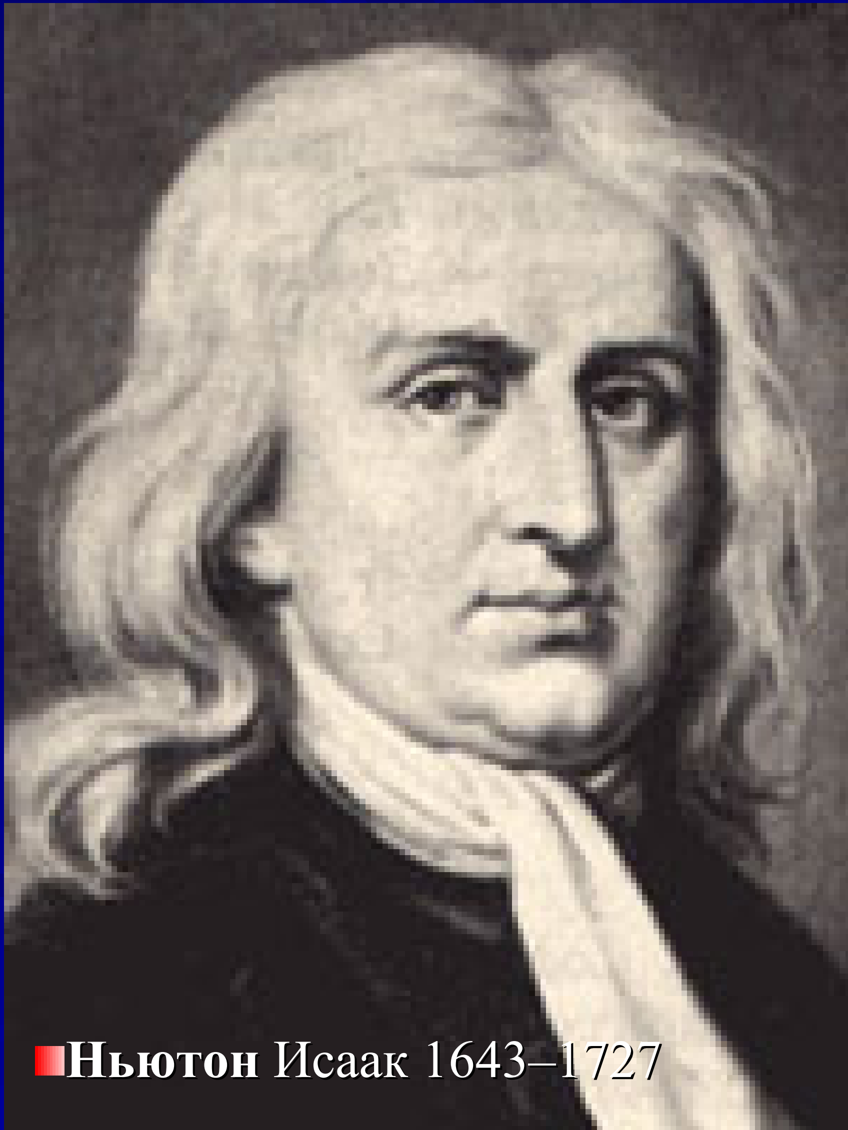
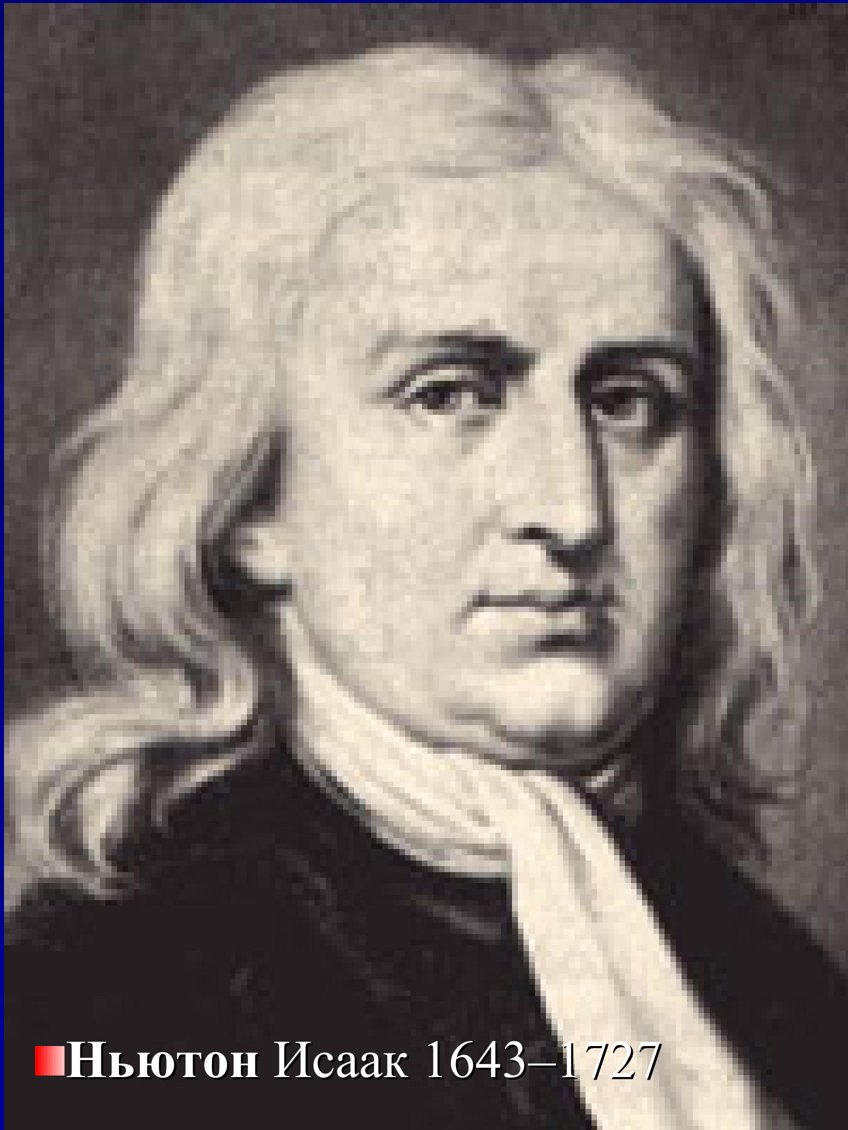
Тема 3. Релятивистская динамика материальной точки

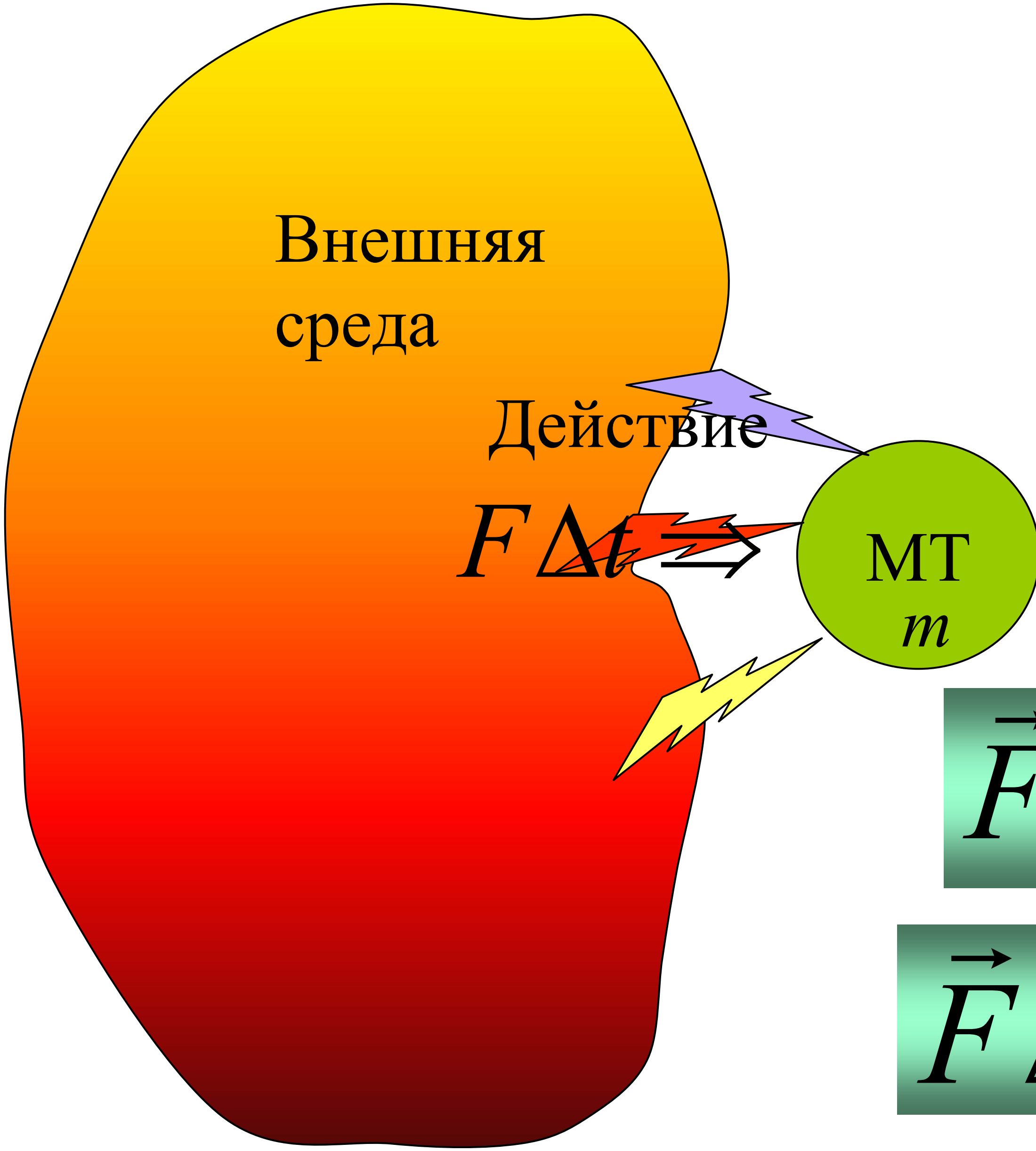


Ньютон Исаак 1643–1727

3.1. Законы Ньютона



Ньютон Исаак 1643–1727

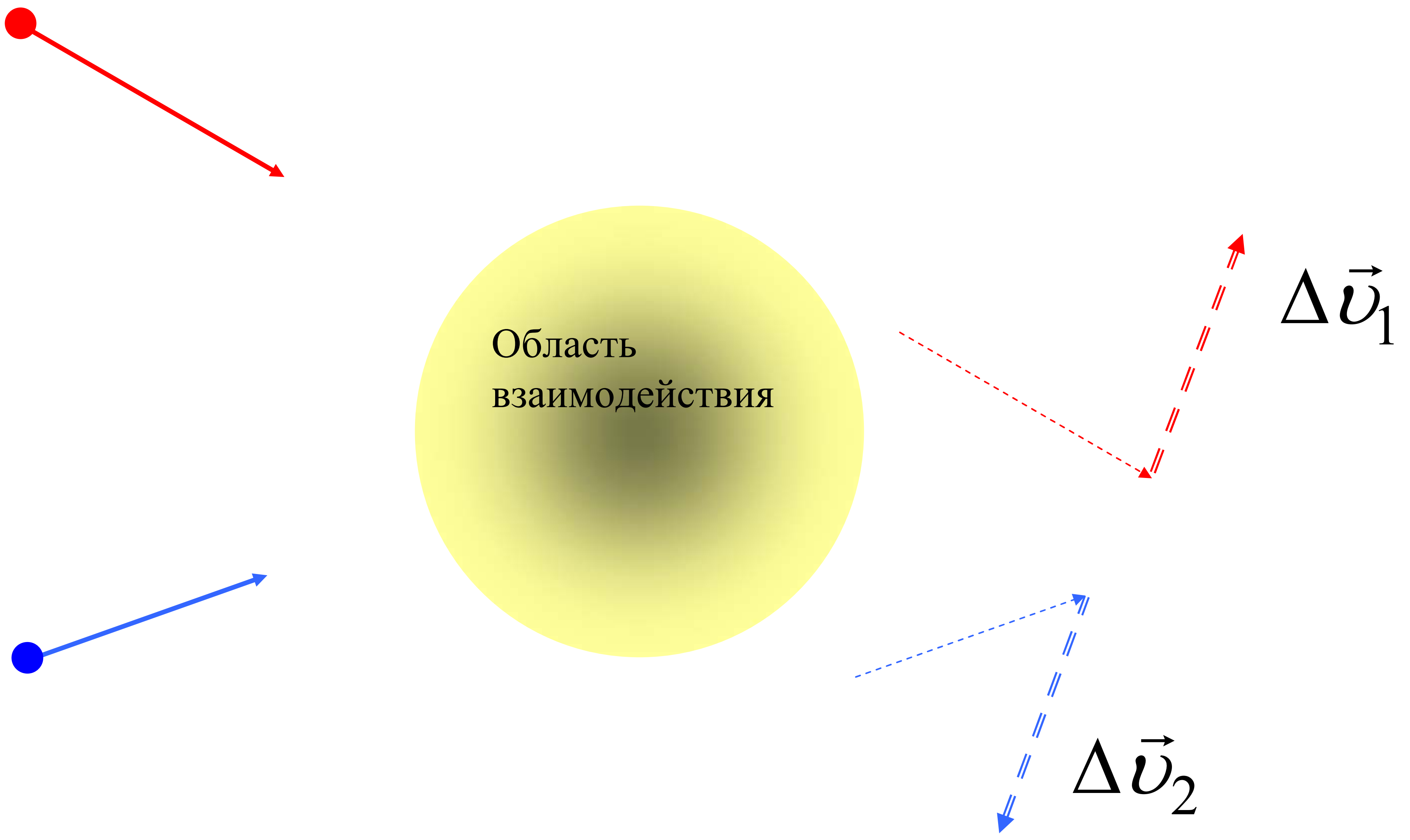


Следствие $\Delta\vec{\upsilon}$

$$\vec{F}, \Delta t, m, \Delta\vec{\upsilon}$$

$$\vec{F}\Delta t \Rightarrow m\Delta\vec{\upsilon}$$

Столкновение двух частиц



Экспериментальные выводы:

- Всегда

$$\Delta\vec{\upsilon}_1 \uparrow\downarrow \Delta\vec{\upsilon}_2$$

$$\frac{\left|\Delta\vec{\upsilon}_1\right|}{\left|\Delta\vec{\upsilon}_2\right|} = \mathrm{const}_2$$

Операционное определение массы:

$$\frac{\left|\Delta\vec{\upsilon}_1\right|}{\left|\Delta\vec{\upsilon}_2\right|} = \frac{m_2}{m_0}$$

$$\frac{\left|\Delta\vec{\upsilon}_1\right|}{\left|\Delta\vec{\upsilon}_3\right|} = \frac{m_3}{m_0}$$

$$\frac{\left|\Delta\vec{\upsilon}_2\right|}{\left|\Delta\vec{\upsilon}_3\right|} = \frac{m_3}{m_2}$$

Свойства импульса:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$$

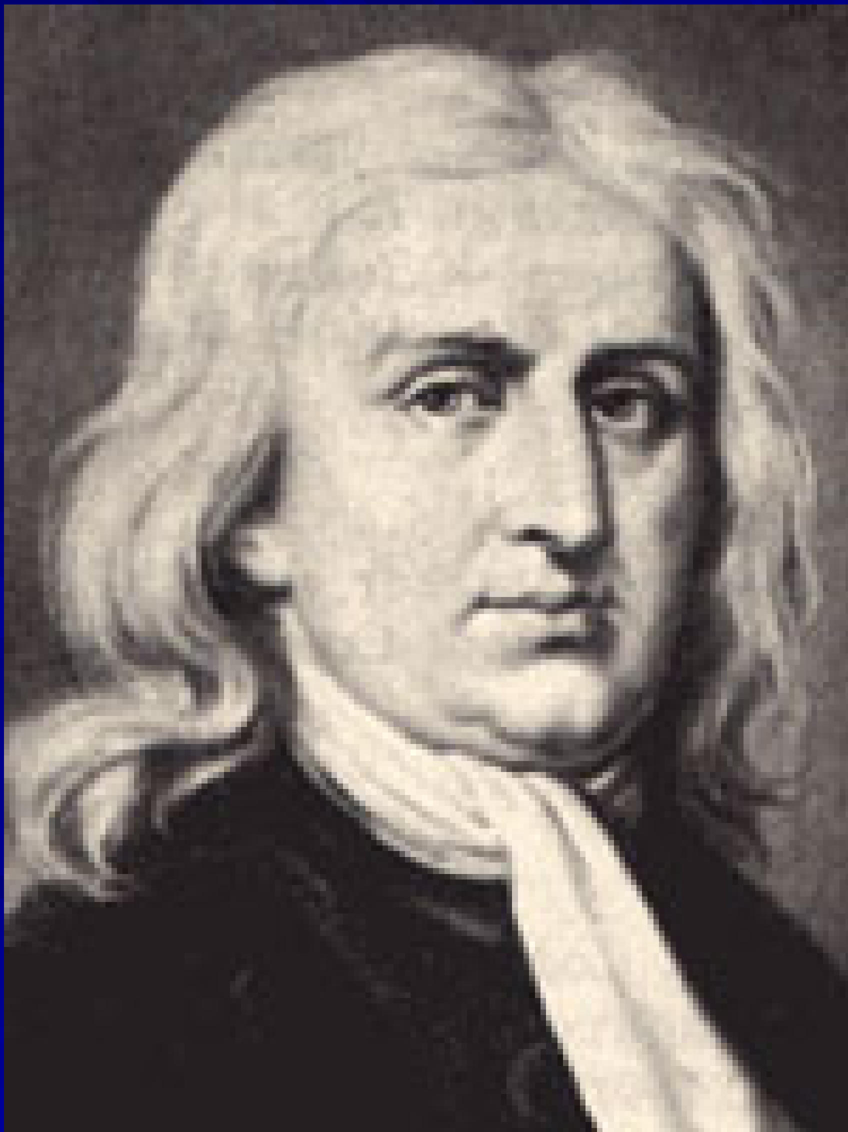
$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$$

$$\sum_i \vec{p}_i = \mathrm{const}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t} = \vec{F}$$

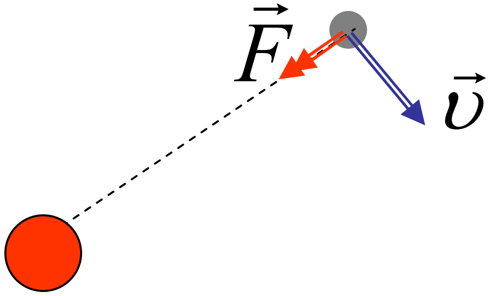
$$\mathrm{d}\,\vec{p} = \vec{F}\,\mathrm{d}\,t$$

3.2. Кинетическая энергия, работа и мощность силы



Атом как МТ с внутренним движением

$$\left|\vec{p}\right| = \mathrm{const}$$



$$\vec{F}\cdot\vec{\upsilon} = 0 \qquad \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

Свойства кинетической энергии:

$$T = \sum_i T_i$$

аддитивна

$$\sum_i T_i = \text{const}$$

при $\begin{cases} \vec{F} = 0 \\ \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0 \\ \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} = 0 \end{cases}$

$$\mathrm{d}T = \begin{cases} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\ \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

$$\delta A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

-элементарная работа

$$N = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$$

-мощность силы

Динамические характеристики:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$$

$$T = \sum_i T_i$$

$$\sum_i \vec{p}_i = \mathrm{const}$$

$$\sum_i T_i = \mathrm{const}$$

$$\mathrm{d}\,\vec{p} = \vec{F}\,\mathrm{d}\,t$$

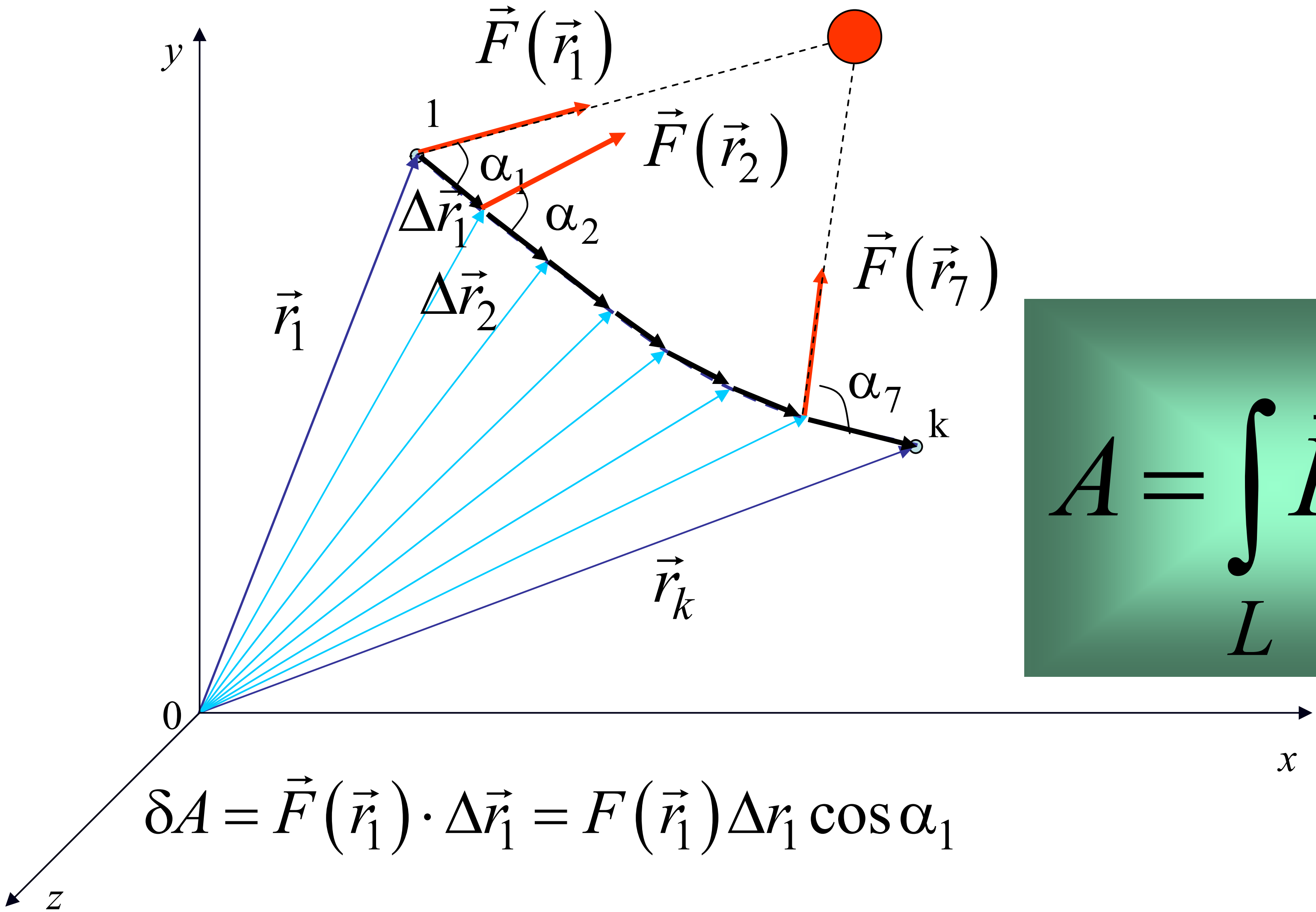
$$\mathrm{d}\,T = \begin{cases} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\,\vec{r} \\ \vec{F}\cdot \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}\,t \end{cases}$$

Взаимосвязь:

$$p = \sqrt{2mT}$$

$$T = \frac{p^2}{2m}$$

Работа силы



$$A = \int\limits_L \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\delta A = \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot \Delta\vec{r}_1 = F(\vec{r}_1)\Delta r_1 \cos\alpha_1$$

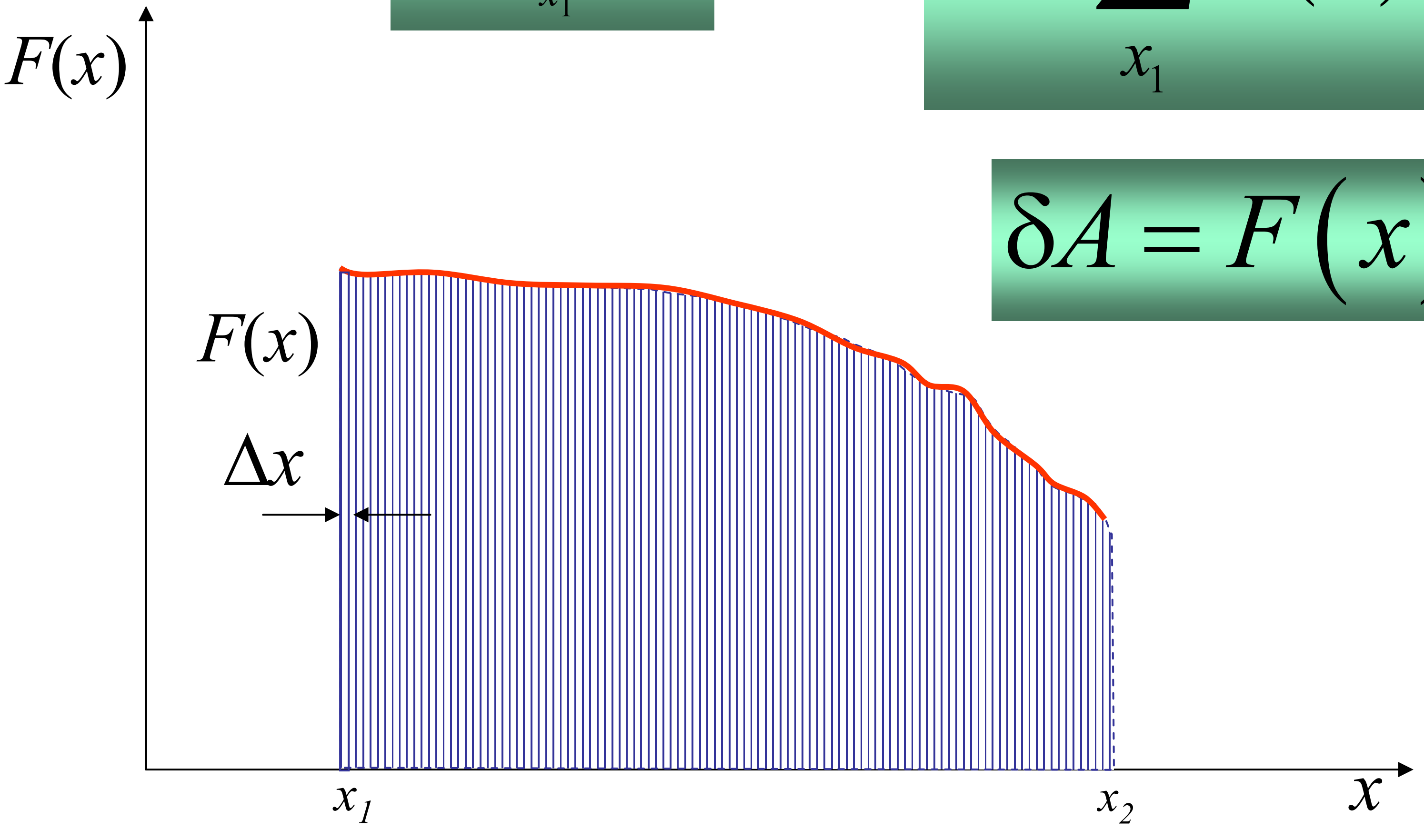
Графическое определение работы

$$A = \int_L \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

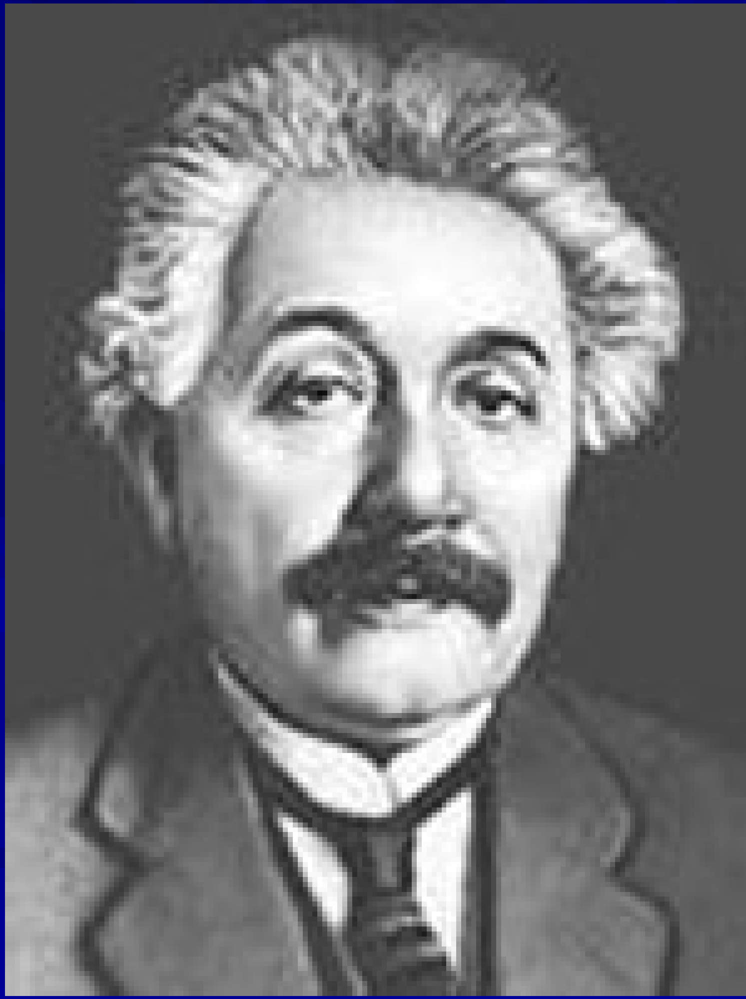
$$A = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

$$A = \sum_{x_1}^{x_2} F(x)\Delta x$$

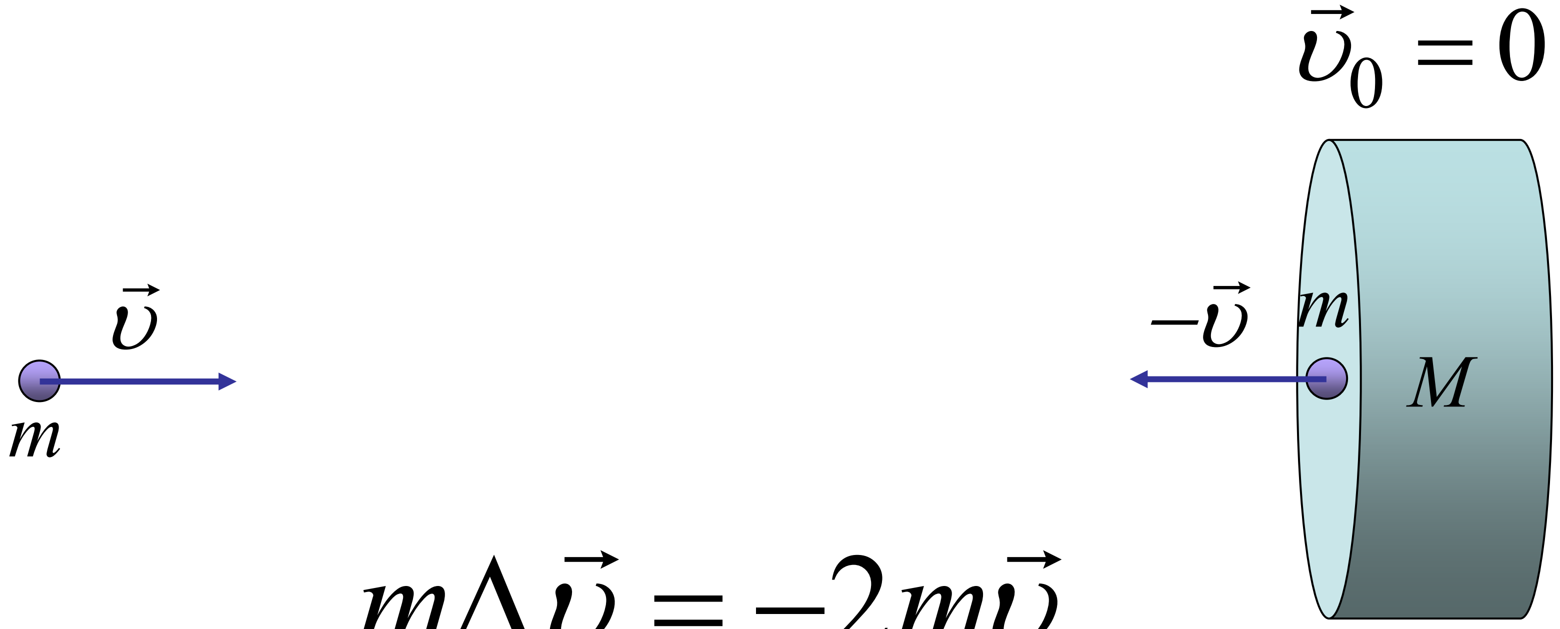
$$\delta A = F(x)\Delta x$$



3.3. Релятивистские масса и импульс



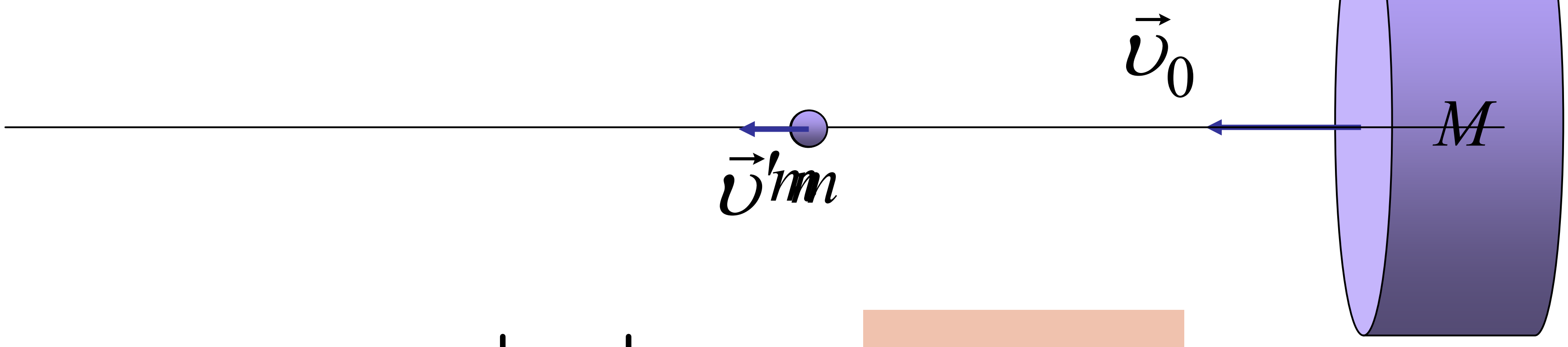
Абсолютно упругое столкновение $m << M$



$$m\Delta\vec{\upsilon} = -2m\vec{\upsilon}$$

Абсолютно упругое столкновение
$m<<M$

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_0 = 2\vec{\upsilon}_0$$



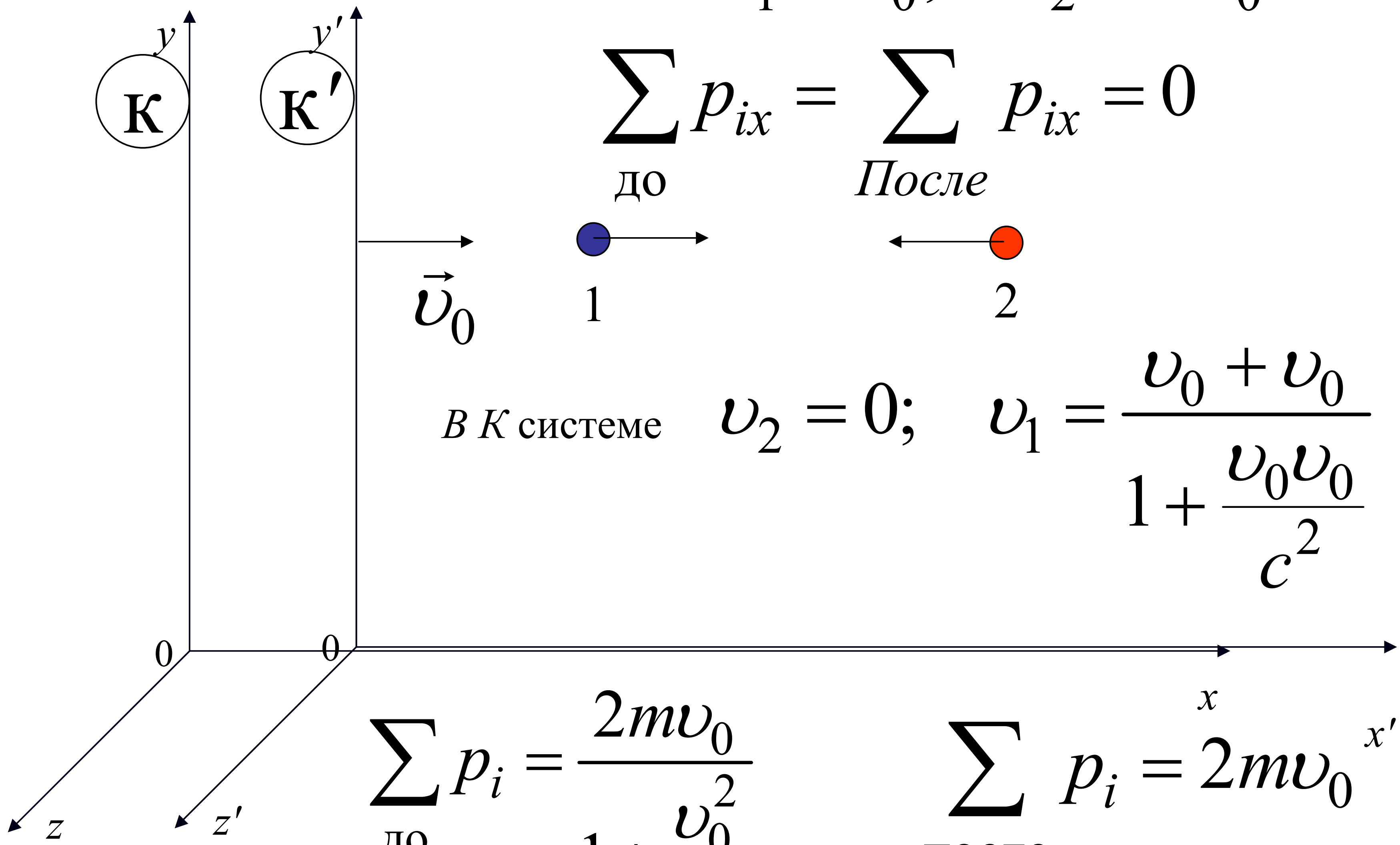
$$\left|\vec{\upsilon}_0\right| \approx c$$

????

Абсолютно неупругое столкновение

В K′ системе $\upsilon_1' = \upsilon_0; \quad \upsilon_2' = -\upsilon_0$

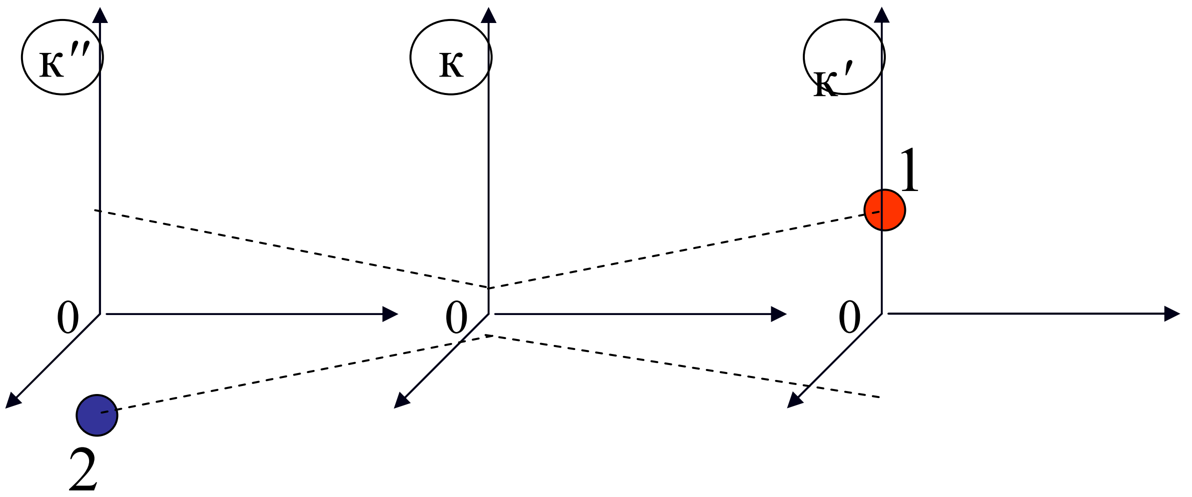
$$\sum_{\text{до}} p_{ix} = \sum_{\text{После}} p_{ix} = 0$$



В K системе $\upsilon_2 = 0; \quad \upsilon_1 = \dfrac{\upsilon_0 + \upsilon_0}{1 + \dfrac{\upsilon_0 \upsilon_0}{c^2}}$

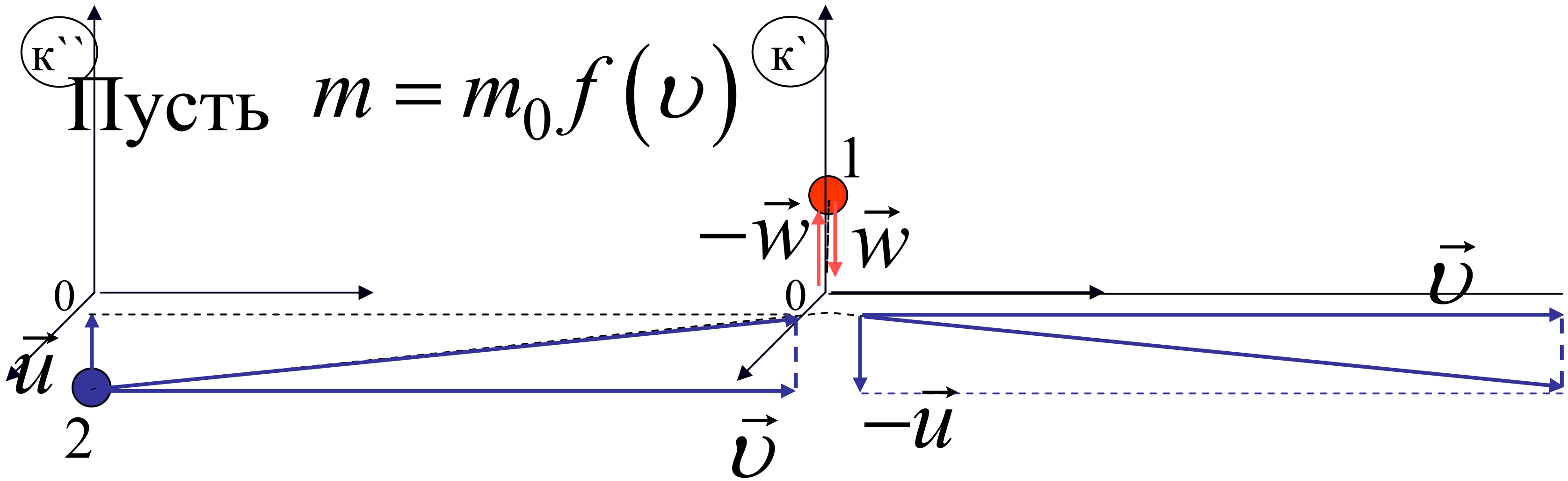
$$\sum_{\text{до}} p_i = \frac{2m\upsilon_0}{1 + \dfrac{\upsilon_0^2}{c^2}} \qquad \sum_{\text{после}} p_i = 2m\upsilon_0$$

Соударение в системе ЦМ ($m_1 = m_2$)



Соударение в К‘ системе ($m_1 = m_2$)

Пусть $m = m_0 f(\upsilon)$



$$0y: \quad m_0 f(w)(-w) + m_0 f\left(\sqrt{\upsilon^2 + u^2}\right)u = m_0 f(w)w - m_0 f\left(\sqrt{\upsilon^2 + u^2}\right)u$$

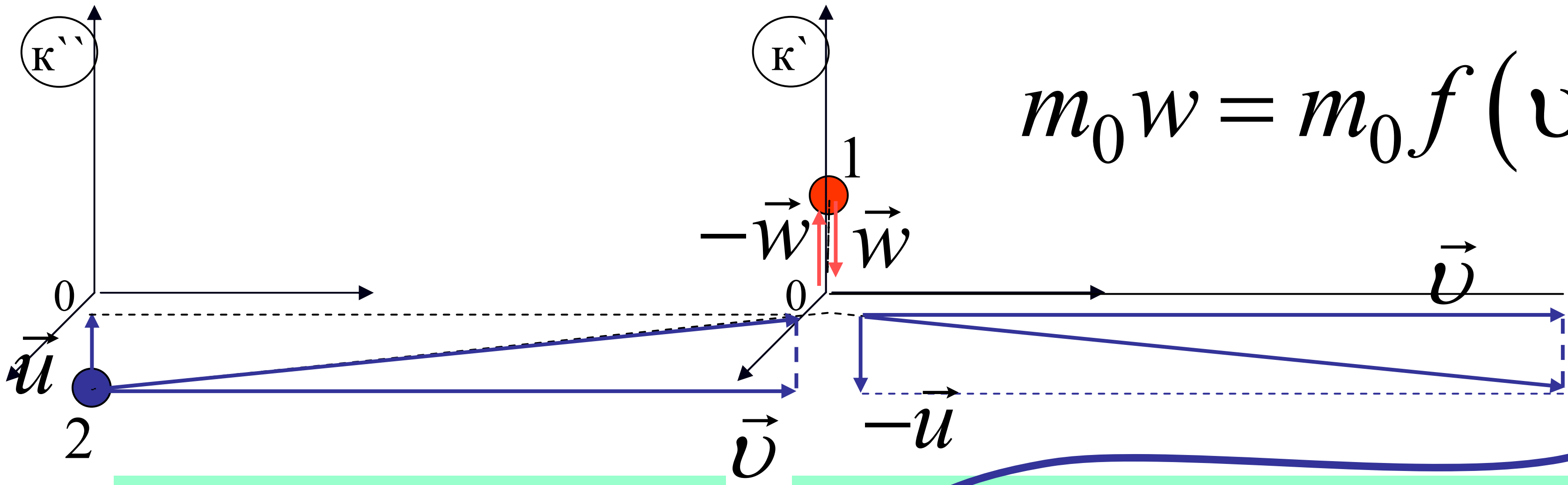
$$\cancel{2} m_0 f(w)w = \cancel{2} m_0 f\left(\sqrt{\upsilon^2 + u^2}\right)u$$

Пусть $\upsilon >> u \approx w << c$

$$f(w) \approx 1; \quad f\left(\sqrt{\upsilon^2 + u^2}\right) \approx f(\upsilon)$$

$$m_0 w = m_0 f(\upsilon)u$$

Перейдем в К “ систему



$$m_0 w = m_0 f(\upsilon) u$$

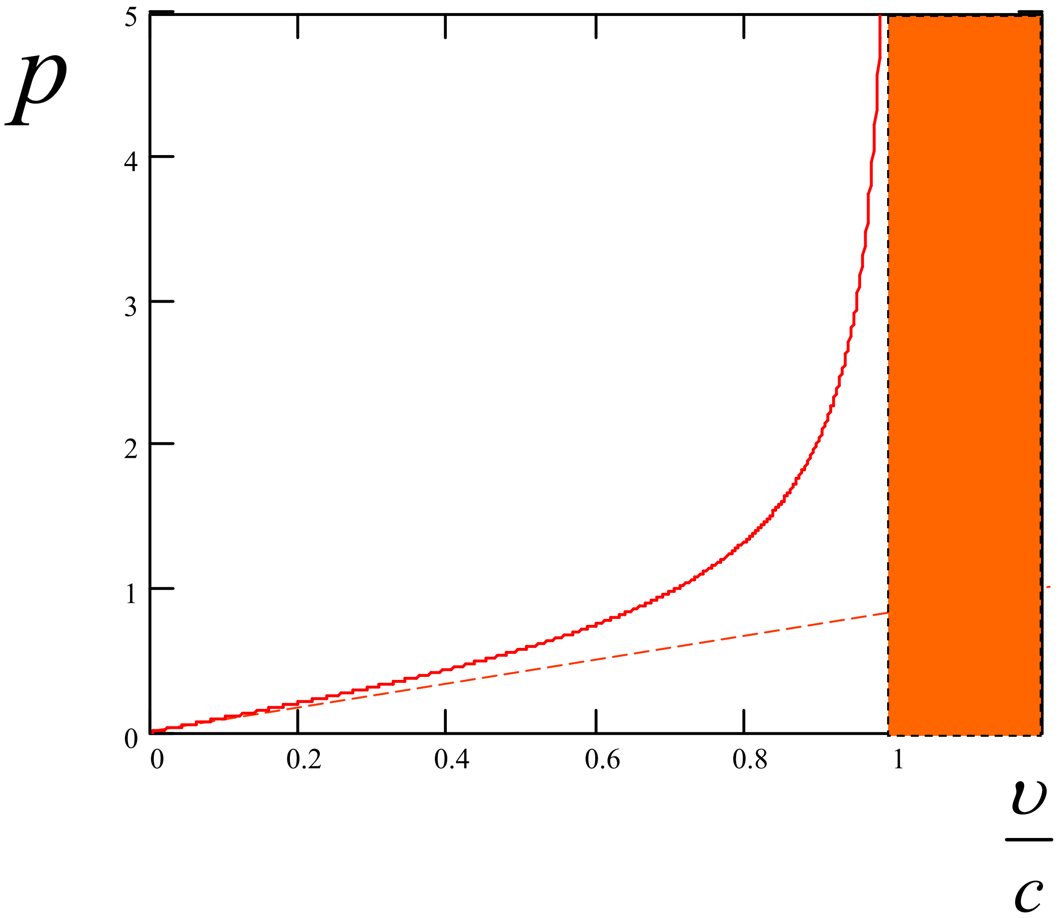
$$\upsilon_y = \frac{\upsilon'_y}{1 + \frac{\upsilon'_x \upsilon_0}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}$$

$$u = \frac{w}{1 + \frac{0 \cdot \upsilon}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} = w \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

$$m_0 w = m_0 f(\upsilon) w \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

Зависимость импульса от скорости

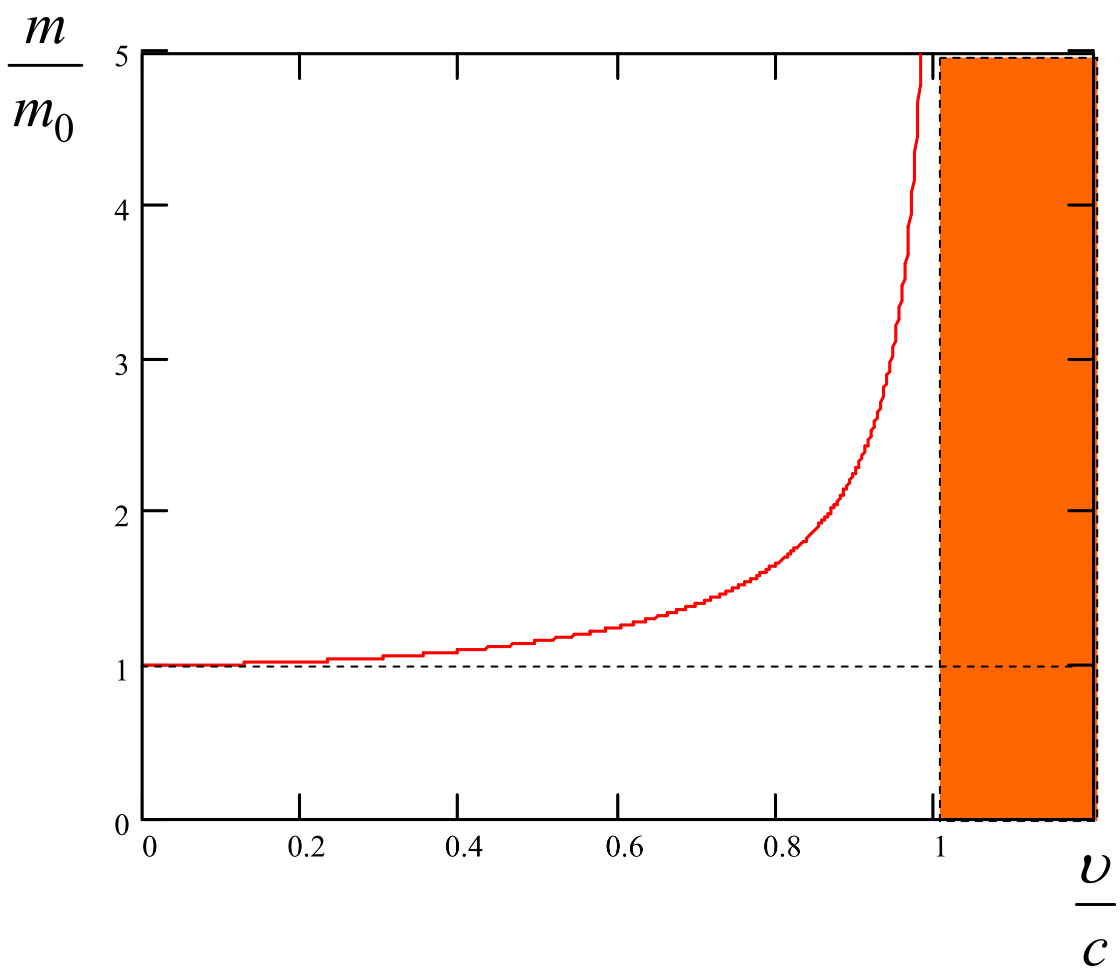
$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$



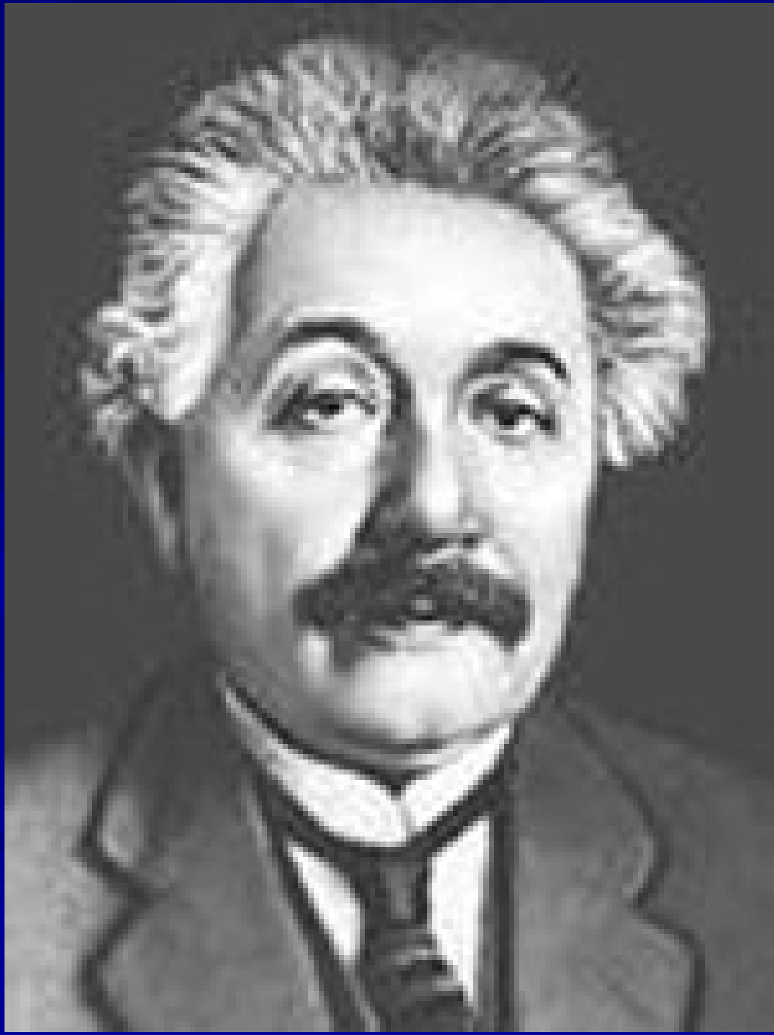
$$\cancel{\vec{p} = m_0 \vec{\upsilon}}$$

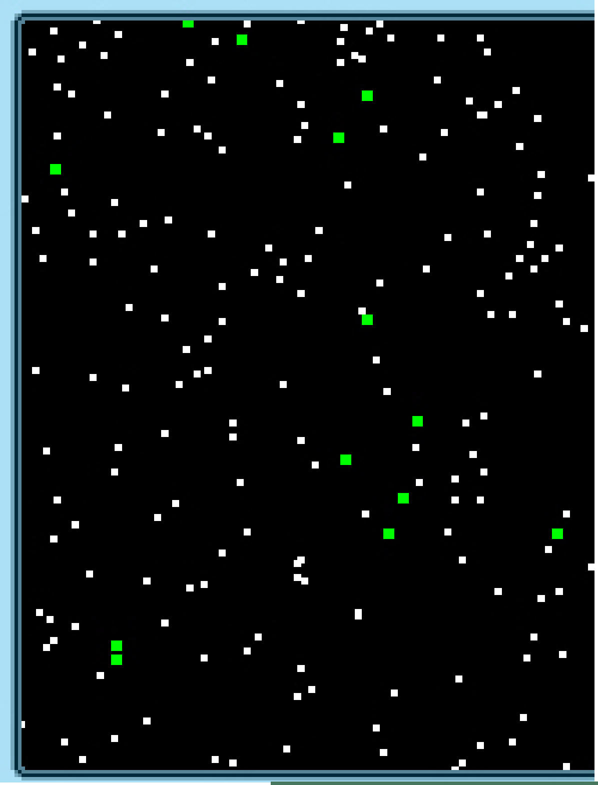
Зависимость массы от скорости

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$



3.4. Релятивистская энергия





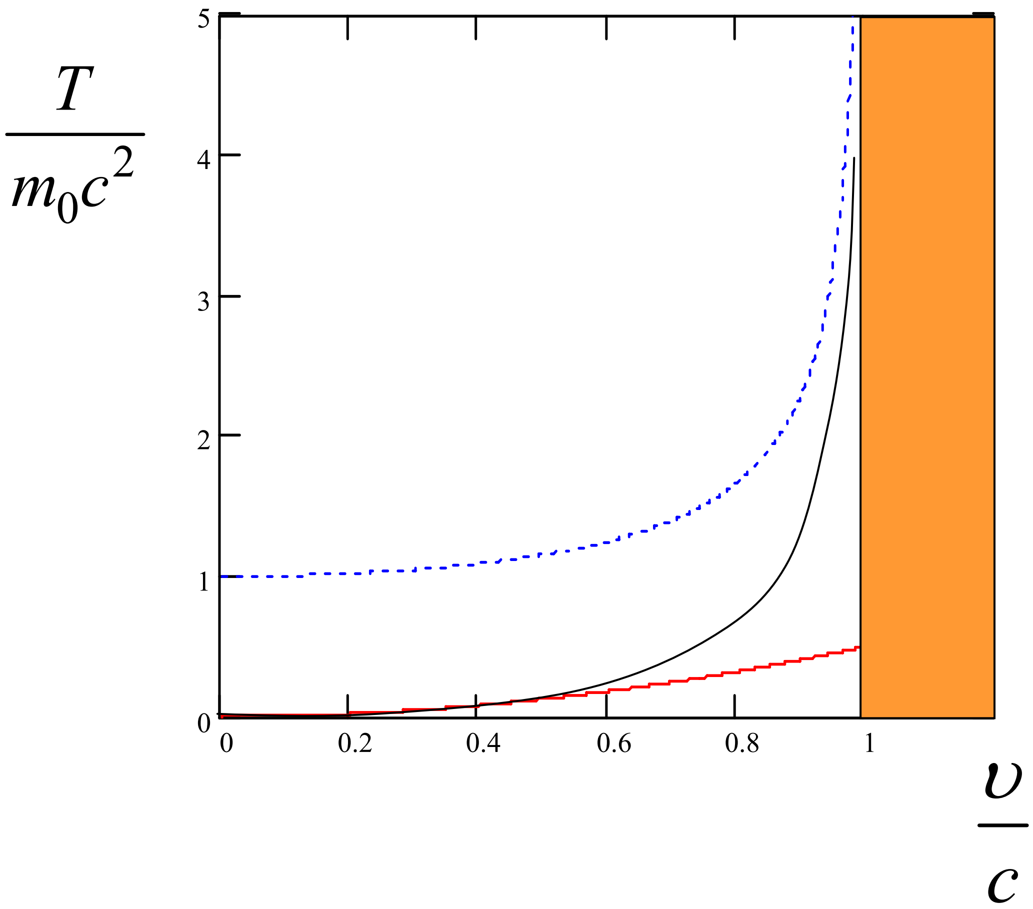
Движение молекул внутри «объекта»

$$M = \sum_i \frac{m_{0i}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_i^2}{c^2}}} \neq \sum_i m_{0i} \quad ?$$

Вывод: масса зависит от внутреннего движения т.е. $M = f(T_i)$

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} \quad \text{или} \quad T = \frac{p^2}{2m} \quad ?$$

Зависимость кинетической энергии от скорости для релятивистской (a) и классической (b) частиц. При υ << *c* оба закона совпадают



$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - m_0c^2$$

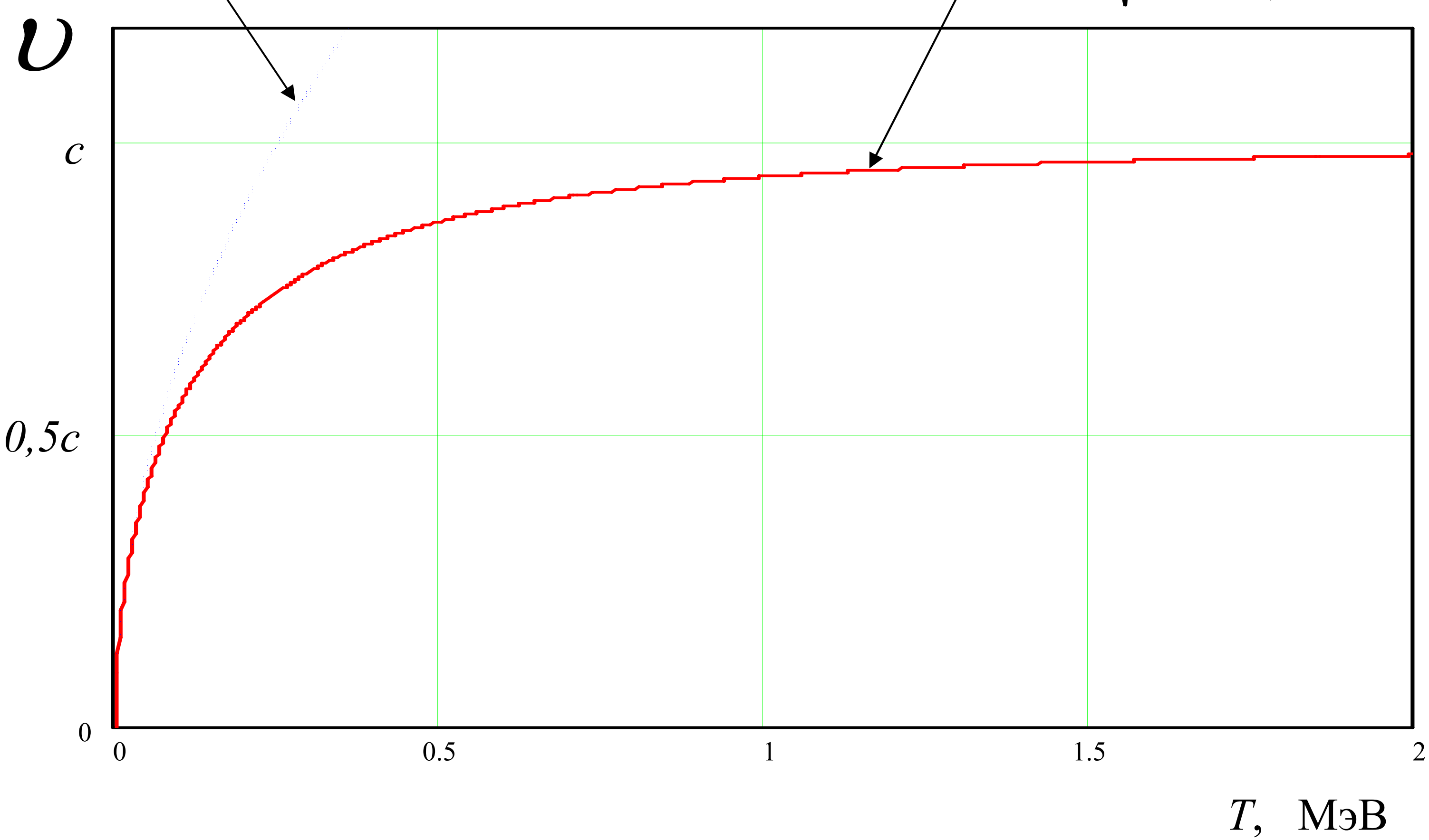
$$\cancel{T = \frac{m\upsilon^2}{2}}$$

Скорость электронов в ускорителе

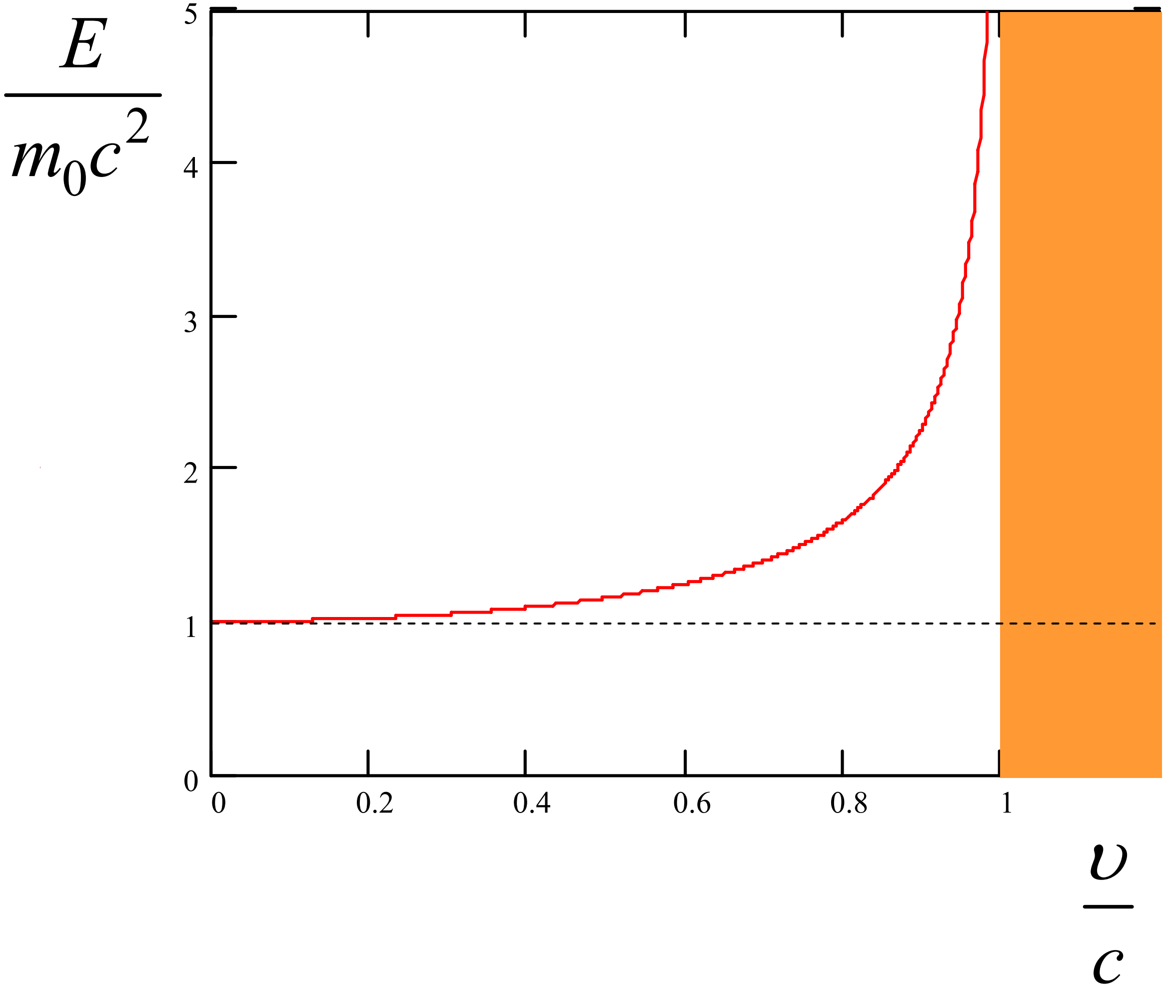
$$T = eU$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2T}{m}}$$

$$\upsilon = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{m_0c^2 + T}\right)^2}$$



Зависимость энергии от скорости

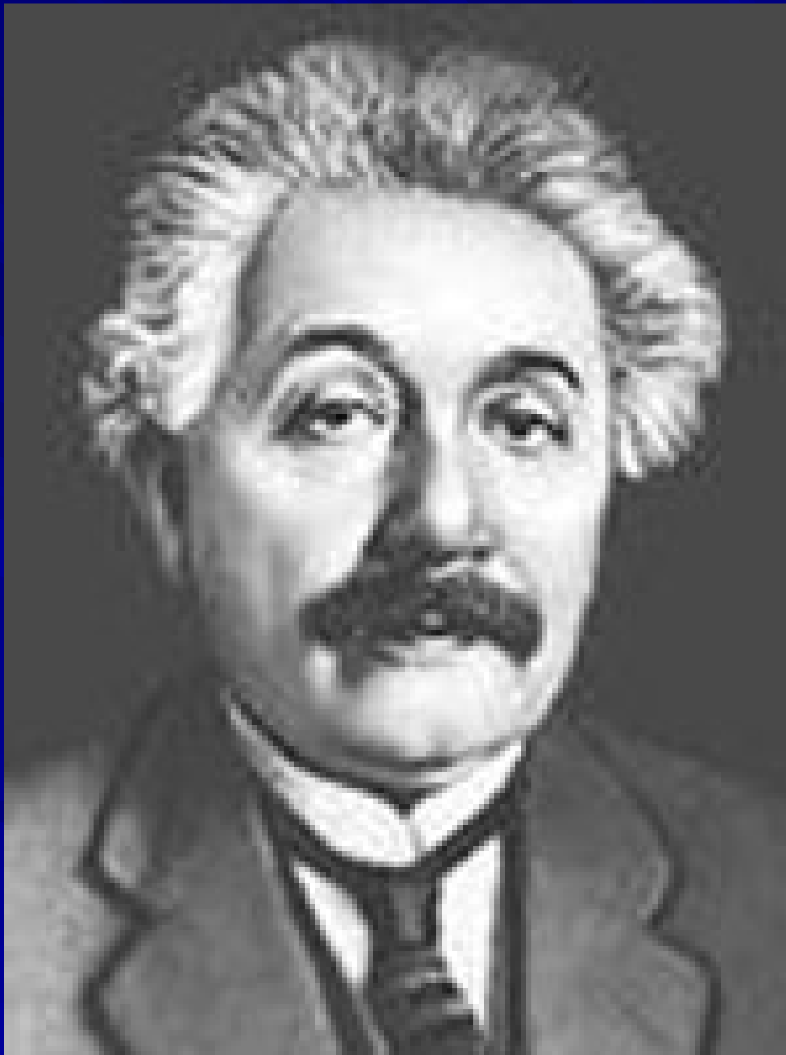


$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

$$E = m_0c^2 + T$$

Отклонение световых лучей от прямой вблизи Солнца

3.5. Соотношение между полной энергией и импульсом



$$\left.\begin{aligned} A) \quad E &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \\ B) \quad \vec{p} &= \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

1) B:A

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \frac{\vec{p} c^2}{E}} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} A)\quad E &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \\ B)\quad \vec{p} &= \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

2) Подставим (1) в А

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{p^2 c^2}{E^2}}}$$

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

Формула Эйнштейна

$$\boxed{E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}} \quad (2)$$

Следствие :

Если $\upsilon = c$, то из (1) $c = \dfrac{pc^2}{E}$ или $E = pc$

Подставим в (2) $pc = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$

Вывод: $\boxed{m_{0ф} = 0}$

3) $$T = E - m_0 c^2$$

$$T = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2$$

$$T^2 + 2T m_0 c^2 + \cancel{m_0^2 c^4} = p^2 c^2 + \cancel{m_0^2 c^4}$$

$$\boxed{p = \frac{1}{c}\sqrt{T\left(T + 2m_0 c^2\right)}} \quad (3)$$

4) $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4 \quad \rightarrow \mathrm{Inv} \quad !!!$

$$E^2 - p^2c^2 = inv$$

$$\boxed{\frac{E^2}{c^2} - p^2 = inv} \quad (4)$$

Инварианты С.Т.О.

- 1. c - inv
- 2. $\Delta \mathcal{R}$ – inv
- 3. $\Delta\tau_0$ - inv
- 4. m_0 – inv
- 5. *4-векторы*

4-вектор скорости

$$\mathcal{V} = \frac{d\Re}{dt_0} = \left\{ c\frac{dt}{dt_0}, \frac{dx}{dt_0}, \frac{dy}{dt_0}, \frac{dz}{dt_0} \right\} =$$

$$= \left\{ \gamma c, \gamma \upsilon_x, \gamma \upsilon_y, \gamma \upsilon_z \right\}$$

4-вектор импульса-энергии

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = inv$$

$$\mathcal{V}_0 = \{\gamma c,\ \gamma \upsilon_x,\ \gamma\ \upsilon_y,\ \gamma\ \upsilon_z\}$$

$$\mathcal{P} = m_0 \mathcal{V}_0 = \{\gamma m_0 c,\ \gamma m_0 \upsilon_x,\ \gamma m_0\ \upsilon_y,\ \gamma m_0\ \upsilon_z\}$$

$$\mathcal{P} = \{E/c,\ p_x,\ p_y,\ p_z\}$$

Замечание:

Для проекций 4-вектора импульса-энергии выполняются законы сохранения

Примеры

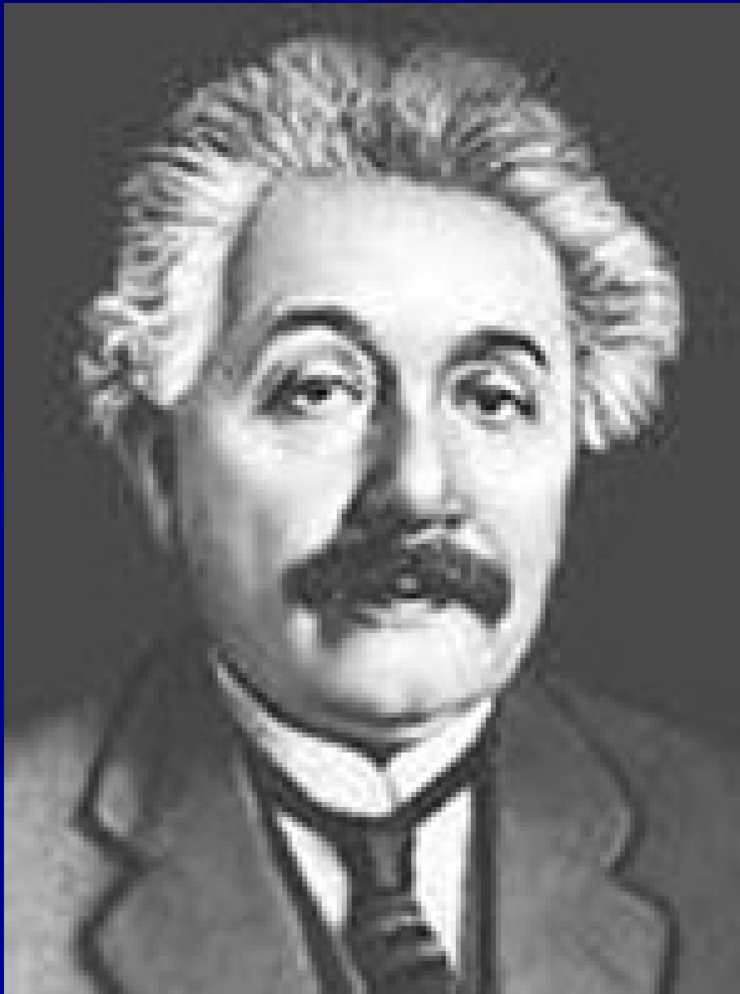
1) *Реакция аннигиляции*

$$e^{-} + e^{+} \rightarrow 2\gamma$$

$\upsilon = c, \qquad m_{0\gamma} = 0$

$$2m_{0e} \rightarrow \; 0 \quad (???!!!)$$

3.6. Основной закон релятивистской динамики частицы



Динамические характеристики:

1.Аддитивность

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$$

$$E = \sum_i E_i$$

2. Выполняются законы сохранения

$$\sum_i \vec{p}_i = \text{const}$$

$$\sum_i E_i = \text{const}$$

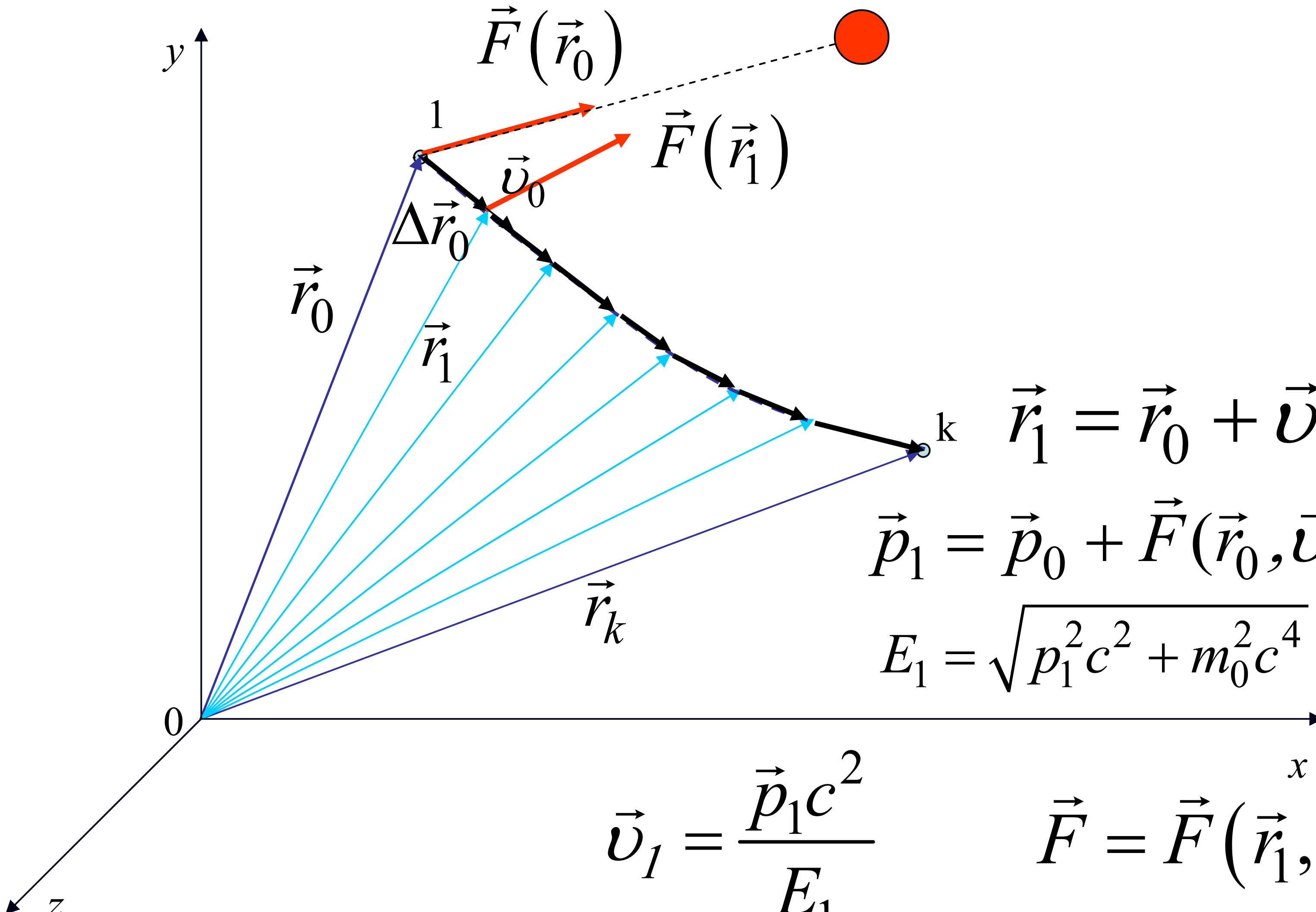
3. Изменение связано с внешним воздействием

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{\upsilon}$$

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t)$$

Решение основной задачи динамики: *r(t)-?*



$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 \Delta t$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_0 + \vec{F}(\vec{r}_0, \vec{\upsilon}_0, t_0)\Delta t$$

$$E_1 = \sqrt{p_1^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{\vec{p}_1 c^2}{E_1}$$

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{\upsilon}_1, t_1)$$

Решение основной задачи динамики: $r(t)$-?

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 \Delta t$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_0 + \vec{F}(\vec{r}_0, \vec{\upsilon}_0, t_0)\Delta t$$

$$E_1 = \sqrt{p_1^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{\vec{p}_1 c^2}{E_1}$$

. . . .

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{\upsilon}_1 \Delta t$$

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{\upsilon}_1, t_1)\Delta t$$

$$\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r}_1, \vec{\upsilon}_1, t_1\right)$$

$$E_2 = \sqrt{p_2^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

$$\vec{\upsilon}_2 = \frac{\vec{p}_2 c^2}{E_2}$$

. . . .

$$\vec{r}_k = \vec{r}_{k-1} + \vec{\upsilon}_{k-1} \Delta t$$

$$\vec{p}_k = \vec{p}_{k-1} + \vec{F}(\vec{r}_{k-1}, \vec{\upsilon}_{k-1}, t_{k-1})\Delta t$$

$$\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r}_2, \vec{\upsilon}_2, t_2\right)$$

$$E_k = \sqrt{p_k^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

$$\vec{\upsilon}_k = \frac{\vec{p}_k c^2}{E_k}$$

$$\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r}_k, \vec{\upsilon}_\mathrm{k}, t_k\right)$$

Система уравнений Ньютона-Эйнштейна

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\upsilon} \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\left(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t\right) \end{cases}$$

Замечание:

1. Система из 6-ти уравнений
2. Необходимы начальные условия

$$\vec{r}_0; \quad \vec{\upsilon}_0$$

3. Необходимо знание законов сил

$$\vec{F}\left(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t\right)$$