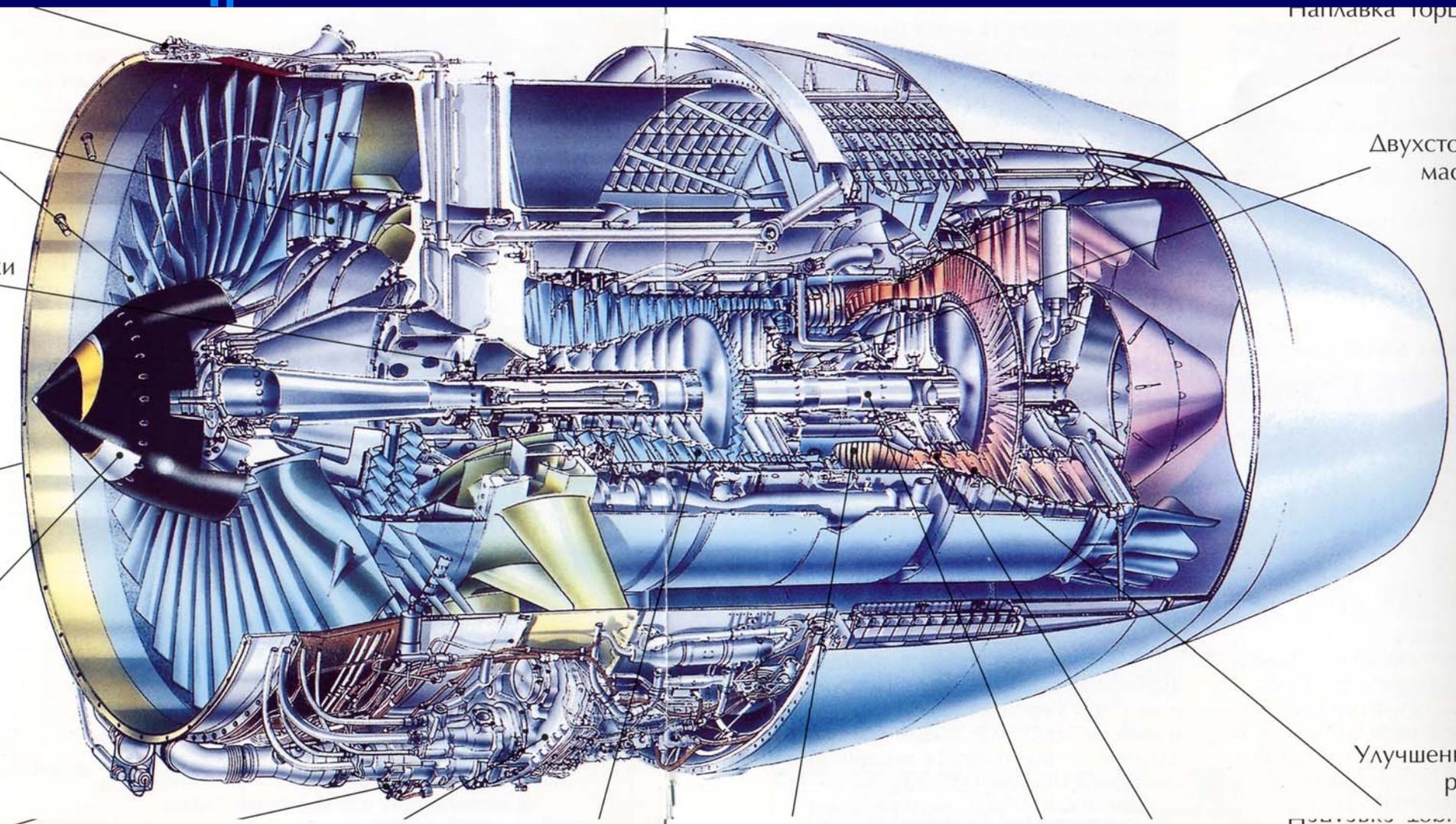
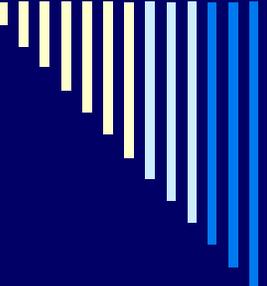
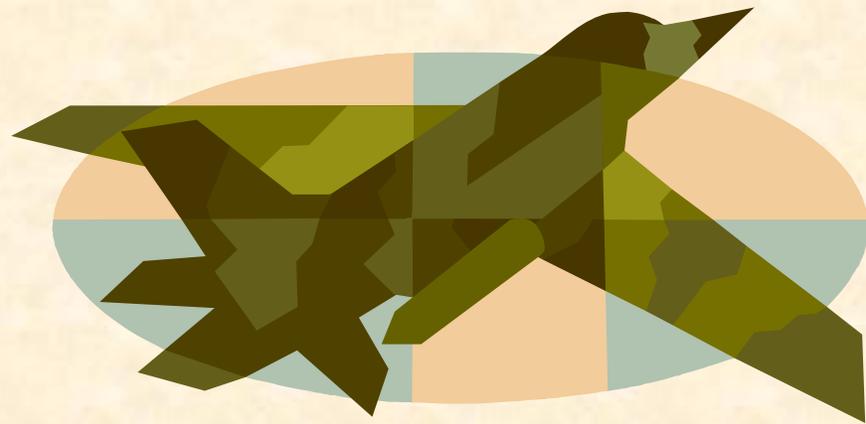


Тема 6. Механика твёрдого тела





6.1. Движение твердого тела



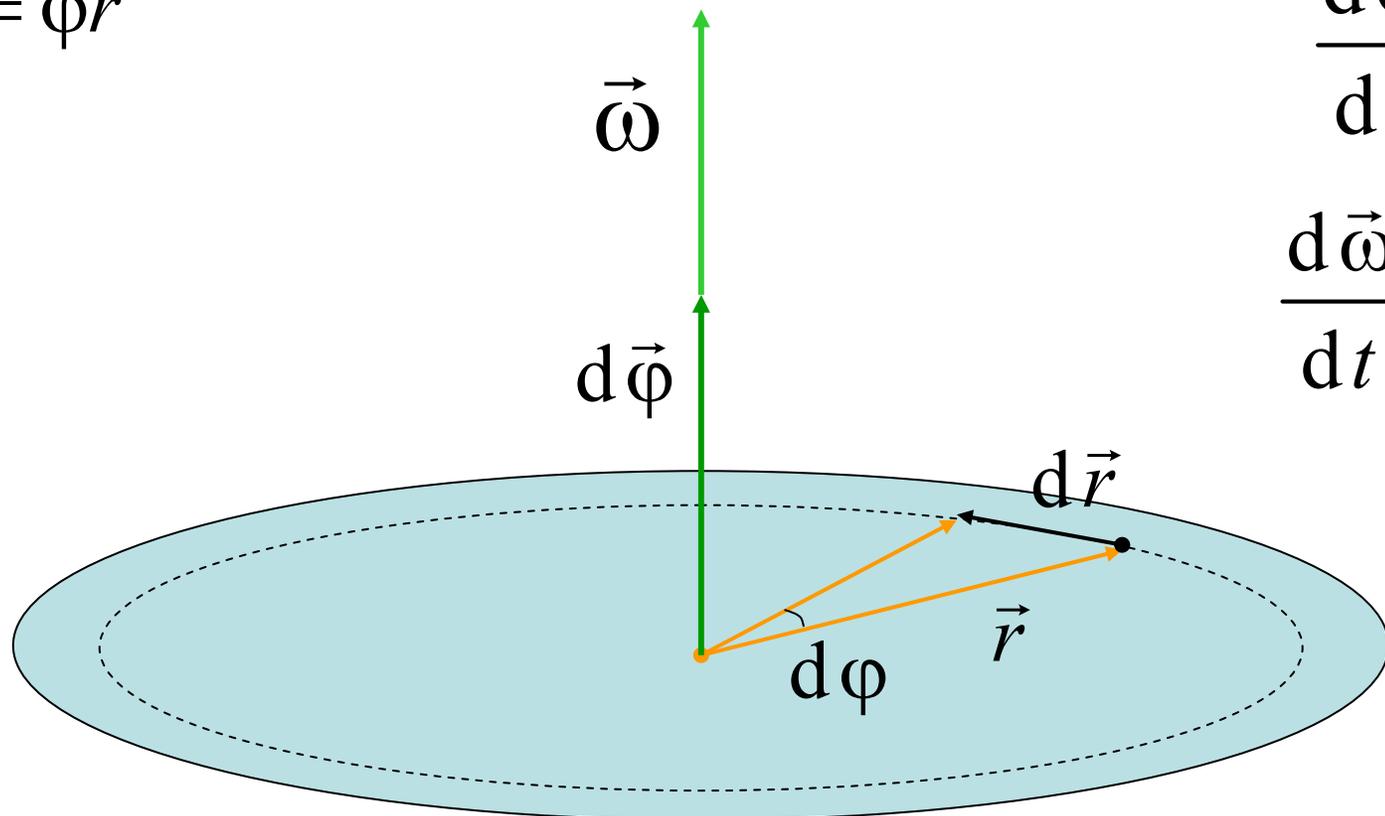
Абсолютно твердое тело (АТТ)-

-система материальных точек с
неизменным взаимным
расположением



Движение точки тела по окружности

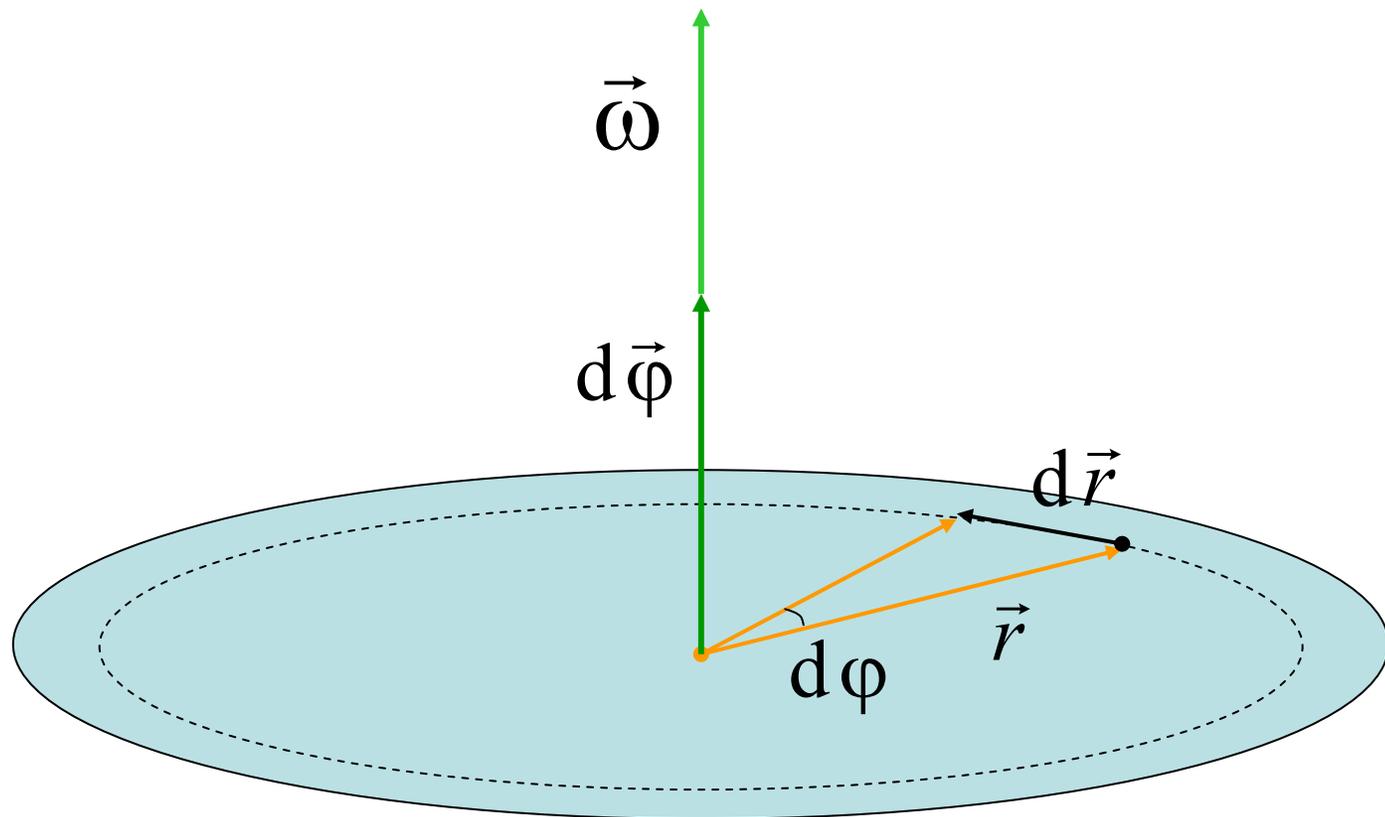
$$l = \varphi r$$



$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}$$

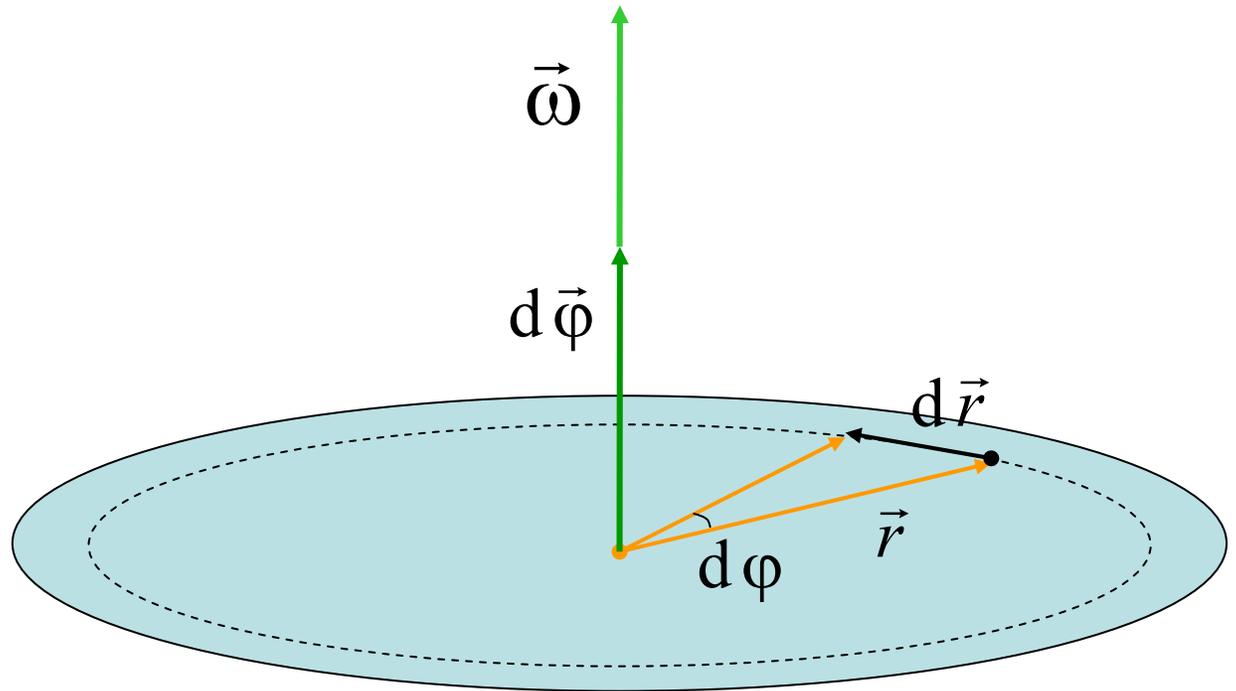
$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\beta}$$

Линейная и угловая скорости



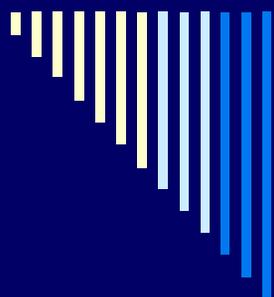
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Линейное и угловое ускорения



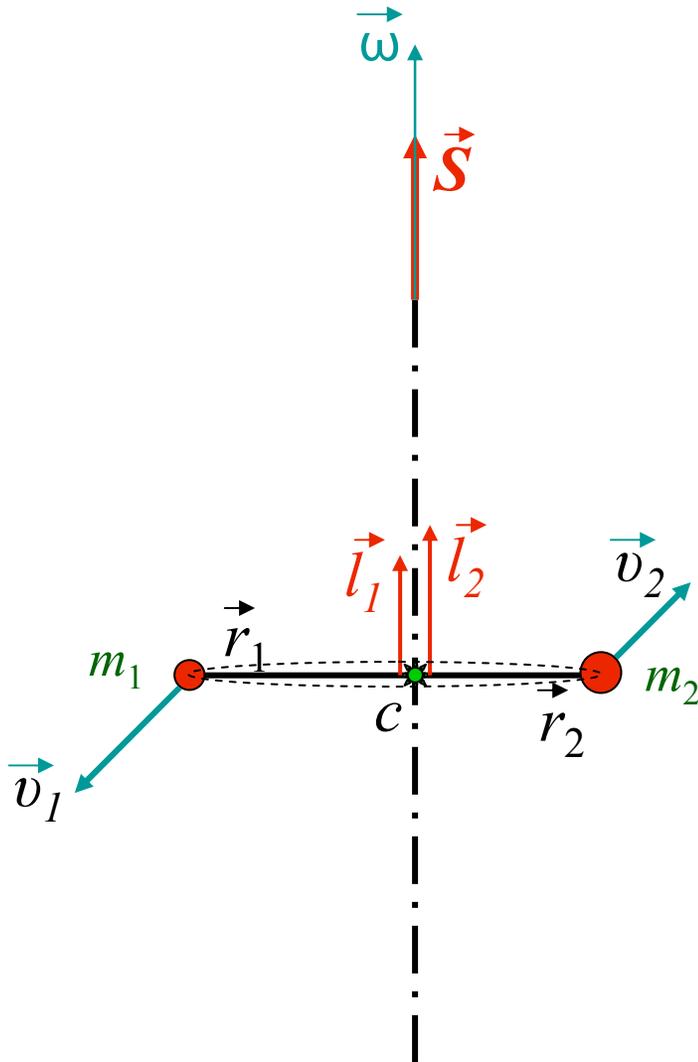
$$\vec{a}_{\tau} = \vec{\beta} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

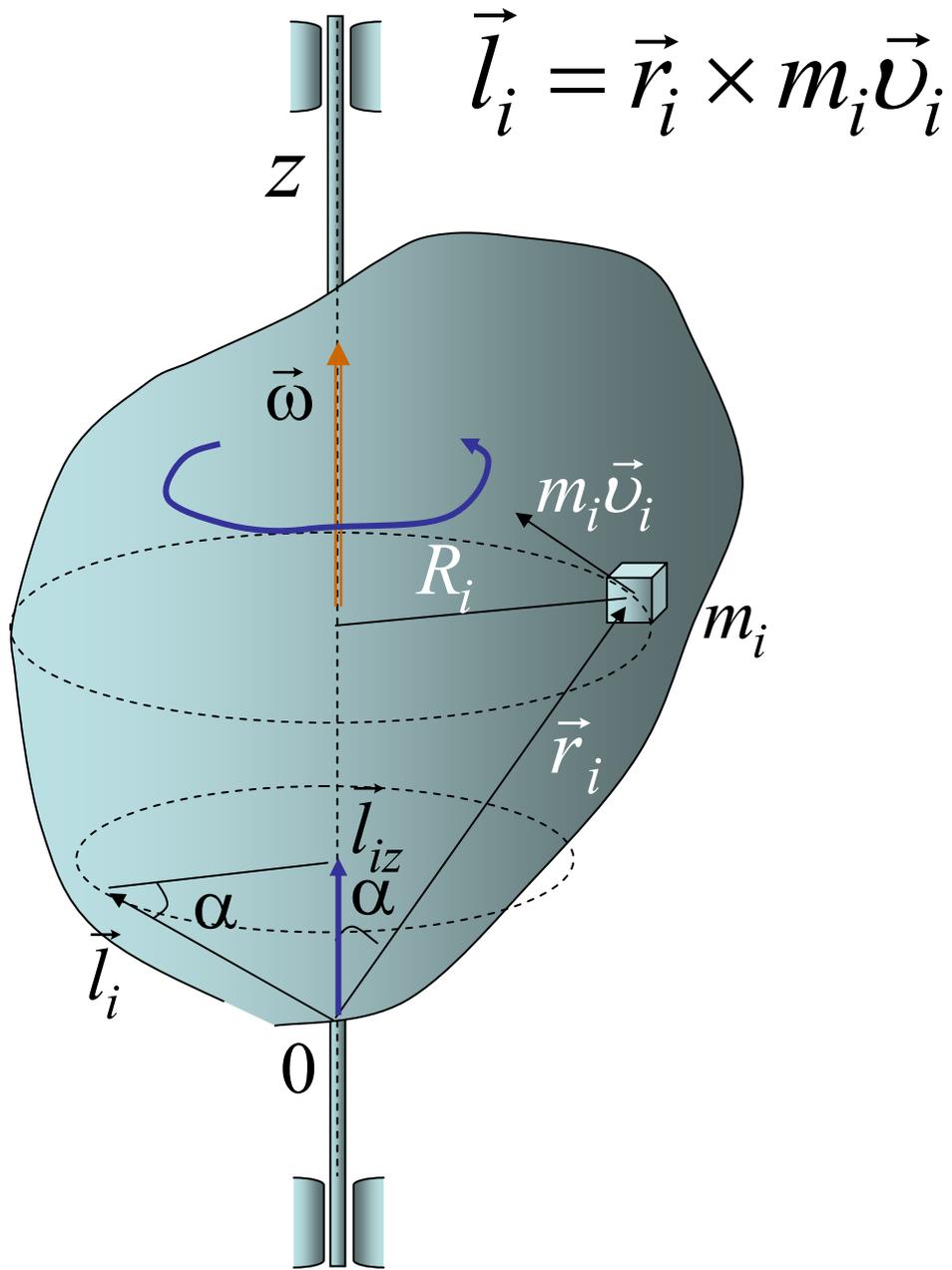


6.2. Момент импульса и момент инерции АТТ относительно оси

Модель АТТ на примере двух жестко связанных материальных точек

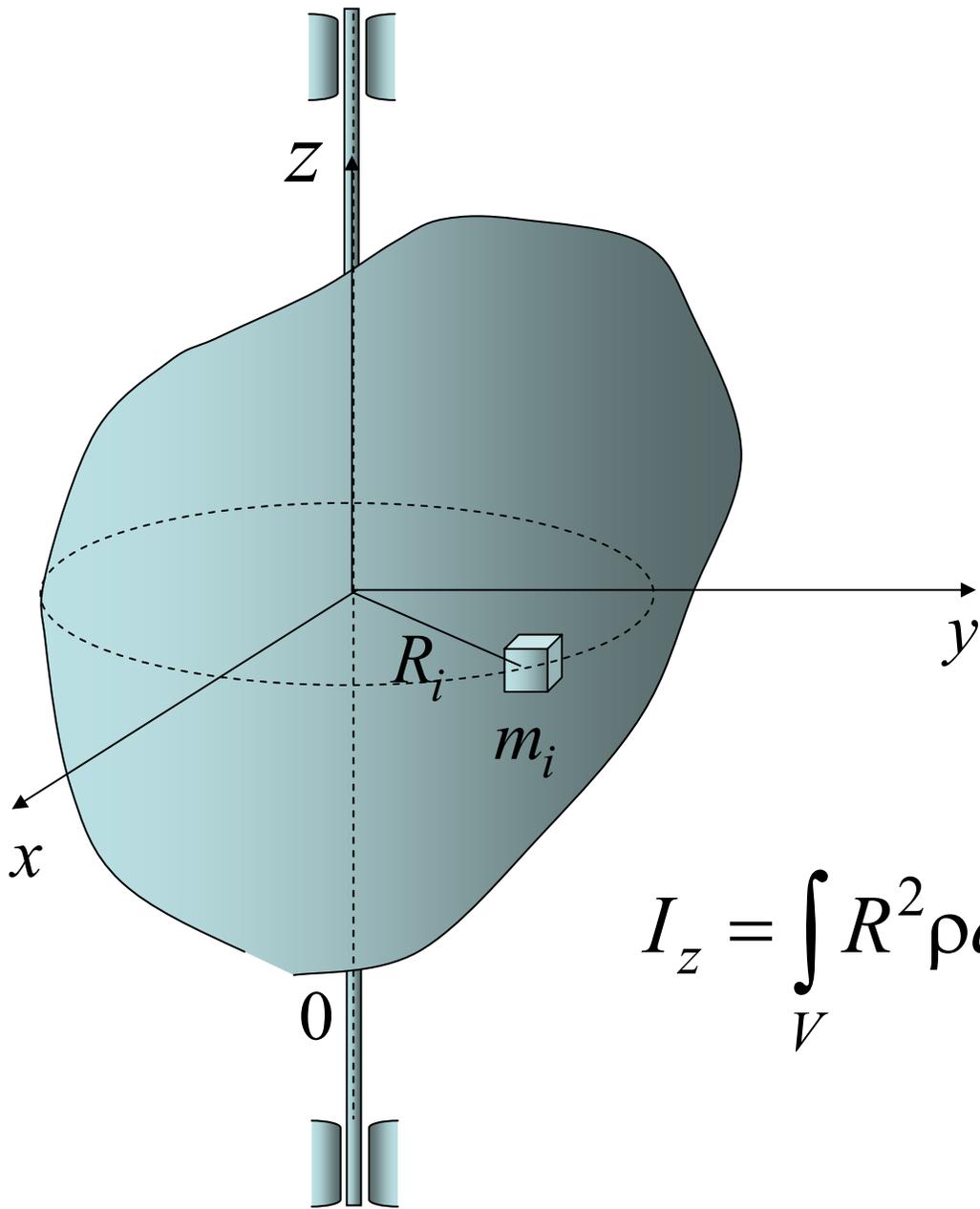


$$\vec{S} = \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right) \vec{\omega}$$



$$I_z = \sum_i m_i R_i^2$$

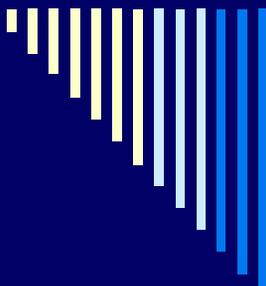
$$J_z = I_z \omega_z$$



$$I_z = \sum_i m_i R_i^2$$

$$I_z = \int R^2 dm$$

$$I_z = \int_V R^2 \rho dV = \int_V (x^2 + y^2) \rho dV$$



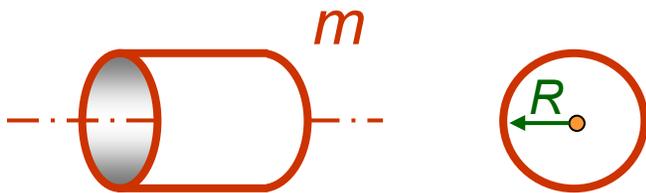
6.3. Расчет моментов инерции АТТ. Теорема Штейнера

Вычисление момента инерции

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2$$

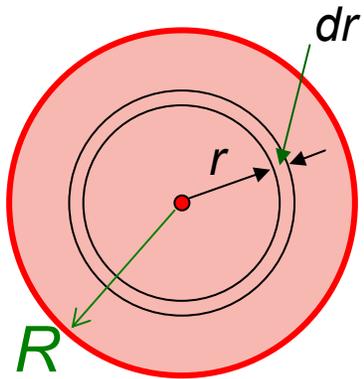
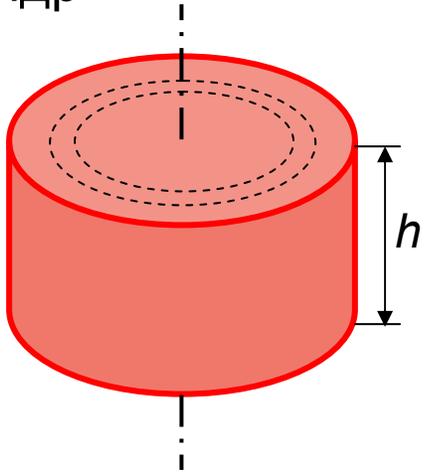
$$I_z = \int_V R^2 \rho dV$$

1. Тонкий обруч, тонкостенный цилиндр



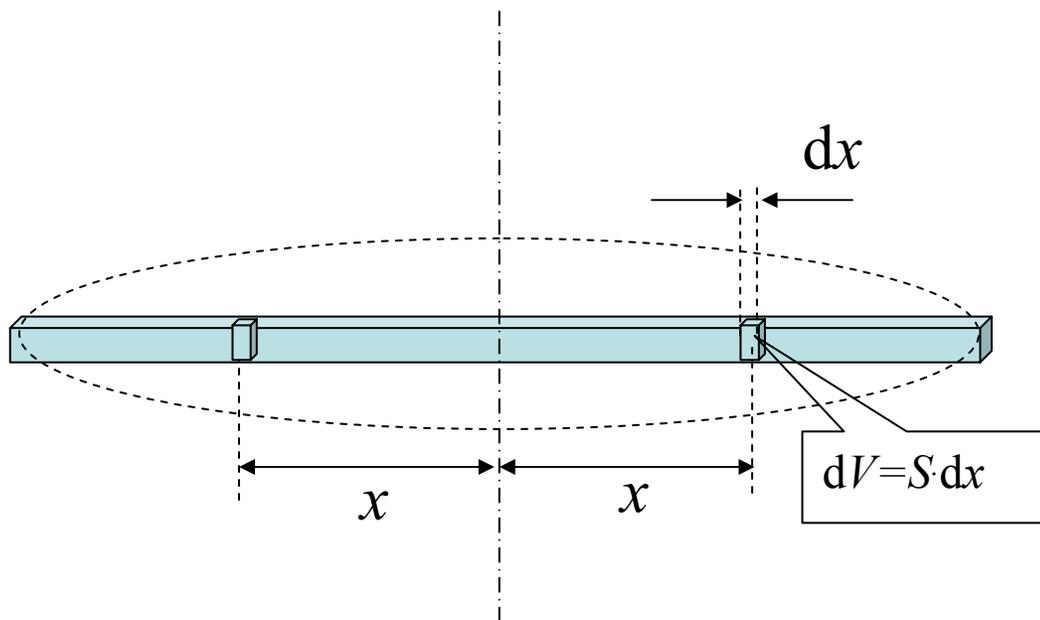
$$I = m R^2$$

2. Однородный диск, однородный цилиндр



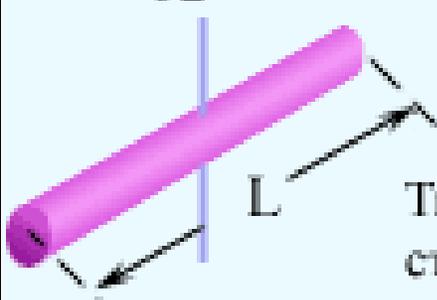
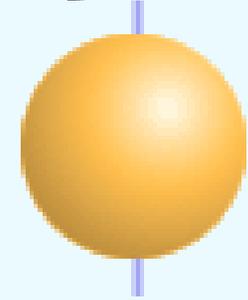
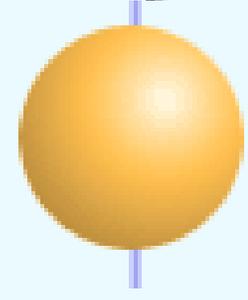
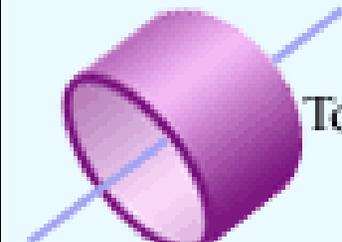
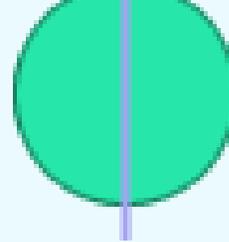
$$I = \frac{mR^2}{2}$$

3. Однородный тонкий стержень

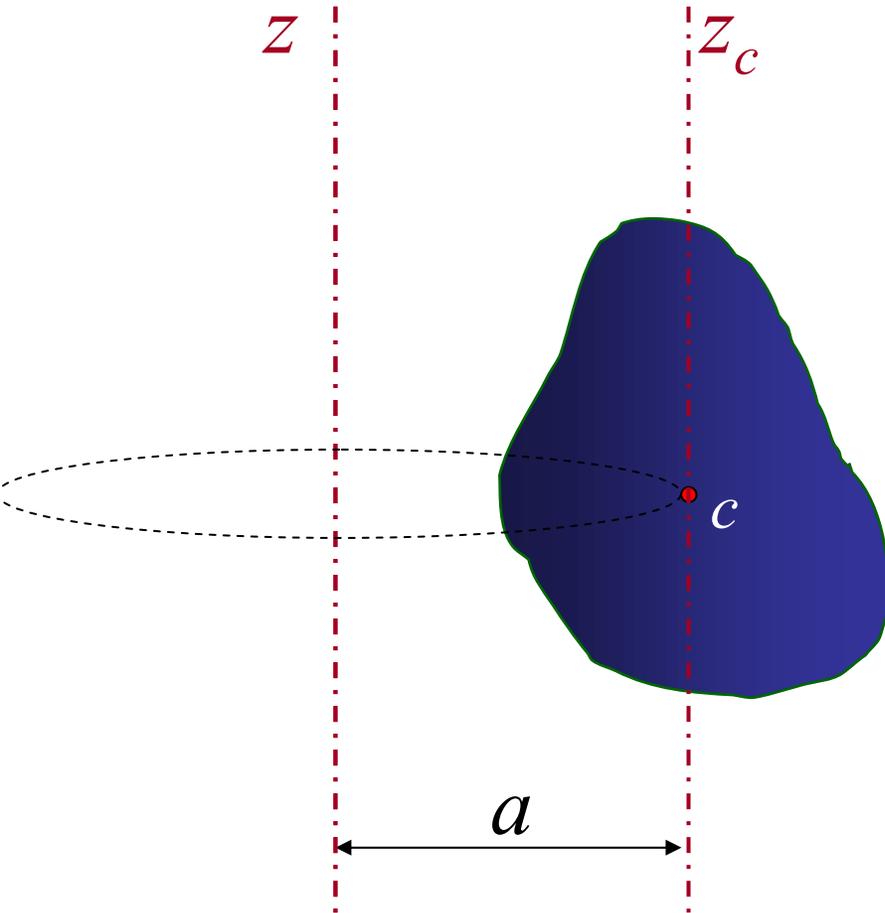


$$I = \frac{ml^2}{12}$$

Моменты инерции некоторых однородных твердых тел.

$I_c = \frac{1}{12} ML^2$  <p>Твердый стержень</p>	$I_c = \frac{2}{5} MR^2$  <p>Шар</p>	$I_c = \frac{2}{3} MR^2$  <p>Тонкостенная сферическая оболочка</p>
$I_c = MR^2$  <p>Тонкостенный цилиндр</p>	$I_c = \frac{1}{2} MR^2$  <p>Диск</p>	$I_c = \frac{1}{4} MR^2$  <p>Диск</p>

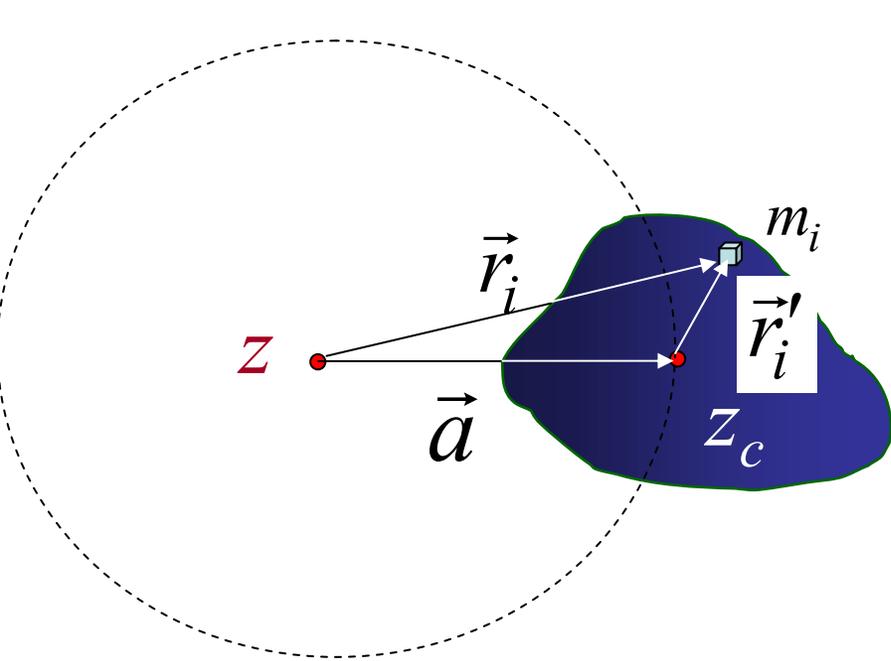
Теорема Штейнера



I_z - момент инерции
относительно оси Z

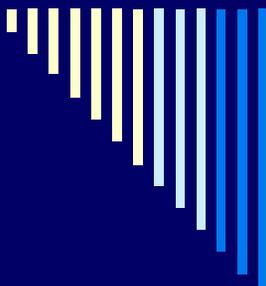
I_c - момент инерции
относительно оси,
проходящей через
центр масс тела и
параллельной оси Z

Вид сверху



$$I_z = I_c + ma^2$$

I_z - момент инерции
относительно оси Z



6.4. Основное уравнение динамики вращательного движения АТТ

Уравнения динамики:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

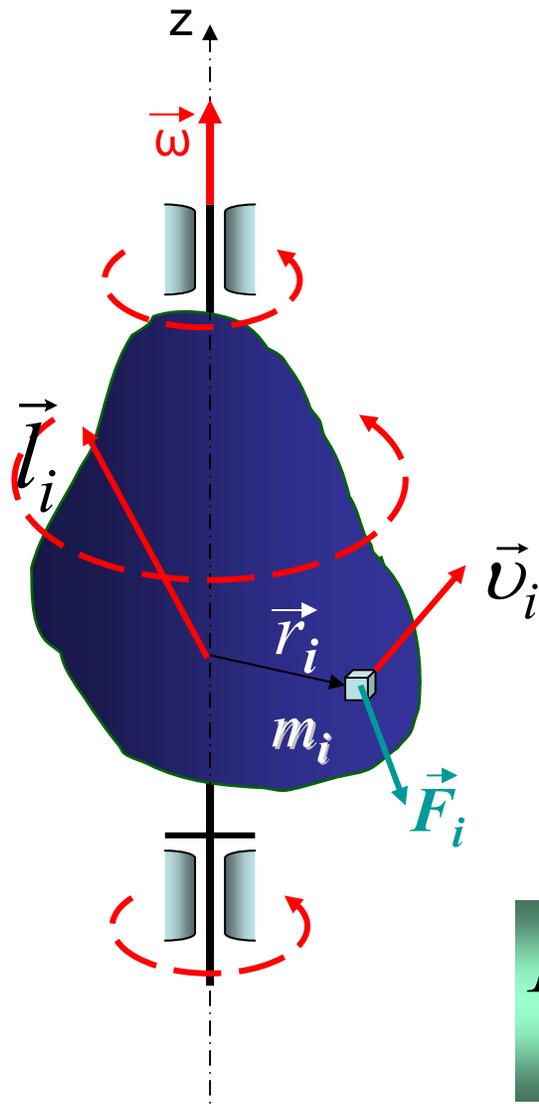
Законы сохранения

$$\sum_i \vec{p}_i = \text{const}$$

$$\sum_i E_i = \text{const}$$

$$\sum_i \vec{l}_i = \text{const}$$

Вращение твердого тела относительно неподвижной оси



$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i$$

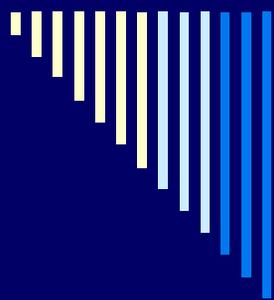
$$I_z \beta_z = \sum_i M_{zi}$$

Основное уравнение динамики вращательного движения АТТ

$$I_z \beta_z = M_z$$

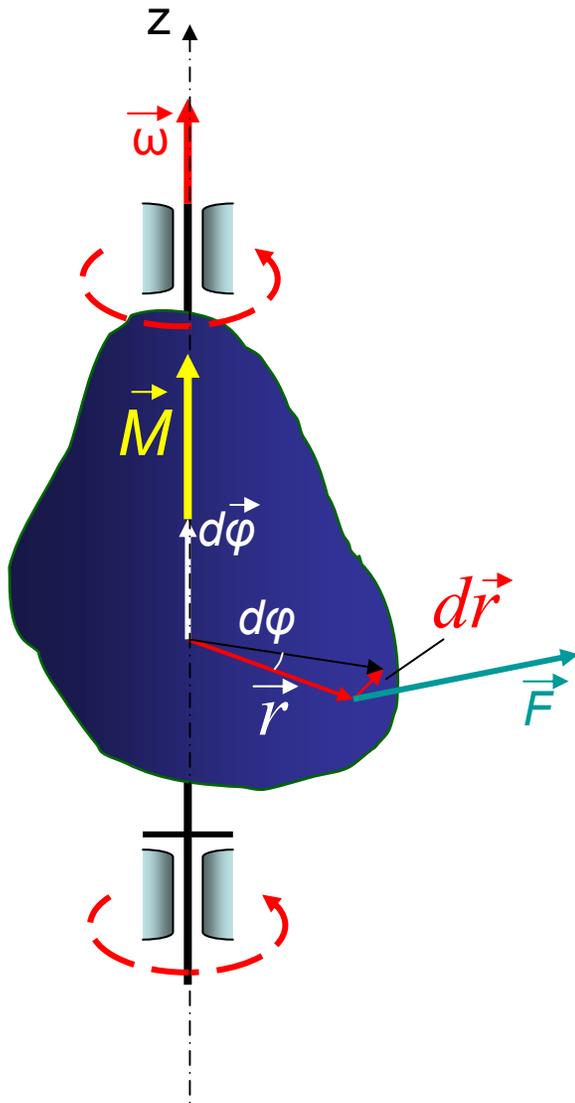
Закон сохранения момента
импульса системы АТТ
относительно закрепленной оси

$$\sum I_{zi} \cdot \omega_{zi} = \text{const}$$



6.5. Работа и кинетическая энергия при вращательном движении АТТ

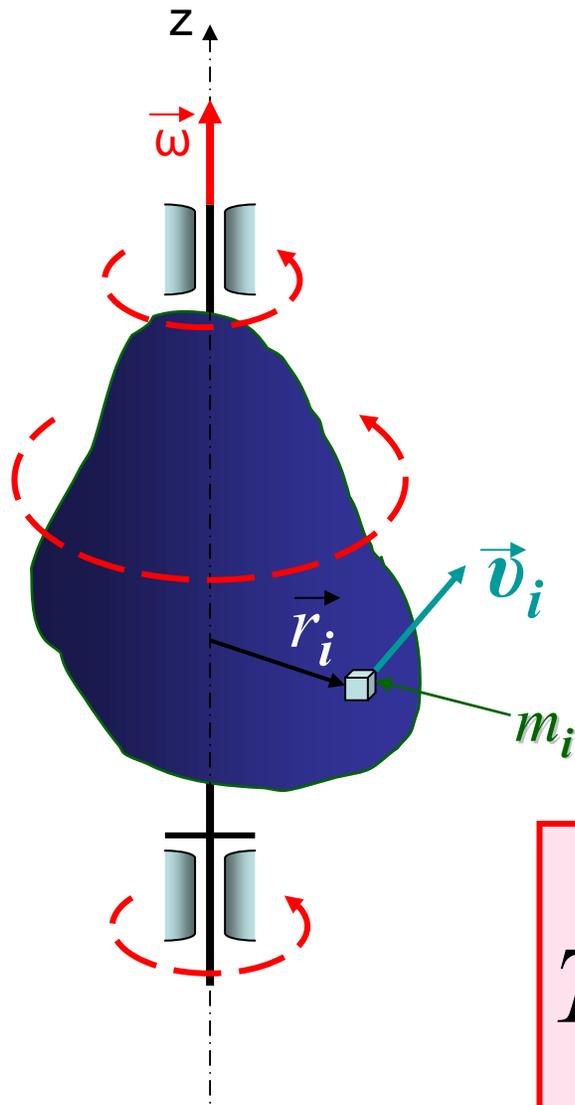
На примере вращения твердого тела относительно неподвижной оси



$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$$

$$N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

*Кинетическая энергия при вращении твердого тела
относительно неподвижной оси*



$$T_{\text{вр}} = \frac{I\omega^2}{2}$$

Плоское движение =
поступательное ц.м. +
вращательное в с.о. ц.м.

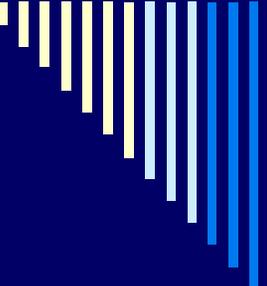
$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Поступательное движение	Вращательное движение
Масса (инерция) - m	Момент инерции - $I_z = \sum m_i r_i^2$
Сила \vec{F}	Момент силы $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$
Проекция импульса $p_x = mv_x$	Проекция момента импульса $L_z = I_z \omega_z$
Уравнение динамики (проекция)	
$F_x = \frac{d p_x}{d t} = m a_x$	$M_z = \frac{d L_z}{d t} = I_z \beta$
Кинетическая энергия	
$T = \frac{mv^2}{2}$	$T = \frac{I \omega^2}{2}$
Мощность	
$N = F_v v$	$N = M_\omega \omega$
Работа	
$A = \int F_v dl$	$A = \int M_\omega d\varphi$

A man in a dark suit, white shirt, and dark tie stands in an office setting. He is looking down and slightly to his left. The office has wooden paneling, a desk with a chair, and a window with blinds. Overlaid on the image is large, stylized text in a white, cursive font with a yellow and orange shadow effect. The text reads "Скамья Жуковского".

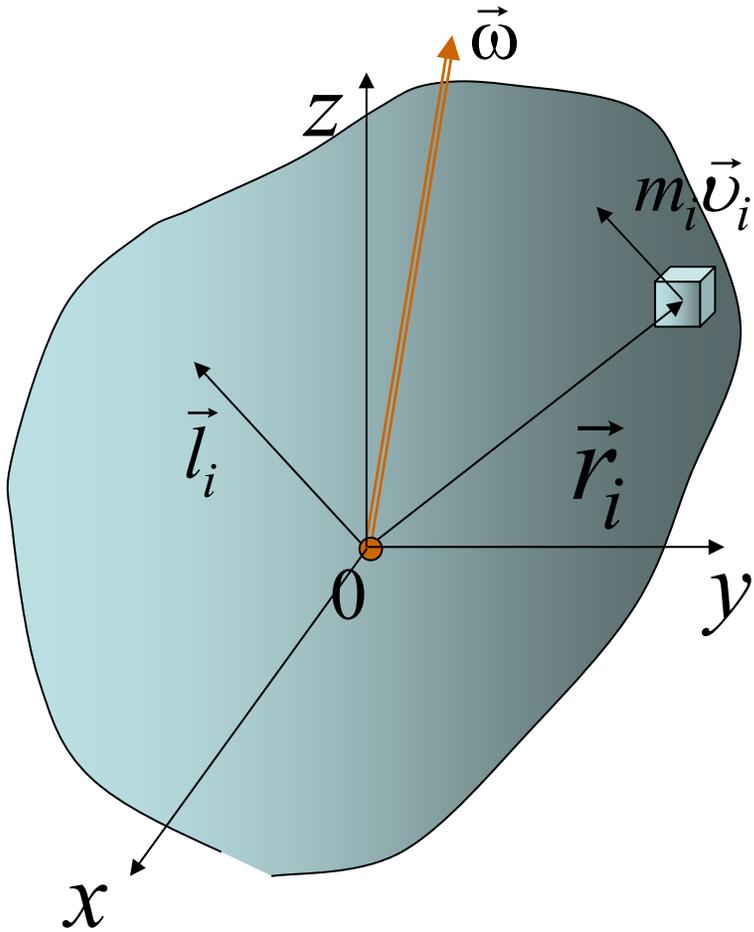
Скамья
Жуковского





6.6 Главные оси инерции

$$\vec{S} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$



Т.о. в общем случае

$$\vec{S} \nparallel \vec{\omega}$$

$$S_x = \omega_x \sum m_i r_i^2 - \omega_x \sum m_i x_i^2 - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i =$$

$$S_x = \omega_x \sum m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i$$

$$I_{xx} = \sum m_i (r_i^2 - x_i^2)$$

$$I_{xy} = -\sum m_i x_i y_i$$

$$I_{xz} = -\sum m_i x_i z_i$$

Моменты инерции –
зависят от мгновенной
ориентации тела,
т.е. от времени

Тензор инерции

$$\begin{cases} S_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ S_y = I_{yx}\omega_x - I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ S_z = I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y - I_{zz}\omega_z \end{cases}$$

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Свободная ось тела:

- Ось, положение которой остается неизменной при вращении тела вокруг нее в отсутствии внешних сил
- Можно доказать, что для тела произвольной формы существует как минимум три взаимно перпендикулярные свободные оси, проходящие через ц.м.
- Устойчивым оказывается только вращение вокруг осей, соответствующих максимальному и минимальному значению момента инерции

Главные оси инерции

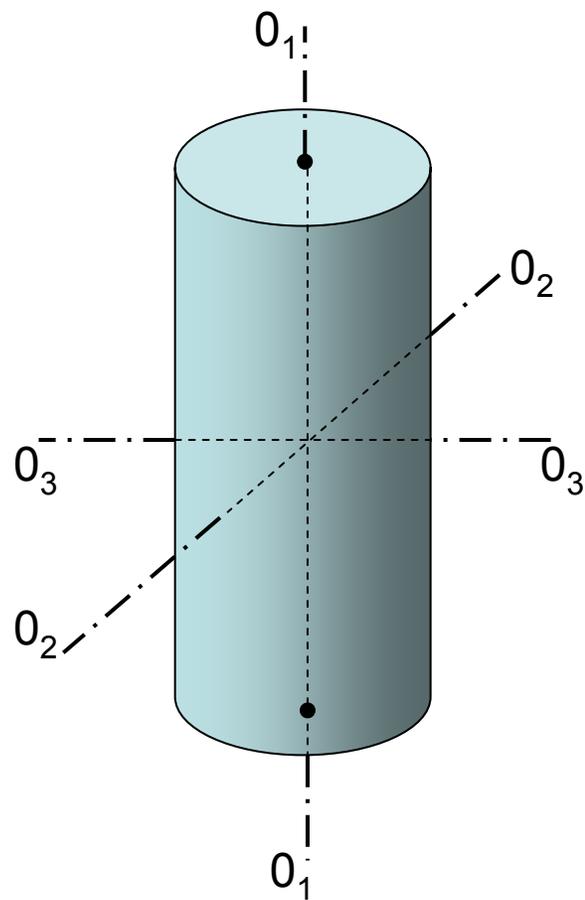
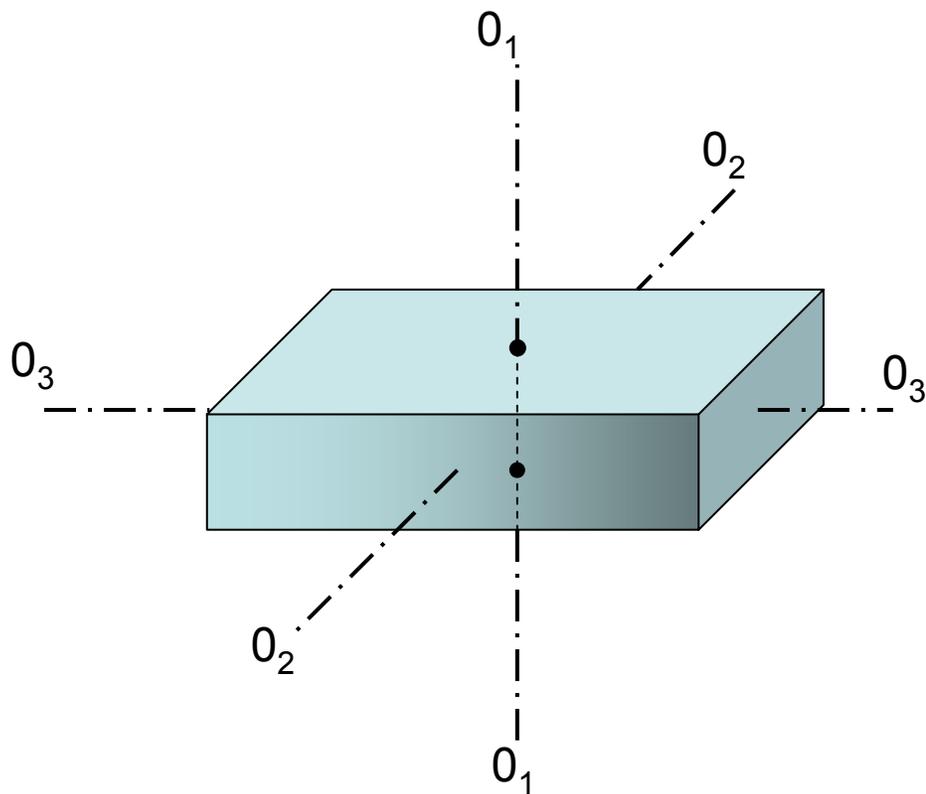
Всегда можно выбрать оси координат так, чтобы

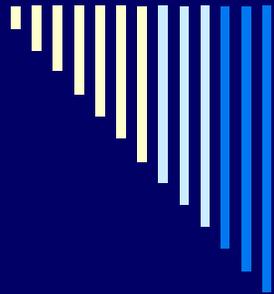
$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Осевые моменты инерции

I_{xy} ; I_{xz} ; I_{yz} - центробежные моменты инерции

Главные оси инерции



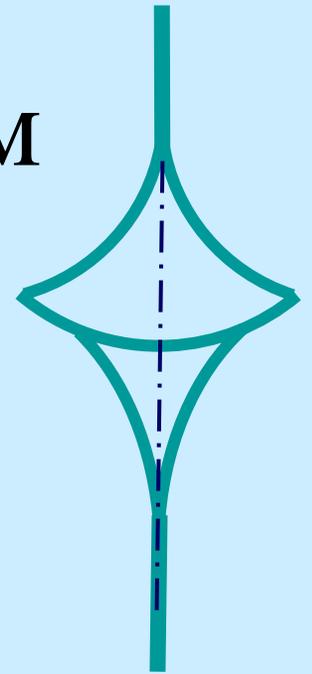


6.7. Прецессия свободного волчка

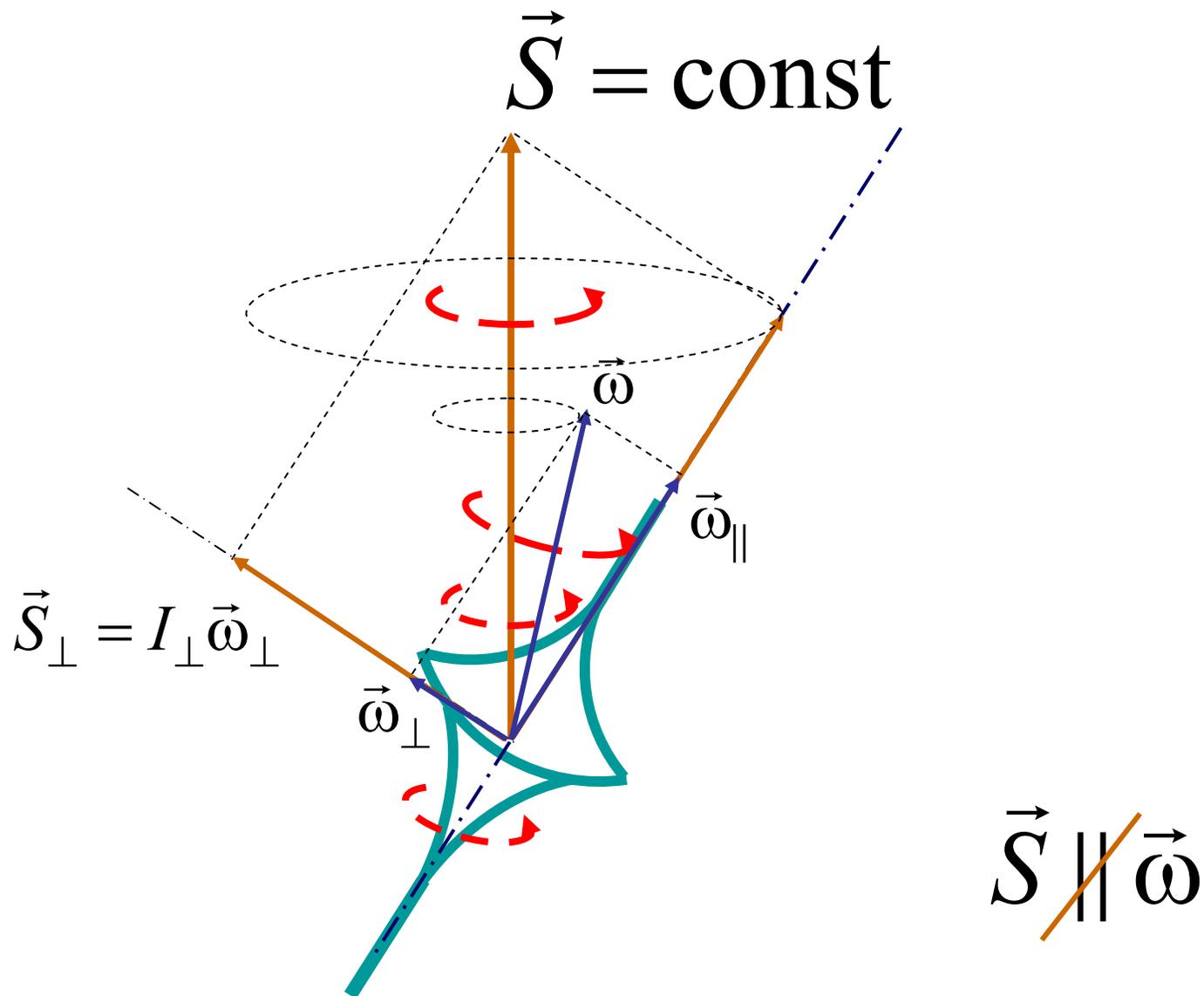


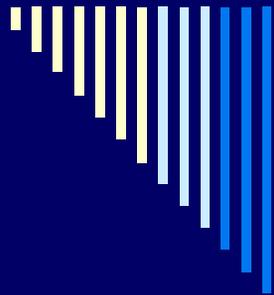
Гироскопом или волчком

называется быстро вращающееся
симметричное твердое тело, ось
вращения которого может изменять
свое направление в пространстве



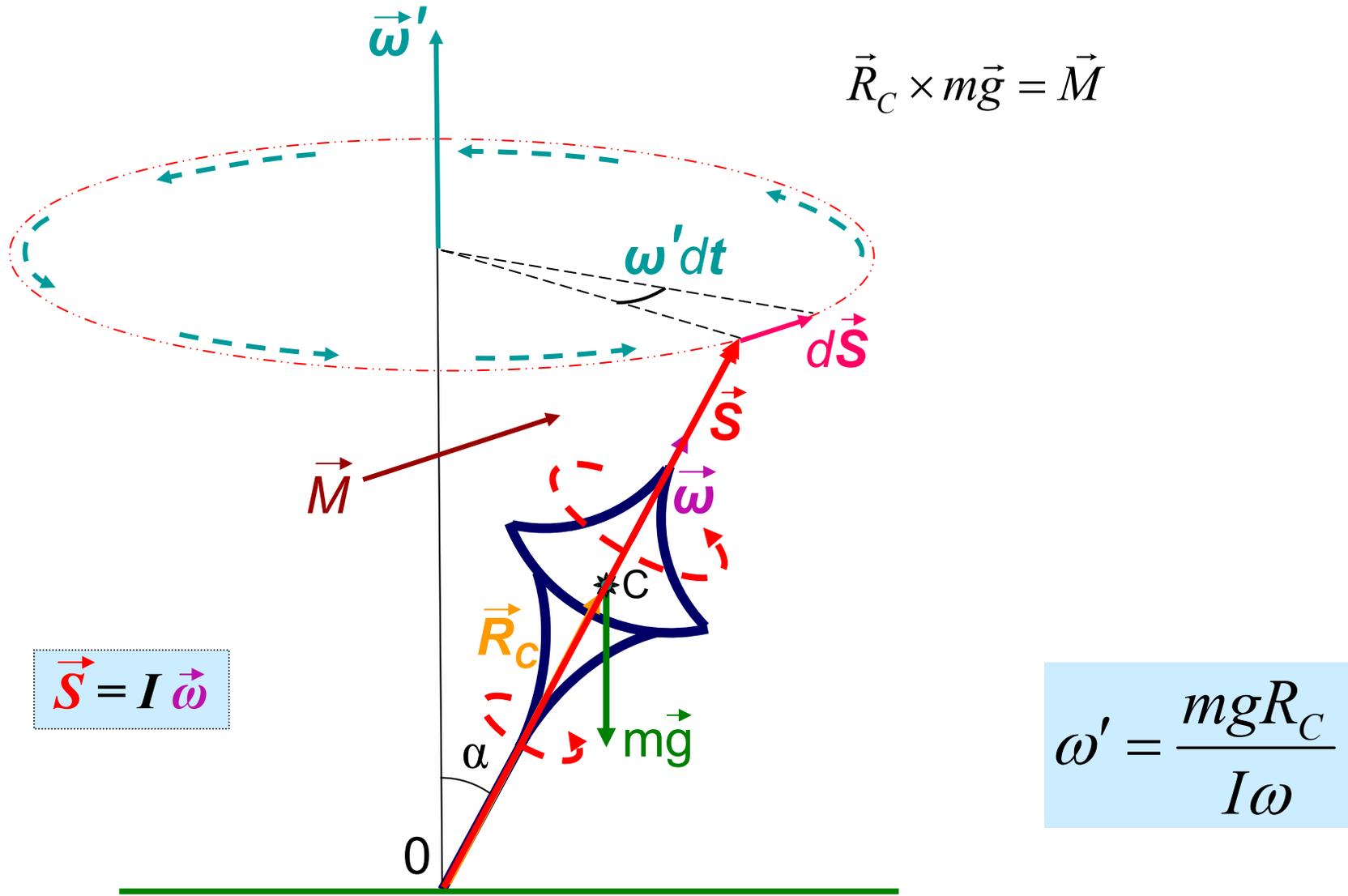
Прецессия свободного волчка





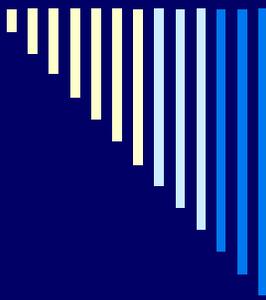
6.8 Прецессия волчка в однородном поле

Прецессия волчка в однородном поле



Замечания:

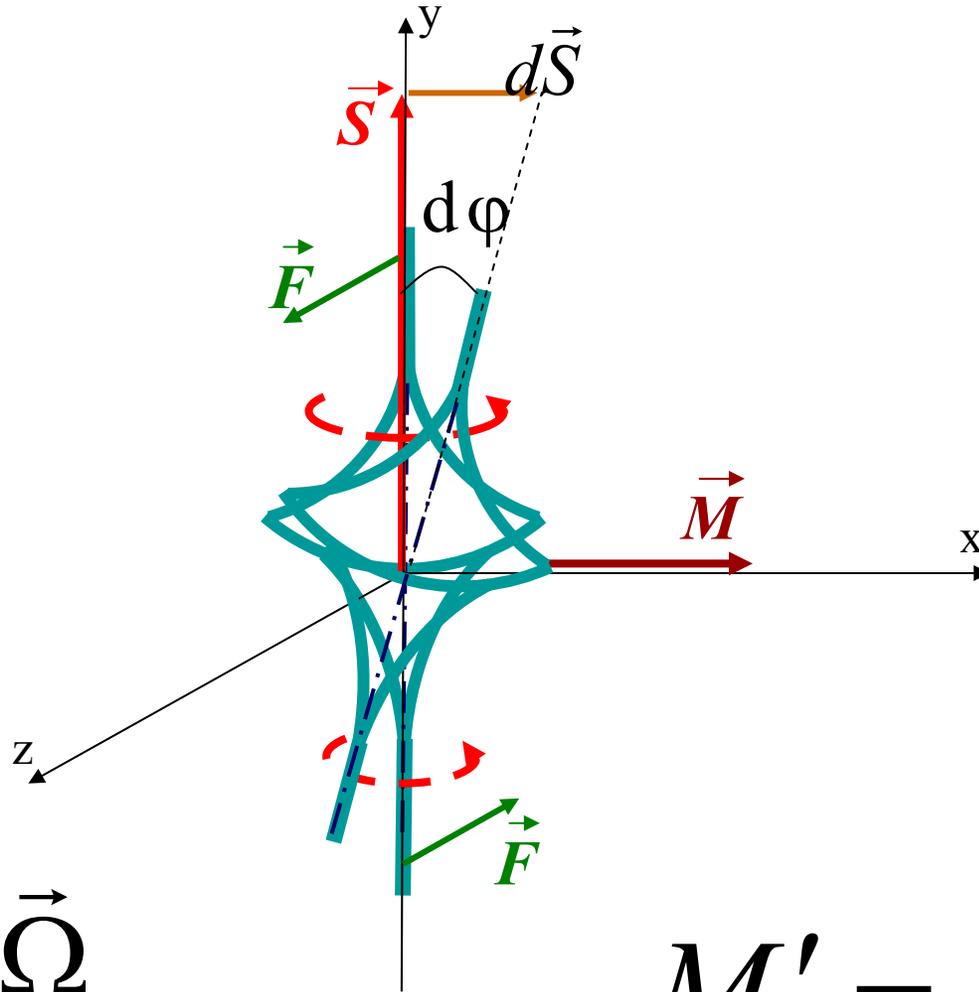
- 1. Аналогично ведут себя молекулы диэлектрика в электрическом поле
- 2. Строгая теория доказывает, что наряду с прецессией оси, происходят ее колебания (нута́ция)



Тема 6. Механика твердого тела

- 6.8 Прецессия волчка в однородном поле
 - 6.9 Гироскопические силы и гироскопический эффект
-

Гирскопический эффект

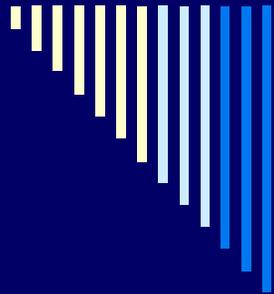


$$\vec{M}' = \vec{S} \times \vec{\Omega}$$

$$M' = I\omega\Omega$$



МОНОРЕЛЬСОВАЯ
ДОРОГА



6.10 Гирокомпас

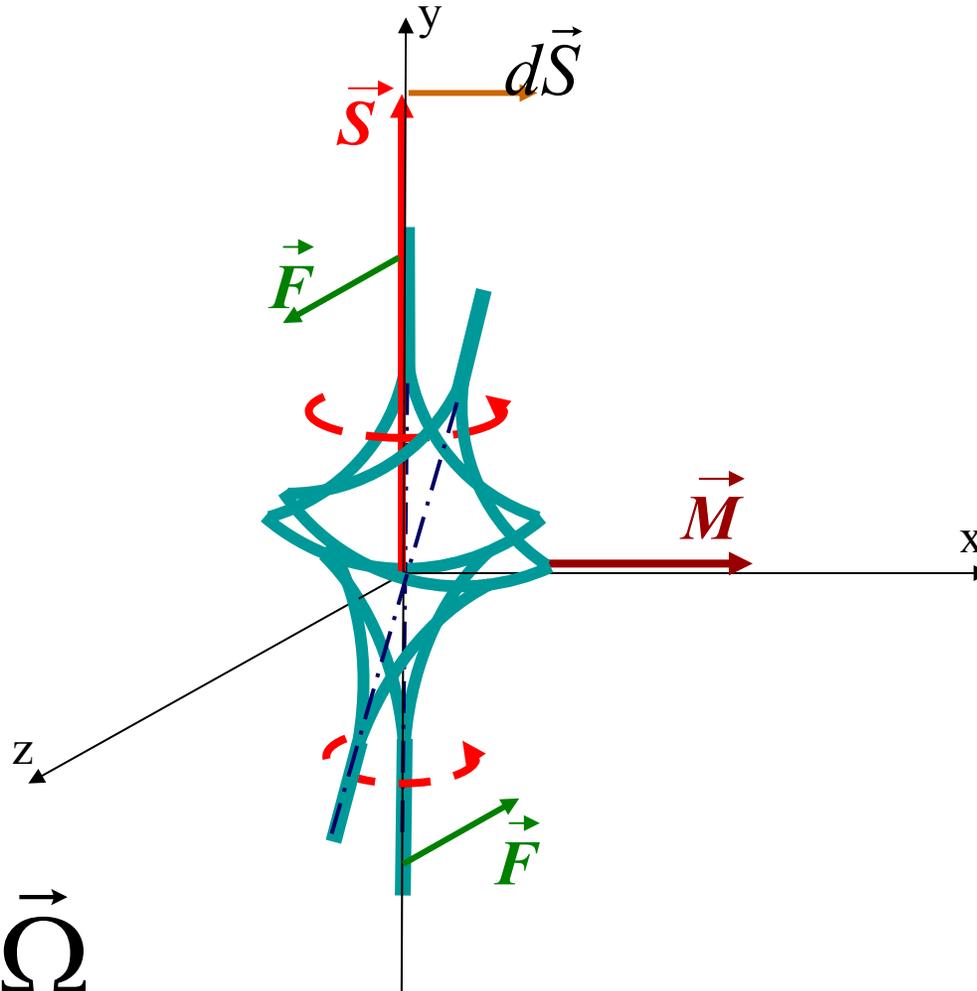


Гирскопический эффект

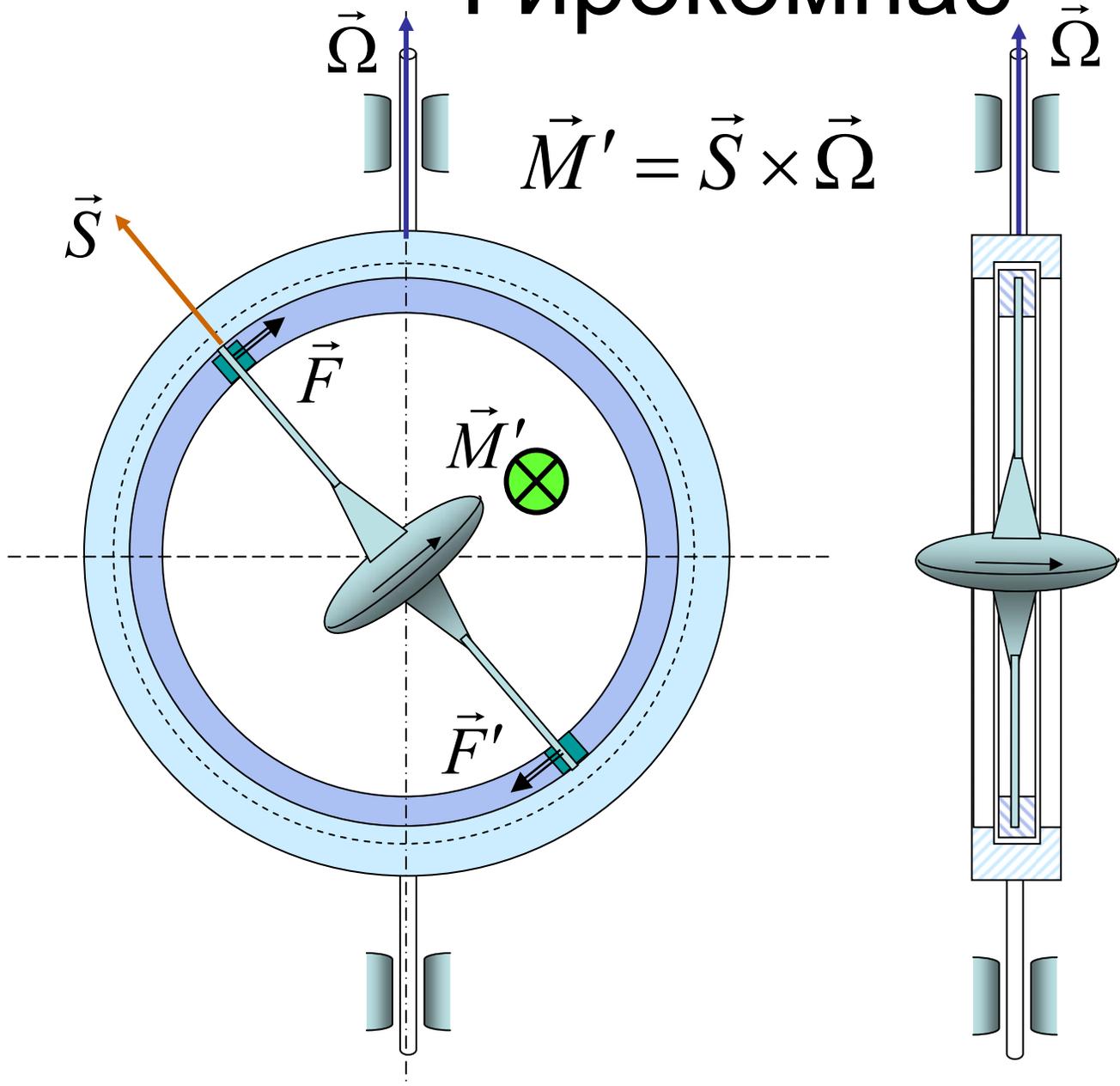
$$d\vec{S} = \vec{M} dt$$

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{S}$$

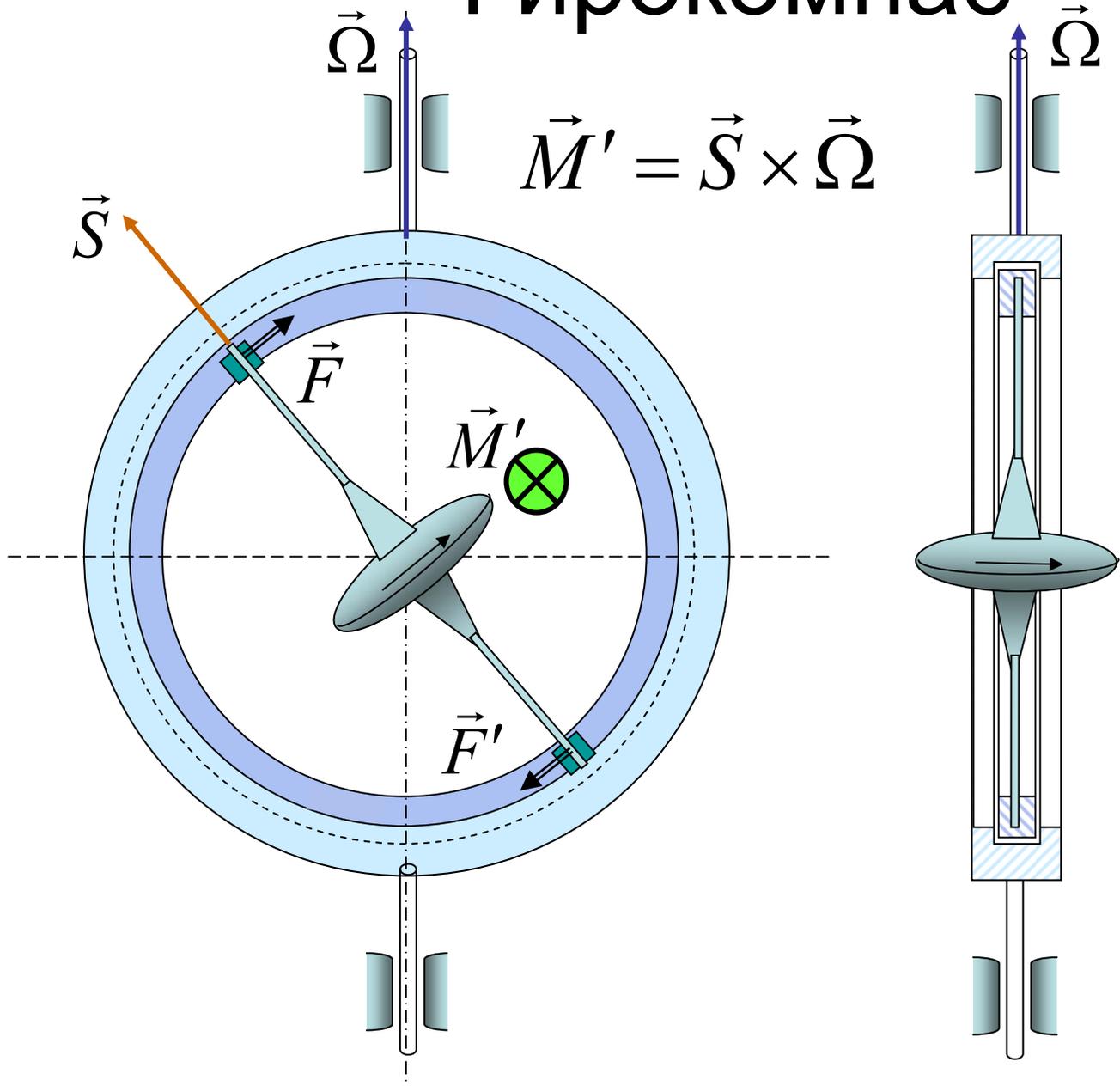
$$\vec{M}' = \vec{S} \times \vec{\Omega}$$

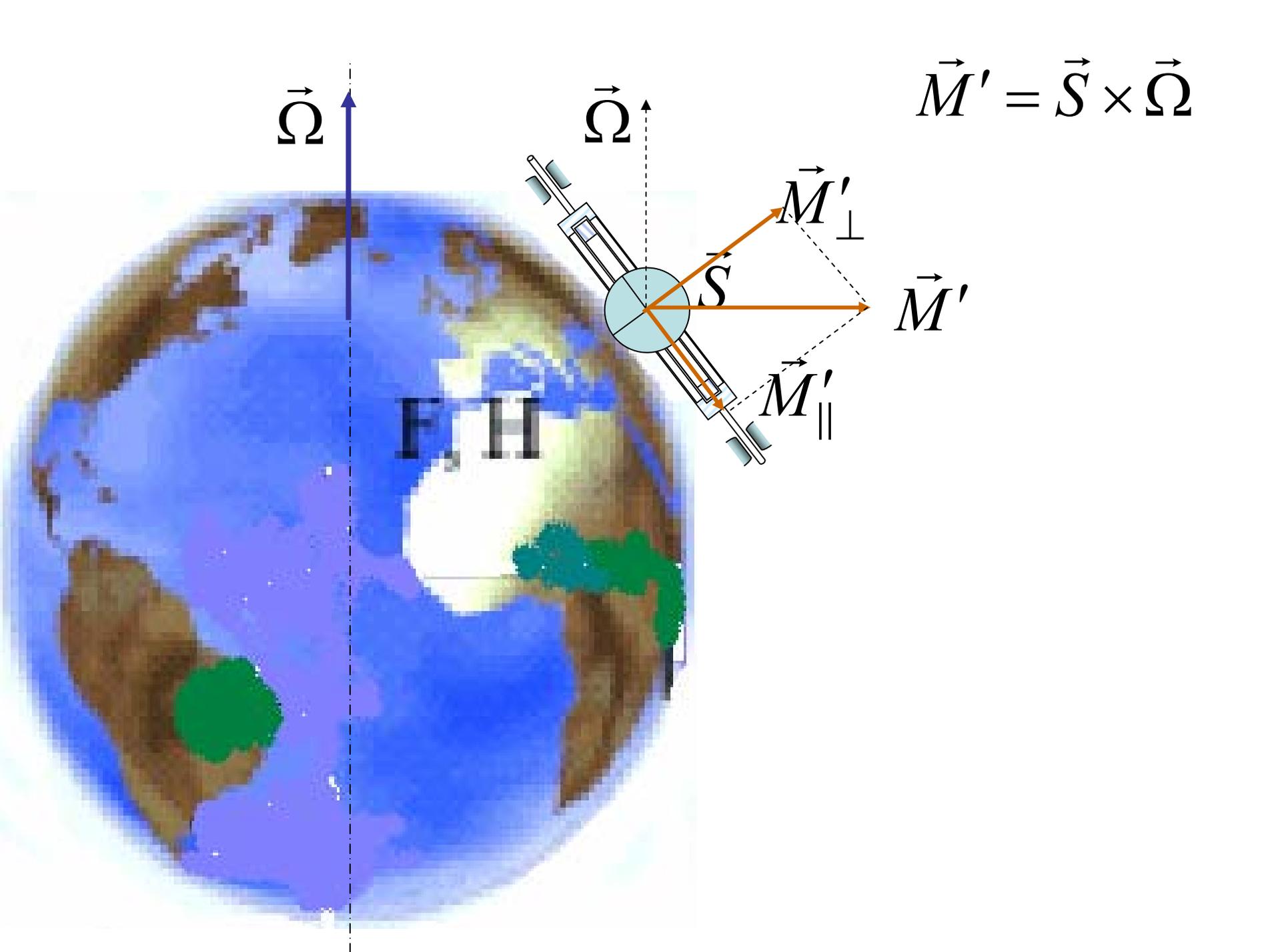


Гирокомпас



Гирокомпас

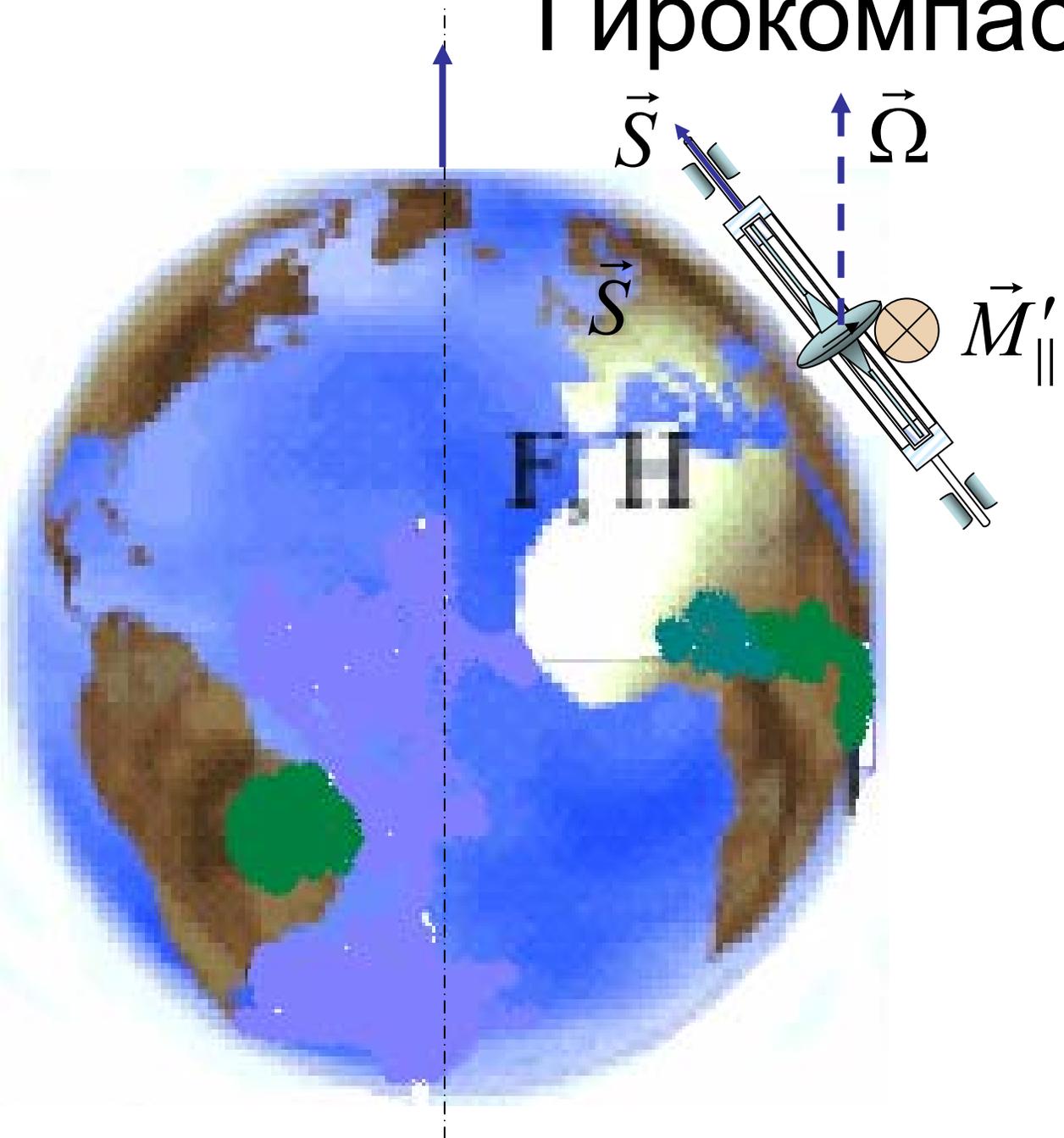




$$\vec{M}' = \vec{S} \times \vec{\Omega}$$

 $\vec{\Omega}$ $\vec{\Omega}$ \vec{M}'_{\perp} \vec{S} \vec{M}' \vec{M}'_{\parallel} F, H

Гирокомпас



$$\vec{M}'_{||} = \vec{S} \times \vec{\Omega}$$