МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

С. В. Петрунин

СБОРНИК ЗАДАЧ
по дисциплине "Логистика"

для студентов специальности 0611
дневного и заочного обучения

Москва
2002 г.

ВВЕДЕНИЕ

Данный сборник задач по логистике предназначен для практических занятий студентов в вузе и для самостоятельных работ. Цель сборника – научить студентов подготавливать рациональную (в идеале – оптимальную) основу для синтеза логистических систем, разрешать конкретные хозяйственные ситуации и принимать правильные управленческие решения. Задачник может быть также полезен специалистам, желающим повысить свою квалификацию, а в некоторых случаях найти методы и приемы решения сложных практических проблем. Сборник, в первую очередь, предназначен студентам, которые решили свою дальнейшую жизнь связать с гражданской авиацией, поэтому часть задач связана с этой областью производства, но большинство задач имеет общехозяйственное значение и поэтому сборник может быть полезен всем, интересующимся вопросами логистики.

Для того, чтобы грамотно принимать управленческие решения, необходимо знать приемы и методы получения основы для выбора таких решений. Часто опыт и так называемый здравый смысл недостаточны для принятия рациональных решений. Следует использовать научный подход к проблеме. В большинстве случаев на помощь приходит прикладная математика, знание которой для специалиста-менеджера или специалиста-логистика просто необходимо.

Сборник задач разделен на две части. В первой содержатся задачи и проблемы, которые предлагаются для решения. Студент на основе накопленных в вузе знаний или обращения к специальной литературе должен выбрать метод и с его помощью найти решение поставленной задачи. Задачи, включенные в сборник, различны по сложности. Есть чисто расчетные задачи, не требующие сложных математических приемов, и задачи повышенной трудности, для которых, как правило, необходимо знание соответствующих разделов прикладной математики.

Во второй части сборника приведены необходимые теоретические основы для решения поставленных задач или эмпирические формулы, если необходимого теоретического обоснования нет. Разумеется, вторая часть сборника не включает методы, которые студенты специальности 06.11 должны знать из предыдущих курсов (методы аппроксимации и экстраполяции функций, методы безусловной и условной оптимизации, линейное программирование, теория массового обслуживания).

Естественно, совокупность представленных здесь задач мала и не может охватить все аспекты такой обширной области как логистика. Цель сборника другая - дать студентам представление о многообразии логистических задач, требующих для своего решения широкого круга знаний, и разбудить их инициативу при постановке и разрешении поставленных проблем.

Для оформления решения задачи студент должен:

- записать цель и исходные данные задачи,
- сформулировать и обосновать метод, который будет использован при решении задачи,
- привести все вычисления, необходимые для получения решения (при использовании ЭВМ дать распечатку программы),
- провести анализ полученного решения (соответствие заданным ограничениям, требованиям точности и т.д.),
- построить график или номограмму, поясняющую или подтверждающую решение (желательно на EXCEL).

При проведении практических занятий в вузе каждому студенту предлагается свой вариант условий задачи. Номер варианта находится как сумма двух последних цифр номера зачётной книжки. Если эта сумма равна 0, то студент выполняет 19 вариант. Данные находятся в таблицах, номера которых указаны в задачах. Если ссылки на таблицу нет, условия задачи относятся ко всем вариантам. Желательно, чтобы работы были выполнены на листах А4.

Наряду с оригинальными использованы также постановки задач других авторов, указанных в литературе. Для некоторых задач ссылки на литературу помогут найти нужный методический материал, который студенты должны знать из дисциплин, которые они уже изучали, но по тем или иным причинам не знают.

ЧАСТЬ 1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ЗАДАЧ.

ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ЛОГИСТИКА

Задача 1.

Рассчитать длительность производственного цикла обработки партии одинаковых деталей при последовательном, последовательно – параллельном и параллельном способе организации работ. (Таблица 1). Сравните длительность циклов обработки и объясните их различие. Сведите результаты в таблицу. Постройте номограмму.

Задача 2.

Выбрать порядок обработки разнородных деталей на двух операциях, обеспечивающий минимальную длительность суммарного времени обработки. (Данные в столбцах для 1 и 2 операций таблицы 2). Приведите диаграмму распределения времени обработки в первоначальном и полученном варианте. Определите экономию времени при оптимальном порядке обработки деталей по сравнению с первоначально заданным.

Задача 3.

Использовать объёмно-динамический метод для расчёта длительности цикла обработки разнородных деталей при последовательно – параллельном способе организации работ. (Таблица 2). Расчёты и результаты свести в таблицу.

Задача 4.

Для 7 самолетов Ту-154 в авиапредприятии задан полугодовой налёт каждого самолёта и месячный налёт всего парка. Определите налёт каждого самолёта в каждый месяц, если известно, что один ВС в некоторый месяц не используется. (Таблица 3). Результаты свести в таблицу.

Задача 5.

Процесс насыщения рынка товарами, как правило, описывается логистической или **S** – образной кривой. Найти параметры **A**, **a**, **b** этой кривой, заданной формулой Ферхюльста:

$$Y = \frac{A}{1+10^{a+bt}},$$

если заданы значения функции **Y** при некоторых значениях аргумента **t**. (Таблица 4).

Задача 6.

В 1924-1925 годах исследования, проводившиеся Р. Перлом по изучению биологических процессов (скорость увеличения дрозофилл в сосуде, скорость роста дрожжевых клеток в питательной среде и др.) показали, что они подчиняются одному и тому же математическому закону, который можно записать в виде:

$$J = \frac{B}{1 + de^{-kt}},$$

где J - количество биологических объектов,

B - максимальное количество биологических объектов,

d, k - константы.

При каких условиях это выражение совпадает с формулой Ферхюльста?

ЗАГОТОВИТЕЛЬНАЯ И СБЫТОВАЯ ЛОГИСТИКА

Задача 7.

Есть сеть магазинов одной фирмы. Известно, что в центральном магазине (головном офисе) продаётся **A** количество товара. В радиусе одного километра от этого магазина в торговых точках этой же фирмы продаётся **B** количество товара.

Известно также, что объём реализуемых товаров пропорционален площади территории распространения товара, а затраты на перевозку единицы товара пропорционально расстоянию, причём коэффициент пропорциональности **D**.

Необходимо определить радиус распространения товара, при котором прибыль от продаж будет максимальной, если единица товара продаётся за **C** д.е. (Таблица 5).

Задача 8.

Перед предприятием стоит проблема снабжения производства сырьём. Возможны два альтернативных варианта снабжения:

- предприятие заключает договор с поставщиком сырья и тот своим транспортом доставляет его заказчику,
- предприятие собственным транспортом доставляет сырьё со склада поставщика.

При этом существуют определённые условия доставки:

- доставка сырья транспортом поставщика осуществляется 1 раз в неделю,
- доставка сырья собственным транспортом осуществляется первые D дней недели в количестве C тонн в день.

Известны:

- ежедневная потребность производства в сырье - A тонн/сутки,
- грузоподъёмность транспорта поставщика - B тонн,

- интенсивность доставки собственным транспортом - C тонн/сутки,
- количество поставок собственным транспортом - D сутки,
- стоимость доставки поставщиком - c_b д.е.,
- стоимость доставки собственным транспортом - c_c д.е.,
- стоимость хранения запасом - c_{xo} д.е. или c_{xt} д.е./сутки,
- потери от дефицита - c_n д.е./сутки.

Необходимо рассчитать затраты предприятия при выборе каждого из варианта и выбрать наилучший вариант. (Таблица 6).

ТРАНСПОРТНАЯ И СКЛАДСКАЯ ЛОГИСТИКА

Задача 9.

Имеется сеть магазинов и сеть складов, которые снабжают эти магазины однообразными товарами. Каждый i-ый склад (i = 1,3) имеет свою максимальную вместимость **A(i)**. Считается, что склады заполнены полностью. Каждый j-ый магазин (j =1,4) имеет потребность в количестве товара **B(j)**. Известны расходы $\mathbf{C_{ij}}$ на перевозку единицы товара от i-ого склада до j-ого магазина. Необходимо организовать такие потоки товаров из складов в магазины, чтобы потребности магазинов были полностью удовлетворены и суммарные расходы доставки товаров были минимальны. (Таблица 7). Нарисовать схему движения материальных потоков.

Задача 10.

На складе может работать различное количество бригад грузчиков. Необходимо определить их число для минимальных суммарных затрат при следующих данных:

- суточной потребности склада в товарах - A тонн,
- грузоподъёмности автомашин – Q тонн,
- коэффициента использования грузоподъёмности машин - γ % ,
- производительности бригады по разгрузке машин – P тонн/час,
- стоимости простоя бригады – C д.е./час ,
- стоимости простоя машины – G д.е./час,
- стоимость найма одной бригады – F д. е.

(Студент решает задачу для 2-х, 3-х и 4-х бригад. Сравнивая и анализируя результаты, студент должен сделать вывод об оптимальном количестве бригад на складе.) (Таблица 8).

Задача 11.

Имеется торговая сеть, состоящая из 4-х магазинов. В каком месте следует построить склад, чтобы суммарные расходы от перевозки товаров от склада в магазины были минимальны? Расходы на перевозку пропорциональны расстоянию и количеству товара.

Известны:

- координаты нахождения всех магазинов (x_i , y_i),
- потребности каждого магазина в товарах - w_i.

Необходимо определить:

1) координаты склада, удоволетворяющие приведенному критерию,
2) координаты склада при условии, что он должен находиться на дороге, описываемой уравнением $x = 4$,
3) координаты склада при условии, что он должен находиться на реке, описываемой уравнением $y = d*x$. (Таблица 9).

Построить схемы расположения магазинов и складов для каждого из трёх случаев.

Задача 12.

Имеется годовой календарный план поставок сырья на производственное предпрятие. Необходимо рассчитать величину страхового запаса сырья, чтобы обеспечить бесперебойный процесс производства продукции. Суммарная поставка отвечает годовой потребности предприятия. Времена и объёмы поставок заданы. (Таблица 10).

ЧАСТЬ 2. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ.

Задача 1.

Из способов календарной организации процесса обработки партии деталей наиболее используемыми являются три: последовательный, параллельный и последовательно-параллельный способ. При любом способе должны выполняться следующие ограничения:

- каждое изделие обрабатывается в определенном порядке,
- каждая операция должна быть закончена прежде, чем начнётся следующее.

Будем считать, что время перехода детали от одной операции к другой мало, и им можно пренебречь.

Длительность цикла обработки партии одинаковых деталей при последовательном способе равна:

$$T_{посл} = n \sum_{j=1}^{m} t_j , \qquad (1)$$

где $T_{посл}$ - длительность цикла обработки партии деталей при последовательном способе их обработки,

n - размер партии одинаковых деталей,

t_j - длительность j-ой операции,

m - число операций.

Длительность цикла обработки партии одинаковых деталей при параллельном способе равна:

$$T_{пр} = (n-1)\, t^* + \sum_{j=1}^{m} t_j = n\, t^* + \sum_{j \neq j^*}^{m} t_j , \qquad (2)$$

где $T_{пр}$ - длительность цикла обработки партии деталей при параллельном способе их обработки,

t* - наибольшая длительность операции (пусть эта операция будет j*).

Длительность цикла обработки партии одинаковых деталей при последовательно - параллельном способе равна:

$$T_{пп} = T_{посл} - (n-1) \sum_{j=1}^{m} t_{j0} = n \sum_{j=1}^{m} t_j - (n-1) \sum_{j=1}^{m} t_{j0} , \qquad (3)$$

где $T_{пп}$ - длительность цикла обработки партии одинаковых деталей при последовательно-параллельном способе их обработки,

t_{j0} - длительность обработки, наименьшая из двух соседних операций.

Наибольшая длительность наблюдается при последовательном способе, наименьшая - при параллельном способе. Типичная номограмма длительности циклов приведена на рис. 1.

<u>Литература</u>: [1, стр. 168].

Задача 2.

Для партии разнородных деталей, требующих обработки на двух операциях, можно установить порядок, обеспечивающий минимальное время цикла обработки этих деталей. Правило, определяющее такой порядок, названо по имени автора - правило С. Джонсона. Оно включает 4 этапа.

1. Все детали с указанием времени на выполнение каждой операции должны быть перечислены и им должны быть даны номера или имена.
2. Выбирается с кратчайшим временем выполнения. Если кратчайшее время приходится на первую операцию, деталь переносится в начало списка. Если кратчайшее время приходится на вторую операцию, то она отправляется в конец списка. Если одинаково кратчайшее время у нескольких деталей на первой операции, то они отправляются в начало списка в порядке убывания времени выполнения второй операции. Если одинаково кратчайшее время у нескольких деталей на второй операции, то они отправляются в конец списка в порядке убывания времени на первой операции.
3. Если место детали определено, она исключается из рассмотрения. Остальные детали могут занять места только ниже ранее расставленных вверху и выше ранее расставленных внизу деталей.
4. Если не все детали расставлены, обращаемся к пункту 2.

Правило Джонсона можно распространить на три операции в некоторых частных случаях:

- если наименьшее время выполнения первой операции такое большое, что оно не меньше самого большого времени выполнения второй операции,
- если наименьшее время выполнения третьей операции такое большое, что оно не меньше самого большего времени выполнения второй операции,
- если одновременно выполняются эти два условия.

Если такие условия выполняются и продолжительность обработки j-ой детали на 3-х операциях составляют t_{j1}, t_{j2}, t_{j3} , то составляются две суммы: первая - $t_{j1} + t_{j2}$, вторая - $t_{j2} + t_{j3}$, которые и определяют порядок расстановки деталей так же, как в случае двух операций.

Литература: [2, стр. 89], [3, стр. 191].

Задача 3.

Для определения длительности производственного цикла обработки разнородных деталей при последовательно – параллельном способе можно использовать эмпирические формулы, аналогичные применяемым в задаче 1:

$$T'_{пп} = n' \sum_{j=1}^{m} t^{cp}{}_{j} - (n' - 1) \sum_{j=1}^{m} t^{cp}{}_{j0} , \quad (4)$$

где n' - количество разнородных деталей в партии,

t^{cp}_j - средняя продолжительность обработки деталей на j-ой операции,

t^{cp}_{j0} - продолжительность меньшей из j-ой и (j + 1)-ой средних продолжительностей обработки деталей.

Если на каждой операции используется не один обслуживающий аппарат, а несколько, длительность производственного цикла определяется по формуле:

$$T''_{пп} = n' \sum_{j=1}^{m} t'^{cp}_j - (n' - 1) \sum_{j=1}^{m} (n' - C_j) t'^{cp}_{j0}, \quad (5)$$

где t'^{cp}_j - средний интервал времени при наличии более одного обслуживающего аппарата, ($t'^{cp}_j = t^{cp}_j / C_j$),

t'^{cp}_{j0} - меньший из двух соседних j-ого и (j + 1) –ого интервалов t'^{cp}_j ,

C_j - количество обслуживающих аппаратов на j-ой операции.

В дейсвительности, величина $T''_{пп}$ несколько занижает реальную длительность производственного процесса. Поэтому к величине $T''_{пп}$ следует добавить величину O'', равную сумме всех t'^{cp}_j , для которых $t'^{cp}_j \le t'^{cp}_{j+1}$. Поэтому продолжительность реального производственного цикла можно считать равным:

$$T_p = T''_{пп} + O''.$$

<u>Литература:</u> [1, стр. 174 - 176].

Задача 4.

Поставленную задачу можно сформулировать следующим образом: найти ежемесячный налёт каждого самолёта, если известны месячные налёты всего парка ВС, состоящего из 7 самолётов, и полугодовой налёт каждого самолёта. Кроме того, известно, что k-ый самолёт в p-ый месяц не летает. Математически это можно записать так:

$$\sum_j x_{ij} = a_i, \quad i = 1,7$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j, \quad j = 1,6$$

$$x_{kp} = 0, \qquad (6)$$

где x_{ij} - налёт часов i-ого ВС в j-ый месяц,

a_i - полугодовой налёт i-ого ВС,

b_j - налёт всего парка ВС в j-ый месяц.

Ограничения данной задачи полностью соответствуют ограничениям транспортной задачи. Необходимым и достаточным условием разрешимости данной задачи является требование:

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j = \text{A}$$

Существует множество решений поставленной задачи. Но желательно найти решение, удовлетворяющее условию устойчивости. Таким решением является следующее:

$$x_{ij} = a_i\, b_j / A = D_i\, Q_j \,, \qquad (7)$$

где $D_i = a_i / \sqrt{A}$, $Q_j = b_j / \sqrt{A}$. (8)

Определить все x_{ij} не составляло бы труда, если бы не было ограничения $x_{kp} = 0$. Для определения D_k и Q_p соотношения (8) не годятся, но эти величины можно определить из уравнений:

$$D_k^{m+1} = (a_k + D_k^m\, Q_p^m) / \sqrt{A + D_k^m Q_p^m}$$

$$Q_p^{m+1} = (b_p + D_k^m\, Q_p^m) / \sqrt{A + D_k^m Q_p^m}$$

Здесь индекс **m** означает номер итерации, а решение каждого уравнения системы находится в процессе итераций. Уравнения решаются итерационным методом. Процесс начинается с нулевого приближения, для которого

$$D_k = a_k / \sqrt{A} \,, \quad Q_p = b_p / \sqrt{A} \,.$$

Процесс продолжается до тех пор, пока каждая из переменных на некотором шаге будет отличаться от своего значения на предыдущем шаге менее, чем на десятую долю процента. После определения D_k и Q_p остальные коэффициенты D_i и Q_j определяются из выражений:

$$D_i = a_i / \sqrt{A + D_k Q_p} \,, \quad Q_p = b_p / \sqrt{A + D_k Q_p} \,.$$

(<u>Внимание:</u> именно остальные, а не уже определённые D_k , Q_p). Затем по (7) находится налёт каждого ВС в каждый месяц. (Не забыть, что x_{kp}=0). Убедиться в правильности решения можно, сложив налёт по строке и столбцу. Сумма налёта по i-ой строке должна быть равна a_i , а по j-ому столбцу - b_j .

<u>Литература:</u> [4, стр. 3 - 12]

Задача 5.

Для определения параметров уравнения Ферхюльста первоначально следует определить значение верхней асимптоты, т. е. величину **A**. Она равна:

$$A = \frac{2y_1y_2y_3 - y_2^2(y_1 - y_3)}{y_1y_3 - y_2^2} ,$$

где y_1, y_2, y_3 - три заданные значения функции, взятые через равные интервалы времени.

Представим функции в виде:

$$\frac{Y_t}{A} = \frac{1}{1+10^{a+bt}}$$

Тогда

$$a + bt = \lg\left(\frac{A}{Y_t} - 1\right).$$

Обозначим стоящее справа выражение через Z_t , т. е. $Z_t = \lg\left(\frac{A}{Y_t} - 1\right)$.

Для определения неизвестных параметров из равенств

$$a + bt = Z_t$$

можно воспользоваться методом наименьших квадратов, т.е. найти минимум выражения

$$\sum_i^n (Z_{ti} - a - bt) \to \min.$$

При дифференцировании по **a** и **b** получим систему из двух уравнений для определения двух неизвестных - **a** и **b**.

$$na + b\sum_i^n t_i = \sum_i^n Z_{ti}$$

$$a\sum_i^n t_i + b\sum_i^n t_i^2 = \sum_i^n Z_{ti}t_i .$$

Решение этой системы не представляет труда.

<u>Литература:</u> [5, стр. 46 - 48]

Задача 6.

Задача 6 - проста, и студентам предлагается решить её самостоятельно.

Задача 7.

Из поставленной задачи следует, что необходимо найти такой радиус распространения товаров, при котором прибыль от продажи товаров будет максимальной, т. е. нужно найти прибыль как функцию радиус - R и определить максимум этой функции. Из условия следует, что количество продаваемых товаров - линейная функция площади или иначе:

$$P = a + bS,$$

где P – количество продаваемых товаров,

S - площадь распространения товаров,

a, b - пока неизвестные коэффициенты.

Определим коэффициенты a и b. При R = 0 и, следовательно, при S = 0 величина P = A. Поэтому a = A. Также известно, что в радиусе одного километра от центрального магазина продаётся B товаров. Это условие даёт возможность определить величину b.

$$B = A + b\pi, \text{ или } b = (B – A) / \pi.$$

Тогда количество продаваемых товаров как функция радиуса будет выглядеть так:

$$P = A + (B – A)\, R^2$$

Прибыль от продажи товаров без учёта расходов на транспортировку L равна

$$L = CP = C\, [\, A + (B – A)\, R^2\,]$$

Чтобы найти расходы на перевозку товаров, сначала определим прирост товарооборота dM при предельно малом приращении радиуса - dr (как представлено на рис. 2):

$$dM = P \cdot dr.$$

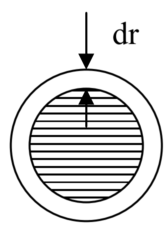

Рис. 2. Прирост товарооборота при увеличении радиуса

Тогда

$$dM = [\, A + (\, B – A\,)\, r^2\,]\, dr$$

Интегрируя данное выражение по r в пределах от r = 0 до r = R , получим

$$M = AR + \frac{B - A}{3} R^3 .$$

Тогда расходы на транспортировку (T) будут равны:

$$T = (AR + \frac{B - A}{3} R^3) D,$$

а прибыль с учётом расходов на транспортировку - $П_т$:

$$П_т = C [A + (B – A) R^2] – D [AR + \frac{B - A}{3} R^3]$$

Для нахождения точек, подозрительных на экстремум, продифференцируем это выражение и приравняем производную нулю.

$$\frac{dП_t}{dR} = (A – B) D R^2 - 2 (A – B) C R – D A = 0.$$

Квадратное уравнение –

$$R^2 – 2 \frac{C}{D} R + \frac{A}{B - A} = 0$$

имеет корни:

$$R_{1,2} = \frac{C}{D} \pm \sqrt{\frac{C^2}{D^2} - \frac{A}{B - A}}$$

Анализ полученного решения студенты должны провести самостоятельно.

Литература: [6, стр. 33 – 35]

Задача 8.

Расходы, связанные доставкой и хранением сырья, равны:

$$C_{полн} = C_т + C_{хр} + C_д ,$$

где $C_{полн}$ - все расходы, связанные с сырьём,
$C_т$ - расходы на транспортировку сырья,
$C_{хр}$ - расходы, связанные с хранением сырья,
$C_д$ - расходы из-за дефицита.

Последнее слагаемое, т.е. $C_д$, отлично от нуля только в случае, когда возникает дефицит сырья. Для оценки рассмотрим эти варианты отдельно.

Вариант 1. Динамика расхода ресурсов будет выглядеть либо так, как показано на рис. 3 , либо так, как показано на рис. 4. В первом случае дефицит равен нулю, во втором величина расходов, связанная с ним, пропорциональна времени отсутствия ресурсов. Как в случае отсутствия дефицита, так и при его наличии, расходы за хранение при заданном c_{xt} , зависят от площади, образованной функцией ресурсов и осями координат, т. е.

$$C_{xp} = c_{xt} S.$$

Если задано c_{x0} , то для определения расходов за хранение необходимо найти среднее количество ресурсов за неделю, которое равно $c^* = S / 7$, а

$$C_{xp} = c_{xo} c^*.$$

Вариант 2. Доставка сырья осуществляется D раз в неделю, объём каждой доставки - C. График динамики ресурсов будет выглядеть в виде рис. 5, либо рис. 6. Для расчета расходов на хранение следует найти площадь, образованную функцией ресурсов от времени и осями координат.

В случае заданного c_{xt} эти расходы равны:

$$C_{xp} = c_{xt} S,$$

а при заданном c_{xo}

$$C_{xp} = c_{xo} S / 7.$$

Для нахождения расходов, связанных с дефицитом, следует определить, хватает ли ресурсов на недельный производственный цикл. Если хватает, то расходов, связанных с дефицитом, нет. В ином случае расходы от дефицита будут пропорциональны числу дней, не обеспеченных ресурсами.

Определив величины расходов в каждом из этих вариатов, дать ответ о предпочтительности одного из них.

Литература: [7, стр. 8 – 10]

Задача 9.

Для решения этой задачи студенты должны знать методы решения транспортной задачи линейного программирования, с которыми они встречались на предыдущих курсах.

Литература: [8], [9, стр. 36 - 58].

Задача 10.

В данной задаче склад следует рассматривать как систему массового обслуживания (СМО) с ожиданием, причём в качестве заявок можно считать приходящие с товарами мащины, а в качестве каналов - бригады грузчиков. Работу системы можно охарактеризовать следующими параметрами:

- интенсивностью потока заявок, т. е. потока машин в сутки - λ,
- интенсивностью обслуживания одной машины в сутки - μ.

Коэффициент загрузки канала СМО α определяется как отношение

$$\alpha = \lambda / \mu .$$

Интенсивность потока заявок равна $\lambda = A / Q\gamma$. Среднее время обслуживания машины (в часах) будет $t^*_{ср} = Q\gamma / P$. Поскольку остальные величины приведены к суткам, и это среднее время выразим в сутках, считая, что в сутках 8 рабочих часов. Тогда $t_{ср} = Q\gamma / 8P$. Интенсивность обслуживания заявки обратно пропорциональна среднему времени её обслуживания, т. е. $\mu = 1 / t_{ср} = 8P / Q\gamma$. По известным λ и μ легко определить α.

Расходы, связанные с использованием бригад, составляют

$$Z_{бр} = 8C\upsilon + n f ,$$

где n - количество бригад грузчиков,

υ - среднее число простаивающих бригад в сутки.

Среднее количество простаивающих бригад в сутки равно:

$$\upsilon = \sum_{i=0}^{n}(n-i)P_i = P_0\sum_{i=0}^{n}(n-i)\frac{\alpha^i}{i!} ,$$

где P_0 - вероятность, что все бригады простаивают,

P_i - вероятность, что i бригад работают (занято i каналов).

Вероятность P_0 равна

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}} .$$

Таким образом, затраты, связанные с наймом и простоями бригад, будут равны:

$$Z_{бр} = 8CP_0\sum_{i=0}^{n}(n-i)\frac{\alpha^i}{i!} + nf .$$

Рассмотрим теперь затраты, связанные с простоем машин. Среднее количество машин - ω, ожидающих разгрузки, равно:

$$\omega = \sum_{S=1}^{\infty}SP_{n+S} = \frac{\alpha^n}{n!}P_0\sum_{S=1}^{\infty}S(\frac{\alpha}{n})^S .$$

Для того, чтобы найти величину $\sum\limits_{S=1}^{\infty}s(\frac{\alpha}{n})^S$, рассмотрим величину $\sum\limits_{S=1}^{\infty}(\frac{\alpha}{n})^S$.

Обозначив $\frac{\alpha}{n}$ через x , последнее выражение будет выглядеть в виде: $\sum\limits_{S=1}^{\infty}x^S$ ($x < 1$). Возьмём производную от этой суммы по x . Получим $\sum\limits_{S=1}^{\infty}Sx^{S-1}$ или $\frac{1}{x}\sum\limits_{S=1}^{\infty}Sx^S$. Но величина $\sum\limits_{S=1}^{\infty}x^S$ нам известна. Она – сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии $\sum_{S=1}^{\infty} x^S = \dfrac{x}{1-x}$ и её производная равна: $(\dfrac{x}{1-x})' = \dfrac{1-x+x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. Тогда $\dfrac{1}{x}\sum_{S=1}^{\infty} Sx^S = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Отсюда $\sum_{S=1}^{\infty} Sx^S = \dfrac{x}{(1-x)^2}$. При переходе к исходным переменным

$$\sum_{S=1}^{\infty} s(\frac{\alpha}{n})^S = \frac{\frac{\alpha}{n}}{(1-\frac{\alpha}{n})^2} = \frac{n\alpha}{(n-\alpha)^2}.\ \text{Тогда}\quad \omega = \frac{\alpha^{n+1}}{(n-1)!(n-\alpha)^2}P_0 .$$

Расходы от суточного простоя машин составят

$$\text{Z}_{\text{маш}} = 8\text{G}\omega = = \frac{8G\alpha^{n+1}}{(n-1)!(n-\alpha)^2}P_0 .$$

Суммарные издержки составят

$$\text{Z}_{\text{сум}} = \text{Z}_{\text{бр}} + \text{Z}_{\text{маш}} = nf + 8P_0 \left[C\sum_{i=0}^{n}(n-i)\frac{\alpha^i}{i!} + \frac{G\alpha^{n+1}}{(n-1)!(n-\alpha)^2} \right].$$

Рассмотрев издержки при найме 2-х, 3-х и 4-х бригад, построить график зависимости суммарных издержек от числа бригад и выбрать наилучший вариант.

Для пытливых студентов: Процесс в рассмотренной задаче считался случайным. Как нужно организовать работу бригад на складе и машин, чтобы издержки были минимальными ?

Литература: [10, стр. 179 - 186].

Задача 11.

Расходы на перевозку прямо пропорциональны расстоянию и количеству перевозимого груза. Поэтому целевую функцию следует представить в виде:

$$\text{Z} = \sum_{i=1}^{4}\omega_i l_i \to \min$$

или при вводе координат магазинов и склада

$$\text{Z} = \sum_{i=1}^{4}\omega_i\sqrt{(a-x_i)^2+(b-y_i)^2}\ ,\ \text{где}$$

a - исхомая абсцисса склада,
b - искомая ордината склада,
x_i - заданная абсцисса i-ого магазина,
y_i - заданная ордината i-ого магазина.

Так как дополнительных ограничений в этой задаче нет, достаточно определить минимум этой функции. Следует взять частные производные по переменным a и b и приравнять их нулю. Это несложно сделать.

$$\frac{\partial Z}{\partial a} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(a - x_i)\omega_i}{\sqrt{(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2}} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial b} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(b - y_i)\omega_i}{\sqrt{(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2}} = 0$$

Отсюда несложно получить выражения для a и b, которые следует решать итерационным методом.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{4} \frac{x_i \omega_i}{\sqrt{(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2}}}{\sum_{i=1}^{4} \frac{\omega_i}{\sqrt{(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2}}}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{4} \frac{y_i \omega_i}{\sqrt{(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2}}}{\sum_{i=1}^{4} \frac{\omega_i}{\sqrt{(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2}}}$$

Для нахождения нулевого приближения величин следует вместо исходной целевой функции рассмотреть другую функцию, заменив радикал его выражением:

$$Z^* = \sum_{ш=1}^{4} \omega_i [(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2] .$$

Взяв частные производные Z* по a и b и приравняв их нулю, получим для нулевого приближения:

$$a^0 = \frac{\sum_{i=1}^{4} \omega_i x_i}{\sum_{i=1}^{4} \omega_i} \qquad b^0 = \frac{\sum_{i=1}^{4} \omega_i y_i}{\sum_{i=1}^{4} \omega_i}$$

Как правило, этим приближенным решением и обходятся. Студентам также можно воспользоваться им для определения координат склада. (Желающие могут провести итерационный процесс для получения точного решения). Ответы на пункты 2) и 3) студены должны дать самостоятельно.

Литература: [5, стр. 186 - 189].

Задача 12.

Общепринятый метод расчёта величины страхового запаса включает несколько этапов.

1) Вначале определяется ежедневная потребность в ресурсе. Поступающее количество ресурса за год известно, количество дней в году тоже (считаем производство непрерывным), поэтому найти ежедневную потребность в ресурсах P не составляет труда.
2) Затем определяется средний интервал между поставками из выражения:

$$t_{cp} = \frac{\sum\limits_{i=1} q_i t_i}{Q} \text{ , где}$$

q_i - величина i-ой партии ресурса,
t_i - интервал между i-ой и (i + 1)-ой партией ресурса,
Q - общее количество ресурса за год.

3) Определяются поставки, величина интервала которых t_i больше $t_{ср}$. Присвоим этим поставкам индекс " k ". Тогда объём страхового запаса определяется выражением:

$$q_{cmp} = \frac{\sum\limits_{i=1} (t_k - t_{cp}) q_k}{\sum\limits_{i=1} q_k} P \text{ ,}$$

где q_k , t_k - величина и интервал времени поставки, если $t_k > t_{ср}$,
P - ежедневная потребность в ресурсах.

Построить график движения ресурсов во времени с учётом наличия страхового запаса.

Литература: [6, стр. 40 - 41].

Литература

1. Логистика. Под ред. Б. А. Аникина. – М.: ИНФРА-М, 1999.
2. Кудрявцев Е. М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах. – М.: Радио и связь, 1984.
3. Козловский В. А., Козловская Э. А., Савруков Н. Т. Логистический менеджмент. – СПб.: Политехника, 1999.
4. Петрунин С. В. Математическая модель распределения налёта между ВС в течение года. // Развитие авиатранспортного рынка и повышение эффективности управления авиапредприятиями . – М.: Межвуз.сб.науч.тр. МГТУ ГА, 1995.
5. Практикум по логистике. Под ред. Б. А. Аникина. – М.: ИНФРА-М, 1999.
6. Леншин И. А., Смоляков Ю. И. Логистика. В 2 ч.: Ч. 2. – М.: Машиностроение, 1996.
7. Петрунин С. В. Пособие к изучению дисциплины и выполнению контрольных работ по дисциплине “ Логистика “. – М.: МГТУ ГА, 1999.
8. Гольштейн Е. Г. , Юдин Д. Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Наука, 1969.
9. Петрунин С. В. Исследование операций. Часть I. Методы оптимизации. - М.: МГТУ ГА, 1994.
10. Неруш Ю. М. Коммерческая логистика. – М.: Банки и биржи, 1997.