11.89 & 18.93 & 27.37 \end{vmatrix}$$

Шаг 8. Расход ресурсов по каждому из цехов $X^{\sim}$*RR=PC .   (1.11)

$$\begin{vmatrix} 329\ 286\ 536 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1.47 & 2.69 & 1.46 \\ 0.09 & 0.88 & 1.74 \\ 2.50 & 2.03 & 2.75 \\ 11.89 & 18.93 & 27.37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 395 & 686 & 482 \\ 0 & 200 & 697 \\ 757 & 429 & 1072 \\ 3290 & 4290 & 10720 \end{vmatrix}$$

где $X^{\sim}$ - вектор-строка валовых выпусков продукции по цехам.

Шаг 9. Производственные расходы по цехам $c^{\sim}$*PC = PR.   (1.12)

$$\begin{vmatrix} 3 \ \ 10\ 2\ \ 1.1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 395 & 686 & 482 \\ 0 & 200 & 697 \\ 757 & 429 & 1072 \\ 3290 & 4290 & 10720 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6317 & 9638 & 22351 \end{vmatrix}$$

где $c^{\sim}$ - вектор-строка стоимостей 1 ед. ресурсов.

Шаг 10.Затраты на единицу конечной продукции $c^{\sim}$*RR=PZ.   (1.13)

$$\begin{vmatrix} 3 \ \ 10\ 2\ \ 1.1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1.47 & 2.69 & 1.46 \\ 0.09 & 0.88 & 1.74 \\ 2.50 & 2.03 & 2.75 \\ 11.89 & 18.93 & 27.37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23.4 & 41.8 & 57.3 \end{vmatrix}$$

В табл.1.4 и табл.1.5 приведены исходные данные задач 1.1 и 1.2, ответы которых см. в табл.1.1 и табл.1.2 П. I соответственно.

Исходные данные задачи 1.1. Таблица 1.4

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1.0 2.0 0.0 2.0 1.0 3.0 3.0 1.0 1.0	2.0 4.0 7.0 3.0 3.0 4.0 4.0 5.0 2.0	5.0 2.0 5.0 3.0 4.0 3.0 6.0 3.0 1.0	9.0 5.0 6.0 5.0 8.0 7.0 2.0 7.0 3.0
Вариант 5	**Вариант 6**	**Вариант 7**	**Вариант 8**
1.0 2.0 3.0 3.0 4.0 7.0 2.0 3.0 3.0	1.0 2.0 1.0 3.0 4.0 2.0 0.0 3.0 3.0	5.0 2.0 1.0 3.0 4.0 2.0 2.0 0.0 3.0	4.0 2.0 5.0 1.0 4.0 2.0 2.0 0.0 3.0

Исходные данные задачи 1.2. Таблица 1.5

	Вариант 1				Вариант 2				Вариант 3			
Цех 1	0.0	0.2	0.0	205	0.0	0.1	0.0	250	0.0	0.2	0.0	400
Цех 2	0.1	0.0	0.1	110	0.3	0.0	0.3	120	0.4	0.0	0.3	200
Цех 3	0.0	0.2	0.1	305	0.0	0.2	0.2	330	0.0	0.3	0.2	500
Сырье а	1.3	2.3	0.7	6	1.2	2.3	1.8	5	1.6	2.3	0.9	5
Сырье б	0.0	0.5	1.5	12	0.0	1.6	2.6	7	0.0	0.5	1.4	9
Топливо	2.1	1.7	2.1	3	2.2	1.8	3.2	2	1.5	1.4	2.1	1
Труд	10	23	25	1.4	12	15	14	1.2	15	10	15	1.5
Цех	Вариант 4				Вариант 5				Вариант 6			
Цех 1	0.0	0.3	0.0	505	0.0	0.6	0.0	250	0.0	0.1	0.0	600
Цех 2	0.1	0.2	0.3	410	0.4	0.0	0.2	320	0.2	0.0	0.1	400
Цех 3	0.0	0.2	0.3	505	0.0	0.5	0.1	430	0.0	0.3	0.2	300
Сырье а	1.2	2.1	0.5	4	1.1	2.5	1.4	1	1.3	2.1	0.6	5
Сырье б	0.1	0.2	1.4	13	0.2	1.3	2.3	13	0.2	0.2	1.5	13
Топливо	2.0	1.3	2.6	5	2.3	1.6	3.1	2	1.3	1.4	2.7	4
Труд	10	20	15	1.1	12	13	14	1.1	15	10	15	1.2

Практическое занятие 2

Оценка закона распределения случайной величины

Постановка задачи 2

Задана выборка А из n=100 наблюдений случайной величины {X} - времени подготовки самолетов к вылету (мин)

{X} = {187, 143, 250, 140, 131, 110, 90, 79, 199, 177, 143, 226, 150, 197, 144, 63, 144, 192, 200, 162 , 72, 171, 158, 156, 155, 91, 151, 140, 129, 121, 140, 125, 132, 203, 181, 150, 195, 243, 167, 242, 143, 116, 216, 182, 134, 148, 89, 152, 192, 236, 100, 220, 180, 175, 163, 163, 94, 156, 150, 175, 216, 240,108, 70, 164, 83, 170,156, 151, 173, 156, 66, 110, 66, 166, 86, 91, 128, 128, 105, 142, 130, 144, 125, 170, 155, 218, 201, 146, 64, 214, 131, 190, 191, 50, 112, 112, 155, 232, 144},

для которой известны:

1) точечная оценка математического ожидания (МО) {X}

$$\mu^* = 1/n \sum_{i=1} x_i = 150.9 \qquad i=1,n; \qquad (2.1)$$

где μ^* - точечная оценка МОЖ j-й выборки;

x_i - i-е значение случайной величины в выборке;

n - количество наблюдений случайной величины в выборке.

2) точечная оценка среднего квадратического отклонения (СКО) {X}

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu^*)^2} = 45.9 \qquad (2.2)$$

3) максимальное и минимальное значения x_{max}=250 и x_{min}=50;

4) количество интервалов $n_и$ разбиения упорядоченного от x_{min} до x_{max} ряда значений $\{ x_i \}$ $n_и = 5 \log n = 5 \mathrm{Log}\, 100 = 10$. (2.3)

5) количества попаданий n_i в интервалы (табл.2.1)

Количества попаданий в интервалы Таблица 2.1.

Интервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	6	8	8	11	20	20	10	8	5	4

Необходимо найти закон распределения {X}, оценив гипотезы о законах Пуассона, Гаусса и экспоненциальном законе.

Алгоритм решения задачи 2.1

Согласно алгоритму последовательно оцениваются:

Шаг 1. Ширина интервала Δx разбиения {X}

. $$\Delta x = (x_{max} - x_{min})/n_и = (250 – 50) / 10 = 20 \qquad (2.4)$$

Шаг 2. Границы интервалов, используя величину Δx, начиная с x_{min}=50 и кончая x_{max}=250 (табл.2.2.).

Границы интервалов Таблица 2.2.

Интервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Граница левая Граница правая	50- 70	71- 91	92- 112	113- 133	134- 154	155- 175	176- 196	197- 217	218- 238	239- 259

Шаг 3. Вероятности попаданий p^*_i {X} в i -й интервал

$$p^*_i = n_i / n . \qquad (2.5)$$

Шаг 4. Оценки функции плотности распределения

$$f^*(x)= p^*_i /\Delta x . \qquad (2.6)$$

Шаг 5. Расчетные оценки функции распределения $F^*(x)$

$$F^*(x) = \sum p^*_i \ . \qquad (2.7)$$

Результаты в табл.2.3.

Расчетные значения n_i , p^*_i , $f^*(x)$, $F^*(x)$ Таблица 2.3.

Интервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Границы	50-70	71-91	92-112	113-133	134-154	155-175	176-196	197-217	218-238	239-259
n_i	6	8	8	11	20	20	10	8	5	4
p^*_i	0.060	0.080	0.080	0.110	0.200	0.200	0.100	0.080	0.050	0.040
f^*_i	0.003	0.004	0.004	0.005	0.010	0.010	0.005	0.004	0.003	0.002
F^*_i	0.060	0.140	0.220	0.330	0.530	0.730	0.830	0.910	0.960	1.000

Шаг 7. Гипотезы Но о распределении {X} по законам Пуассона, Гаусса и экспоненциальному закону, теоретические модели и параметры которых приведены в табл.2.4.

Модели законов распределения Таблица 2.4.

Закон Пуассона	$\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n}(i^* n_i)/n$	$F_т(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$; 0<n<4; k=0,1,2..n; $f_т(x) = \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda}$;
Нормальный закон	$\mu = \mu^*$ $\sigma^2 = \sigma^{*2}$	$F_т(x) = \int f(x)dx$; 0<x<4; $f_т(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
Экспоненциальный закон	$\lambda = 1/\mu^*$	$F_т(x) = 1 - e^{-\lambda x}$; 0<x<4; $f_т(x) = \lambda e^{-\lambda x}$;

Шаг 8. Параметры теоретических законов.

Шаг 9. Теоретические значения точечных оценок $F_т(x)$ и $f_т(x)$ законов, вычисленные по табл.2.4.

Шаг 10. Теоретические вероятности попадания $p_{Тi}$ в i-й интервал

$$p_{т\,i} = F_т(x_i) - F_т(x_{i-1}) \qquad (2.8)$$

где $F_т(x_i)$ и $F_т(x_{т\,i-1})$ - $F_т(x)$ вычисленные по моделям законов;

Шаг 11. Статистическую расчетную оценку x^{2*}

$$x^{2*} = \sum_{i=1}^{nи} \frac{(n_i - n\,p_{т\,i})^2}{n\,p_{т\,i}}, \qquad (2.9)$$

где $n_и$ - количество интервалов;

$p_{Тi}$ - теоретическая вероятность попадания в i-й интервал.

Шаг 12. Сравниваем x^{2*} с $x^2_{v,p}$

$$x^{2*} \leq x^2_{v,p}, \qquad (2.10)$$

где $x^2_{v,p}$ - табличное значение критерия хи-квадрат, при $v=(n_и - n_p - 1)$ и $p=(1-p_d)$ (табл.2.2. П. I I.);

p_d - доверительная вероятность (рекомендуется p_d=95%);

n_p - количество параметров в теоретической модели закона.

Гипотеза Но не отвергается если $x^{2*} \leq x^2_{v,p}$.

Оценка гипотезы Но о распределении X по закону Гаусса

1. Выдвигаем гипотезу Но о нормальном законе распределения {X} с параметрами μ^*=150.9 и σ^*=45.9. Модель закона см. в табл.2.4.

2. Определяем теоретические $F_{Тi}=\Phi(Z_i)$, где $Z_i=(x_i-\mu^*/\sigma^*)$, используя табл.2.1 П.2 .

3. Определяем $p_{Тi}$ по (2.8) : $p_{т1}=F_{т1}=0.039$; $p_{т2}=F_{т2} - F_{т1} = 0.093 - 0.039 = =0.054$ и т.д. Результаты в табл.2.5.

4. Находим теоретические $F_{Тi}$ и $p_{Тi}$ для закона Гаусса (табл.2.5).

Теоретические $F_{тi}$ и $p_{тi}$ для закона Гаусса Таблица 2.5.

Интервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Границы	50 - 70	71 - 91	92 - 112	113-133	134-154	155-175	176-196	197-217	218-238	239-259
$x_i - \mu$	-80.92	-60.92	-40.92	-20.92	-0.92	19.08	39.08	59.08	79.08	99.08
Z_i	-1.76	-1.33	-0.89	-0.46	-0.02	0.42	0.85	1.29	1.72	2.16
$F_{тi}$	0.039	0.093	0.188	0.328	0.496	0.665	0.805	0.903	0.958	0.985
$p_{тi}$	0.039	0.054	0.095	0.139	0.168	0.169	0.141	0.097	0.056	0.026

5. Вычисляем x^{*2}

$$x^{*2} = \sum_{i=1}^{nи} \frac{(n_i - n\,p_{тi})^2}{n\,p_{тi}} = \frac{(6–100\ 0.039)^2}{100*0.039} + \frac{(8 -100*0.054)2}{100*0.054} + \frac{(8 -100*0.054)2}{100*0.095} +$$

$$+ \ldots \qquad = 6.60\ .$$

6. Сравниваем $x^2_{v,p\ табл}$ =14.07 ($v = n_и - n_p - 1 = 10-2-1 = 7$ и $p = 1 - p_d$ = (1-0.95 = 0.05), найденное в табл.2.2.П I I, с расчетным x^{*2}=6.60.

Поскольку $x^{*2} = 6.60 < x^2_{v,p\ табл} = 14.07$ гипотеза Но о нормальном законе не отвергается.

Оценка гипотезы Но о законе Пуассона

1. Выдвигаем гипотезу Но о распределении X по закону Пуассона с параметром $\lambda = \sum(i*n_i)/n = 5.29$. По табл.2.2 П II. вычисляем $e^{-5.29} = 0.005$.

2. Определяем теоретические $F_{Ti}(x_i)$, подставляя x_i правой границы каждого интервала в модель закона. Так как, для интервала i=1,k изменяется от 0 до 1 , то и $F_{Ti}(x_i)$ определяется как

$$F_{T1} = \sum_{k=0}^{1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-5.29} + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-5.29} = \frac{1}{1} 0.005 + \frac{5.29}{1} 0.005 = 0.032.$$

Для интервала i=2 k изменяется от 0 до 2, при этом

$$F_{T2} = \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-5.29} + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-5.29} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-5.29} = 0.032 + \frac{5.29}{2} = 0.102 \text{ и т.д.}$$

Вычислив $F_{Ti}(x_i)$, определяем по (2.8) $p_{T\,i}$ и заполняем табл.2.6.

Теоретические F_{Ti} и p_{Ti} для закона Пуассона Таблица 2.6.

Интервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_{Ti}	0.032	0.102	0.227	0.391	0.565	0.719	0.835	0.911	0.956	0.980
p_{Ti}	0.032	0.071	0.124	0.165	0.174	0.153	0.116	0.077	0.045	0.024

3. Находим x^{*2}=2.52+0.13+1.58+1.81+0.39+1.41+0.22+0.01+0.05+1.09=9.22 . Поскольку $x^{*2}=9.22<x^2_{v,p\ табл}=15.51$ (при v=10-1-1=8 и $p=1-p_d=1-0.95=0.05$), то гипотеза Но о распределении {X} по закону Пуассона не отвергается.

Оценка гипотезы Но об экспоненциальном законе

1. Выдвигаем гипотезу Но об экспоненциальном законе распределения {X } с параметром $\lambda=1/\mu^* = 0.0066$.

2. Определяем теоретические $F_{Ti}(x_i)$, подставляя x_i правой границы интервалов в модель закона. Так, для интервала i=1 $F_{Ti}=1(x=50)=1 - e^{-0.0066*50}=1 - e^{-0.33}= 0.375$.

3. Определяем теоретические вероятности $p_{тi}=F_{тi}-F_{тi-1}$:$рт_1=0.375$; $p_{т2}=0.46-0.375=0.085$ и т.д. Результаты заносим в табл.2.7.

Теоретические $F_{тi}$ и $p_{тi}$ для экспоненциального закона Таблица 2.7.

Интервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_{тi}$	0.375	0.460	0.533	0.597	0.651	0.699	0.739	0.775	0.805	0.832
$P_{тi}$	0.375	0.085	0.073	0.063	0.055	0.047	0.041	0.035	0.031	0.026

4. x^{*2}=26.49+0.03+0.06+3.44+38.57+49.30+8.55+5.64+1.24+0.70=134.02

5. Поскольку $x^{*2}=134.02>x^2_{v,p}$ табл=15.51 (при v=10-1-1=8 и $p = 1-p_d =$ =1-0.95 = 0.05) , то гипотеза Но об экспоненциальном законе отвергается.

Вывод: так как x^{*2}=6.6 закона Гаусса < x^{*2}=9.22 закона Пуассона, принимаем гипотезу о нормальном законе. В табл.2.8 приведены исходные данные задач, ответы которых см. в табл.1.3. П.I.

Исходные данные задачи 2 Таблица 2.8.

$n_и$	μ	σ	x_{max}	x_{min}	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}
1	33.99	2.29	39	30	7	5	14	19	20	10	8	9	4	4
2	46.22	6.89	60	30	4	2	9	20	14	13	14	7	12	5
3	47.68	7.06	67	35	11	10	16	18	16	14	8	3	1	3
4	36.06	36.69	180	1	46	15	15	11	4	3	2	2	1	1
5	46.91	11.92	89	24	8	14	18	26	14	12	5	1	0	2
6	46.69	11.85	78	23	5	5	23	18	14	16	6	6	5	2
7	47.60	6.97	64	30	2	2	11	16	16	19	11	15	4	4
8	34.03	2.63	42	30	16	18	20	11	9	13	7	5	0	1
9	49.59	12.45	87	22	3	9	14	24	18	14	10	4	3	1
10	37.48	37.98	167	1	37	24	15	10	2	2	5	1	1	3

Практическое занятие 3

Прогноз системы показателей алгоритмом цепей Маркова

Постановка задачи 3

Задана матрица $A = \{a_{ij}\}$ $i=1,m$; $j=1,n$; где a_{ij} - величины m элементов структуры за n периодов наблюдений. Необходимо спрогнозировать структуру $\{a_{ij}\}$ на 2004 г. по данным за 2000-2003 г.г. (табл.3.1) .

Численности работников по категориям Таблица 3.1.

Категории работников \ Годы	2000	2001	2002	2003
Производственные рабочие	266	267	268	269
Вспомогательные рабочие	114	120	127	132
Инженерно-технические работники	66	70	70	72
Служащие и МОП	32	33	35	41
Итого:	478	490	500	514

Алгоритм решения задачи 3

Шаг 1. Вычисляем относительные доли t_{ij} (табл.3.2), деля a_{ij}*100% на сумму элементов j-го столбца табл.3.1 и переходя от a_{ij} к t_{ij}

$$t_{ij}=a_{ij}*100\% / \sum^{m} a_{ij}, \quad j=1,n. \qquad (3.1)$$

Шаг 2. Вычисляем относительные изменения $c_{i,k}=t_{i,j+1}-t_{i,j}$ и записываем их в табл.3.3.Например, 54.49-55.65=-1.16. Суммируем в столбцах положительные c_{ik} и записываем суммы внизу табл.3.3. Положительные c_{ik} в столбцах табл.3.3 отображают относительный прирост численности работников i-й категории в k-м периоде за счет уменьшения категорий с $c_{ik}<0$.

Сумма $c_{ik}<0$ в столбцах табл.3.3 равна сумме $c_{ik}>0$.

Относительные % доли структуры **Таблица 3.2.**

Категории работников \ Год	2000	2001	2002	2003
Производственные рабочие	55.65	54.49	53.60	52.33
Вспомогательные рабочие	23.85	24.49	25.40	25.68
Инженерно-технические работники	13.81	14.29	14.00	14.01
Служащие и МОП	6.69	6.73	7.00	7.98
Итого:	100%	100%	100%	100%

Шаг 3. Находим доли приростов численностей работников по категориям от года к году, вычисляя отношения c_{ik} к суммам $c_{ik}>0$ в столбцах, например: 0.64/1.16=0.55; 0.48/1.16=0.41 и 0.04/1.16=0.03.

Сумма 0.55+0.41+0.03=1.0 . Отношения по всем периодам сравнения см. в табл.3.4.

Таблица 3.3.
Относительные изменения

Годы	00/01	01/02	02/03
	1.16	-0.89	-1.27
	0.64	0.91	0.28
	0.48	-0.29	0.01
	0.04	0.27	0.98
$\sum c_{ij+}$	1.16	1.18	1.27

Таблица3.4.
Доли общего прироста

Годы	00/01	01/02	02/03
	0.00	0.00	0.00
	0.55	0.77	0.22
	0.41	0.00	0.01
	0.03	0.23	0.77

Шаг 4. Формируем матрицы D(k) относительных изменений для соседних пар лет наблюдений, используя табл.3.3 и 3.4. С этой целью доли увеличения численности работников по категориям записываем в матрицы D(k), фиксирующие изменения в структуре работников по категориям в k-м периоде от j-го к (j+1)-му году.

На диагональ D(1) (табл.3.5) записываем min a_{ij} из табл.3.2 для первой пары лет - 2000 и 2001 г.г.

Матрица D(1)   Таблица 3.5.

54.49	0.00	0.00	0.00	54.59
0.64	23.85	0.00	0.00	24.49
0.48	0.00	13.81	0.00	14.29
0.04	0.00	0.00	6.73	6.73
55.65	23.85	13.81	6.69	100%

В столбец j=1 D(1) пишем доли прироста численностей работников категорий i=2,3,4 на 0.64%, 0.48% и 0.04% за счет уменьшения численности работников категории j=1 на (0.64%+0.48%+0.04%)=1.16%. Если уменьшения j-й категории работников не было, то $D(k)_{ij}$=0.

В D(1) записаны структурные изменения в $\{a_{ij}\}$ за 2000-2001 г.г. Суммы a_{ij} по столбцам j=1,4 соответствуют структуре $\{a_{ij}\}$ в 2000 г., а суммы a_{ij} по строкам i=1,4 соответствуют структуре $\{a_{ij}\}$ в 2000 г. Сумма a_{ij} правого столбца и нижней строки равны 100%.

Матрицы D(k) формируются для всех пар лет наблюдений: для 2000/2001 (табл.3.5), для 2001/2002 (табл.3.6) и для 2002/2003 г.г. (табл.3.7).

Матрица D(2)   Таблица 3.6.

53.60	0.00	0.00	0.00	53.60
0.69	24.49	0.22	0.00	25.40
0.00	0.00	14.00	0.00	14.00
0.20	0.00	0.06	6.73	7.00
54.49	24.49	14.29	6.73	100%

Матрица D(3)   Таблица 3.7.

52.33	0.00	0.00	0.00	52.33
0.28	24.40	0.00	0.00	25.68
0.01	0.00	14.00	0.00	14.01
0.98	0.00	0.00	7.00	7.98
53.60	25.40	14.00	7.00	100%

Шаг 5. Суммируя d_{ij} матриц D(k), получаем матрицу кумулятивных перераспределений S (см.табл.3.8) с информацией о всех изменениях за 2000-2003 г.г. $S_{ij}=d(1)_{ij}+d(2)_{ij}+..+d(n-1)_{ij}$; i=1,...m; j=1,...m. (3.2)

Шаг 6. Разделив элементы S_{ij} на суммы столбцов S_{m+1j}, получаем матрицу тенденций переходов E_{ij} (табл.3.9) $E_{ij} = S_{ij}/S_{m+1j}$; i=1,..m+1; j=1,..m.

Матрица S_{ij} Таблица 3.8.

160.42	0.00	0.00	0.00
1.61	73.74	0.22	0.00
0.49	0.00	41.81	0.00
1.22	0.00	0.06	20.43
163.74	73.74	42.09	20.43

Матрица E_{ij} Таблица 3.9.

0.9798	0.0000	0.0000	0.0000
0.0098	1.0000	0.0053	0.0000
0.0030	0.0000	0.9932	0.0000
0.0074	0.0000	0.0015	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Шаг 7. Умножая E_{ij} на табл.3.2, получаем ретропрогноз t_{ij} (табл.3.10).

Ретропрогноз t_{ij} Таблица 3.10.

Категории работников \Год	2000	2001	2002	2003
Производственные рабочие	54.52	53.39	52.52	51.28
Вспомогательные рабочие	24.47	25.10	26.00	26.27
Инженерно-технические работники	13.88	14.35	14.06	14.07
Служащие и МОП	7.13	7.16	7.42	8.39

Шаг 8. Оцениваем точность отображения матрицей E_{ij} динамики структуры за 2000-2003 г.г., вычитая из табл.3.10 табл.3.2 $D_{ij}=t^p_{ij}-t_{ij}$. Ошибки ретропрогноза см. в табл.3.11.

Ошибки ретропрогноза D_{ij} Таблица 3.11.

Категории работников \ Год	2000	2001	2002	2003
Производственные рабочие	-1.13	-1.10	-1.08	-1.06
Вспомогательные рабочие	0.62	0.61	0.60	0.59
Инженерно-технические работники	0.07	0.06	0.06	0.06
Служащие и МОП	0.43	0.43	0.42	0.41

Шаг 9. Находим D_{ij} - средние ошибки по годам: 0.56, 0.55, 0.54, 0.53. Шаг 10. В табл.3.11 находим min D_{ij}=0.06% и max D_{ij}=1.13%. Сложим $D_{ij.}$ и разделим их сумму на число наблюдений, находим D_{ij}=0.55%.

Шаг 11. Умножая матрицу E на вектор ретропрогноза % на 2003 г., получаем прогноз структуры на 2004 г. Результаты в табл.3.12.

Ретропрогноз на 2004 г. Таблица 3.12.

Категории работников /Год	%2004	Прогноз
Производственные рабочие	50.24	264
Вспомогательные рабочие	26.85	141
Инженерно-технические работники	14.12	74
Служащие и МОП	8.79	46

Шаг 12. Выполнив моделирование суммы численности работников 478, 490, 500, 514, находим точечный прогноз на 2004 г.- 525 чел. Умножив 525 на % доли табл.3.12, находим точечные прогнозы численностей работников по категориям. Итоговый прогноз в табл.3.12.

В табл.3.13 приведены исходные данные 8-ми вариантов задачи 3, ответы которых см. в табл.1.4. П. I.

Исходные данные задачи 3. Таблица 3.13.

Вариант 1 266 262 265 263 232 238 220 223 57 58 55 60 58 50 45 44	Вариант 2 66 62 65 63 32 38 20 23 57 58 55 60 58 50 45 44	Вариант 3 106 112 124 133 202 218 220 223 47 58 55 60 48 50 45 44	Вариант 4 273 270 265 253 241 238 210 203 107 111 123 128 78 69 55 44
613 608 585 590	213 208 185 190	403 438 444 460	699 688 653 628
Вариант 5 166 162 165 169 132 138 130 131 127 118 12 129 64 70 59 63	Вариант 6 166 162 165 163 232 238 220 223 57 58 55 60 58 50 45 44	Вариант 7 236 244 265 273 212 238 240 253 77 98 105 111 38 52 45 34	Вариант 8 96 99 92 89 42 38 41 37 47 44 45 48 38 33 36 37
489 488 479 492	513 508 485 490	563 632 655 671	223 214 214 211

Практическое занятие 4

Оптимизация использования дробных ресурсов

Постановка задачи 4.1.

Предприятие имеет запасы n видов ресурсов объемами b_i $i=1,n$, из которых можно произвести m видов продукции. Известны : нормы расхода a_{ij} i-го вида ресурса для производства 1 ед. продукции j-го вида; c_j - доход от реализации 1 ед. j-го вида продукции. Найти x_j $j=1,m$ - объемы выпуска продукции, обеспечивающие максимальные доходы.

Математическая модель примера имеет вид

$$Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \dashrightarrow \max \quad (4.1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad + 2x_3 &\le 21; \\ x_1 + 2x_2 \qquad &\le 19; \quad (4.2) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\le 17; \end{aligned}$$

$$x_{1,\,2,\,3} \ge 0. \quad (4.3)$$

Решаем задачу алгоритмом матричного симплекс-метода [1,с.52.-57].

Алгоритм решения задачи 4.1.

Шаг 1. Приводим модель задачи к каноническому виду:

а) преобразуем неравенства (4.2) в уравнения, вводя x_4, x_5, x_6

$$\begin{aligned} 2x_1 + \qquad 2x_3 + x_4 \qquad &= 21; \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_5 \qquad &= 19; \quad (4.4) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad + x_6 &= 17; \end{aligned}$$

б) включаем x_4, x_5, x_6 в (4.3) и в Z с множителем 0

$$Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 0(x_4 + x_5 + x_6) \to \max. \quad (4.5)$$

Шаг 2. Переносим правую часть (4.5) за (=) со знаком (-)

$$Z - 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 0(x_4 + x_5 + x_6) = 0. \quad (4.6)$$

Шаг . 3. Заполняем симплекс-таблицу (см. табл.4.1).

Опорный план задачи **Таблица 4.1.**

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ_i
X_4	21	2.0	0.0	2.0	1.0	0.0	0.0	10.5
X_5	19	1.0	2.0	0.0	0.0	1.0	0.0	- Опорная
X_6	17	1.0	2.0	**[2.0]**	0.0	0.0	1.0	8.5 < строка i=q
Z	0	-4.0	-3.0	**-5.0**	0.0	0.0	0.0	

Опорный элемент [2.0] | j=p Опорный столбец

Шаг 4. Поскольку в строке Z в столбцах x_j есть $a_{ij} < 0$ - план не оптимален.

Шаг 5. В строке Z находим min отрицательное число (-5). Это число находится в опорном столбце (j = p).

Шаг 6. Вычисляем $\Theta_i = a_{i0}/a_{ij} > 0$ (j = p) где a_{i0} - элементы столбца свободных членов; a_{ij} (j=p) - опорный столбец min= Θ_i = min{ $\Theta_1 = 21/2 = 10.5$; $\Theta_2 = 19 / 0 = 4$; $\Theta_3 = 17 / 2 = 8.5$} = $\Theta_3 = 8.5$. Min $\Theta_i = 8.5$ стоит в опорной строке (i = q =3).

Шаг 7. На пересечении опорного столбца j = p =3 и опорной строки i = q= 3 находим опорный элемент a_{ij} (i = q; j = p) x[q,p] = x[3,3] = [2].

Шаг 8. Преобразуем симплекс-таблицу алгоритмом Жордана-Гаусса, записывая результаты на те же места.

Шаг 7А. Элементы опорной строки $a_{(i=q)}$, $j=a_{ij}/a_{qp}$ при j=0,m; i=q . (4.7)

Отношения $\Theta_3 = 17/2=8.5$; $a_{31}=1/2=0.5$; $a_{32}=2/2=1$; $a_{33}=2/2=1$; $a_{34}=0/2=0$; $a_{35}=0/2=0$; $a_{36}=1/2=0.5$. записываем на места исходных элементов 17, 1, 2, 2, 0, 0, 1 (см. табл. 4.2).

Шаг 7Б. Все элементы опорного столбца, кроме опорного в новой итерации равны $a_{jp} = 0$. (4.8)

Шаг 7В. Элементы вне опорной строки и опорного столбца ($i \neq q$, $j \neq p$) в новой итерации a_{ij}', вычисляем $a_{ij'} = a_{ij} - a_{qj} * a_{ip} / a_{qp}$ при $i \neq q$; $j \neq p$. (4.9)

где $a_{ij}, a_{qj}, a_{ip}, a_{qp}$ - элементы на вершинах прямоугольника.

Соединив a_{ij} ($i \neq q$, $j \neq p$) с a_{qp} прямой линией и считая ее диагональю, достраиваем вокруг неё прямоугольник (рис.4.1).

| Опорный столбец

Преобразуемый a_{10} (21)--...-...---(2) a_{1p}

элемент a_{q0} (17)--... ...---[2] <- Опорная строка

| $a_{q\,p}$ Опорный элемент

Рис.4.1. Прямоугольник для a_{10}=21

Подставляем в (4.9) числа, с вершин прямоугольника. Например,

для a_{10}=21 $a_{ij'} = a_{ij} - a_{qj} * a_{ip} / a_{qp} = 21 - 17*2/2 = 4$. По (4.9) преобразуем все числа рис.4.1, стоящие вне опорной строки и опорного столбца. Результаты показаны в табл.4.2.

Результаты 1-й итерации Таблица 4.2.

Базис	ai0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ_i
X_4	4.0	**[1.0]**	-2.0	0.0	1.0	0.0	-1.0	4 <min
X_5	19.0	1.0	2.0	0.0	0.0	1.0	0.0	19
X_3	8.5	0.5	1.0	1.0	0.0	0.0	0.5	17
Z	42.5	**-1.5**	2.0	0.0	0.0	0.0	2.5	-

Шаг 9. Проверяем оптимальность плана. Поскольку в строке Z есть a_{ij}=-1.5 < 0 , то план не оптимален.

Шаг 10. Находим в строке Z min по a_{ij} < 0 = -1.50 опорный столбец j=2.

Шаг 11. Вычисляем $\Theta_i = a_{i0} / a_{ij} > 0$ (j=p) для всех строк кроме Z {Θ_1=4/1; Θ_2=19/1; Θ_3=8.5/0.5=17}. По min Θ_i=4 находим опорную строку i=1.

Шаг 12. На пересечении опорного столбца и опорной строки находим опорный элемент a_{qp} = x[1,1]= 1.00.

Шаг 13. Выполняем 2-ю итерацию (см. табл.4.3).

Результаты 2-й итерации Таблица 4.3.

Базис	ai0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ_i
X_1	4.0	1.0	-2.0	0.0	1.0	0.0	-1.0	-
X_5	15.0	0.0	4.0	0.0	-1.0	1.0	1.0	4.75min
X_3	6.5	0.0	**[2.0]**	1.0	-0.5	0.0	1.0	-
Z	48.5	0.0	**-1.0**	0.0	1.5	0.0	1.0	-

Так как в Z все еще есть a_{ij} <0 (-1.00),то план не оптимален. Повторяя Шаги 8-10, находим опорный элемент [2.0] и выполняем 3-ю итерацию. Результаты приведены в табл.4.4.

Результаты 3-й итерации Таблица 4.4.

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ_i
X_1	**10.50**	1.00	0.00	1.00	0.50	0.00	0.00	-
X_5	**2.0**	0.00	0.00	-2.00	0.00	1.00	-1.00	-
X_2	**3.25**	0.00	1.00	0.50	-0.25	0.00	0.50	-
Z	**51.75**	0.00	0.00	0.50	1.25	0.00	1.50	-

Поскольку в Z все числа ≥0 - план оптимален. В столбце a_{i0} находится искомое оптимальное решение: Z *max=51.75 при x_1^* =10.5, x_2^* =3.25 и x_5^* =2.0. Все остальные x_i, отсутствующие в базисе, равны нулю.

Постановка задачи 4.2.

В модель задачи 4.1 добавляем требование равенства объема производства заданному значению, при этом модель задачи усложняется и приобретает вид

$$Z = 5x_1 + 4x_2 \text{ ---> } \max; \qquad (4.10)$$

при

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1; \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 16; \qquad (4.11) \\ 3x_1 + 3x_2 &\leq 13; \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 10; \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0. \qquad (4.12)$$

Решение задачи может быть найдено симплекс-методом с искусственным базисом [1,с.58-59].

Алгоритм решения задачи 4.2.

Шаг 1. Вводя x_3, x_4, x_5, x_6, преобразуем неравенства в уравнения .

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1; \qquad (4.13)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_4 &= 16; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_5 &= 13; \qquad (4.14) \\ 3x_1 + 2x_2 + x_6 &= 10; \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0;\ x_5 \geq 0;\ x_6 \geq 0. \qquad (4.15)$$

Шаг 2. Вводим в (5.10) x_3, x_4, x_5, x_6 с множителями 0

$$Z = 5x_1 + 4x_2 + 0(x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \dashrightarrow \max. \qquad (4.16)$$

Шаг 3. В (4.13) при x_3 стоит знак (-), т.е. в задаче нет базиса.

Шаг 4. Формируем базис, вводя в (4.13) "искусственную" $x7' \geq 0$

$$x_1 + x_2 - 0x_3 + x_{7'} = 1; \qquad (4.17)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 0x_4 &= 16; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_5 &= 13; \qquad (4.18) \\ 3x_1 + 2x_2 + x_6 &= 10; \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0;\ x_5 \geq 0;\ x_6 \geq 0;\ x_{7'} \geq 0. \qquad (4.19)$$

Шаг 5. Вводим в $Z \rightarrow \max$ неизвестную $x_{7'}$ с множителем $M=-100$

$$Z = 5x_1 + 4x_2 + 0(x_3 + x_4 + x_5 + x_6) - 100x_{7'} \dashrightarrow \max.$$

Шаг 6. Заполняем симплекс-таблицу и ее строку (m+1) (см. табл.4.5):

1) m+1; $Z=(\sum C_i - a_{i0})=(-100*1+0*16+0*13+0*10)=-100$;

2) m+1; $(\sum C_i - a_{i1}) - C_{i1} = (-100*1+0*2+0*3+0*3)-(5)=-100-5=-105$ и т.д.

Опорный план **Таблица 4.5.**

			5.0	4.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-100	
Базис	$C_{iб}$	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Θ_i
X_7	- 100	1.0	**[1.0]**	1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.00
X_4	0	16.0	2.0	5.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	3.20
X_5	0	13.0	3.0	3.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	4.33
X_6	0	10.0	3.0	2.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	5.00
M+1		-100	**-105**	-104	100	0.0	0.0	0.0	0.0	-

Опорный столбец ! j=1

Шаг 8. По min (<0) числу в строке (m+1) находим опорный столбец j=1. По min $\Theta i=a_{io} / a_{ip} > 0$ {Θ_1=1/1=1; Θ_2=16/2=8; Θ_3=13/3=4.3; Θ_4=10/3=3.3} - опорную строку i=1 и опорный элемент x[i=1,j=1]=1.

Шаг 9. Выполняем итерацию Жордана - Гаусса, вычисляем (m+1)-ю строку и находим, что план не оптимален (см.табл.4.6).

Повторяем Шаги 8-9 до тех пор. пока в (m+1)-й строке все a_{ij} станут ≥ 0. Результаты в табл.4.6.

Решение задачи 4.2 **Таблица 4.6.**

			5	4	0	0	0	0	-100	
Базис	$C_{iб}$	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Θ_i
X_1	5	1.0	1.00	1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	-
X_4	0	14.0	0.00	3.00	2.00	1.00	0.00	0.00	-2.00	7.00
X_5	0	10.0	0.00	0.00	3.00	0.00	1.00	0.00	-3.00	3.33
X_6	0	7.0	0.00	-1.00	**[3.00]**	0.00	0.00	1.00	-3.00	2.33 min
m+1		5.0	0 .00	1.00	**-5.00**	0.00	0.00	0.00	105	-
X_1	5	3.33	1 .00	0.67	0.00	0.00	0.00	0.33	-	4.97
X_4	4	9.33	0.00	**[3.67]**	0.00	1.00	0.00	-0.67	-	2.54<min
X_5	0	3.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	-1.00	-	3.00 -
X_3	0	2.33	0.00	-0.33	1.00	0.00	0.00	0.33	-	
m+1		16.67	0.00	**-0.67**	0.00	0.00	0.00	1.67	-	-
X_1	5	1.64	1.00	0.00	0.00	-0.18	0 .00	0.45	-	-
X_2	4	2.55	0.00	1.00	0.00	0.27	0.00	-0.18	-	-
X_5	0	0.45	0.00	0.00	0.00	-0.27	1.00	-0.82	-	-
X_3	0	3.18	0.00	0.00	1.00	0.09	0.00	0.27	-	-
m+1		18.36	0.00	0.00	0.00	0.18	0.00	1.55	-	-

Поскольку в строке (m+1) все $a_{ij} \geq 0$ - план оптимален и Zmax*=18.36 при x_1^* =1.64, x_2^*=2.55, x_3^*=3.18.

В табл.4.7 и табл.4.8 приведены исходные данные задач, ответы которых см. в табл.1.5 и 1.6 П. I соответственно. В задачах табл.4.7 все x_i>0.

Исходные данные задачи 4.1. Таблица 4.7.

Вариант_1 $-2x_1+1x_2+0x_3 \le 19$; $3x_1 – 2x_2+1x_3 \le 17$; $4x_1+ 2x_2-1x_3 \le 8$; $Z=4x_1-3x_2+3x_3$->max;	Вариант_2 $3x_1+3x_2+2x_3 \le 10$; $3x_1+4x_2+0x_3 \le 12$; $4x_1+2x_2+5x_3 \le 8$; $Z=4x_1+3x_2-4x_3$->max;	Вариант_3 $-1x_1+2x_2+6x_3 \le 20$; $2x_1+5x_2 -3x_3 \le 22$; $3x_1- 2x_2+3x_3 \le 18$; $Z=5x_1+2x_2+3x_3$->max;
Вариант_4 $-2x_1+3x_2+5x_3 \le 20$; $2x_1+5x_2-2x_3 \le 22$; $4x_1 -3x_2+2x_3 \le 18$; $Z=7x_1-2x_2+4x_3$->max;	Вариант_5 $-3x_1+1x_2+3x_3 \le 30$; $3x_1+3x_2-1x_3 \le 32$; $5x_1 -2x_2+1x_3 \le 18$; $Z=6x_1-1x_2+4x{-_3}$>max;	Вариант_6 $-2x_1+1x_2+3x_3 \le 10$; $2x_1+2x_2 -1x_3 \le 12$; $3x_1 -2x_2+1x_3 \le 18$; $Z=3x_1-1x_2+4x_3$->max;
Вариант_7 $-1x_1+0x2+3x_3 \le 5$; $1x_1+1x2 -1x_3 \le 6$; $2x_1 -1x2+1x_3 \le 9$; $Z=2x_1-1x2+2x_3$->max;	Вариант_8 $-1x_1+1x_2+2x_3 \le 15$; $1x_1+1x_2-1x_3 \le 16$; $2x_1-1x_2+1x_3 \le 9$; $Z=3x_1-1x_2+3x_3$->max;	Вариант_9 $-3x_1+2x_2+2x_3 \le 21$; $3x_1+1x_2 -1x_3 \le 22$; $4x_1 -2x_2+2x_3 \le 13$; $Z=7x_1-1x_2+7x{-_3}$>max;

Исходные данные задачи 4.2. Таблица 4.8.

Вариант_1 $Z= 4x_1 -x_2 +2x_3$--> min; $4x_1-x_2 +2x_3 = 4$; $x_1+x_2 -x_3 <= 4$; $x_1 \ge 0$; $3x{-_1}x_2+4x_3 >= 12$; $x_3 \ge 0$;	Вариант_2 $Z = 3x_1-x_2 +2x_3$ --> min; $4x_1-x_2 +2x_3 = 4$; $x_1+x_2 -x_3 <= 4$; $x_2 \ge 0$; $3x_1-x_2+4x_3 >= 14$; $x_3 \ge 0$;	Вариант_3 $Z=-5x_1-2x_2 +3x_3$ --> max; $-2x_1 + x_3 = 6$; $6x_1 -x_2+x_3 <= 2$; $x_1 \ge 0$; $3x_1 - x_3 >= 6$; $x_3 \ge 0$;
Вариант_4 $Z = 4x_1 -2x_2-3x_3$ --> max; $2x_1 -x_2+ x_3 =2$; $x_1+x_2-0.5x_3 <= 5$; $x_1 \ge 0$; $2x_2 - x_3 >= 9$; $x_3 \ge 0$;	Вариант_5 $Z=-4x_1+x_2 +3x_3$ --> min; $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$; $x_1+x_2-0.5x_3 <= 5$; $x_1 \ge 0$; $2x_2 -x_3 >= 7$; $x_2 \ge 0$;	Вариант_6 $Z = 3x_1+2x_2 -x_3$ --> max $-2x_1-0.5x_2+2x_3=5$; $x_1 + x_2 -x_3 <= 1$; $x_2 \ge 0$; $2x_1-3x_2+4x_3 >= 6$; $x_3 \ge 0$;
Вариант_7 $Z=-6x_1-2x_2+3x_3$--> min; $3x_1-x_2 +x_3 = 7$; $x_1+x_2-x_3 <= 6$; $x_1 \ge 0$; $2x_1+x_2+x_3 >= 10$; $x_3 \ge 0$;	Вариант_8 $Z=-5x_1 +x_2-2x_3$--> max; $5x_1-x_2+2x_3 = 4$; $x_1+x_2 -x_3 <= 4$; $x_2 \ge 0$; $3x_1-x_2+4x_3 >= 13$; $x_3 \ge 0$;	Вариант_9 $Z=3x_1 -x_2+2x_3$--> max; $2x_1+x_2 -x_3 = 1$; $x_1 \ge 0$; $-x_2 +x_3 <= 3$; $x_2 \ge 0$; $5x_1-x_2 -x_3 >= 3$; $x_3 \ge 0$;

Практическое занятие 5

Оптимизация использования целочисленных ресурсов

Постановка задачи 5.1.

При целочисленной оптимизации используется алгоритм двойственного симплекс-метода, у которого в правых частях ограничений есть $a_{ij}<0$, а опорный элемент <0. Математическая модель примера имеет вид

$$Z = 7.0x_1 + 3.0x_2 + 6.0x_3 \text{ --> min} \qquad (5.1)$$

$$\begin{array}{ll} \text{при} & 9.0x_1 \quad -2.0x_2 \quad -5.0x_3 \quad =-7.0; \\ & 7.0x_1 + 4.0x_2 \quad -4.0x_3 \quad = 4.0; \\ & -4.0x_1 \quad -7.0x_2 \quad +4.0x_3 \quad =-6.0; \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0. \end{array} \qquad (5.2)$$

Алгоритм решения задачи 5.1.

Шаг 1. Вводим x_4, x_5, $x_6 \geq 0$ в ограничения и в Z

$$\begin{array}{l} -9.0\, x_1 - 2.0\, x_2 - 5.0\, x_3 + x_4 = -7.0; \\ 7.0\, x_1 + 4.0\, x_2 - 4.0\, x_3 + x_5 = 4.0; \\ -4.0\, x_1 - 7.0\, x_2 + 4.0\, x_3 + x6 = -6.0; \end{array} \qquad (5.3)$$

$$Z = 7.0\, x_1 + 3.0\, x_2 + 6.0\, x_3 + 0(x_4+x_5+x6) \text{ --> min.} \qquad (5.4)$$

Шаг 2. Преобразуем Z (5.4) и записываем опорный план в табл.5.1.

$$0 = -Z +7.0x_1 +3.0x_2 +6.0x_3 +0(x_4+x_5+x_6)\text{-->min} , \qquad (5.5)$$

$$-Z + 7.0x_1 + 3.0x_2 + 6.0x_3 +0(x_4+x_5+x6) = 0 . \qquad (5.6)$$

Шаг 3. Находим по $\max\Theta_i$ =-7/-2=3.5 строк с $a_{i0}<0$ опорную строку i=1. В строке 1 по $\min\Theta_i$=-7/-9=0.78 находим опорный элемент a_{qp}=[-9.00] и алгоритмом Жордана-Гаусса рассчитываем итерацию 1. В итерации 1 в строке a_{i0} есть aij{-1.44, -2.89}< 0, поэтому план не оптимален.

Решение задачи двойственным симплекс-методом Таблица 5.1.

	Базис	ai0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ_i
Опорный план	X_4 X_5 X_6 -Z	-7.00 4.00 -6.00 0.00	**[-9.00]** 7.00 -4.00 7.00	-2.00 4.00 -7.00 3.00	-5.00 -4.00 4.00 6.00	1 0 0 0	0 1 0 0	0 0 1 0	<3.5 - 1.5 -
Итерация 1	X_1 X_5 X_6 -Z	0.78 -1.44 -2.89 -5.44	1 0 0 0	0.22 2.44 **[-6.11]** 1.44	0.56 -7.89 6.22 2.11	-0.11 0.78 -0.44 0.78	0 1 0 0	0 0 1 0	- 0.18 6.57
Итерация 2	X_1 X_5 X_2 -Z	0.67 -2.60 0.47 -6.13	1.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 1.00 0.00	0.78 **[-5.40]** -1.02 3.58	-0.13 0.60 0.07 0.67	0.00 1.00 0.00 0.00	0.04 0.40 -0.16 0.24	- 0.48 -
Итерация 3	X_1 X_3 X_2 -Z	0.30 0.48 0.96 -7.85	1.00 0.00 0.00 0.00	0.00 0.00 1.00 0.00	0.00 1.00 0.00 0.00	-0.04 -0.11 -0.04 1.07	0.14 -0.19 -0.19 0.66	0.09 -0.07 -0.24 0.50	

Шаг 4. Находим в итерации 1 по max $\Theta_{i=3}$=6.57 опорную строку i=3, в которой по min Θ_i=0.47 опорный элемент a_{qp}=[-6.11]. Выполняем итерацию 2. В итерации 2 в Z есть a_{i0}=-2.60<0, план не оптимален.

Шаг 5. Поскольку ai0<0, только у 2-й строки, то опорная строка (i=2).

Шаг 6. В опорной строке Θ_i>0=-2.6/-5.4 опорный элемент a_{qp}= [-5.4].

Шаг 7. После 2-й итерации находим 3-ю итерацию, в которой нет a_{i0}<0 и нет a_{ij}<0 в строке -Z (табл.5.1). Оптимальный план: $Zmin^*$=7.85 при x_1^*=0.30; x_2^*=0.96; x_3^*=0.48.

Постановка задачи 5.2.

Найти число рейсов x_j (j=1,n) m ВС по n ВЛ, если известны: bi- запасы ресурсов i=1,m; p_j- средняя прибыль от выполнения рейса по j-й ВЛ; a_{ij}-

нормы расхода i-го ресурса при выполнении рейса по j-й ВЛ (j=1,n). Множество x_j (j=1,n) должно обеспечить max прибыли Z. Математическая модель примера имеет вид $Z=2x_1+5x_2+7x_3$--->max (5.7)

при ограничениях

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 31;$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 22; \quad (5.8)$$
$$x_1 + 7x_2 + x_3 <= 44;$$
$$x_1 \geq 0; \ x_2 \geq 0; \ x_3 \geq 0. \text{ – целые числа .} \quad (5.9)$$

Алгоритм решения задачи 5.2

Шаг 1. Вводим в (5.8-5.12) x_4, x_5, x6 >= 0 в ограничения и в Z

$$Z = 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x6 \text{ -->max;} \quad (5.10)$$

при

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 31;$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 + x6 = 22; \quad (5.11)$$
$$x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 44;$$
$$x_1 \geq 0; \ x_2 \geq 0; \ x_3 \geq 0; \ x_4 \geq 0; \ x_5 \geq 0; \ x_6 \geq 0. \quad (5.12)$$

Шаг 2. Преобразуем $Z - 2x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 0(x_4 + x_5 + x_6) = 0$.

Шаг 3. Заполняем опорный план 1 симплекс-таблицы (табл.5.2).

Шаг 4. Формируем строку -W как сумму элементов $–W_j =-\sum a_{ij}$, стоящих на пересечении столбца и строк симплекс-таблицы со знаками (≥) и (=) 1(31+22)=-53; -1(3+1)=-4; -1(2+1)=-2; -1(3+3)=-6. (Опорный план 2). Дробное оптимальное решение находим Full-симплекс-методом, в котором опорный столбец ищется по строке –W.

Шаг 5. В строке -W (для Z-->max) находим min элемент <0= (-6). Опорным является столбец j=3, в котором стоит (-6).

Шаг 6. По $\min\Theta_i = a_{i0}/a_{j=p}$=22/3=7.33 находим опорную строку i=2. На пересечении i=2 и j=3 опорный элемент x[2,3]=3.0 .

Шаг 7. Выполняем преобразования Жордана-Гаусса и получаем итерацию 2. Так как из базиса вышел x_6, для расчета -W используем строку вектора базиса x_5, имевшего в (5.8) знак (=).

Расчет дробного оптимального плана Таблица.5.2.

	Базис	ai0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Θi
Опорный план 1	X_5	31.00	3.00	2.00	3.00	0	1	0	
	X_6	22.00	1.00	1.00	3.00	0	0	1	
	X_4	44.00	1.00	7.00	1.00	1	0	0	
	Z	0.00	-2.00	-5.00	-7.00	0	0	0	
Опорный план 2	(=)X_5	31.00	3.00	2.00	3.00	0.00	1.00	0.00	10.33
	(=)X_6	22.00	1.00	1.00	**[3.00]**	0.00	0.00	1.00	7.33
	(≥)X_4	44.00	1.00	7.00	1.00	1.00	0.00	0.00	m
	Z	0.00	-2.00	-5.00	-7.00	0.00	0.00	0.00	44.00
	-W	-53.00	-4.00	-3.00	**-6.00**	0.00	0.00	0.00	
Итерация 1	(=)X_5	9.00	**[2.00]**	1.00	0.00	0.00	1.00	-1.00	4.50
	X_3	7.33	0.33	0.33	1.00	0.00	0.00	0.33	22.21
	X_4	36.67	0.67	6.67	0.00	1.00	0.00	-0.33	54.73
	Z	51.33	0.33	-2.67	0.00	0.00	0.00	2.33	-
	-W	-9.00	**-2.00**	-1.00	0.00	0.00	0.00	2.00	-
Итерация 2	X_1	4.50	1.00	0.50	0.00	0.00	0.50	-0.50	
	X_3	5.83	0.00	0.17	1.00	0.00	-0.17	0.50	
	X_4	33.67	0.00	6.33	0.00	1.00	-0.33	0.00	
	Z	49.83	0.00	-2.83	0.00	0.00	-0.17	2.50	
	-W	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	
	Базис	a_{i0}	X_1	X_2	X_3	X_4	Θ_i		
Итерация 2”	X_1	4.50	1.00	0.50	0.00	0.00	9.00		
	X_3	5.83	0.00	0.17	1.00	0.00	34.29		
	X_4	33.67	0.00	**[6.33]**	0.00	1.00	5.31		
	Z	49.83	0.00	**-2.83**	0.00	0.00	-		
Дробный оптимальный план	X_1	1.84	1.00	0.00	0.00	-0.08			
	X_3	4.95	0.00	0.00	1.00	-0.03			
	X_2	5.32	0.00	1.00	0.00	0.16			
	Z	64.89	0.00	0.00	0.00	0.45			

Шаг 8. В итерации 1 по min a_{io}=-2 по строке –W находим опорный столбец j=1, а по minΘ_i=$a_{i0}/a_{j=p}$=4.5 опорную строку i=1. На пересечении j=1 и i=1 находим опорный элемент x[1,1]=2 и находим алгоритмом Жордана-Гаусса итерацию 2. Поскольку в базисе нет x_i со знаками (=) и (≥), из нее можно удалить -W и столбцы x_5 и x_6, вышедших из базиса. Записываем план 2". В ней в строке Z есть е число <0, поэтому план не оптимален. Находим по Z опорный столбец j=2 и по minQ_i=$a_{i0}/a_{j=p}$=33.67/6.33=5.31 - опорную строку i=3. Найдя опорный элемент x(2,3) = 6.33, вычисляем новый план. Так как в нем в Z нет a_{ij}<0 – то план оптимален и Z^*max=64.69 при x_1^*=1.84; x_2^*=5.32; x_3^*=4.95. Из дробного оптимального плана алгоритмом Гомори получаем целочисленный оптимальный.

Шаг 9. В столбце a_{i0}, находим первое дробное a(1,1)=1.84. Преобразуем строку i=1, вычитая из исходного числа ближайшее целое число, стоящее слева на числовой оси (из целого числа вычитается это же число):

Св.член	X_1	X_2	X_3	X_4
1.84-1=0.84;	1-1=0;	0-0=0;	0-0=0;	-0.08-(-1)=0.92.

Шаг 10. Формируем неравенство $0.92x_4 - 0.84 \geq 0$. (5.13)

Умножаем (5.14) на -1 $-0.92x_4 + 0.84 \leq 0$. (5.14)

Вводим x5≥0 $-0.92x_4+0.84+x_5=0$. (5.15)

Переносим вправо 0.84 $-0.92x_4 + x_5=-0.84$. (5.16)

Включаем (5.16) и вектор x_5 в симплекс-таблицу . Так как в a_{i0} a(4,0)=-0.84, используем далее двойственный симплекс-метод. Опорная строка i=4. Опорный элемент находим по minΘ_i≥$a_{i0}/a_{j=p}$. Так как в опорной строке лишь a(4,4)<0=(-0.92), то он и является опорным элементом a_{qp}. Если aij<0 в опорной строке несколько, то опорный – элемент minΘ_4=0.91.

Шаг 13. Выполняя итерации 3, 4 и находим целочисленный оптимальный план.

Целочисленная оптимизация задачи ЛП Таблица 5.3.

	Базис	a_{i0}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
Дробный	X_1	1.84	1.00	0.00	0.00	-0.08	0.00	
оптимальный	X_3	4.95	0.00	0.00	1.00	-0.03	0.00	
план	X_2	5.32	0.00	1.00	0.00	0.16	0.00	
	X_5	**-0.84**	0.00	0.00	0.00	**[-0.92]**	1.00	
	Z	64.89	0.00	0.00	0.00	0.45	0.00	
Итерация 3	X_1	1.91	1.00	0.00	0.00	0.00	-0.09	
	X_3	4.97	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.03	
	X_2	5.17	0.00	1.00	0.00	0.00	0.17	
	X_4	0.91	0.00	0.00	0.00	1.00	-1.09	
	Z	64.49	0.00	0.00	0.00	0.00	0.49	
	Базис	a_{i0}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Итерация 4	X_1	1.91	1.00	0.00	0.00	0.00	-0.09	0.00
	X_3	4.97	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.03	0.00
	X_2	5.17	0.00	1.00	0.00	0.00	0.17	0.00
	X_4	0.91	0.00	0.00	0.00	1.00	-1.09	0.00
	X_6	**-0.91**	0.00	0.00	0.00	0.00	**[-0.91]**	1.00
	Z	64.49	0.00	0.00	0.00	0.00	0.49	0.00
Целочислен-	X_1	2.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.09
ный	X_3	5.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	-0.03
оптимальный	X_2	5.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.19
план	X_4	2.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	-1.19
	X_5	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	-1.09
	Z	64.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.53

$Zopt^* = 64$ при $x^*_1 = 2$; $x_2^* = 5$; $x_3^* = 5$; $x_4^* = 2$; $x_5^* = 1$; $x_6^* = 0$.

В табл.5.4 и табл.5.5 приведены исходные данные задач, в которых все $x_i > 0$. Ответы задач см. в табл.1.7 и 1.8. П. I соответственно.

Исходные данные задачи 5.1. Таблица 5.4.

Вариант_1 $Z=1x_1 +3x_2+2x_3$->min $-1x_1 + 2x_2 + 0x_3 \le -2;$ $2x_1 - 3x_2 - 1x_3 \le -3;$ $3x_1 + 1x_2 - 2x_3 \le -1;$	Вариант_2 $Z=3x_1+2x_2+7x_3$->min $3x_1 - 3x_2 - 1x_3 \le -1;$ $-6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le -5;$ $1x_1 - 3x_2 + 1x_3 \le -3;$	Вариант_3 $Z=2x_1-1x_2+3x_3$-min $1x_1 - 2x_2 - 1x_3 \le 3;$ $-3x_1 + 0x_2 - 2x_3 \le -4;$ $-2x_1 + 3x_2 - 1x_3 \le -5;$
Вариант_4 $Z=4x1-2x_2+4x_3$->min $2x_1 - 4x_2 - 1x_3 \le -5;$ $1x_1 + 0x_2 - 3x_3 \le -2;$ $2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 1;$	Вариант_5 $Z=7x_1+4x_2+3x_3$->min $1x_1 - 4x_2 - 1x_3 \le -7;$ $-3x_1 + 1x_2 - 2x_3 \le -4;$ $2x_1 + 0x_2 - 1x_3 \le -3;$	Вариант_6 $Z=3x_1-1x_2+2x_3$->min $2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le -5;$ $-2x_1 + 0x_2 + 1x_3 \le -4;$ $3x_1 + 1x_2 - 2x_3 \le 2;$
Вариант_7 $Z=3x_1+3x_2+2x_3$->min; $4x_1 - 4x_2 - 2x_3 \le -3;$ $-3x1+ 0x_2 - 2x_3 \le -5;$ $1x_1 - 1x_2 - 1x_3 \le -2;$	Вариант_8 $Z=5x_1+1x_2+3x_3$->min $-1x_1-1x_2+0x_3 \le -3;$ $-1x_1+1x_2-1x_3 \le -3;$ $2x_1+1x_2-1x_3 \le 5;$	Вариант_9 $Z=8x1-2x_2+3x_3$->min $4x1 + 0x_2 - 3x_3 \le 2;$ $-3x1 + 1x_2 + 0x_3 \le -3;$ $1x1 + 0x_2 - 3x_3 \le -1;$

Исходные данные задачи 5.2. Таблица 5.5.

Вариант_1 $2x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 4;$ $2x_1 + 0x_2 + 2x_3 \le 8;$ $1x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 5;$ $Z=1x_1 +2x_2 +2x_3$->max;	Вариант_2 $2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 6;$ $1x_1 + 3x_2 + 1x_3 \le 11;$ $2x_1 + 1x_2 + 2x_3 \le 8;$ $Z=2x_1 +4x_2 +3x_3$->max;	Вариант_3 $3x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 9;$ $2x_1 + 4x_2 + 1x_3 \le 11;$ $1x_1 + 1x_2 + 0x_3 \le 10;$ $Z=3x_1 +6x_2 +2x_3$->max;
Вариант_4 $1x_1 + 1x_2 + 0x_3 =11;$ $1x_1 + 0x_2 + 1x_3 \le 8;$ $0x_1 + 2x_2 + 1x_3 \le 10;$ $Z=1x_1+6x_2+3x_3$->max;	Вариант_5 $2x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 8;$ $2x_1 + 0x_2 + 1x_3 \le 15;$ $4x_1 + 3x_2 + 1x_3 \le 11;$ $Z=3x_1 +4x_2+8x_3$->max;	Вариант_6 $1x_1 + 0x_2 + 1x_3 \ge 10;$ $1x_1 + 2x_2 + 1x_3 =12;$ $2x_1 + 3x_2 -4x_3 \le 13;$ $Z=2x_1+5x_2+2x_3$->max;
Вариант_7 $1x_1 + 0x_2 + 3x_3 =12;$ $0x_1 + 3x_2 + 1x_3 \le 9;$ $3x_1 + 1x_2 + 0x_3 \le 13;$ $Z=3x_1 +6x_2 +5x_3$->max;	Вариант_8 $1x_1 + 2x_2 + 1x_3 =12;$ $2x_1 + 0x_2 + 1x_3 \le 13;$ $1x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 14;$ $Z=2x_1 +3x_2 +7x_3$->max;	Вариант_9 $1x_1 + 3x_2 + 2x_3 =15;$ $0x_1 + 2x_2 + 1x_3 \le 29;$ $2x_1 + 0x_2 + 2x_3 \le 15;$ $Z=1x_1 +5x_2 +5x_3$->max;

Практическое занятие 6

Разработка УР об использовании основных производственных фондов

Постановка задачи 6.1.

Авиакомпания, летает на n типах воздушных судов ВС, по m воздушным линиям (ВЛ). Известны : 1) c_{ij} - расходы на перевозки (руб./ткм.) на i-м типе ВС по j-й ВЛ; 2) a_i - потенциал провозной способности i-го типа ВС (млн. ткм.); 3) b_j - прогноз спроса по j-й ВЛ (млн. ткм.). В табл.6.1 приведены исходные данные примера. Для ВЛ, на которых использование i-го типа невозможно c_{ij}= 100.

Исходные данные примера Таблица.6.1.

Тип ВС	Воздушные линии						a_i
	1	2	3	4	5	6	
1	1	9	10	3	8	1	40
2	2	1	100	4	6	1	30
3	9	5	1	6	1	3	40
4	3	100	3	1	100	1	40
b_j	20	20	40	20	20	20	140/150

Необходимо определить x_{ij} (i=1,n;j=1,m;) млн.ткм - объёмы перевозок на i-м типе ВС по j-й ВЛ, дающие min расходы C [1,74-87].

$$C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij} \longrightarrow \min \quad /\text{ден.ед}/, \qquad (6.1)$$

при ограничениях:

$$1.\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=a_i; \qquad 2.\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=b_j; \qquad 3.\ \sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{j=1}^{m} b_j\,; \qquad 4.\ x_{ij}>=0; \ (i=1,n;\ j=1,m) \qquad (6.2)$$

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Преобразуем "открытую" задачу в "закрытую", вводя дополнительный столбец с bдоп = 10 (см. табл.6.2).

Шаг 1 **Таблица.6.2.**

Тип ВС	Воздушные линии							a_i
	0	1	2	3	4	5	6	
1	**0**	1	9	10	3	8	1	40
2	**0**	2	1	100	4	6	1	30
3	**0**	9	5	1	6	1	3	40
4	**0**	3	100	3	1	100	1	40
bj	**10**	20	20	40	20	20	20	**150**/150

Шаг 2. Находим в табл.6.2. строку с max числом "запретных" клеток (c_{ij}=100). Находим в ней клетку с c_{40}min=0 (4,0) и записываем в неё max возможное x_{40}=10. Остаток записываем в клетку с последующими c_{ij}min: x_{44}=20 и x_{46}=20. Сумма x_{ij} в 4-й строке равна a_4=40. Клетки x_{ij}>0 называем "занятыми", а клетки x_{ij}=0 - "незанятыми".

Шаг 3. Ищем следующую строку с "запретными" клетками и записываем в клетку с c_{21}min=1 max возможное x_{22}=20, а также x_{26}=10 Сумма x_{ij} во 2-й строке строго равна a_2=30.

Шаг 4. Строк с "запретными" клетками больше нет, поэтому в первой строке находим клетку c_{ij}min=1 и записываем в неё max возможное x_{11}=20. Остаток 20 записываем в клетку со следующей c_{ij}min=8 - x_{15}=20. Сумма x_{ij} в 1-й строке равна a_1=40.

Шаг 5. Заполняя 3-ю строку, записываем в клетку с c_{ij}min=1 max x_{33}=40.

Опорный план Таблица.6.3.

Тип ВС	0	1	2	3	4	5	6	a_i
1	0	1 **20**	9	10	3	8 **20**	1	40
2	0	2	1 **20**	100	4	6	1 10	30
3	0	9	5	1 **40**	6	1	3	40
4	0 **10**	3	100	3	1 **20**	100	1 **10**	40
bj	10	20	20	40	20	20	20	

Шаг 6. Вычисляем целевую функцию для опорного плана

$$C=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\,x_{ij} = 1*20+8*20+1*20+1*10+1*40+0*10+1*20+1*20=\mathbf{290}\text{ руб.}$$

План оптимален при выполнении двух условий:

1) для "занятых" клеток $u_i + v_j = c_{ij}$; (6.3)

2) для "незанятых" клеток $u_i + v_j <= c_{ij}$. (6.4)

где $U = (u_1, u_2,..., u_n)$ - потенциалы столбцов $i=1,n$;

$V = (v_1, v_2,..., v_m)$ - потенциалы строк $j=1,m$.

Шаг 7. Строим систему потенциалов $S_{UV} = (U,V)$,

Шаг 7а. Вводим столбец потенциалов строк u_i и строку потенциалов столбцов v_j.

Шаг 7б. Находим строку с max числом "занятых" клеток ($x_{ij}>0$) и присваиваем ей потенциал $u_4=0$.

Шаг 7в. Используя условие (6.3) строим цепочку потенциалов (табл.6.4) $v_0= c_{40}-u_4=0-0=0$; $v_4= c_{44}-u_4=1-0=1$; $v_6=c_{46}-u_4=1-0=1$.

Шаг 8. Используя потенциалы и (6.7), продолжаем цепочку

из $u_2+v_6=c_{26}$ $u_2=c_{26}-v_6=1-1=0$,а из $u_2+v_2=c_{22}$ $v_2=c_{22}-u_2=1-0=1$.

Шаг 9. Построение потенциалов прервалось, поскольку "занятых" клеток $n_з=8$ меньше, чем $m+n-1=4+7-1=10$, Для продолжения расчетов вводим в план "фиктивно-занятую" клетку с $x_{ij}=0$: а) помечаем (&) и зачеркиваем столбцы с потенциалами и строки без потенциала; б) на пересечениях &-линий ищем клетку с $c_{ij}min$ (0,0); в) записываем $x_{00}=0$, объявляя клетку (0,0) фиктивно-занятой.

Шаг 10. Продолжаем формирование системы потенциалов (табл.6.4):

из $v_0+u_1=c_{10}$ $u_1=c_{10}-v_0=0-0=0$;

из $u_1+v_1=c_{11}$ $v_1=c_{11}-u_1=1-0=1$;

из $u_1+v_5=c_{15}$ $v_5=c_{15}-u_1=8-0=8$.

Расчеты прервались. Вводим ещё одну "фиктивно-занятую" клетку.

Шаг 11. Помечаем (&) и зачеркиваем строки с u_i и столбцы без vj. Записываем в зачеркнутую клетку с $c_{ij}min$ $x_{43}=0$.

Шаг 12. Продолжаем построение системы потенциалов:

из $u_4+v_3=c_{43}$ $v_3=c_{43}-u_4=3-0=3$,

из $u_3+v_3=c_{33}$ $u_3=c_{33}-v_3=1-3=-2$.

Система потенциалов построена (табл.6.4.).

Шаг 13. Проверяя (6.4) для незанятых клеток, отмечаем клетки, в которых (6.4) не выполнено. Записываем в табл.6.4 разности $\delta_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$. Из табл.6.4 видно что, условие (6.4) не выполнено и план не оптимален.

Шаг 14. Помечаем клетку с $\delta_{ij}max=5$ (\$) и строим контур по занятым клеткам (табл.6.4). Начиная с клетки (\$) и двигаясь по занятым клеткам, поворачиваем в них на 90^o и возвращаемся в (\$).

Оптимизация плана (Итерация 1) Таблица.6.4.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>8</td><td>1</td><td>a_i</td></tr>
<tr><td>1</td><td>u1=0</td><td>☼0
0 |</td><td>——1—
20</td><td>———9</td><td>—10</td><td>———3</td><td>——◙ 8
20 |</td><td>1</td><td>40</td></tr>
<tr><td>2</td><td>u2=0</td><td>|0
. |</td><td>2</td><td>1
20</td><td>100</td><td>4</td><td>6
|</td><td>1
10</td><td>30</td></tr>
<tr><td>3</td><td>u3=-2</td><td>|0
. |</td><td>9</td><td>5</td><td>◙1
40|</td><td>———6</td><td>——☼1
5 $</td><td>3</td><td>40</td></tr>
<tr><td>4</td><td>u4=0</td><td>|0
10◙—</td><td>3
————</td><td>100
————</td><td>|3
0☼</td><td>1
20</td><td>100</td><td>1
10</td><td>40</td></tr>
<tr><td>b_j</td><td></td><td>10</td><td>20</td><td>20</td><td>40</td><td>20</td><td>20</td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

Шаг 15. Маркируем вершины контура знаками (☼),(◙). В клетках с () добавляем, а в клетках с (◙) вычитаем min x_{ij}={20,10,40}=10 с вершин со знаком (◙) (табл.6.5).

Шаг 16. Вводим с u4=0 и стороим потенциалы.

Шаг 17. План неоптимален по условию (6.4) (dmax=5). Критерий

C=1*20+8*10+1*20+1*10+1*30+1*10+3*10+1*20+1*10=**230**.

Шаг 18. От клетки (1,6) (\$) строим контур и находим на вершинах со знаком (◙) $x_{ij}min=10$, которое вычитаем в клетках с ◙ и прибавляем в клетках с ☼ (табл.6.6).

Оптимизация плана (Итерация 2) Таблица.6.5.

	$u_i \backslash v_j$	-5	-4	1	3	1	3	1	a_i
1	u_1=5	0 **10**	1 **20**	9	10	3	◙ 8 **10** Θ	☼1 5$	40
2	u_2=0	0	2	1 **20**	100	4	6	1 **10**	30
3	u_3=-2	0	9	5	1 **30** ◙	6	1 **10**☼	3	40
4	u_4=0	0	3	100	3 **10**☼	1 **20**	100	1 **10**◙	40
b_j		10	20	20	40	20	20	20	

Шаг 19. Формируем систему потенциалов и по условиям (6.3) и (6.4), находим, что план оптимален.

Оптимальный план Таблица.6.6.

		0	1	1	5	3	5	1	a_i
1	u_1=0	0 **10**	1 **20**	9	10	3	8	1 **10**	40
2	u_2=0	0	2	1 **20**	100	4	6	1 **10**	30
3	u_3=-4	0	9	5	1 **20**	6	1 **20**	3	40
4	u_4=-2	0	3	100	3 **20**	1 **20**	100	1	40
bj		10	200	20	40	20	20	20	

Целевая функция равна

C=(1*20+0*3+1*10)+(1*20+1*10)+(1*20+1*20)+(3*20+1*20)=**180**.

В табл.6.7 и табл.6.8 приведены исходные данные задач, ответы которых приведены в табл.1.9 и 1.10 П.I соответственно.

Исходные данные задачи 6.1. Таблица 6.7.

Вариант 1						a_i	Вариант 2						a_i
2	9	10	3	8	1	45	1	9	10	3	8	1	40
2	7	100	4	6	4	35	2	1	100	4	6	1	30
9	5	2	6	2	3	40	9	5	1	6	1	3	30
3	100	3	3	100	1	30	3	100	3	1	100	1	30
20	10	50	20	20	20		20	20	40	20	30	20	
Вариант 3							Вариант 4						
1	9	10	3	8	1	40	3	9	10	3	5	4	40
2	7	100	4	6	1	30	2	7	100	4	4	3	40
9	1	1	6	1	3	40	1	1	1	6	2	2	40
3	100	3	1	100	1	40	3	100	3	1	100	1	30
20	20	40	20	20	20		20	30	40	20	30	20	
Вариант 5							Вариант 6						
3	9	10	3	5	4	45	5	9	10	4	7	8	42
2	7	100	4	4	3	44	4	7	100	3	5	5	43
1	1	1	6	2	2	45	3	1	1	6	1	3	44
3	100	3	1	100	1	36	2	100	3	1	100	1	35
23	20	44	20	35	26		24	20	43	20	34	25	
Вариант 7							Вариант 8						
6	8	10	5	6	6	44	3	9	10	3	4	5	40
5	7	100	3	5	5	42	2	7	100	4	3	3	41
4	1	1	6	1	3	43	1	1	1	6	2	1	42
3	100	3	1	100	1	34	3	100	2	1	100	1	33
21	20	42	20	33	24		20	20	41	20	32	27	

Исходные данные задачи 6.2. Таблица 6.8.

Вариант 1						a_i	Вариант 2						a_i
6	4	13	5	11	13	25	4	9	9	3	6	3	27
4	13	5	10	6	14	32	3	7	9	7	13	8	35
9	14	5	4	7	3	28	12	14	11	13	3	11	26
7	12	3	3	7	3	25	12	8	3	6	13	13	24
25	14	12	18	15	34		12	16	11	18	14	31	
Вариант 3							Вариант 4						
10	3	12	6	3	14	28	11	9	14	9	5	4	35
14	4	14	14	9	14	30	4	7	11	7	9	6	31
4	7	3	6	4	7	32	12	14	7	6	3	13	24
6	13	8	4	7	6	29	10	8	13	6	6	10	32
35	22	24	15	24	9		19	16	20	16	20	16	
Вариант 5							Вариант 6						
11	12	11	4	13	3	29	10	6	13	14	8	10	35
12	11	3	3	12	9	32	4	13	5	12	13	8	28
5	14	12	11	9	4	35	5	10	9	4	13	7	32
10	4	12	11	10	14	24	11	4	13	5	5	10	32
30	18	21	23	15	21		22	16	22	21	21	15	
Вариант 7							Вариант 8						
13	9	11	9	4	10	30	12	8	13	13	4	11	31
13	11	3	11	8	9	29	9	13	5	11	8	8	32
3	4	8	5	4	12	24	8	10	11	4	13	9	24
3	7	7	7	7	8	29	5	4	7	5	7	6	29
33	17	14	19	14	25		18	21	18	21	16	12	

Практическое занятие 7

Разработка УР об оперативном использовании самолетов

Постановка задачи 7.1

Оптимизация выполнения n рейсов на n воздушных судах (ВС) выполняется путем преобразования матрицы $C=c_{ij}$ где c_{ij} - себестоимость j-го рейса на i-м ВС (i,j=1,n). Модель задачи имеет вид

целевая функция: $$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \dashrightarrow \min, \qquad (7.1)$$

при: 1) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$; при i,j=1,n; (7.2) 2) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1$; при i,j=1,n; (7.3)

3) x_{ij} =0 или 1; при i,j=1,n. (7.4)

Искомое - матрица назначений n ВС на выполнение n рейсов $X=x_{ij}$ при min затратах Z. Исходные данные примера приведены на рис.7.1.

ВС	1	2	3	4	m=5	Рейсы
1	7	4	11	8	9	< C_{ij}
2	14	13	15	5	16	
3	9	4	5	8	12	
4	8	5	7	7	11	
n=5	3	6	6	23	3	

Рис.7.1. Исходные данные примера

Алгоритм решения задачи 7.1.

Шаг 1. Находим в каждой строке min c_{ij}.

Шаг 2. Вычитаем min c_{ij} из каждого c_{ij} в этой строке.

Шаг 3. Находим в каждом столбце min c_{ij} и вычитаем его из c_{ij} в каждом столбце матрицы, полученной на шаге 2.

В каждой строке и каждом столбце матрицы С должен быть 0.

7	4	11	8	9	4
14	13	15	5	16	5
9	4	5	8	12	4
8	5	7	7	11	5
3	6	6	23	3	3

Шаг 1.

3	0	7	4	5
9	8	10	0	11
5	0	1	4	8
3	0	2	2	6
0	3	3	20	0
0	0	1	0	0

Шаг 2.

3	0	6	4	5
9	8	9	0	11
5	0	0	4	8
3	0	1	2	6
0	3	2	20	0

Матрица C_1

Шаг 3.

Рис.7.2. Построение опорного плана (Шаги 1-3)

Шаг 4. Анализируем строки матрицы С1 слева направо. Встретив в строке ноль без пометок, помечаем его знаком (*), а все остальные ноли вправо до конца строки и вниз до конца столбца помечаем знаком (^). Ноль со знаком (*) называется помеченным, а ноль со знаком (^) - непомеченным. Опускаясь на следующую строку, повторяем процедуру (рис.7.3).

>3	0*	6	4	5
9	8	9	0	11
5	0^	0	4	8
3	0^	1	2	6
0	3	2	20	0

3	0*	6	4	5
>9	8	9	0*	11
5	0^	0	4	8
3	0^	1	2	6
0	3	2	20	0

3	0*	6	4	5
9	8	9	0*	11
>5	0^	0*	4	8
3	0^	1	2	6
0	3	2	20	0

3	0*	6	4	5
9	8	9	0*	11
5	0^	0*	4	8
>3	0^	1	2	6
0	3	2	20	0

3	0*	6	4	5
9	8	9	0*	11
5	0^	0*	4	8
3	0^	1	2	6
>0*	3	2	20	0^

Рис.7.3. Пометки 0* и 0^ (Шаг 4)

После шага 4 возможны три исхода:

a) каждая строка имеет назначение (имеет 0*);

b) имеется не менее двух 0^ в строках и столбцах матрицы С;

c) нет 0^, но количество 0* меньше n.

Шаг 5. Если (a) - задача решена, идем на шаг 11, если (b) выбираем один из 0^, помечаем его знаком (*), зачеркиваем остальные нули в той же строке и в том же столбце и возвращаемся на шаг 4, а если (c) - идем на шаг 8.

Шаг 6. Помечаем строки без 0*, но с 0^ знаком # (рис.7.4).

Шаг 7. Помечаем по этим строкам столбцы с 0^ знаком #.

Шаг 8. В столбце, помеченном знаком (#), находим 0* и помечаем знаком # строку, в которой он стоит 0* (рис.7.4).

Шаг 9. Помечаем & столбцы, без знака (#), и строки, со знаком #. Зачеркиваем все нули min числом прямых линий (рис.7.5).

$$
\begin{array}{r|ccccc|}
 & 3 & 0^* & 6 & 4 & 5 \\
 & 9 & 8 & 9 & 0^* & 11 \\
 & 5 & 0^\wedge & 0^* & 4 & 8 \\
>\# & 3 & 0^\wedge & 1 & 2 & 6 \\
 & 0^* & 3 & 2 & 0 & 0^\wedge
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|ccccc|}
 & & >\# & & & \\
 & 3 & 0^* & 6 & 4 & 5 \\
 & 9 & 8 & 9 & 0^* & 11 \\
 & 5 & 0^\wedge & 0^* & 4 & 8 \\
\# & 3 & 0^\wedge & 1 & 2 & 6 \\
 & 0^* & 3 & 2 & 20 & 0^\wedge
\end{array}
\; . \qquad
\begin{array}{r|ccccc|}
 & & \# & & & \\
>\# & 3 & 0^* & 6 & 4 & 5 \\
 & 9 & 8 & 9 & 0^* & 11 \\
 & 5 & 0^\wedge & 0^* & 4 & 8 \\
\# & 3 & 0^\wedge & 1 & 2 & 6 \\
 & 0^* & 3 & 2 & 20 & 0^\wedge
\end{array}
$$

Рис.7.4. Пометки строк и столбцов

Шаг 10. Ищем Δ=min не зачеркнутому c_{ij}. Вычитаем Δ из не зачеркнутых c_{ij} и прибавляем к дважды зачеркнутым c_{ij} (рис.7.5). Зачеркнутые 1 раз c_{ij} не меняем. Идем на Шаг 4 и выполняем итерацию n=n+1.

$$
\begin{array}{r|ccccc|}
 & & \& & & & \\
\# & (3) & 0^* & (6) & (4) & (5) \\
\& & 9- & \{8\} & -9- & -0^* & 11- \\
\& & 5- & \{0\} & -0- & -4- & -8- \\
\# & (3) & 0^\wedge & [1] & (2) & (6) \\
\& & 0- & \{3\} & 2- & -20 & -0-
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|ccccc|}
2 & 0 & 5 & 3 & 4 \\
9 & 9 & 9 & 0 & 11 \\
5 & 1 & 0 & 4 & 8 \\
2 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
0 & 4 & 2 & 20 & 0
\end{array}
$$

| Δ = [1] |(..) – Δmin| |{..} + Δmin|

Рис.7.5. Зачеркивание строк и столбцов, изменение c_{ij}

Пометки 0*

2	0*	5	3	4
9	9	9	0*	11
5	1	0*	4	8
2	0^	0^	1	5
0*	4	2	20	0^

Пометки строк и и столбцов #

		#	#		
#	2	0*	5	3	4
	9	9	9	0*	11
#	5	1	0*	4	8
#	2	0^	0^	1	5
	0*	4	2	20	0^

Пометка & и вычеркивание строк и столбцов

		&	&		
#	(2)	0	5	(3)	(4)
&	-9--	{9}-	{9}-	--0-	-11-
#	(5)	1	0	(4)	(8)
#	(2)	0	0	[1]	(5)
&	-0--	{4}-	{2}-	-20-	-0--

| Δ = [1]

1	0	5	2	3
9	10	10	0	11
4	1	0	3	7
1	0	0	0	4
0	5	3	20	0

|(..) – Δmin| |{..} + Δmin|

Рис.7.6. Итерация II

Пометки 0* и 0^

1	0*	5	2	3
9	10	10	0*	11
4	1	0*	3	7
1	0^	0^	0^	4
0*	5	3	20	0^

Пометки строк и столбцов #

		#	#	#	
#	1	0*	5	2	3
#	9	10	10	0*	11
#	4	1	0*	3	7
#	1	0^	0^	0^	4
	0*	5	3	20	0^

Δ = [1]

		&	&	&	
#	[1]	0	5	2	(3)
#	(9)	10	10	0	(11)
#	(4)	1	0	3	(7)
#	(1)	0	0	0	(4)
&	--0-	-{5}-	-{3}-	{20}	--0--

|(..) – Δ| |{..} + Δ|

0	0	5	2	2
8	10	10	0	10
3	1	0	3	6
0	0	0	0	3
0	6	4	21	0

Рис.7.7. Итерация III

Помечаем 0* и 0^ (рис.7.8)и, поскольку в каждой строке есть помеченный ноль (0*) - план оптимален.

0*	0^	5	2	2
8	1	10	0*	10
3	1	0*	3	6
0^	0*	0^	0^	3
0^	6	4	21	0*

Рис.7.8. Итерация IV Помечаем 0* и 0^

Шаг 11. Формируем матрицу назначений X, меняя 0* на 1 и 0^ на 0. Суммируем c_{ij} матрицы C, стоящие на местах с 1 в матрице X, и находим Z = 7 + 5 + 5 + 5 + 3 = 25 (рис.7.9).

(**1**)	0	0	0	0
0	0	0	(**1**)	0
0	0	(**1**)	0	0
0	(**1**)	0	0	0
0	0	0	0	(**1**)

Матрица назначений

(**7**)	4	11	8	9
14	13	15	(**5**)	16
9	4	(**5**)	8	12
8	(**5**)	7	7	11
3	6	6	23	(**3**)

Z = 7 + 5 + 5 + 5 + 3 = 25

Рис.7.9. Оптимальный план

Постановка задачи 7.2.

Задано расписание полетов между городами A и B (табл.7.2). Необходимо создать оптимальный график оборота ВС и найти min число ВС.

Расписание полетов между A и B Таблица 7.2.

Рейс	Вылет из A	/ Прилет в B	Рейс	Вылет из B	/ Прилет в A
1	10.00	12.00	11	10.00	12.00
2	11.00	13.00	12	13.00	15.00
3	13.00	15.00	13	20.00	22.00
4	15.00	17.00	14	21.00	23.00
5	21.00	23.00	15	22.00	24.00

Время нахождения каждого ВС на земле, необходимое для заправки топливом $T_{min} \leq 1$ час. Число рейсов в сутки по расписанию $nr_{SU}=10$.

Алгоритм решения задачи 7.2.

Шаг 1. Находим времена T_{ij} пребывания ВС на земле для каждой пары рейсов. Так, выполняя рейс ВС, вылетевший из А в 10.00 и прибывший в 12.00, сможет улететь из В рейсом 11 в 10.00 только на следующие сутки через (24.00-12.00)+10.00=22 час. Число 22 находится в табл.7.3 (клетка 1,1). Аналогично найдены T_{ij} для каждой возможной пары рейсов (табл.7.3).

Т нахождения ВС на земле для любой пары рейсов Таблица 7.3.

В Пр./Уб.	11	12	13	14	15	А Пр./Уб.	1	2	3	4	5
1	22	**1**#	8	9	10	11	22	23	1	**3**#	9
2	21	24	**7**#	8	9	12	19	20	22	24	**6**#
3	19	22	5	**6**#	7	13	**12**#	13	15	17	23
4	17	20	3	4	**5**#	14	11	**12**#	14	16	22
5	**11**#	14	21	22	23	15	10	11	**13**#	15	21

Шаг 2. Решаем задачу "о назначениях" по правой и левой частям табл.7.3. Помеченные знаком (#) элементы - оптимальные искомые задач "о назначении". Суммарное минимальное Т нахождения ВС на земле для левой матрицы равно Z = 1+ 7 + 6 + 5 + 11 = 30, а для правой - Z= 12+ 12+ 13+ 3+ 6 = 46.

Шаг 3. По матрицам назначений находим пары оптимально спариваемых рейсов:

а) 1-12; 2-13; 3-14; 4-15; 5-11;

в) 11- 4; 12- 5; 13- 1; 14- 2; 15- 3.

Результаты решения задачи "о назначениях" Таблица 7.4.

В Пр./Уб.	11 12 13 14 15	А Пр./Уб.	1 2 3 4 5
1	0 1 0 0 0	11	0 0 0 1 0
2	0 0 1 0 0	12	0 0 0 0 1
3	0 0 0 1 0	13	1 0 0 0 0
4	0 0 0 0 1	14	0 1 0 0 0
5	1 0 0 0 0	15	0 0 1 0 0

Шаг 4. Используя результаты шага 3, находим цепочку (1) рейсов, обеспечивающую min суммарного времени нахождения каждого самолета на земле : 1 - 12 - 5 - 11 - 4 - 15 - 3 - 14 - 2 - 13 - 1.

Шаг 5. По цепочке находим число дней, за которые одно ВС выполнит все рейсы. Так, ВС, вылетающее из А в понедельник в 9.00 выполнит все рейсы цепочки за 4 дня в четверг в 22.00. В пятницу в 9.00 ВС может начать новую цепочку. Продолжительность цепочки равна ntc=4 дням.

Шаг 6. Определяем количество ВС, способное выполнить цепочку

$$Nbc = Nr_{SU} * ntc / Nr_{SU} = 10 * 4/10 = 4 \text{ самолета.}$$

В табл.7.1 и табл.7.2 приведены исходные данные задач, ответы которых см. в табл.1.11 и 1.12 П.I. соответственно.

Исходные данные задачи 7.1. Таблица 7.1.

Вариант 1				
10	5	9	18	11
13	19	6	12	4
3	2	4	4	5
18	9	12	17	15
11	6	14	19	10

Вариант 2				
23	24	5	15	10
22	23	4	18	19
17	18	23	3	4
11	12	17	21	22
10	11	16	20	21

Вариант 3				
21	22	3	19	10
20	21	2	18	19
15	16	21	3	4
11	12	17	23	23
10	11	16	22	23

Вариант 4				
3	5	2	3	2
2	3	7	2	2
3	6	3	2	3
6	2	3	7	4
7	5	6	9	7

Вариант 5				
5	6	11	9	11
11	7	3	10	3
7	11	11	8	9
10	8	12	15	13
2	9	6	11	3

Вариант 6				
5	2	9	6	7
12	11	13	3	14
7	2	3	6	10
6	3	5	5	9
1	4	4	21	1

Вариант 7				
12	3	11	15	21
11	13	3	10	3
7	11	15	15	10
10	11	5	5	9
2	11	10	11	3

Вариант 8				
7	5	12	9	3
10	4	6	3	17
7	2	13	6	6
6	13	5	15	9
11	7	4	21	3

Исходные данные задачи 7.2. Таблица 7.2.

Вариант 1

Рейс	Вылет/Прилет из А в В	Рейс	Вылет/Прилет из В в А
1	8.00 - 11.00	11	8.00 - 11.00
2	9.00 - 12.00	12	17.00 - 20.00
3	11.00 - 14.00	13	18.00 - 21.00
4	19.00 - 22.00	14	19.00 - 22.00
5	20.00 - 23.00	15	20.00 - 23.00

Вариант 2

Рейс	Вылет/Прилет из А в В	Рейс	Вылет/Прилет из В в А
1	8.00 - 11.00	11	8.00 - 11.00
2	10.00 - 13.00	12	9.00 - 12.00
3	15.00 - 18.00	13	14.00 - 17.00
4	19.00 - 22.00	14	20.00 - 23.00
5	20.00 - 23.00	15	21.00 - 24.00

Вариант 3

Рейс			
1	8.00 - 10.00	11	11.00 - 13.00
2	12.00 - 14.00	12	12.00 - 14.00
3	15.00 - 17.00	13	14.00 - 16.00
4	17.00 - 19.00	14	18.00 - 20.00
5	18.00 - 20.00	15	19.00 - 21.00

Вариант 4

Рейс			
1	6.00 - 8.00	11	8.00 - 10.00
2	8.00 - 10.00	12	9.00 - 11.00
3	10.00 - 12.00	13	14.00 - 16.00
4	14.00 - 16.00	14	20.00 - 22.00
5	16.00 - 8.00	15	21.00 - 23.00

Вариант 5

Рейс			
1	8.00 - 12.00	11	7.00 - 11.00
2	10.00 - 14.00	12	9.00 - 13.00
3	11.00 - 15.00	13	11.00 - 15.00
4	13.00 - 17.00	14	14.00 - 18.00
5	15.00 - 19.00	15	16.00 - 20.00

Вариант 6

Рейс			
1	8.00 - 11.00	11	17.00 - 20.00
2	10.00 - 13.00	12	18.00 - 21.00
3	15.00 - 18.00	13	19.00 - 22.00
4	17.00 - 20.00	14	20.00 - 23.00
5	20.00 - 23.00	15	21.00 - 24.00

Практическое занятие 8

Экономическая оценка управленческого решения

Постановка задачи 8

По данным о дисконтированных денежных потоках поступлений и платежей оценить, компенсируют ли будущие доходы от инвестиций Inv первоначальные и будущие издержки от реализации УР, вычислив УР [2,65-73]:

1) ЧДД - чистый дисконтированный доход
2) Ток - время окупаемости УР;
3) IRR& - внутренняя норма рентабельности УР;
4) ИД - индекс доходности.

В примере Inv=992 тыс.руб., а номинальный поток ежегодных денежных поступлений - CF(t) = {455, 455, 455, 455} тыс.руб. Во всех вариантах задано:

1) К% = 15% - банковский процент за кредит;
2) инфляция по годам - 1.12, 1.11, 1.10;
3) срок выплаты кредита Тв=3 года.

Алгоритм расчета показателей экономической оценки УР

Шаг 1. Вычисляем потоки денежных поступлений CF(t) с учетом инфляции

t=1: (455 * 1.12) = 509.6 тыс.руб.

t=2: (455 * 1.12*1.11) = 565.7 тыс.руб.

t=3: (455 * 1.12*1.11*1.10) = 622.2 тыс.руб.

Норма дисконта Е оценивает относительную стоимость денежных потоков в разные моменты t. При $E \geq K\%$ (ежегодного процента за банковский кредит) УР окупается.

Вычисляем дисконтированный денежный поток поступлений с учетом инфляции при E=15% DCF(t) равен:

$$t=1 : 509.6 / (1+0.15) = 443.1 \text{ тыс.руб.};$$

$$t=2 : 565.7 / (1+0.15)^2 = 427.7 \text{ тыс.руб.};$$

$$t=3 : 622.2 / (1+0.15)^3 = 409.1 \text{ тыс.руб.};$$

Для оценки IRR& коэффициента внутренней рентабельности УР вычисляем потоки денежных поступлений с учетом инфляции при E=0%, 15%, 30%, 45% и записываем результаты в табл.8.1.

Потоки DCF(t) с учетом инфляции Таблица 8.1.

Год	CF \ E	0%	15%	30%	45%
1	455.0	509.6	443.1	392.0	351.4
2	455.0	565.7	427.7	334.7	269.0
3	455.0	622.2	409.1	283.2	204.1

В процессе реализации УР ежегодно выполняются платежи в счет покрытия долга за взятый в банке кредит, образующие дисконтированный поток платежей $$DPF(t+1) = -DPF(t) + DCF(t). \qquad (8.1)$$

При E=0% с учетом инфляции находим DPF(t) следующим образом:

1) в момент t=0 Inv=992 тыс. руб.;

2) плата за кредит, взятый при P%=15% годовых, в момент t=1 составит 992*(1+0.15)= 1140.8 тыс.руб., которые после приведения к моменту t=0 равны $$DPF(1) = 1140.8 / (1+0.15)^1 = 992 \text{ тыс.руб.};$$

3) при t=1 поступления 455 тыс. руб. с учетом инфляции и при E=0% дают DCF(1)= 509.6 тыс. руб., откуда

$$DPF(2) = -DPF(1)+DCF(1) = -992 + 509.6= 482.4 \text{ тыс. руб.};$$

4) при t=2 DCF(2)= -482.4 тыс. руб. позволяет полностью выплатить долг до окончания 2го года (t=2) и поэтому DPF(3)=0, так как сумма DPF(2)+DCF(2) = -482.4 + 565.7 = 83.3 тыс. руб.;

5) при t=3 DCF(3) = 622.2 тыс. руб., а DPF(3)=0;

Потоки DPF(t) и DCF(t) при E=0%,15%,30%,45% см. в табл.8.2.

Дисконтированные потоки DCF(t) и DPF(t) Таблица 8.2.

Год	Поток \E	0%	15%	30%	45%
1	DPF(1)	-992.0	-992.0	-992.0	-992.0
2	DCF(1)	+509.6	+443.1	+392.0	+351.4
	DPF(2)	-482.4	-548.9	-600.0	-640.6
3	DCF(2)	+565.7	+427.7	+334.7	+269.0
	DPF(3)	0.0	-121.2	-265.3	-371.5
	DCF(3)	+622.2	+409.1	+283.2	+204.1

Шаг 2. Оцениваем ЧДД(t) как разность текущей стоимости будущих доходов и затрат, дисконтированных на момент t=0 периода T (E=0%)

$$ЧДД(t) = -DPF(t) + DCF(t) , \qquad (8.2)$$

1) ЧДД(t=1) = -992.0 + 509.6 = 482.4 тыс. руб.;

2) ЧДД(t=2) = -482.4 + 565.7 = 83.3 тыс. руб.;

3) ЧДД(t=3) = 83.3 + 622.2 = 705.5 тыс. руб..

ЧДД(t) при E=0%,15%,30%,45% приведены в табл.8.3.

Потоки ЧДД(t)=F(E) Таблица 8.3.

t \ E	0%	15%	30%	45%
0	-992.0	-992.0	-992.0	-992.0
1	-482.4	-548.9	-600.0	-640.6
2	83.3	121.2	-265.3	-371.5
3	705.5	288.0	17.9	-167.4

Шаг 3. Определяем Ток при E%=0%, 15%, 30%, 45%. Величина Ток находится в точке пересечения графика ЧДД(t) с осью t. Данные для оценки Ток при E%=0%, 15%, 30%, 45% находятся в столбце (E=15%) табл.8.3. Ток при E=15% определяем следующим образом:

при t=0 ЧДД(t=1)= -992.0 < 0 и Ток = 0;

при t=1 ЧДД(t=1)= -548.9 < 0 и Ток = Ток + 1 = 1;

при t=2 ЧДД(t=2)= -121.2 < 0 и Ток = Ток + 1 = 2;

при t=3 ЧДД(t=3)= 288.0 > 0 и Ток = Ток + ΔТок,

$$\text{где } \Delta Ток = \frac{|ЧДД(2)|}{|ЧДД(2)| + ЧДД(3)} = \frac{121.2}{121.2 + 288.0} = 0.3 \text{ г.,} \qquad (8.3)$$

откуда Ток= 2+0.3=2.3 г. Ток при Е=0%, 15%, 30%, 45% в табл.8.4.

Ток= F(E) Таблица 8.4.

Е	0%	15%	30%	45%
Ток	1.85	2.30	2.94	>3.00

Шаг 4. Оцениваем индекс доходности (ИД) (табл.8.5) как

$$ИД = ЧДД(Тв) / Inv \qquad (8.4)$$

Индекс доходности F(E) Таблица 8.5.

Е	0%	15%	30%
ЧДД Inv ИД	705.5 992 0.71	288.0 992 0.29	17.9 992 0.02

Шаг 5. Находим $IRR^{\&}$, используя данные строки (t=3) табл.8.3. $IRR^{\&}$ находится в точке пересечения графика ЧДД(Е=15%) с осью Е. Как видно из табл.8.3, величина $IRR^{\&}$ находится в интервале между 30% и 45% и равна $IRR^{\&}$ = 30% +x*(45%-30%) = 30% + 1.449%, (8.5)

$$\text{где } x = \frac{ЧДД(30\%)}{ЧДД(30\%) + |ЧДД(45\%)|} = \frac{17.9}{17.9 + 167.4} = 0.096. \qquad (8.6)$$

Из табл.8.6, в которую сведены все результаты, видно, что при Е=15% УР имеет $IRR^{\&}$=31.5% и окупается за Ток=2.3 г. Поскольку $IRR^{\&}$=31.5% > К%=15% и Tok=2.3 < Тв=3, можно сделать вывод о принятии УР.

Результаты оценки УР **Таблица 8.6.**

	Параметры УР	Величина
1	Инвестиции (Inv)	992.00 тыс.руб.
2	Чистый дисконтированный доход (Тв) (ЧДД)	280.00 тыс.руб.
3	Расчетный срок окупаемости УР (Ток)	2.30 г.
4	Процент платы за кредит (К%)	15.00 %
5	Внутренняя норма рентабельности ($IRR^{\&}$)	31.45 %
6	Индекс доходности (ИД)	0.29

В табл.8.7 приведены исходные данные задач для СРС, ответы которых см. в табл.1.13 П.I. Во всех задачах инфляция % по годам: 12, 11, 10 и Тв=3г. К%=15% .

Исходные данные для задачи 8 **Таблица 8.7.**

N	Параметры УР	Вариант				
		1	2	3	4	5
1	Объем инвестиций	50000	12609	28000	50000	16100
	Эксплуатационные расходы :					
2	базовые	15000	45628	10000	20000	4000
3	проекта	10000	40814	10000	10000	3000
4	Ежегодная экономия	13500	0	17000	10800	9000
5	Продажа оборудования	0	2500	0	5000	0
		6	7	8	9	10
1	Объем инвестиций	9920	999	16	210	40000
2	Эксплуатационные расходы :	3000				
3	базовые	2000	350	19	50	13000
4	Проекта	5000	200	14	50	9000
5	Ежегодная экономия	0	400	0	135	11400
	Продажа оборудования		0	3	0	0

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ОТВЕТЫ ЗАДАЧ

Задача 1.1. **Таблица 1.1.**

Вариант 1 -0.17 -0.17 0.50 0.58 0.08 -0.25 -0.08 0.42 -0.25	Вариант 2 -0.42 0.82 -0.15 0.30 -0.73 0.39 0.09 0.18 -0.18	Вариант 3 0.07 -0.19 0.20 -0.21 0.36 0.00 0.21 0.04 -0.20
Вариант 4 0.22 -0.23 0.11 0.01 -0.13 0.28 -0.16 0.46 -0.41	Вариант 5 -2.25 0.75 0.50 1.25 -0.75 0.50 0.25 0.25 -0.50	Вариант 6 -2.00 1.00 0.00 3.00 -1.00 -0.33 -3.00 1.00 0.67
Вариант 7 0.29 -0.14 0.00 -0.12 0.31 -0.17 -0.19 0.10 0.33	Вариант 8 1.20 -0.60 -1.60 0.10 0.20 -0.30 -0.80 0.40 1.40	

Задача 1.2. **Таблица 1.2.**

Вариант	План пр-ва $(E-A)^{-1}*У$			Сумма расхода сырья				Суммарные расходы по цехам			Себестоимость ед. продукции		
				1	2	3	4						
	шт.	шт.	шт.	ед.	ед.	ед.	ед.	руб.	руб.	руб.	руб.	руб.	руб.
1	239	172	37	970	651	1586	15767	6716	9821	23940	36.1	80.2	79.5
2	286	356	50	2065	1874	2874	15791	7093	15771	25301	44.7	66.3	87.9
3	536	678	87	3208	1570	3599	28003	17152	21967	36654	59.0	67.4	77.4
4	704	663	91	2691	1478	4637	33949	19078	26188	45277	33.9	67.7	90.4
5	727	795	91	4073	3292	5792	31918	15630	29336	48615	70.3	122.0	85.9
6	659	592	59	2457	1145	3296	24755	21286	18174	30626	43.6	56.4	71.2

Задача 2 **Таблица 1.3.**

Вариант	Гаусса	Экспонента	Пуассон	Вариант	Гаусса	Экспонента	Пуассон
1	14.04	1146.33	9.70	6	15.10	203.16	11.56
2	14.16	396.73	14.09	7	4.22	403.38	4.58
3	10.84	369.85	8.91	8	26.76	872.54	26.13
4	111.12	6.00	79.32	9	5.16	188.88	3.37
5	44.83	190.30	7.24	10	124.11	12.86	242.97

Задача 3 **Таблица 1. 4.**

	Вариант							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Прогноз структуры	45.30 37.67 10.71 6.33	33.82 10.98 34.48 20.71	30.44 47.42 13.88 8.27	40.91 30.92 22.99 5.18	34.58 26.44 26.30 12.68	33.80 45.59 12.96 7.66	39.59 37.50 18.28 4.62	41.79 16.75 23.75 17.72

Задача 4.1 **Таблица 1.5.**

Вариант	Искомые неизвестные			Zmax
1	x2 =26.14	x3 =58.57	x1 = 3.57	111.57
2	x4 = 0.40	x2 = 2.40	x1 = 0.80	10.40
3	x3 = 2.97	x2 = 3.92	x1 = 5.65	44.98
4	x3 = 3.89	x2 = 3.79	x1 = 5.40	45.77
5	x3 =11.86	x2 = 9.57	x1 = 5.05	68.22
6	x3 = 6.29	x2 = 3.14	x1 = 6.00	40.00
7	x3 = 3.33	x2 = 4.33	x1 = 5.00	12.33
8	x3 = 5.22	x2 =12.89	x1 = 8.33	27.78
9	x2 =11.97	x1 = 5.70	x3 = 7.08	77.45

Задача 4.2 **Таблица 1.6.**

Вариант	Искомые неизвестные			Zmin
1	x2 = 4.00	x3 = 4.00	x5 = 4.00	-4.00
2	x2 = 8.73	x3 = 5.27	x1 = 0.55	-3.45
3	x2 =100.00	x3 =30.00	x1 =12.00	-170.00
4	x3 = 3.00	x1 = 2.50	x2 = 6.00	-11.00
5	x3 = 1.00	x1 = 1.50	x2 = 4.00	-1.00
6	x3 = 1.00	x2 = 0.40	x1 = 1.60	4.60
7	x3 = 0.37	x1 = 3.25	x2 = 3.13	24.63
8	x2 = 5.00	x3 = 4.50	x5 = 3.50	-4.00
9	x3 = 5.00	x1 = 2.00	x2 = 2.00	14.00

Задача 5.1 **Таблица 1.7.**

Вариант	Искомые неизвестные			Zmin
1	x3 = 7.00	x1 = 2.00	x6 = 7.00	16.00
2	x6 = 2.00	x1 = 2.00	x2 = 2.33	10.67
3	x4 = 0.50	x1 = 2.50	x5 = 3.50	5.00
4	x3 = 0.67	x4 = 0.33	x2 = 1.17	0.33
5	x2 = 1.00	x3 = 3.00	x5 = 1.00	13.00
6	x3 = 8.40	x1 = 6.20	x2 = 0.20	35.20
7	x3 = 2.20	x1 = 0.20	x4 = 0.60	5.00
8	x1 = 2.67	x3 = 0.67	x2 = 0.33	15.67
9	x4 = 0.00	x1 = 1.00	x3 = 0.67	10.00

Задача 5.2 **Таблица 1.8.**

Вариант	Искомые неизвестные					Zmin
1	x1 = 1	x4 = 6	x2 = 1	x3 = 0	x5 = 1	3
2	x1 = 1	x2 = 3	x3 = 1	x4 = 0	x5 = 1	17
3	x3 = 5	x2 = 1	x5 = 8	x4 = 0	x1 = 1	19
4	x2 = 5	x1 = 6	x3 = 0	x4 = 2	x6 = 1	36
5	x3 = 3	x4 =12	x2 = 2	x5 = 2	x6 = 1	32
6	x3 = 2	x2 = 1	x1 = 8	x5 = 2	x6 = 1	25
7	x3 = 3	x2 = 2	x1 = 3	x5 = 2	x6 = 1	36
8	x2 = 3	x1 = 5	x3 = 1	x4 = 2	x6 = 1	26
9	x3 = 6	x4 =21	x2 = 1	x1 = 0	x5 = 3	35

Задача 6.1 **Таблица 1.9.**

Вариант	Zmin	Вариант	Zmin	Вариант	Zmin	Вариант	Zmin
1	360	3	260	5	415	7	531
2	190	4	380	6	516	8	333

Задача 6.2 **Таблица 1.10.**

Вариант	Zmin	Вариант	Zmin	Вариант	Zmin	Вариант	Zmin
1	412	3	552	5	502	7	559
2	455	4	614	6	642	8	545

Задача 7.1. **Таблица 1.11.**

Вариант	Zmin	Zmax
1	39 = (10, 6, 4, 9, 10)	74 = (18, 19, 5, 18, 14)
2	39 = (10, 4, 3,11, 11)	111 = (24, 22,23, 22, 20)
3	37 = (10, 2, 3,11, 11)	109 = (22, 20,21, 23, 23)
4	14 = (2, 2, 2, 2, 6)	30 = (5, 7, 3, 6, 9)
5	27 = (5, 3, 8, 8, 3)	57 = (11, 11, 11, 15, 9)
6	15 = (2, 3, 3, 6, 1)	57 = (9, 11, 10, 6, 21)
7	21 = (3, 3, 7, 5, 3)	70 = (21, 13, 15, 10, 11)
8	18 = (3, 3, 2, 6, 4)	71 = (7, 17, 13, 13, 21)

Задача 7.2. **Таблица 1.12.**

Вариант	Ц е п о ч к и рейсов
1	1 - 13 - 2 - 14 - 3 - 15 - 4 - 11 - 5 -12 - 1
2	1 - 13 - 5 - 12 - 4 - 11 - 3 - 15 - 2 -14 - 1
3	1 - 11 - 3 - 15 - 2 - 14 - 1 // 4 - 12 - 4 // 5 - 13 - 5
4	1 - 12 - 5 - 11 - 4 - 15 - 3 - 14 - 2 - 13 - 1
5	1 - 14 - 2 - 15 - 3 - 11 - 4 - 12 - 5 - 13 - 1
6	1 - 11 - 1 // 2 - 12 - 2 // 3 -14 - 4 - 15 - 5 -13 - 3
7	1 - 14 - 4 - 12 - 2 - 15 - 5 - 13 - 3 - 11 - 1
8	1 - 11 1 // 2 - 12 - 2 // 3 - 13 - 3 // 4 - 15 - 5 - 14 - 4

Задача 8. **Таблица 1.13.**

Вариант	ЧДД ок	ЧДД кр	Ток	IRR&	ИД
1	2043	2043	2.88	17.79	0.04
2	3367	3367	2.22	31.58	0.27
3	4537	19823	1.72	27.64	0.71
4	13382	13382	2.28	30.80	0.27
5	3040	12031	1.68	29.39	0.75
6	1564	6959	1.72	27.34	0.70
7	54	548	1.90	19.62	0.55
8	1	1	2.89	17.31	0.03
9	48	170	1.62	32.67	0.81
10	3322	3322	2.76	20.45	0.08

ПРИЛОЖЕНИЕ II.

Квантили функции Ф(Z) **Таблица 2.1.**

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5909	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6333	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7356	.7389	.7421	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7793	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8437	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8906	.8925	.8943	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9485	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9648	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9776	.9783	.9788	.9798	.9798	.9803	.9807	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9874	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9924	.9927	.9929	.9930	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9958	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9980	.9980	.9981	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9986	.9983	.9983	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986	.9987	.9987
3.1	.9990	.9990	.9991	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992
3.2	.9993	.9993	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994
3.3	.9995	.9995	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
4.0	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

Квантили распределения χ^2 **Таблица 2.2.**

v\p	0.975	0.95	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.001	0.004	0.016	2.710	3.840	5.020	6.630
2	0.051	0.103	0.211	4.610	5.990	7.380	9.210
3	0.216	0.352	0.584	6.250	7.810	9.350	11.340
4	0.484	0.711	1.064	7.780	9.490	11.140	13.280
5	0.831	1.150	1.610	9.240	11.070	12.380	15.090
6	1.240	1.640	2.200	10.640	12.590	14.450	16.810
7	1.690	2.170	2.830	12.020	**14.070**	16.010	18.480
8	2.180	2.730	3.490	13.360	**15.510**	17.530	20.090
9	2.700	3.330	4.170	14.680	16.920	19.020	21.670
10	3.250	3.940	4.870	15.990	18.310	20.480	23.210
11	3.820	4.570	5.580	17.280	19.680	21.920	24.730
12	4.400	5.230	6.300	18.550	21.030	23.340	26.220
13	5.010	5.890	7.040	19.810	22.360	24.740	27.690
14	5.630	6.570	7.790	21.060	23.680	26.120	29.140
15	6.260	7.260	8.550	22.310	25.000	27.490	30.580
16	6.910	7.960	9.310	23.540	26.300	28.850	32.000
17	7.560	8.670	10.080	24.770	27.590	30.190	33.410
18	8.230	9.390	10.860	25.990	28.870	31.530	34.810
19	8.910	10.120	11.650	27.200	30.140	32.580	36.190
20	9.590	10.850	12.440	28.410	31.410	34.170	37.570
22	10.980	12.340	14.040	30.810	33.920	36.780	40.290
24	12.400	13.850	15.660	33.200	36.420	39.360	42.980
26	13.840	15.380	17.290	35.560	38.880	41.920	45.640
28	15.310	16.930	18.940	37.920	41.340	44.460	48.280
30	16.790	18.490	20.600	40.260	43.770	46.980	50.890
35	20.570	22.460	24.800	46.060	49.800	53.200	57.340
40	24.430	26.510	29.050	51.810	55.760	59.340	63.690
45	28.520	29.420	33.770	57.320	61.250	65.350	69.560
50	32.360	34.760	37.690	63.170	67.500	71.420	76.160
60	40.480	43.190	46.460	74.400	79.080	83.300	88.380
80	57.150	60.390	64.280	96.580	101.880	106.630	112.330
100	74.220	77.930	82.360	118.500	124.340	129.560	135.810
120	91.570	95.700	100.620	140.230	146.570	152.210	158.950
150	118.700	122.700	128.300	172.600	179.600	185.800	193.200
200	162.700	168.300	174.800	226.000	234.000	241.100	249.400

Значения функции e^{-x} Таблица 2.3.

\	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	1.000	0.990	0.980	0.970	0.961	0.951	0.942	0.932	0.923	0.914
0.1	.905	.896	.887	.978	.869	.861	.852	.844	.835	.827
0.2	.819	.811	.803	.795	.787	.779	.771	.763	.756	.748
0.3	.741	.733	.726	.719	.712	.705	.698	.601	.694	.677
0.4	.670	.664	.657	.651	.644	.638	.631	.625	.619	.613
0.5	.606	.601	.595	.589	.583	.577	.571	.565	.560	.554
0.6	.549	.543	.538	.533	.527	.522	.517	.512	.507	.502
0.7	.497	.492	.487	.482	.477	.472	.468	.463	.458	.454
0.8	.449	.445	.440	.436	.432	.427	.423	.419	.415	.411
0.9	.407	.403	.399	.395	.391	.387	.383	.379	.375	.372
1.0	.368	.364	.360	.357	.354	.350	.347	.343	.340	.337
1.1	.333	.330	.326	.323	.320	.317	.314	.310	.307	.304
1.2	.301	.298	.295	.292	.289	.287	.287	.281	.278	.275
1.3	.273	.270	.267	.265	.262	.259	.257	.254	.252	.249
1.4	.247	.244	.242	.239	.237	.235	.232	.230	.228	.225
1.5	.223	.221	.219	.217	.214	.212	.210	.208	.206	.204
1.6	.202	.200	.198	.196	.194	.192	.190	.188	.186	.185
1.7	.183	.181	.179	.177	.176	.174	.172	.170	.169	.167
1.8	.165	.164	.162	.160	.159	.157	.156	.154	.153	.151
1.9	.150	.148	.147	.145	.144	.142	.141	.140	.138	.137
2.0	.135	.134	.133	.131	.130	.129	.128	.126	.125	.124
2.1	.123	.121	.120	.119	.118	.117	.115	.114	.113	.112
2.2	.111	.110	.109	.108	.107	.105	.104	.103	.102	.102
2.3	.100	.099	.098	.097	.096	.095	.094	.093	.092	.091
2.4	.091	.090	.089	.088	.087	.086	.085	.085	.084	.083
2.5	.082	.081	.081	.080	.078	.078	.077	.077	.076	.075
2.6	.074	.074	.073	.072	.071	.071	.070	.069	.069	.068
2.7	.067	.067	.066	.065	.065	.064	.063	.063	.062	.061
2.8	.061	.060	.060	.059	.058	.058	.057	.057	.056	.056
2.9	.055	.055	.054	.053	.053	.052	.052	.051	.051	.050
3.0	.050	.049	.049	.048	.048	.047	.047	.046	.046	.046
3.1	.045	.045	.044	.044	.043	.043	.042	.042	.042	.041
3.2	.041	.040	.040	.040	.039	.039	.038	.038	.038	.037
3.3	.038	.037	.036	.036	.035	.035	.035	.034	.034	.034
3.4	.033	.033	.033	.032	.032	.032	.031	.031	.031	.031
3.5	.030	.030	.030	.029	.029	.029	.028	.028	.028	.028
3.6	.027	.027	.027	.027	.026	.026	.026	.026	.025	.025
3.7	.025	.025	.024	.024	.024	.024	.023	.023	.023	.022
3.8	.022	.022	.022	.022	.022	.021	.021	.021	.021	.021
3.9	.020	.020	.020	.020	.020	.019	.019	.019	.019	.019

\	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
4.0	.018	.017	.015	.014	.012	.011	.010	.009	.008	.008
5.0	.007	.006	.006	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.003
6.0	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001
7.0	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000

Квантили t-распределения Стьюдента Таблица 2.4.

v\p	0.300	0.200	0.100	0.050	0.020	0.01	0.001
1	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	1.130	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
25	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
30	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
35	1.053	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.591
40	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
45	1.049	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.520
50	1.048	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.496
55	1.047	1.297	1.673	2.004	2.396	2.669	3.478
60	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
70	1.045	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.435
80	1.044	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.416
90	1.043	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.402
100	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.390
120	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Андрианов В.В.Управленческие решения: Учебное пособие.- М.: МГТУ ГА, 2003 - 113с.

2. Андрианов В.В.Алгоритмы методов разработки управленческих решений: Учебное издание.- М.: МГТУ ГА, 2001. - 124с.

3. Андрианов В.В.Экономико-математические методы и модели. Часть I: Учебное пособие.- М : МГТУ ГА, 1993.- 137 с.

4. Андрианов В.В.Экономико-математические методы и модели. Часть II. Компьютерная реализация: Учебное пособие. – М. : МГТУ ГА, 1998. -104 с.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Практическое занятие 1
Разработка управленческих решений матричными алгоритмами 3

Практическое занятие 2
Оценка закона распределения случайной величины 8

Практическое занятие 3
Прогноз системы показателей алгоритмом цепей Маркова 15

Практическое занятие 4
Оптимизация использования дробных ресурсов 20

Практическое занятие 5
Оптимизация использования целочисленных ресурсов 27

Практическое занятие 6
Разработка УР об использовании основных производственных фондов 34

Практическое занятие 7
Разработка УР об оперативном использовании самолетов 42

Практическое занятие 8
Экономическая оценка управленческого решения 50

Приложение I
Ответы задач 55

Приложение I I
Квантили функции Ф(Z) 59
Квантили распределения χ^2. 60
Значения функции $\mathbf{e}^{-x}$ 61
Квантили t-распределения Стьюдента 62

Литература 63