

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ»**

Кафедра физики

С.М. Новиков

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ФИЗИКА

**ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
КОМПЛЕКСНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ**

*для студентов I и 2 курсов
всех специальностей
дневного и заочного обучения*

Москва 2011

Глава 1. МЕХАНИКА

1.1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. Две прямые дороги пересекаются под углом $\alpha = 60^\circ$. По ним к перекрестку приближаются два автомобиля: грузовик со скоростью $v_1 = 54$ км/ч и легковой автомобиль со скоростью $v_2 = 72$ км/ч. С патрульного вертолета ГАИ заметили, что в некоторый момент времени грузовик находился на расстоянии $l_1 = 500$ м, а легковой автомобиль на расстоянии $l_2 = 1000$ м от перекрестка. Ответьте на вопросы:

1. Возможно ли столкновение машин?
2. Каково минимальное сближение машин и когда оно произойдет?
3. Какова скорость автомобилей в системе отсчета, движущейся вместе с вертолетом, если вертолет летит со скоростью $v = 216$ км/ч навстречу легковому автомобилю.

Решение

1. Время движения грузовика t_1 и время движения легкового автомобиля t_2 до перекрестка определяем с помощью знакомой со школьной скамьи формулы

$$t_1 = \frac{L_1}{v_1} \text{ и } t_2 = \frac{L_2}{v_2}.$$

После расчета получаем $t_1 \approx 33$ с, $t_2 = 50$ с. Столкновение не произойдет. Теперь можно в спокойной обстановке ответить на другие вопросы задачи.

Замечание: Как правило, решение подобных задач существенно упрощается, если сделать рисунок или схему ситуации (рис.1.4). Отметим, что способов решения этой задачи много (списывание у другого студента здесь и в дальнейшем не принимается в расчет, так как рано или поздно оно приводит к “столкновению” между преподавателем и студентом).

2. Рассмотрим решение, которое является наиболее общим для подобных задач. Для этого используем систему отсчета с началом координат на перекрестке и осью Ox , направленной навстречу легковому автомобилю. Началом отсчета времени будем считать момент фиксации указанных в условии расстояний. В принятой системе отсчета закон движения грузовика будет иметь вид:

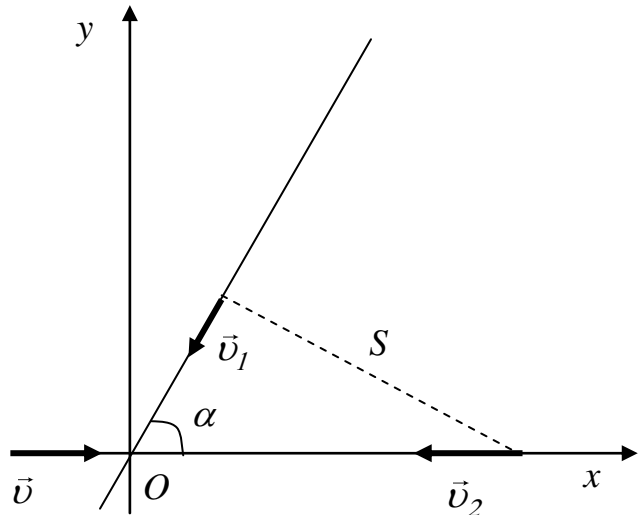


Рис. 1.4

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + v_{1x}t, \\ y_1 = y_{01} + v_{1y}t. \end{cases}$$

Соответственно для легкового автомобиля:

$$\begin{cases} x_2 = x_{02} + v_{2x}t, \\ y_2 = 0. \end{cases}$$

По условию начальные координаты и проекции скоростей соответственно равны:

$$\begin{cases} x_{01} = L_1 \cos \alpha = 500 \cdot 0,5 \text{ м} = 250 \text{ м}, \\ y_{01} = L_1 \sin \alpha \approx 500 \cdot 0,87 \text{ м} \approx 433 \text{ м}, \\ v_{1x} = -v_1 \cos \alpha = -15 \cdot 0,5 \text{ м/с} = -7,5 \text{ м/с}, \\ v_{1y} = -v_1 \sin \alpha \approx -15 \cdot 0,87 \text{ м/с} \approx -13,0 \text{ м/с}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{02} = L_2 = 1000 \text{ м}, \\ y_{02} = 0, \\ v_{2x} = -v_2 = -20 \text{ м/с}, \\ v_{2y} = 0. \end{cases}$$

Расстояние S между автомобилями определяем с помощью известной из геометрии формулы

$$S = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

или $S = \sqrt{(x_{01} + v_{1x}t - x_{02} - v_{2x}t)^2 + (y_{01} + v_{1y}t)^2}$.

Минимальное сближение автомобилей находим из условия минимума этой функции, т.е. равенства нулю производной $dS/dt = 0$. Чтобы избежать громоздких выкладок, подставим в выражение для расстояния S значения заданных величин, а затем найдем производную от подкоренного выражения (его минимум соответствует минимуму S):

$$\frac{d}{dt} \left[(12,5t - 70)^2 + (-13t + 435)^2 \right] = 0$$

$$\text{или } 2 \cdot 12,5 \cdot (12,5t_{\min} - 70) - 2 \cdot 13(-13t_{\min} + 435) = 0,$$

где t_{\min} – время минимального сближения. После вычислений получаем $t_{\min} \approx 46,1$ с. Подставляя найденное значение t_{\min} в выражение для расстояния S , найдем минимальное сближение автомобилей

$$S_{\min} \approx \sqrt{(12,5 \cdot 46,1 - 70)^2 + (13 \cdot 46,1 - 435)^2} = 240 \text{ м}.$$

3. Используем закон сложения скоростей (1.7). Будем считать, что движущаяся система отсчета имеет оси координат, параллельные осям координат выбранной ранее системы. Тогда $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$, где $\vec{v}_0 = \{60 \text{ м/с}; 0; 0\}$ – вектор скорости вертолета. Для проекций скорости грузовика получаем

$$v'_{1x} = v_{1x} - v_{0x} = (-7,5 - 60) \text{ м/с} = -67,5 \text{ м/с}, \quad v'_{1y} = v_{1y} = -13 \text{ м/с},$$

а для легкового автомобиля

$$v'_{2x} = v_{2x} - v_{0x} = -80 \text{ м/с}, v'_{1y} = v_{1y} = 0.$$

Используя эти результаты, рассчитываем модули скоростей грузовика и легкового автомобиля соответственно:

$$v'_1 = \sqrt{(v'_{1x})^2 + (v'_{1y})^2} \approx 68,7 \text{ м/с} \approx 247 \text{ км/ч};$$

$$v'_2 = |v'_{2x}| = 80 \text{ м/с} = 288 \text{ км/ч}.$$

2. Две материальные точки движутся по одной прямой, совпадающей с осью OX декартовой системы координат. В начальный момент времени первая точка имела координату $x_{10} = 4 \text{ м}$, а вторая $x_{20} = 8 \text{ м}$. Скорости точек изменяются по законам $v_1 = bt + ct^2$ и $v_2 = -bt + ct^2$, где $b = 1 \text{ м/с}^2$, $c = 2 \text{ м/с}^3$. Определить ускорения точек в момент их встречи.

Решение

Сначала находим время встречи и зависимости ускорений точек от времени. Условием встречи является равенство координат. Поэтому определим законы движения по формуле (1.6)

$$x_1 = \int v_1 dt + C_1 = \int (+bt + ct^2) dt + C_1 = \frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3} + C_1,$$

$$x_2 = \int v_2 dt + C_2 = \int (-bt + ct^2) dt + C_2 = -\frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3} + C_2.$$

Константу C_1 определим из начального условия $x_1(t=0) = x_{10}$. Используя это равенство, находим $C_1 = x_{10}$. Аналогично получим, что $C_2 = x_{20}$. Тогда законы движения первой и второй точек примут вид

$$x_1 = x_{10} + \frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3},$$

$$x_2 = x_{20} - \frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3}.$$

Приравняем эти выражения в момент встречи времени t_B

$$x_{10} + \frac{bt_B^2}{2} + \frac{ct_B^3}{3} = x_{20} - \frac{bt_B^2}{2} + \frac{ct_B^3}{3}.$$

Выполнив преобразования, находим

$$t_B = \pm \sqrt{\frac{x_{20} - x_{10}}{b}}.$$

После вычислений выберем положительное значение $t_B = 2 \text{ с}$.

Ускорения точек находим по формуле (1.4)

$$a_{1x} = +b + 2ct,$$

$$a_{2x} = -b + 2ct.$$

Подставляя в эти уравнения найденное значение времени встречи, получим ответ

$$a_1 = +b + 2ct_B = 9 \text{ м/с}^2,$$

$$a_2 = -b + 2ct_B = 7 \text{ м/с}^2.$$

3(a). Закон движения груза, прикрепленного к пружине, в отсутствие затухания имеет вид $x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$, где амплитуда $x_0 = 0,05 \text{ м}$, циклическая частота $\omega_0 = 6,28 \text{ с}^{-1}$, начальная фаза $\varphi = \pi/2$.

1. Определите начальную координату, начальные и максимальные значения скорости и ускорения груза.

2. Нарисуйте графики зависимости координаты, скорости и ускорения от времени $x(t)$, $v_x(t)$, $a_x(t)$.

Решение

1. Воспользовавшись тригонометрической формулой приведения, преобразуем закон движения к виду

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \pi/2) = x_0 \cos \omega_0 t.$$

Начальную координату определим из закона движения груза при условии $t = 0$:

$$x(t=0) = x_0 \cos 0 = x_0 = 0,05 \text{ м}.$$

Получаем, что в начальный момент грузик имел максимальное отклонение. Скорость груза и ускорение определим, взяв первую и вторую производные по времени от закона его движения (см. схему на рис.1.2):

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t),$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t).$$

Тогда максимальные и начальные (при $t = 0$) значения скорости и ускорения груза соответственно равны

$$v_{x\max} = x_0 \omega_0 = 0,314 \text{ м/с}, \quad a_{x\max} = x_0 \omega_0^2 = 1,97 \text{ м/с}^2;$$

$$v_{x0}(t=0) = -x_0 \omega_0 \sin(0) = 0, \quad a_{x0}(t=0) = -x_0 \omega_0^2 \cos(0) = -x_0 \omega_0^2 = -1,97 \text{ м/с}^2.$$

2. Графики зависимостей $x(t)$, $v_x(t)$ и $a_x(t)$ приведены на рис.1.5. Их вид знаком из школьного курса и не нуждается в комментариях.

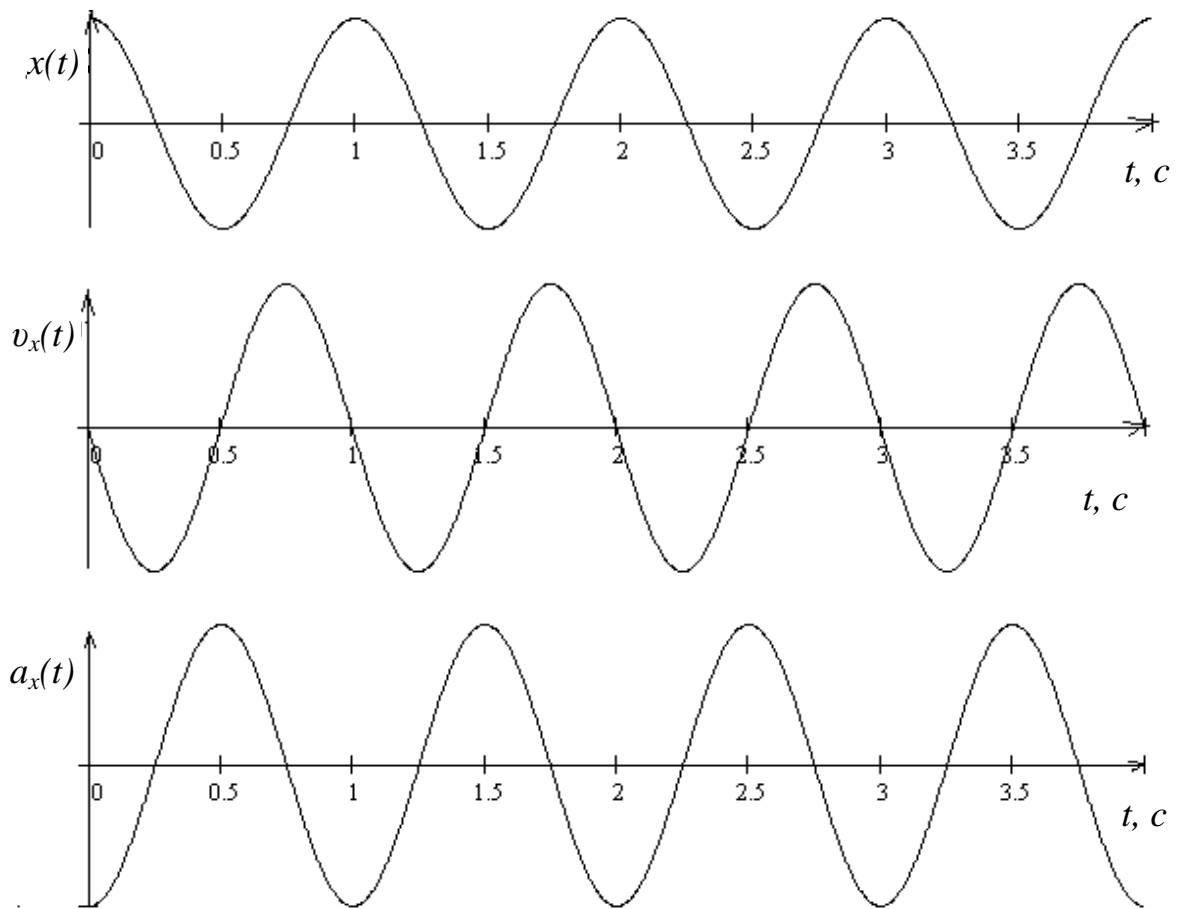


Рис. 1.5.

Замечание: Анализируя полученные результаты, полезно обратить внимание на то, что все три графика имеют одинаковый характер изменения, но сдвинуты относительно друг друга во времени. Кроме того, графики $x(t)$ и $a_x(t)$ являются как бы “зеркальным отображением” друг друга, т.е. находятся в противофазе. В этом случае ускорение можно выразить через координату (подставив закон движения в формулу для ускорения)

$$a_x = -\omega_0^2 x.$$

3(б). После выключения двигателей подводная лодка в течение первых 15 секунд, замедляясь, движется прямолинейно в положительном направлении оси Ox с ускорением a , проекция которого изменяется по закону

$$a_x = -\frac{v_0 \tau_0}{(t + \tau_0)^2},$$

где $v_0 = 10$ м/с - скорость лодки в начале торможения, $\tau_0 = 10$ с - характерный временной параметр движения. Определите:

1. За какое время скорость лодки уменьшится в два раза?
2. Какое расстояние при этом будет пройдено?

Решение

Замечание: Эта задача является обратной по отношению к предыдущей, т.е. по схеме на рис. 1.2 необходимо двигаться в противоположном направлении (справа налево).

1. За начало координат примем точку, в которой произвели выключение двигателей. Закон изменения проекции скорости определим по формуле (1.5)

$$v_x = \int a_x dt + C_1 = -\int \frac{v_0 \tau_0}{(t + \tau_0)^2} dt + C_1 = \frac{v_0 \tau_0}{t + \tau_0} + C_1.$$

Подставляя в это выражение начальное условие $v_x(t = 0) = v_0$, определим значение константы C_1 . Получаем равенство $v_0 = v_0 + C_1$ и следствие из него $C_1 = 0$. Таким образом, закон изменения скорости

$$v_x = \frac{v_0 \tau_0}{t + \tau_0} = \frac{v_0}{\frac{t}{\tau_0} + 1}.$$

График этого закона приведен на рис. 1.6. Это гипербола со смещенной осью ординат. Время t_2 уменьшения скорости в два раза находим из равенства

$$\frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{\frac{t_2}{\tau_0} + 1}.$$

Сократив на v_0 , получим $\frac{t_2}{\tau_0} + 1 = 2$ или $t_2 = \tau_0$. Таким образом, характерный

параметр τ_0 в данной задаче равен времени двукратного уменьшения скорости.

Замечание: Некоторая парадоксальность полученного результата, заключается в том, что скорость стремится к нулю асимптотически, т.е. лодка остановится только при бесконечном времени. Поэтому в условии задачи оговорено ограничение времени первыми 15-ю секундами. Дело в том, что приведенный в условии задачи закон изменения ускорения определен опытным (эмпирическим) путем и справедлив только для определенного диапазона скоростей. При малых скоростях необходимо использовать другие формулы.

2. Чтобы определить пройденное расстояние, запишем закон движения подводной лодки по формуле (1.6):

$$x = \int v dt + C_2 = \int \frac{v_0}{\frac{t}{\tau_0} + 1} dt + C_2 = v_0 \tau_0 \ln \left(\frac{t}{\tau_0} + 1 \right) + C_2,$$

где константу интегрирования C_2 находим из начального условия $x(t = 0) = 0$. Получаем $0 = v_0 \tau_0 \ln 1 + C_2$. Тогда $C_2 = 0$, и закон движения принимает вид

$$x = v_0 \tau_0 \ln \left(\frac{t}{\tau_0} + 1 \right).$$

Подставив в него найденное значение времени $t_2 = \tau_0$, находим пройденное расстояние

$$L = v_0 \tau_0 \ln \left(\frac{\tau_0}{\tau_0} + 1 \right) = v_0 \tau_0 \ln 2 = 10 \text{ м/с} \cdot 10 \text{ с} \cdot \ln 2 = 69 \text{ м}.$$

График закона движения приведен на рис. 1.7. Еще раз отметим, что найденный закон движения справедлив только на начальном этапе движения подводной лодки. Поэтому на рис. 1.6 и 1.7 графики “обрываются” при $t > 15$ с.

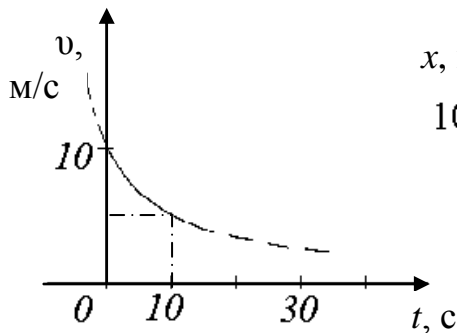


Рис 1.6

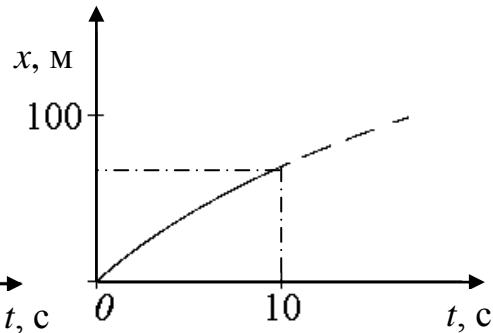


Рис 1.7

1.2. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

4. С вертолета свисает трос длиной $L = 40$ м, к нижнему концу которого прикреплен груз массой $m_1 = 50$ кг. Масса вертолета $m_0 = 10$ т, масса троса $m_2 = 20$ кг. Определите силу натяжения троса в сечении, находящемся на расстоянии $b = 10$ м от точки закрепления верхнего конца. Считать, что подъемная сила вертолета F равна $103,7$ кН.

Решение

□ Заданную систему тел разбиваем на два объекта – вертолет с верхней частью троса и нижнюю часть троса с грузом (рис.1.8):

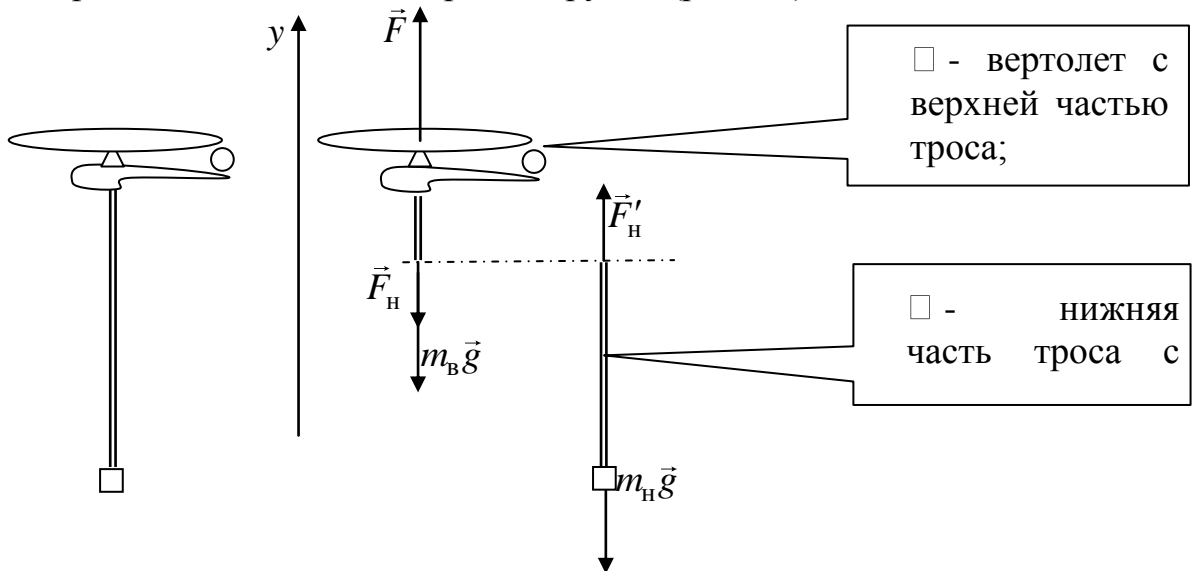


Рис.1.8

Массы верхнего объекта m_b и нижнего объекта m_h соответственно равны:

$$m_b = m_0 + m_2 \frac{b}{L}, \quad m_h = m_1 + m_2 \left(1 - \frac{b}{L}\right).$$

На верхний объект действуют подъемная сила \vec{F} , сила тяжести $m_b \vec{g}$ и искомая сила натяжения троса \vec{F}_H , направленная вниз. На нижний объект действуют сила тяжести $m_h \vec{g}$ и сила натяжения троса \vec{F}'_H , направленная вверх. При этом по третьему закону Ньютона $\vec{F}_H = \vec{F}'_H$. Запишем второй закон Ньютона для выделенных объектов в проекции на вертикальную ось Oy :

$$\begin{aligned} F - m_b g - F_H &= m_b a, \\ F_H - m_h g &= m_h a. \end{aligned}$$

Решая полученную систему уравнений относительно искомой силы натяжения, получаем

$$F_{\text{H}} = F \frac{m_{\text{H}}}{m_{\text{B}} + m_{\text{H}}} = 67,4 \text{ Н.}$$

5. Двигатель самолета на взлетной полосе обеспечивает силу тяги $F_{\text{T}} = 40 \text{ кН}$. Масса самолета $m = 10^4 \text{ кг}$. Взлет самолета данного типа разрешается при достижении скорости $v_0 = 360 \text{ км/ч}$.

1. Какова длина разгона самолета, если на него действует сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{\text{c}} = -\alpha \vec{v}$, где коэффициент пропорциональности $\alpha = 200 \text{ Н·с/м}$?
2. Какая часть работы силы тяги затрачивается на увеличение кинетической энергии самолета к моменту взлета?

Решение

1. Пусть направление взлетной полосы совпадает с осью Ox . Результирующая сила F_x , действующая на самолет, равна разности силы тяги и силы сопротивления $F_x = F_{\text{T}} - \alpha v_x$. Второй закон Ньютона запишем в проекции на ось Ox :

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_{\text{T}} - \alpha v_x.$$

Проинтегрируем это дифференциальное уравнение, применив метод разделения переменных:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{F_{\text{T}}} v_x\right)} dv_x = \frac{F_{\text{T}}}{m} dt.$$

Введем безразмерную переменную, обозначив $\left(1 - \frac{\alpha}{F_{\text{T}}} v_x\right) = u$. Тогда

$$dv_x = -\frac{F_{\text{T}}}{\alpha} du, \text{ и уравнение принимает вид } \frac{1}{u} du = -\frac{\alpha}{m} dt.$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения

$$\ln u = -\frac{\alpha}{m} t + C_1.$$

После обратной замены переменной это уравнение приобретает вид

$$\ln \left(1 - \frac{\alpha}{F_{\text{T}}} v_x\right) = -\frac{\alpha}{m} t + C_1. \quad (*)$$

С помощью начального условия $V(t=0) = 0$, находим постоянную интегрирования $C_1 = 0$. Подставим это значение постоянной в (*) и, сделав преобразования, получим

$$\ln\left(1 - \frac{\alpha v_x}{F_T}\right) = -\frac{\alpha}{m}t.$$

Используя определение логарифмической функции это выражение представим в виде

$$1 - \frac{\alpha \cdot v_x}{F_T} = e^{-\frac{\alpha}{m}t} \quad \text{или} \quad v_x = \frac{F_T}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right). \quad (*)$$

Полученный ответ необходимо осмыслить и сделать правильные выводы. С этой целью построим график зависимости скорости от времени (рис.1.9). Из него следует, что скорость самолета с увеличением времени асимптотически стремится к предельному значению

$$v_{\max} = F_T/\alpha = 200 \text{ м/с} = 720 \text{ км/ч.}$$

Это скорость установившегося движения самолета. Решая уравнение

$$v_0 = \frac{F_T}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t_0}\right).$$

и преобразуя его, находим момент взлета самолета:

$$t_0 = -\frac{m}{\alpha} \ln\left(1 - \frac{\alpha v_0}{F_T}\right) = 35 \text{ с.}$$

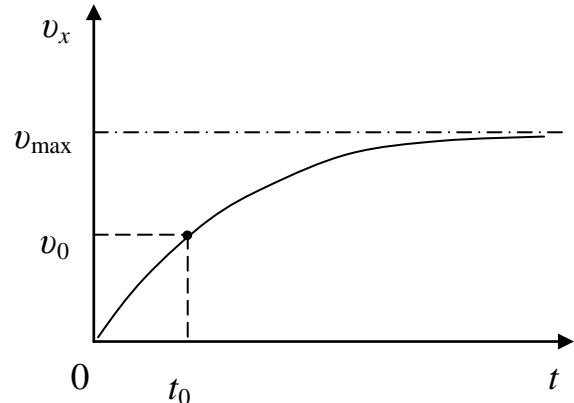


Рис. 1.9

По известной функции $v_x(t)$ запишем закон движения и, подставив в него полученное значение t_0 , определяем длину разгона самолета. Используем формулу (1.6):

$$x = \int v_x(t) dt = \int \frac{F_T}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) dt = \frac{F_T}{\alpha} \left(t + \frac{m}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) + C_2.$$

Постоянную интегрирования C_2 находим из начального условия $x(t=0) = 0$

$$0 = \frac{mF_T}{\alpha^2} + C_2 \quad \text{или} \quad C_2 = -\frac{mF_T}{\alpha^2}.$$

Окончательно закон движения принимает вид

$$x = \frac{F_T t}{\alpha} - \frac{mF_T}{\alpha^2} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t} \right).$$

Подставив в него значение $t_0 = 35$ с, рассчитаем длину разгона $L = 1931$ м. График закона движения приведен на рис. 1.10 (кривая 1). При анализе уравнения (*) было показано, что с увеличением времени скорость самолета растет до предельного значения v_{\max} . Соответственно увеличивается наклон касательной к графику закона движения, а сам график асимптотически стремится к пунктирной прямой (2), отображающей зависимость

$$x_A = \frac{F_T}{\alpha} t - \frac{mF_T}{\alpha^2}.$$

2. Найдем работу силы тяги во время разгона. Учитывая, что сила тяги не изменяется и совпадает с направлением движения, формулу (1.11) запишем в виде

$$A = F_T L \cos 0 = 77 \text{ МДж.}$$

Кинетическая энергия самолета в момент взлета равна

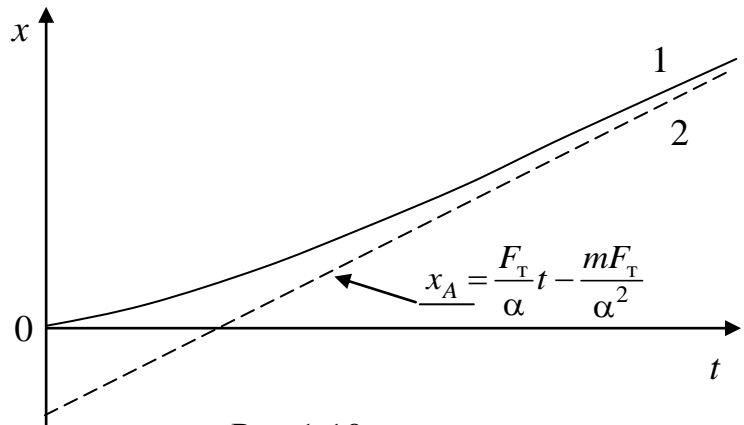


Рис.1.10

$$T = \frac{mv^2}{2} = 50 \text{ МДж.}$$

Эта величина составляет только $\eta = \frac{A}{T} 100\% = 65\%$ от работы силы тяги.

Замечание: так как при дальнейшем движении скорость самолета и его кинетическая энергия стремятся к предельным значениям, то все большая часть работы силы тяги двигателя будет компенсироваться работой силы сопротивления.

б(а). Из пущенной с поверхности Земли вертикально вверх ракеты вырывается вниз струя газа со скоростью U относительно ракеты. Начальная масса ракеты с топливом равна m_0 , ежесекундный расход топлива равен μ (кг/с). Определите ускорение ракеты через время t_1 после старта, считая поле тяжести однородным.

Решение

Выберем неподвижную систему отсчета, связанную с Землей. В соответствии с условием задачи масса ракеты непрерывно уменьшается и основное

уравнение динамики необходимо использовать в виде (1.13). Запишем его в проекции на вертикальную ось Oy . Пусть $m = m(t)$ - масса ракеты в произвольный момент времени t , $v = v(t)$ - ее скорость в тот же момент. Для выбранного момента времени импульс ракеты равен mv . Спустя время dt масса ракеты станет равной $(m - \mu dt)$, а скорость $(v + dv)$. Соответственно, импульс ракеты примет значение $(m - \mu dt)(v + dv)$. Кроме того, выброшенная порция газа (которая тоже принадлежит рассматриваемой системе) в выбранной системе отсчета станет обладать импульсом $-\mu dt(u - v)$. Тогда изменение импульса системы $dp_y = [(m - \mu dt)(v + dv) - \mu dt(u - v)] - [mv]$ и, соответственно, уравнение (1.13) в проекции на ось Oy принимает вид

$$[(m - \mu dt)(v + dv) - \mu dt(u - v)] - [mv] = -mgdt. \quad (*)$$

Раскроем скобки

$$mv - \mu dt + m dv - \mu dt dv - u \mu dt + v \mu dt - mv = -mg dt$$

и после сокращений получим

$$m dv - \mu dt dv - u \mu dt = -mg dt.$$

Величины dt и dv стремятся к нулю. Поэтому, произведение $\mu dt dv$ исключаем как бесконечно малую величину высшего порядка. С учетом этого соотношение (*) преобразуем к виду $m dv = (u \mu - mg)dt$.

После деления на dt получим

$$m \frac{dv}{dt} = \mu u - mg, \quad (**)$$

где $m = m_0 - \mu t$, $\frac{dv}{dt}$ искомое ускорение ракеты. Запишем (**) в проекции на ось Oy :

$$ma = \mu u - mg. \quad (***)$$

Это уравнение аналогично второму закону Ньютона. Однако масса здесь не постоянна, и дополнительное слагаемое μu может быть истолковано как реактивная сила. Уравнение (***) является частным случаем уравнения И.В. Мещерского (1.14) для движения точки с переменной массой. Для заданного момента времени формула для ускорения имеет вид

$$a = \frac{\mu u}{m_0 - \mu t} - g.$$

Замечание: Интегрируя это уравнение можно получить зависимость скорости ракеты от времени, а затем и закон движения.

6(б). Водометный двигатель катера выбрасывает назад струю воды со скоростью $U = 8$ м/с относительно катера. Расход воды в его турбине $\mu = 70$ кг/с. Пренебрегая сопротивлением движению катера, определите его скорость V_1 в спокойной воде через $t_1 = 50$ с после начала движения. Масса катера $m_0 = 5$ т.

Решение

Выберем систему отсчета, связанную со спокойной водой, ось координат Ox вдоль направления движения катера. Пусть в некоторый момент времени скорость катера равна v . Масса катера m_0 не изменяется, внешние силы отсутствуют, проекция относительной скорости поступающей в турбину воды равна $-v$, а для выбрасываемой — u . Уравнение (1.14) запишем в проекции на ось Ox :

$$m_0 \frac{dv}{dt} = -\mu v + \mu u \quad \text{или} \quad m_0 \frac{dv}{dt} = \mu u \left(1 - \frac{v}{u}\right).$$

Введем безразмерную переменную $w = 1 - v/u$. Тогда $dv = -u dw$, и после замены и разделения переменных получим $\frac{1}{w} dw = -\frac{\mu}{m_0} dt$.

Такое уравнение рассматривалось в примере 5. Интегрируем его

$$\ln w = -\frac{\mu}{m_0} t + C \quad \text{или} \quad \ln \left(1 - \frac{v}{u}\right) = -\frac{\mu}{m_0} t + C. \quad (*)$$

Из начального условия $v(t=0) = 0$ находим $C = 0$ и приводим уравнение (*) к виду $\ln \left(1 - \frac{v}{u}\right) = -\frac{\mu}{m_0} t$.

Используя определение логарифмической функции, получим

$$1 - \frac{v}{u} = e^{-\frac{\mu}{m_0} t} \quad \text{или} \quad v = u \left(1 - e^{-\frac{\mu}{m_0} t}\right). \quad (**)$$

График этой функции приведен на рис. 1.11. Скорость асимптотически стремится к предельному значению $v_{\max} = u$. В этом случае скорость выбрасываемой струи воды в выбранной системе отсчета равна нулю $v_B = u - v_{\max} = 0$ и ускорения не будет.

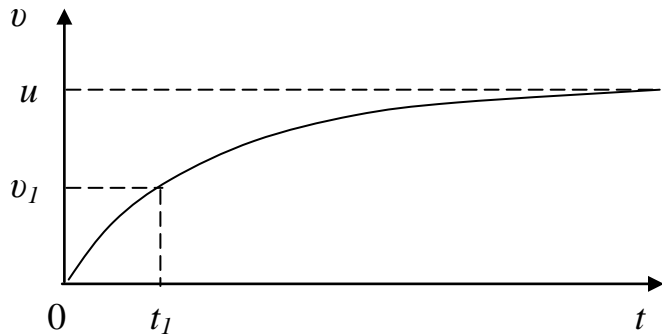


Рис. 1.11

Подставив из условия $t_1 = 50$ с в (**), и расчета получим ответ $v_1 \approx 4$ м/с.

1.3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В СИСТЕМЕ ЧАСТИЦ

7. Молот массой $m = 200$ кг падает на заготовку детали, закрепленную на наковальне. Масса заготовки вместе с наковальней $M = 2500$ кг. Найдите коэффициент полезного действия η удара молота, считая его абсолютно неупругим. Взаимодействием наковальни с фундаментом во время удара пренебречь.

Решение

Целью описанного в условии процесса является деформация заготовки детали. Следовательно, коэффициент полезного действия удара молота о заготовку равен отношению энергии, затраченной на деформацию заготовки $E_{\text{деф}}$ ко всей затраченной энергии, которая равна кинетической энергии молота перед ударом T_0 .

$$\eta = \frac{E_{\text{деф}}}{T_0} 100\%.$$

Используя закон сохранения определим энергию, затраченную на деформацию поковки, как разность между кинетической энергией молота до удара T_0 и кинетической энергией молота с наковальней после удара T_1

$$E_{\text{деф}} = T_0 - T_1.$$

Замечание: Непосредственно после неупругого удара молот с наковальней начинают двигаться как одно целое со скоростью v_1 , которая затем гасится в результате сопротивления фундамента наковальни.

Для определения скорости v_1 применим закон сохранения импульса, который при неупругом ударе в проекции на ось Ox имеет вид

$$m v_0 = (m+M) v_1.$$

Из этой формулы выразим скорость $v_1 = \frac{m v_0}{m+M}$. Тогда

$$E_{\text{деф}} = \frac{m v_0^2}{2} - \frac{(m+M) v_1^2}{2} = \frac{m v_0^2}{2} - \frac{m^2 v_0^2}{2(m+M)}.$$

Найдем коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{E_{\text{деф}}}{T_0} 100\% = \frac{\frac{m v_0^2}{2} - \frac{m^2 v_0^2}{2(m+M)}}{\frac{m v_0^2}{2}} 100\% = \frac{M}{m+M} 100\%.$$

После подстановки заданных значений получим $\eta = 92,6\%$.

8. Определите вторую космическую скорость ракеты, запущенной с поверхности Земли.

Решение

Второй космической скоростью v_2 называется минимальная скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно удалилось с поверхности планеты в бесконечность. При этом сопротивление атмосферы не учитывается и предполагается, что на тело действует только поле тяготения планеты.

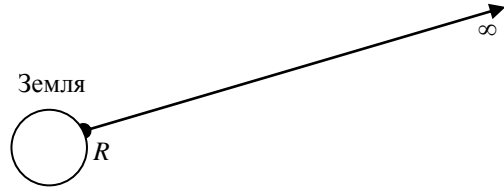


Рис. 1.21

Применим закон сохранения полной механической энергии для начальной точки R траектории ракеты и точки, расположенной на бесконечно большом расстоянии от планеты (рис. 1.21.)

$$T_R + \Pi_R = T_\infty + \Pi_\infty \quad (*)$$

По определению вторая космическая скорость является минимально необходимой. Поэтому, можно принять, что $T_\infty = 0$. В соответствии с (1.18) $\Pi_\infty = 0$. Тогда из (*)

$$\frac{mv_2^2}{2} - G \frac{mM}{R_3} = 0,$$

где M – масса Земли, R_3 - ее радиус. Отсюда находим

$$v_2 = \sqrt{2G \frac{M}{R_3}}. \quad (**)$$

Воспользовавшись известным соотношением $G \frac{M}{R_3^2} = g_0$ (где g_0 – ускорение свободного падения у поверхности Земли), формулу (**) преобразуем к виду

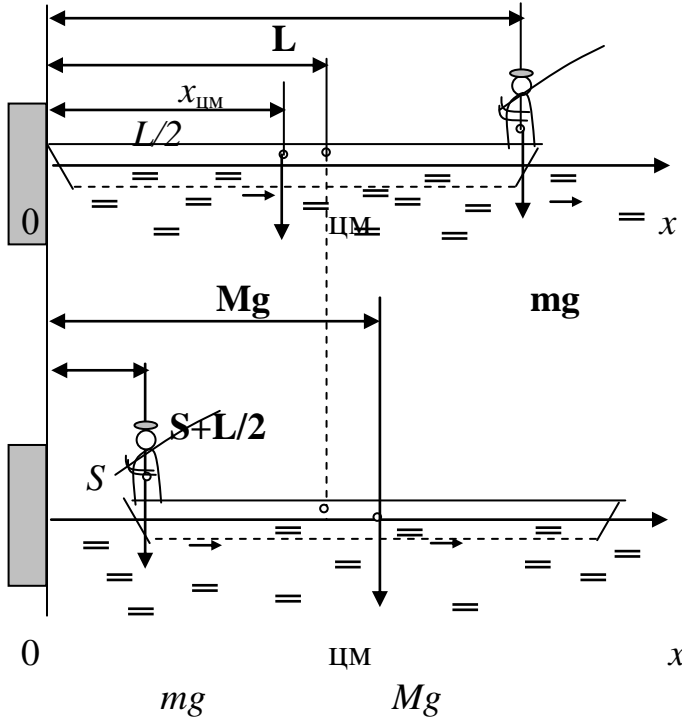
$$v_2 = \sqrt{2g_0 R_3}.$$

Подставив в эту формулу значения $g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2$ и $R_3 = 6400 \text{ км}$ и произведя вычисления, получим

$$v_2 = 11,2 \text{ км/с}.$$

9. Подплыв перпендикулярно причалу, лодка коснулась его носом, и остановилась. Находившийся на корме рыбак переходит в переднюю часть лодки, чтобы сойти с нее. На какое расстояние смещается при этом лодка, если сопротивлением воды пренебречь, ветра нет и течение отсутствует? Длина лодки $L=3$ м, ее масса $M = 150$ кг, масса рыбака $m = 75$ кг.

Решение



Выберем систему координат, в которой ось Ox направлена от носа лодки к корме. За начало координат примем точку касания лодки берега (рис. 1.22). Если не учитывать действие сил трения между лодкой и водой, то система, состоящая из человека и лодки изолирована в горизонтальной плоскости. Положение ее центра масс в момент касания лодкой причала определим по формуле (1.23)

$$x_{\text{ЦМ}} = \frac{M \frac{L}{2} + mL}{M + m}. \quad (*)$$

Рис. 1.22

После перемещения человека на нос лодки положение центра масс останется прежним, но формулу (1.23) запишем в виде

$$x_{\text{ЦМ}} = \frac{M \left(\frac{L}{2} + S \right) + mS}{M + m}, \quad (**)$$

где S - искомое перемещение, которое находим, приравняв правые части формул (*) и (**). После сокращения знаменателей имеем

$$M \frac{L}{2} + mL = M \left(\frac{L}{2} + S \right) + mS.$$

Выполнив преобразования, получим ответ $S = \frac{mL}{M + m} = 1$ м.

Замечание. Это не единственный способ решения. Попробуйте самостоятельно решить задачу, используя непосредственно закон сохранения импульса.

10. Жесткий покоящийся стержень длиной r расположен горизонтально и может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через один из концов стержня. На другом конце закреплен небольшой шар массой m_1 ,

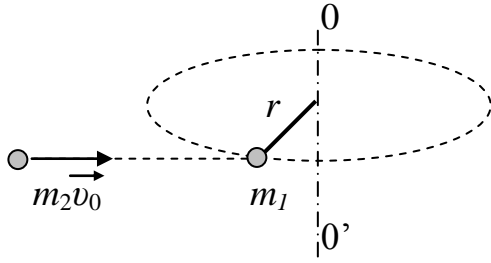


Рис. 1.23

в который абсолютно упруго ударяется другой шар массой $m_2 = m_1$, летящий перпендикулярно стержню и оси вращения со скоростью v_0 (рис.1.23). Считая удар шаров центральным, шары точечными, а стержень невесомым, определите угловую скорость вращения стержня после удара.

Решение

В условии задано начальное состояние системы и требуется определить конечное состояние, без учета промежуточных этапов. В таких случаях обычно оптимальное решение получается с помощью законов сохранения. Необходимо только проверить условия их выполнения. Рассматриваемая система «стержень с двумя шарами» не является замкнутой, т.к. на нее действуют сила тяжести и сила реакции опоры в точке контакта стержня с осью вращения OO' . Поэтому закон сохранения импульса использовать нельзя. Но моменты этих сил относительно вертикальной оси OO' равны нулю (т.к. сила тяжести параллельна ей, а сила реакции опоры проходит через ось). Это позволяет использовать закон сохранения проекции момента импульса системы на ось OO' . Запишем его с учетом того, что длина стержня r является «плечом» импульсов

$$rm_2v_0 = rm_2v_2 + rm_1v_1.$$

Здесь слева записан момент импульса системы до удара, а справа - после (v_1 и v_2 - скорости соответствующих шаров после удара). Сокращая на r , получим

$$m_2v_0 = m_2v_2 + m_1v_1. \quad (*)$$

Следовательно, несмотря на действие внешних сил, суммарный импульс системы в процессе удара сохранился. Кроме того, при абсолютно упругом ударе нет перехода кинетической энергии во внутреннюю энергию, т.е. суммарная кинетическая энергии системы сохраняется. Поэтому

$$\frac{m_2v_0^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}. \quad (**)$$

Решая совместно уравнения (*) и (**), с учетом равенства масс шаров находим скорости шаров после удара $v_2 = 0$ и $v_1 = v_0$.

Угловая скорость вращения стержня с шаром после удара определим по знакомой из школьного курса формуле $\omega = \frac{v_0}{r}$.

1.4. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

11. Колесо турбины раскручивают из состояния покоя с постоянным угловым ускорением $\beta = 0,1 \text{ рад/с}^2$. Найдите:

1. Чему равно полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $R = 0,5 \text{ м}$ от оси вращения, через 5 с после начала движения турбины?

2. Сколько оборотов N успеет сделать турбина к этому времени?

Решение

1. Полное ускорение \vec{a} точки при вращательном движении представим как векторную сумму тангенциального \vec{a}_τ и нормального \vec{a}_n ускорений (рис. 1.38)

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где (см. формулы (1.27) и (1.28)) $a_\tau = \beta R$ и $a_n = \omega^2 R$.

Угловую скорость ω определим, интегрируя угловое ускорение

$$\omega = \int \beta dt + C_1 = \beta t + C_1.$$

Постоянную интегрирования C_1 находим с помощью начального условия $\omega = 0$ при $t = 0$. Тогда $C_1 = 0$, $\omega = \beta t$. Модуль полного ускорения рассчитаем по формуле

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\beta^2 R^2 + \omega^4 R^2} = \\ &= \sqrt{\beta^2 R^2 + \beta^4 t^4 R^2} = \beta R \sqrt{1 + \beta^2 t^4}. \end{aligned}$$

Подставив в нее заданные величины, получим $a \approx 0,13 \text{ м/с}^2$. Направление вектора полного ускорения выразим с помощью тангенса угла α между векторами полного и нормального ускорений

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\beta R}{\omega^2 R} = \frac{\beta}{\beta^2 t^2} = \frac{1}{\beta t^2} = 0,4.$$

Замечание: С течением времени $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow 0$ и полное ускорение в основном будет определяться нормальным ускорением.

2. Количество оборотов турбины N связано с углом поворота $\varphi = 2\pi N$, который выразим, интегрируя угловую скорость

$$\varphi = \int \omega dt + C_2 = \int \beta t dt + C_2 = \frac{\beta t^2}{2} + C_2.$$

Постоянную интегрирования C_2 найдем тоже из начального условия: $\varphi = 0$

при $t = 0$. Следовательно $C_2 = 0$. Тогда $N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\beta t^2}{4\pi} \approx 0,2$.

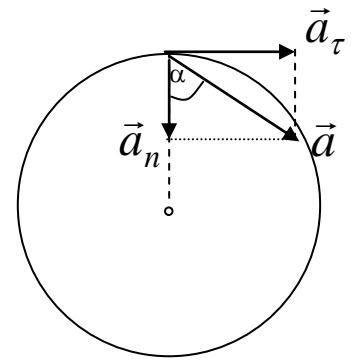


Рис. 1.38

12. На гладкой горизонтальной поверхности лежит квадратная рамка, в вершинах которой закреплено по одному шару массой m . В один из них ударяется и прилипает еще один шар, такой же массы. Его скорость перед ударом направлена вдоль одной из сторон квадрата и равна $v = 12$ м/с. Считая рамку достаточно жесткой и невесомой, определите угловую скорость образовавшейся системы относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс. Сторона квадрата $a = 0,2$ м, размерами шаров можно пренебречь.

Решение

Из соображений симметрии определим, что центр масс образовавшейся в результате взаимодействия системы из пяти шаров находится на диагонали квадрата, на которой находятся слипшиеся шары (рис. 1.39). Выберем ее в качестве оси координат Ox с началом O в точке удара.

Тогда положение центра масс определим по формуле

$$x_{\text{цм}} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{2m \cdot 0 + md + m \frac{d}{2} + m \frac{d}{2}}{5m} = \frac{2}{5}d,$$

где $d = a\sqrt{2}$ – диагональ квадрата.

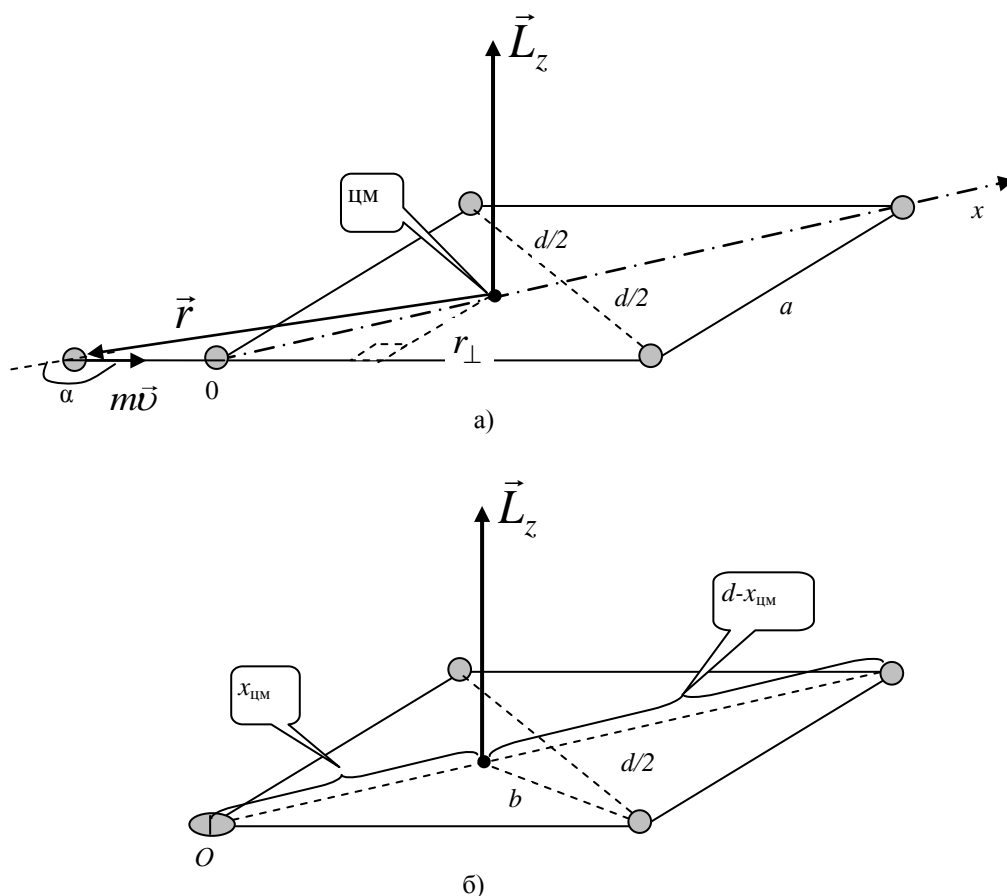


Рис. 1.39

На систему не действуют внешние горизонтальные силы. Поэтому, для определения угловой скорости образовавшейся после удара системы воспользуемся законом сохранения вертикальной проекции момента импульса. Запишем его относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс образовавшейся после удара системы

$$L_{z(\text{до})} = L_{z(\text{после})}.$$

Момент импульса системы до соударения равен моменту импульса налетающего шара. Его проекцию на вертикальную ось запишем в виде

$$L_{z(\text{до})} = rmv \sin \alpha = rmv \sin(\pi - \alpha) = r_{\perp} mv,$$

где «плечо» $r_{\perp} = x_{\text{цм}} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} x_{\text{цм}} = \frac{\sqrt{2}}{5} d$.

Тогда $L_{z(\text{до})} = \frac{\sqrt{2}}{5} dm v$.

Момент импульса образовавшейся после удара системы определим по формуле (1.29): $L_{z(\text{после})} = I_{\text{цм}} \omega$, где ω – искомая угловая скорость. Момент инерции $I_{\text{цм}}$ образовавшейся системы из пяти шаров относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс, рассчитаем по формуле 1.35

$$I_{\text{цм}} = \sum m_i R_i^2 = 2m(x_{\text{цм}})^2 + m(d - x_{\text{цм}})^2 + mb^2 + mb^2,$$

где $b^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2} - x_{\text{цм}}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{10}\right)^2 = 0,26d^2$. Тогда

$$I_{\text{цм}} = 2m\left(\frac{2}{5}d\right)^2 + m\left(\frac{3}{5}d\right)^2 + 0,52md^2 = 1,2md^2,$$

$$L_{z(\text{после})} = 1,2md^2 \omega.$$

Подставим полученные значения моментов импульса в закон сохранения

$$\frac{\sqrt{2}}{5} dm v = 1,2md^2 \omega.$$

Из этого равенства определим угловую скорость

$$\omega = \frac{\frac{\sqrt{2}}{5} mvd}{1,2md^2} = \frac{\sqrt{2}v}{6d} = \frac{\sqrt{2}v}{6a\sqrt{2}} = \frac{v}{6a} = \frac{12}{1,2} \text{ рад/с} = 10 \text{ рад/с}.$$

13. Стальной эксцентрик изготовлен в виде диска толщиной $h = 1$ см с двумя симметричными отверстиями (рис. 1.40). Радиусы отверстий $r = 1$ см, расстояние между их осями $d = 4r$, радиус диска $R = 4r$. Определите момент инерции эксцентрика I относительно оси вала BB' , совпадающей с осью одного из отверстий. Плотность стали $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$.

Решение

Решение задачи разделим на две части: сначала находим момент инерции I_c эксцентрика относительно оси симметрии $00'$, а затем по теореме Штейнера рассчитаем искомый момент инерции относительно оси BB' . Момент инерции I_c эксцентрика относительно оси симметрии определим как момент инерции целого диска I_0 (без вырезов) за вычетом моментов инерции двух вырезанных частей $2I_1$, т.е.

$$I_c = I_0 - 2I_1.$$

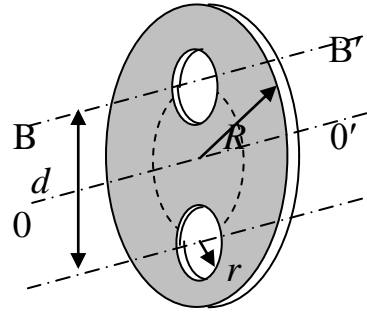


Рис.1.40

Запишем формулу для момента инерции целого диска

$$I_0 = \frac{m_0 R^2}{2}, \text{ где } m_0 = \rho \pi R^2 h \text{ — масса целого диска.}$$

Момент инерции одной из вырезанных частей диска находим с помощью теоремы Штейнера $I_1 = \frac{m_1 r^2}{2} + m_1 a^2$, где $a = \frac{d}{2} = 2r$, $m_1 = \rho \pi r^2 h$ — масса вырезанной части диска. Получим формулу для момента инерции эксцентрика относительно его оси симметрии

$$I_c = \frac{m_0 R^2}{2} - 2 \left(\frac{m_1 r^2}{2} + m_1 a^2 \right).$$

Запишем формулу для момента инерции эксцентрика относительно оси BB'

$$I_B = I_c + (m_0 - 2m_1) a^2.$$

Подставим полученные ранее уравнения для I_c , m_0 , m_1

$$\begin{aligned} I_B &= \frac{m_0 R^2}{2} - 2 \left(\frac{m_1 r^2}{2} + m_1 a^2 \right) + (m_0 - 2m_1) a^2 = \\ &= \frac{\rho \pi R^2 h R^2}{2} - 2 \rho \pi r^2 h \left(\frac{r^2}{2} + a^2 \right) + (\rho \pi R^2 h - 2 \rho \pi r^2 h) a^2. \end{aligned}$$

Учитывая заданные значения $R = 4r$ и $a = 2r$, выполняем преобразования

$$I_B = \frac{\rho \pi h 4^4 r^4}{2} - 2 \rho \pi r^2 h \left(\frac{r^2}{2} + 2^2 r^2 \right) +$$

$$+ (\rho \pi 4^2 r^2 h - 2 \rho \pi r^2 h) 2^2 r^2 =$$

$$= \rho \pi r^4 h (128 - 9 + 56) = 175 \rho \pi r^4 h.$$

После подстановки данных условия задачи и расчета, находим

$$I_B = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

14. Детская игрушка волчок имеет массу $m = 0,2$ кг и представляет собой фигуру вращения в виде двух со- стыкованных основаниями конусов (рис. 1.41). Радиус основания конуса $R = 5$ см, высота волчка $H = 2R$. Определите момент инерции волчка относительно оси O' . Считать, что волчок изготовлен из однородного материала.

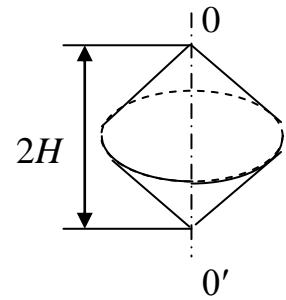


Рис. 1.41

Решение

Для упрощения интегрирования по формуле 1.35 используем симметрию заданной фигуры и выделим в ней элемент объема в виде диска толщиной dh (рис. 1.42). Радиус r этого диска зависит от расстояния h от вершины конуса. Так как высота конуса равна радиусу основания, то из геометрических соображений следует, что $r = h$. Тогда объем выделенного элемента запишем в виде

$$dV = \pi r^2 dh = \pi h^2 dh.$$

Его масса $dm = \rho dV$, где ρ - плотность материала, из которого изготовлен волчок.

Момент инерции выбранного элемента объема определим по известной формуле для момента инерции диска

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} \pi \rho h^4 dh.$$

Интегрируя это выражение, находим момент инерции для одного из конусов

$$I_1 = \int dI = \int_0^R \frac{1}{2} \pi \rho h^4 dh = \frac{1}{10} \pi \rho R^5.$$

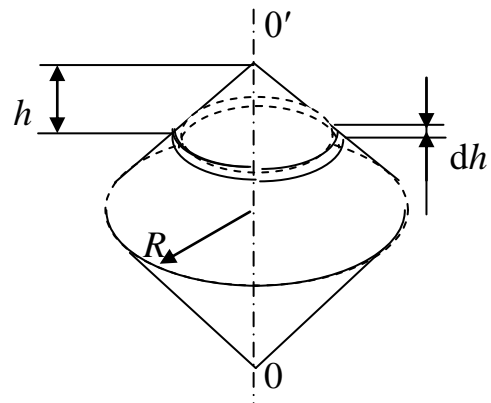


Рис.1.42

Удвоив его, получим искомый момент инерции всего волчка $I = 2I_1 = 0,2\pi\rho R^5$.

Определим плотность материала волчка $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{2V_1}$, где V_1 - объем одного из конусов. Соответствующая формула для объема конуса известна из школьного курса геометрии

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 H_1 = \frac{1}{3} \pi R^3,$$

где H_1 - высота конуса.

Тогда $\rho = \frac{3m}{2\pi R^3}$, а момент инерции

$$I = 0,2\pi \frac{3m}{2\pi R^3} R^5 = 0,3mR^2.$$

Выполнив расчет, находим $I = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

15. Маховик, имеющий момент инерции $I = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, раскручивают так, что его угловая скорость изменяется по закону $\omega = \omega_0 \sin^2\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)$, где $\tau = 4 \text{ с}$, $\omega_0 = 31,4 \text{ рад/с}$. Найдите:

1. Момент внешних сил, действующих на маховик через 1 с после начала движения.

2. Запасенную к этому моменту времени кинетическую энергию.

Решение

1. В соответствии с уравнением динамики вращательного движения твердого тела (1.31) момент действующих сил M связан с угловым ускорением β формулой $M_z = I_z \beta$, где I_z - момент инерции маховика относительно оси вращения. Угловое ускорение находим, воспользовавшись его определением

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \omega_0 2 \frac{2\pi}{\tau} \sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) = \frac{2\pi\omega_0}{\tau} \sin\left(\frac{4\pi}{\tau}t\right).$$

Тогда $M = I \frac{2\pi\omega_0}{\tau} \sin\left(\frac{4\pi}{\tau}t\right)$ и подстановка заданных значений времени $t = 1 \text{ с}$ и $\tau = 4 \text{ с}$ приводит к результату $M = 0$.

2. Кинетическую энергию вращающегося твердого тела определим по формуле $T = \frac{I\omega^2}{2}$. Тогда $T = \frac{I\omega_0^2}{2} \sin^4\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)$. Подставив заданные значения времени $t = 1 \text{ с}$ и $\tau = 4 \text{ с}$, находим $T = \frac{I\omega_0^2}{2} = 493 \text{ Дж}$.

Замечание: Полученное значение кинетической энергии равно работе, которую может совершить маховик при торможении после отключения двигателя. Это свойство маховика используется в инерционных двигателях.

16. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается по инерции (рис. 1.43) с частотой $n_1 = 0,5 \text{ с}^{-1}$. В вытянутых руках человек держит по гире массой $m = 2 \text{ кг}$ каждая. Исходное расстояние между гирями $l_1 = 1,6 \text{ м}$. Какой будет частота вращения n_2 скамьи с человеком, когда он опустит руки и расстояние между гирями l_2 станет равным $0,4 \text{ м}$? Считать, что момент инерции тела человека и скамьи относительно оси вращения не изменяется и равен $I_0 = 1,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Решение

Моменты сил тяжести и реакции опоры относительно вертикальной оси вращения скамьи Oz равны нулю. Сле-

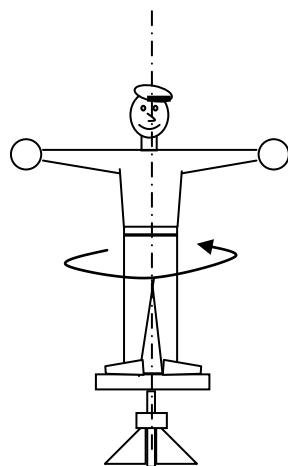


Рис. 1.43

довательно, для рассматриваемой системы проекция момента импульса относительно этой оси сохраняется

$$I_{1z}\omega_{1z} = I_{2z}\omega_{2z},$$

где I_{1z} и ω_{1z} - момент инерции системы и угловая скорость при вытянутых руках (рис.1.43), I_{2z} и ω_{2z} - соответствующие величины при опущенных руках (рис. 1.44).

Учитывая взаимосвязь угловой скорости и частоты вращения $\omega = 2\pi n$, из этого равенства выразим искомую частоту $n_2 = \frac{I_{1z}}{I_{2z}} n_1$. При вытянутых руках момент инерции системы I_{1z} равен сумме момента инерции человека со скамьей I_0 и момента инерции двух гирь $2mr_1^2$, где $r_1 = l_1/2$ расстояние от оси вращения Oz до гири (принимая гири за материальные точки). Аналогично и при опущенных руках

$$I_{2z} = I_0 + 2m\left(\frac{l_2}{2}\right)^2.$$

$$\text{Тогда получим } n_2 = \frac{I_0 + 2m\left(\frac{l_1}{2}\right)^2}{I_0 + 2m\left(\frac{l_2}{2}\right)^2} n_1 = 1,18 \text{ с}^{-1}.$$

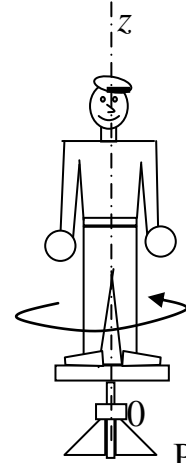


Рис. 1.44

1.5. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

17. На диаграмме пространства-времени (рис. 1.53) показаны три события A, B, C, которые произошли на оси Ox некоторой инерциальной системы отсчета. Считая, что выполняются условия, приведенные на рис. 1.52, найдите:

1. Промежуток времени между событиями A и B в той системе отсчета, где оба события произошли в одной точке,

2. Расстояние между точками A и C в той системе отсчета, где эти события одновременны.

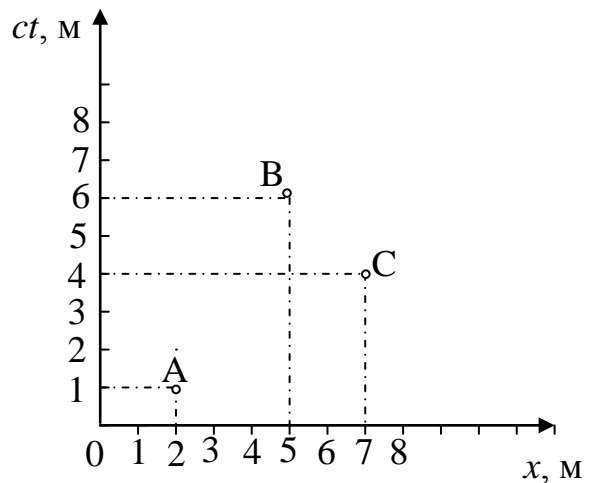


Рис. 1.53

Решение

Прежде всего, необходимо разобратся с диаграммой. Ось ординат соответствует оси времени, но масштаб необычен. Для удобства время умножено на скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. При этом размерность стала соответствовать размерности пространственной координаты. С помощью такой диаграммы удобно анализировать закон движения $x = x(t)$ и устанавливать причинно-временную связь между двумя событиями. Как известно самая “быстрая связь” (передача информации и т.п.) между двумя событиями может быть осуществлена с помощью светового импульса. Законы движения двух световых импульсов, вышедших из точки А в положительном и отрицательном направлениях оси $0x$, на диаграмме представляют собой две прямые, наклоненные под углами $\pm 45^\circ$ к оси $0x$ (рис. 1.54). Линии законов движения “объектов” вышедших из точки А с меньшими скоростями ($v < c$) будут расположены внутри заштрихованной области (светового конуса). Точка В находится внутри светового конуса точки А. Поэтому между событиями А и В может быть причинная связь. На событие С, находящееся вне светового конуса, событие А повлиять не может, т.к. для этого потребовалась бы скорость $v > c$.

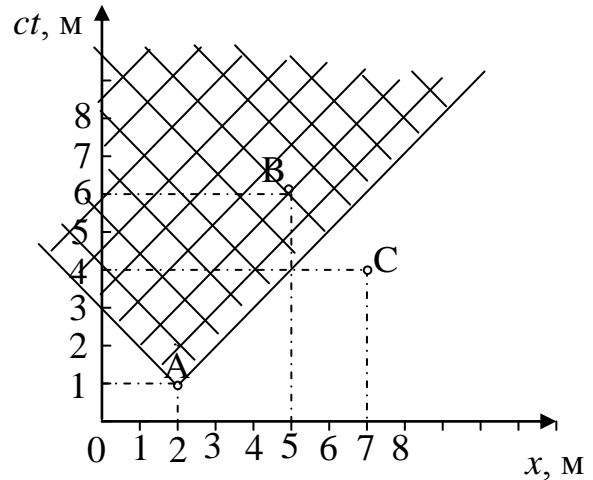


Рис. 1.54

1. Используем инвариантность пространственно-временного интервала (1.40). При этом учтем, что $(\Delta y_{AB})^2 = (\Delta y'_{AB})^2 = 0$ и $(\Delta z_{AB})^2 = (\Delta z'_{AB})^2$. Условие одноместности событий А и В в системе K' запишем в виде

$$(\Delta x'_{AB})^2 = 0 \quad \text{и} \quad c^2(\Delta t_{AB})^2 - (\Delta x_{AB})^2 = c^2(\Delta t'_{AB})^2.$$

Тогда
$$\Delta t'_{AB} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2(\Delta t_{AB})^2 - (\Delta x_{AB})^2}.$$

Из диаграммы следует, что $ct_A = 1$ м, $x_A = 2$ м, $ct_B = 6$ м, $x_B = 5$ м. После подстановки этих значений и расчетов получим $(\Delta t'_{AB}) \approx 1,3 \cdot 10^{-8}$ с.

Замечание: Если события А и В имеют отношение к одному объекту, то найденное время является собственным временем данного объекта, например, временем жизни элементарной частицы.

2. Условие одновременности событий А и С в некоторой системе отсчета K'' (отличной от K' и K), соответствует $\Delta t'' = 0$. Используя инвариантность пространственно-временного интервала запишем

$$c^2(\Delta t_{AC})^2 - (\Delta x_{AC})^2 = -(\Delta x''_{AC})^2.$$

Тогда $\Delta x''_{AC} = \sqrt{(\Delta x_{AC})^2 - c^2(\Delta t_{AC})^2} = 4 \text{ м.}$

Замечание: Если события А и С имеют отношение к крайним координатам одного и того же протяженного объекта, то полученная величина соответствует размеру объекта в К'' системе отсчета (условием измерения длины движущегося объекта является одновременность фиксации координат его крайних точек).

18(a). Электрический ток в линейном проводнике можно смоделировать движением цепочки электронов с некоторой скоростью v_0 на фоне цепочки неподвижных положительных ионов. В целом проводник электронейтрален. Это означает, что расстояние между соседними электронами L_- равно расстоянию между соседними ионами $L_+ = L_0$. Найдите соответствующие расстояния в системе отсчета, движущейся вместе с электронами со скоростью v .

Решение

Эта задача удачно иллюстрирует коварство формулы (1.38). Если ее одинаковым образом применить для электронов и ионов, то получится одинаковый результат. Необходимо учесть, что для ионов собственной является лабораторная система отсчета К, а для электронов собственной системой отсчета является движущаяся вместе с ними К'. Поэтому в системе К' расстояние между движущимися в ней ионами будет действительно определяться формулой (1.38)

$$L'_+ = L_0 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}.$$

Для электронов необходимо использовать обратное преобразование

$$L'_- = \frac{L_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}.$$

Анализ результата.

Замечание: Различие расстояний между соседними положительными ионами и соседними отрицательными электронами в движущейся системе отсчета свидетельствует и о разной концентрации зарядов в этой системе отсчета. Если при этом величина отдельного заряда не изменяется (инвариантна), то электронейтральность проводника в движущейся системе отсчета нарушается и в ней появится электрическое поле. Это информация к размышлению.

18(б). Протон, имеющий скорость относительно центра галактики $v = 0,999c$ ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с - скорость света), пересек ее по диаметру, который равен 10^5 световых лет. Сколько времени понадобится протону на это путешествие “с его точки зрения” (т.е. в собственной системе отсчета)?

Решение

Прежде всего, выразим заданный размер галактики (в ее собственной системе отсчета) в метрах $d = c\tau$, где $\tau = 10^5$ лет $= 10^5 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600$ секунд. На этот путь протон затратит время $\Delta t = d/v = c\tau/v$. Это время между двумя событиями, произошедшими с протоном - “началом” и “концом” пути. В собственной системе время между этими событиями находим по формуле (1.37)

$$\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Замечание: Этот же результат можно получить, используя инвариантность пространственно-временного интервала. Запишем его для двух событий (“начало” и “конец” путешествия) в собственной системе отсчета галактики и в собственной системе отсчета протона

$$c^2 \Delta t^2 - d^2 = c^2 \Delta t_0^2.$$

После подстановки заданных значений t и d в обоих случаях получим

$$t_0 = \tau \sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1} = \tau \sqrt{\frac{c^2}{0,999^2 c^2} - 1} \approx 4,5 \cdot 10^3 \text{ лет.}$$

18(в). Микрочастица, имеющая скорость $v = 0,1c$, одновременно испустила два фотона - один вдоль своего движения, другой в противоположном направлении. Найдите скорость фотонов в лабораторной системе отсчета.

Решение

Если фотоны в системе отсчета микрочастицы имеют скорости $+c$ и $-c$, то в лабораторной системе отсчета их скорости будут соответственно равны (см. формулу 1.39)

$$v_+ = \frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}} = c, \quad v_- = \frac{-c+v}{1-\frac{cv}{c^2}} = c.$$

Замечание: Если воспользоваться преобразованиями Галилея, то получится $v_{\pm} = v \pm c$. Такой результат противоречит постулату теории относительности об инвариантности скорости света.

1.6. ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

19(a). Электрон имеет скорость $v = 0,5c$. Во сколько раз нужно ее увеличить для того, чтобы импульс электрона удвоился?

Решение

Искомую величину запишем в виде $n = u/v$, где u -новая скорость электрона. Используя формулу (1.41), условие задачи можно переписать в виде

$$\frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 2 \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Произведя замену $u = nv$ и соответствующие сокращения, получим

$$\frac{n}{\sqrt{1 - \frac{n^2 v^2}{c^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

или
$$2\sqrt{1 - \frac{n^2 v^2}{c^2}} = n\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

После преобразований находим $n = \frac{2}{\sqrt{1 + 3\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1,5.$

19(б). Над электроном, летящим со скоростью $v = 0,1c$, была совершена работа $A = 8,2 \cdot 10^{-14}$ Дж. Найти изменение скорости, импульса и кинетической энергии электрона.

Решение

Начальные значения импульса p_1 и энергии E_1 находим с помощью формул (1.41)

$$p_1 = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad E_1 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

При заданном значении скорости $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1$, и тогда

$p_1 \approx m_0 v = 0,1 m_0 c$, $E_1 \approx m_0 c^2 = 0,511 \text{ МэВ} = 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}$. Обратим внимание, что численные значения A и E_1 совпадают и равны $m_0 c^2$.

Совершаемая над электроном работа идет на изменение его кинетической энергии (т.к. энергия покоя электрона не может измениться) $A = \Delta T$. Соответственно увеличится и полная релятивистская энергия $E_2 = E_1 + A$. Учитывая, что численные значения A и E_1 совпадают и равны энергии покоя $m_0 c^2$, можно записать $E_2 = 2 \cdot m_0 c^2$. В соответствии с формулой (1.42) новая кинетическая энергия $T_2 = E_2 - m_0 c^2 = m_0 c^2$.

Новые значения импульса и скорости определим по формулам (1.43) и (14.5)

$$p_2 = \frac{1}{c} \sqrt{T_2(2m_0 c^2 + T_2)} = m_0 c \sqrt{3}, \quad v_2 = \frac{p_2 c^2}{E_2} = c \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Тогда} \begin{cases} \Delta v = c \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,1 \right) = 0,77c, \\ \Delta p = m_0 c (\sqrt{3} - 0,1) = 4,5 \cdot 10^{-22} \text{ кгм/с}. \end{cases}$$

20(a). Покоящаяся нейтральная частица распалась на протон p^+ с кинетической энергией $T_p = 5,3 \text{ МэВ}$ и π^- - мезон. Найти массу распавшейся частицы.

Решение

Запишем реакцию $X \rightarrow p^+ + \pi^-$, где X - неизвестная частица. Так как нас не интересуют детали (механизм) процесса преобразования, то воспользуемся законами сохранения энергии и импульса, в которых фигурируют только характеристики частиц для начального и конечного состояния. В исходной ситуации распадающаяся частица покоилась и ее импульс равен нулю. Тогда закон сохранения импульса запишется в виде

$$0 = \vec{p}_p + \vec{p}_\pi$$

Очевидно, что импульсы протона и π^- - мезона равны по величине и противоположно направлены, т.е. $p_p = p_\pi$. Тогда, используя формулу (1.43), получим

$$T_\pi (2m_\pi c^2 + T_\pi) = T_p (2m_p c^2 + T_p).$$

Отсюда находим кинетическую энергию π^- - мезона. Для этого нужно решить квадратное уравнение относительно неизвестной кинетической энергии π^- - мезона T_π

$$T_{\pi}^2 + 2m_{\pi}c^2T_{\pi} - T_p(2m_p c^2 + T_p) = 0.$$

Решая его, получим $T_{\pi} = 32$ МэВ. Тогда масса (энергия покоя) распавшейся частицы находится из закона сохранения релятивистской энергии, которая вначале была равна энергии покоя распавшейся частицы $M_X c^2$, а после распада стала определяться суммой энергий покоя продуктов реакции и их кинетических энергий

$$M_X c^2 = m_p c^2 + T_p + m_{\pi} c^2 + T_{\pi},$$

Используя справочные данные (см. приложение) для энергии покоя протона $m_p c^2 = 938,26$ МэВ и π^- -мезона $m_{\pi} c^2 = 139,6$ МэВ рассчитаем энергию покоя распавшейся частицы

$$M_X c^2 = m_p c^2 + T_p + m_{\pi} c^2 + T_{\pi} = 1115 \text{ МэВ}$$

и идентифицируем ее как Λ -гиперон.

20(б). π^+ -мезон, летящий со скоростью $v = 0,87c$, распадается с образованием μ^+ -мезона и нейтрино ν по реакции $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$. Найти энергию нейтрино и угол между направлениями разлета продуктов реакции, если кинетическая энергия μ^+ -мезона равна 73,5 МэВ.

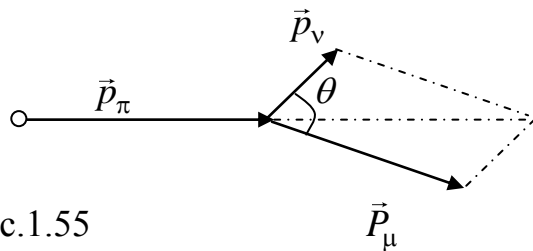
Решение

Схема реакции приведена на рис.1.55. Угол между направлениями разлета θ будем искать как угол между векторами импульсов продуктов реакции.

Законы сохранения энергии и импульса для этой реакции имеют вид

$$\begin{cases} E_{\pi} = E_{\mu} + E_{\nu}, \\ \vec{p}_{\pi} = \vec{p}_{\mu} + \vec{p}_{\nu}. \end{cases}$$

Рис.1.55



Энергию π^+ -мезона находим по формуле (1.41)

$$E_{\pi} = \frac{m_{\pi} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Подставив в нее численное значение скорости $v = 0,87c$, получим $E_{\pi} = 2m_{\pi} c^2$. Таким образом, энергия π^+ -мезона равна двум энергиям покоя π^+

- мезона. Тогда на долю кинетической энергии приходится энергия, равная его энергии покоя. Из закона сохранения энергии находим энергию нейтрино

$$E_\nu = E_\pi - E_\mu = 2m_\pi c^2 - m_\mu c^2 - T_\mu = 100 \text{ МэВ}.$$

Заметим, что у нейтрино энергия покоя равна нулю и полученное значение соответствует кинетической энергии нейтрино.

Для определения угла θ между направлениями разлета продуктов реакции воспользуемся теоремой косинусов (см. рис. 1.55).

$$p_\pi^2 = p_\mu^2 + p_\nu^2 + 2p_\mu p_\nu \cos \theta,$$

где θ - искомый угол. Тогда $\cos \theta = \frac{p_\pi^2 - p_\mu^2 - p_\nu^2}{2p_\mu p_\nu}$.

Величины импульсов каждой частицы определим по формуле (1.43)

$$p_\pi = \frac{1}{c} \sqrt{T_\pi (2m_\pi c^2 + T_\pi)} = \frac{1}{c} m_\pi c^2 \sqrt{3} = \frac{241,8 \text{ МэВ}}{c},$$

$$p_\mu = \frac{1}{c} \sqrt{T_\mu (2m_\mu c^2 + T_\mu)} = \frac{144,7 \text{ МэВ}}{c},$$

$$p_\nu = \frac{T_\nu}{c} = \frac{100 \text{ МэВ}}{c}.$$

Произведем расчет угла

$$\cos \theta = \frac{241,7^2 - 144,7^2 - 100^2}{2 \cdot 144,7 \cdot 100} = 0,951, \quad \theta = 18^\circ.$$

20(в). Современные ускорители строятся с таким расчетом, чтобы они могли разгонять частицы до энергий, достаточных для образования новых частиц. Например, если ускоренными протонами облучается мишень, содержащая протоны (атомы водорода), то возможна реакция $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$, где p - протон, \bar{p} - антипротон (частица с массой протона, но с отрицательным зарядом). Пороговой энергией реакции называется минимально необходимая для ее осуществления кинетическая энергия бомбардирующих частиц. Определить величину пороговой энергии.

Решение

В рассматриваемой реакции часть кинетической энергии бомбардирующего протона превращается в энергию покоя протона и антипротона, а другая часть остается в виде кинетической энергии продуктов реакции. Пороговая энергия реакции соответствует случаю минимума кинетической энергии ее

продуктов. Эта ситуация реализуется при отсутствии разлета продуктов реакции, когда четыре частицы, перечисленные в правой части формулы реакции, движутся вместе как одна частица с массой покоя $4m_p$. Для решения задачи достаточно записать законы сохранения энергии и импульса. Если пороговую кинетическую энергию налетающего протона обозначить T_p , а кинетическую энергию продуктов реакции $4T_1$, то эти законы будут иметь вид

$$T_p + m_p c^2 + m_p c^2 = 4(T_1 + m_p c^2),$$

$$p_p = 4p_1.$$

Воспользовавшись формулой (1.4), получим систему уравнений с неизвестными T_p и T_1 .

$$\begin{cases} T_p = 4T_1 + 2m_p c^2, \\ T_p (2m_p c^2 + T_p) = 16T_1 (2m_p c^2 + T_1). \end{cases}$$

Решая ее, находим пороговую кинетическую энергию

$$T_p = 6m_p c^2 = 5629 \text{ МэВ}.$$

Таким образом, для образования двух новых частиц потребовалось разогнать протон до кинетической энергии в три раза большей, чем суммарная энергия покоя этих частиц.

1.7. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

21(a). Предположим, что по оси вращения Земли образовано сквозное отверстие с гладкими стенками (рис.1.59). У поверхности Земли в образовавшуюся шахту опустили без начальной скорости небольшое тело. Определить период его колебательного движения относительно центра Земли. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь. Радиус Земли $R_3 = 6400$ км, ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = 9,8$ м/с². Указание: учесть, что модуль силы тяготения, действующей на тело массы m в шахте на расстоянии r от центра Земли, определяется формулой $F_T = mg \frac{r}{R_3}$.

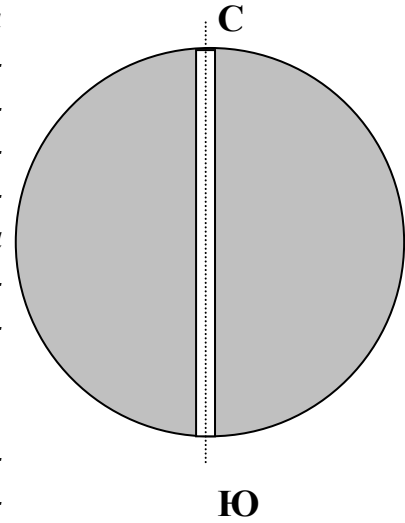


Рис. 1.59

Решение

Выберем систему координат с началом в центре Земли и осью Ox , совпадающей с осью шахты (рис.1.60). Так как сила тяготения направлена к центру Земли, то ее проекция на ось Ox равна $F_x = -mg \frac{x}{R_3}$ и противоположна по знаку координате x .

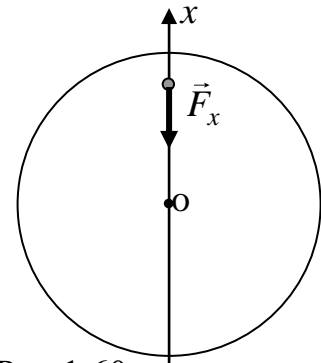


Рис.1.60

С учетом этого уравнение второго закона Ньютона запишем в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{mg}{R_3} x.$$

После преобразования получим уравнение типа (1.47)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{R_3} x = 0.$$

Тогда $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R_3}}$ и, с учетом формулы (2), $T = 2\pi \sqrt{\frac{R_3}{g}}$.

Произведя расчет, находим $T = 5000$ с = 85 мин.

Попробуйте самостоятельно сравнить полученную формулу с формулой периода вращения спутника Земли вблизи ее поверхности (приняв радиус круговой орбиты равным радиусу Земли).

21. Тонкое неподвижное кольцо радиуса $R = 1$ мм равномерно заряжено так, что полный заряд $q_1 = 1$ нКл. Вдоль оси кольца, скользя по гладкому диэлектрическому стержню, совершает малые колебания маленький шарик с зарядом $q_2 = -1$ нКл и массой $m = 1$ мг (рис.1.61). Найти собственную циклическую частоту этих колебаний.

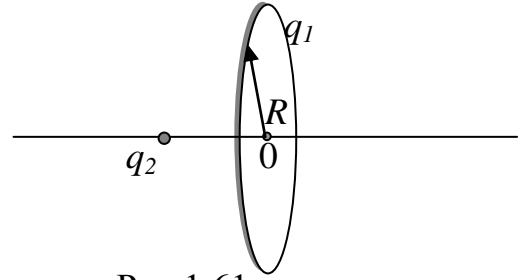


Рис.1.61

Решение

Выберем направление оси ox по осевой линии кольца с началом отсчета в его центре (рис.1.62). Каждый элемент кольца размером dl имеет заряд dq_1 и в соответствии с законом Кулона притягивает к себе шарик с силой, модуль которой равен

$$|d\vec{F}| = \frac{|q_2|dq_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

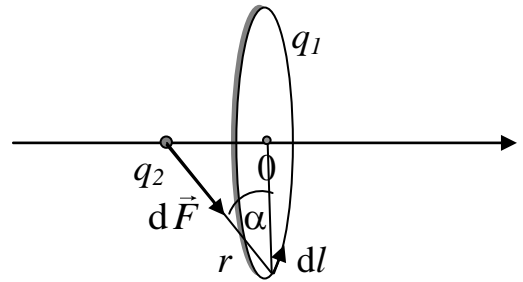


Рис.1.62

Сумма (интеграл) проекций этих сил от всех элементов кольца на вертикальную плоскость из соображений симметрии равна нулю. Модуль результирующей проекций этих сил на ось Ox отличен от нуля. Находим его интегрированием

$$\begin{aligned} |F_x| &= \int dF \sin \alpha = \int \frac{|q_2|dq_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \alpha = \\ &= \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \alpha \int dq_1 = \frac{|q_2|q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \alpha \end{aligned}$$

Учтем, что $|q_2| = q_1$ и при малых колебаниях $r \approx R$, $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{|x|}{R}$, где x – отклонение шарика от центра кольца. Тогда

$$|F_x| = \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} |x|.$$

Направление проекции результирующей силы F_x всегда противоположно направлению отклонения x . Поэтому

$$F_x = -\frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} x.$$

Запишем второй закон Ньютона в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} x.$$

После преобразований получим формулу типа (1.47)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3} x = 0.$$

Тогда циклическая частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$. После расчета находим $\omega_0 = 3000 \text{ с}^{-1}$.

22. Тело совершает гармонические колебания в соответствии с уравнением, $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где амплитуда $A = 8 \text{ см}$. Определить начальную фазу φ_0 , если в начальный момент времени $x(0) = -4 \text{ см}$, а скорость $v_x(0) < 0$.

Решение

Запишем уравнение движения в момент времени $t = 0$: $x(0) = A \cos(\varphi_0)$, где по условию $x(0) = -4$. Тогда $\varphi_0 = \arccos \frac{x(0)}{A} = \arccos(-0,5)$. В пределах от 0 до

2π этому равенству удовлетворяют два значения угла $\varphi_{01} = \frac{2}{3}\pi$ и $\varphi_{02} = -\frac{2}{3}\pi$.

Решением будет то, которое удовлетворяет второму условию $v_x(0) < 0$. По определению $v_x = \frac{dx}{dt}$. Тогда $v_x(t) = -A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ и $v_x(0) = -A \sin \varphi_0$. Из полученных двух значений начальной фазы условию $v_x(0) < 0$ удовлетворяет только $\varphi_{01} = \frac{2}{3}\pi$. По результатам решения построим векторную диаграмму для момента времени $t = 0$ (рис.1.63).

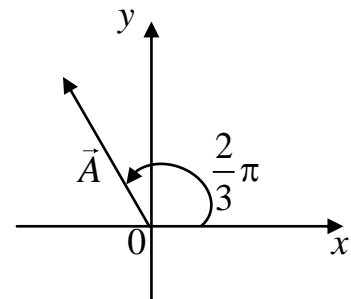


Рис.1.63

23. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания при сложении двух колебаний одного направления

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}) \quad \text{и} \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02}),$$

где $A_1 = 1 \text{ см}$, $A_2 = 2 \text{ см}$, $\varphi_{01} = \pi/6$, $\varphi_{02} = \pi/2$.

Решение

Построим векторную диаграмму (рис.1.64). Амплитуду результирующего колебания определим по формуле (1.52), а начальную фазу по формуле (1.53).

После вычислений получим

$$A = 2,65 \text{ см}$$

$$\text{и } \varphi_0 = \arctg(2,89) \approx 0,4\pi.$$

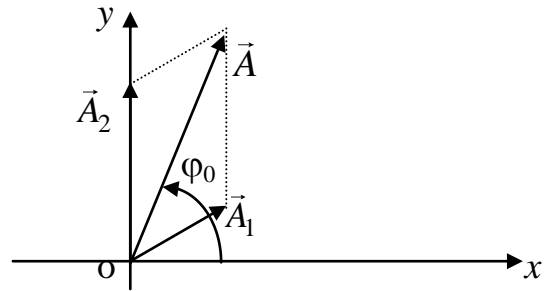


Рис.1.64

24. К горизонтально отклоняющим пластинам электронно-лучевой трубки осциллографа подключено переменное напряжение. В результате горизонтальная координата перемещающейся светящейся точки на экране изменяется по закону $x = A \sin(\omega_{01} t)$ и на экране наблюдается светящаяся прямая горизонтальная линия в пределах от $-A$ до $+A$. Затем к вертикально отклоняющим пластинам подключили переменное напряжение с другой частотой так, что вертикальная координата светящейся точки на экране стала изменяться по закону $y = A \cos(\omega_{02} t)$. Построить траекторию этой точки, если отношение $\omega_{01} : \omega_{02} = 3 : 2$.

Решение

Перед построением траектории произведем расчет значений координат x и y для моментов времени, когда $\omega_0 t_n = n \frac{\pi}{6}$, где $\omega_0 = \frac{\omega_{01}}{3} = \frac{\omega_{02}}{2}$, а $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 12$.

Замечание: при выборе моментов времени для удобства учитывалось отношение частот.

Полученные результаты занесем в таблицу 1.12.

В процессе колебаний координаты x и y меняются в пределах от $-A$ до $+A$. Поэтому, траектория светящейся точки должна располагаться внутри квадрата со стороной $2A$. Обозначим этот квадрат на координатной плоскости xOy пунктиром (рис.1.65). При переносе результатов из таблицы 1.12 на координатную плоскость рекомендуется отмечать номера точек. Тогда траекторию (**фигуру Лиссажу**) получим, соединяя последовательность точек с помощью лекала.

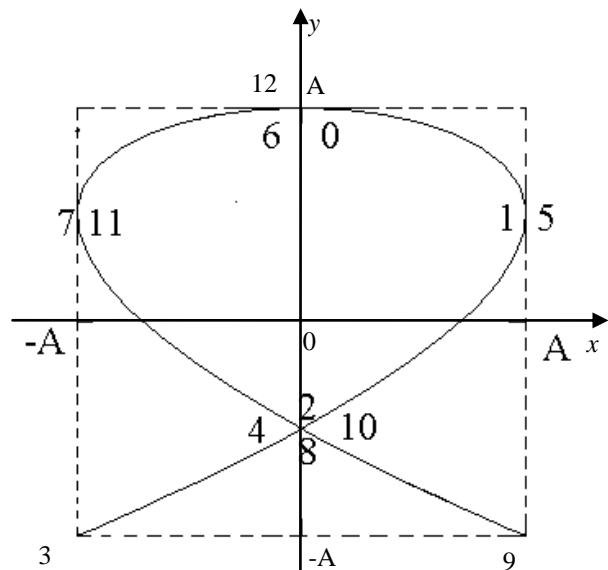


Рис.1.65

Замечание: если точка находится на пунктирной линии не в углу квадрата, то траектория должна быть касательной к стороне квадрата в этой точке.

Таблица 1.12

| n | ωt | $\omega_2 t$ | $y = \cos \omega_2 t$ | $\omega_1 t$ | $x = \sin \omega_1 t$ |
|-----|------------|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1. | $\pi/6$ | $\pi/3$ | 0,5 | $\pi/2$ | 1 |
| 2. | $2\pi/6$ | $2\pi/3$ | -0,5 | π | 0 |
| 3. | $3\pi/6$ | π | -1 | $3\pi/2$ | -1 |
| 4. | $4\pi/6$ | $4\pi/3$ | -0,5 | 2π | 0 |
| 5. | $5\pi/6$ | $5\pi/3$ | 0,5 | $5\pi/2$ | 1 |
| 6. | $6\pi/6$ | 2π | 1 | 3π | 0 |
| 7. | $7\pi/6$ | $7\pi/3$ | 0,5 | $7\pi/2$ | -1 |
| 8. | $8\pi/6$ | $8\pi/3$ | -0,5 | 4π | 0 |
| 9. | $9\pi/6$ | 3π | -1 | $9\pi/2$ | 1 |
| 10. | $10\pi/6$ | $10\pi/3$ | -0,5 | 5π | 0 |
| 11. | $11\pi/6$ | $11\pi/3$ | 0,5 | $11\pi/2$ | -1 |
| 12. | $12\pi/6$ | 4π | 1 | 6π | 0 |

25. Определить время, за которое амплитуда затухающих колебаний тела уменьшится в $k = 10$ раз, если частота колебаний $\nu = 50$ Гц, а логарифмический декремент затухания $\lambda = 0,01$.

Решение

В соответствии с формулой (1.55) амплитуда затухающих колебаний изменяется по закону

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t},$$

где коэффициент затухания β связан с логарифмическим декрементом затухания и периодом колебаний по формуле (1.57). Тогда $\beta = \lambda \nu$ и

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda \nu t}.$$

Согласно условию в искомый момент времени $A(t) = A_0/k$. На основании этого запишем

$$e^{-\lambda \nu t} = \frac{1}{k} \quad \text{или} \quad e^{\lambda \nu t} = k.$$

После преобразований получим $t = \frac{1}{\lambda \nu} \ln k$.

Произведем вычисления: $t = 2 \cdot \ln 10 \text{ с} \approx 4,6 \text{ с}$.

1.8. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

26(а). В цилиндрической части баллона находится сжиженный газ с плотностью $\rho_{\text{ж}} = 800 \text{ кг/м}^3$ (рис. 1.84). После открывания вентиля газ начинает вырываться наружу через патрубок с площадью выходного отверстия $S = 5 \text{ см}^2$ со скоростью $v = 10 \text{ м/с}$. Плотность вырывающегося газа $\rho_{\text{г}} = 2 \text{ кг/м}^3$. На какое время хватит запаса газа, если начальная высота уровня жидкого газа была $h = 1 \text{ м}$, а внутренний диаметр цилиндрической части баллона $d = 0,3 \text{ м}$?

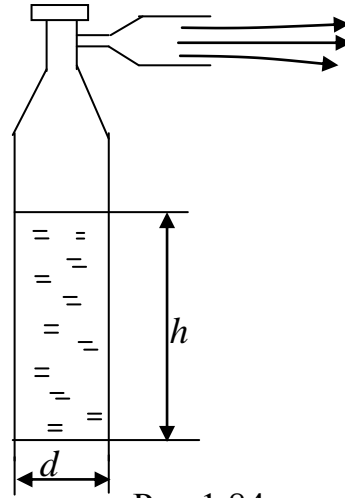


Рис.1.84

Решение

Запишем уравнение непрерывности (1.63) для массы газа в виде

$$\frac{dm}{dt} = -jS,$$

где $dm < 0$ – изменение массы внутри баллона за время dt , $j = \rho v$ плотность потока газа через выходное отверстие площадью S , $dm/dt = G$ – расход газа в единицу времени. В стационарном случае

$$G = -\frac{m}{t},$$

где m – масса сжиженного газа в начальный момент, t – искомое время. Выразив массу через плотность сжиженного газа и объем, перепишем уравнение непрерывности в виде

$$\frac{\rho_{\text{ж}} h \frac{\pi d^2}{4}}{t} = \rho_{\text{г}} v S. \quad \text{Тогда} \quad t = \frac{\rho_{\text{ж}} h \pi d^2}{4 \rho_{\text{г}} v S}.$$

Проверим размерность $[t] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^2} = \text{с}.$

Произведем расчет $t = \frac{800 \cdot 1 \cdot 3,14 \cdot 0,3^2}{4 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \text{ с} = 5652 \text{ с} = 1,6 \text{ часа}.$

26(б). На рис.1.85 приведена упрощенная схема установки для получения газообразного водорода методом электролиза воды. Какое количество воды должно поступать в установку каждую секунду, чтобы скорость газообразного водорода в выходном патрубке была $v_H = 10$ м/с. Плотность водорода в сечении выходного патрубка $\rho = 0,08$ кг/м³, площадь сечения $S = 12,5$ см².

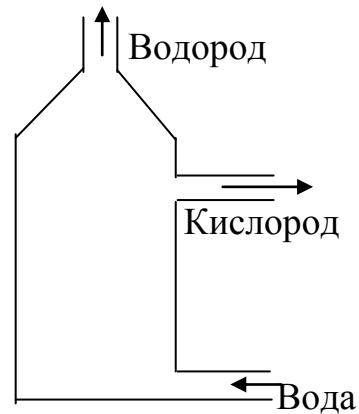


Рис.1.85

Решение

В стационарном случае уравнение непрерывности для массы, пересекающей поверхность установки, запишем в виде

$$\Delta\Phi_B - \Delta\Phi_O - \Delta\Phi_H = 0,$$

где $\Delta\Phi_B$ - искомый расход воды, $\Delta\Phi_O$ - поток массы кислорода через выходной патрубок, $\Delta\Phi_H = \rho v_H S$ - поток массы водорода через соответствующий выходной патрубок. В каждом акте расщепления молекулы воды получается 2 атома водорода с молярной массой 1 г/моль и 1 атом кислорода с молярной массой 16 г/моль. Легко догадаться, что $\Delta\Phi_O = 8 \Delta\Phi_H$. Тогда

$$\Delta\Phi_B = \Delta\Phi_H + 8 \Delta\Phi_H = 9 \Delta\Phi_H = 9 \rho v_H S.$$

Произведем расчет

$$\Delta\Phi_B = 9 \cdot 0,08 \cdot 10 \cdot 12,5 \cdot 10^{-4} \text{ кг/с} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/с} = 9 \text{ г/с}.$$

27(а). Вода подается в фонтан из большого цилиндрического бака и вырывается из отверстия, диаметр которого $d = 2$ см (рис.1.86). Уровень воды h в баке равен 2 м, избыточное над атмосферным давление над поверхностью воды в баке $\Delta p = 50$ кПа. Определить:

1. Высоту струи фонтана H .
2. Расход воды за одну секунду Q .

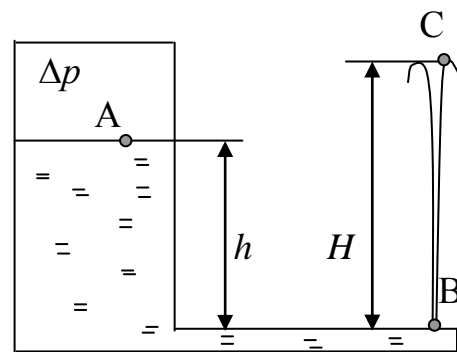


Рис.1.86

Решение

1. Применим уравнение Бернулли для точки поверхности воды в баке и устья струи фонтана (точки А и В на рис.1.86)

$$\rho g h + p = \frac{\rho v^2}{2} + p_0. \quad (*)$$

где плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, p – давление в точке А, p_0 – атмосферное давление, v – скорость вырывающейся из отверстия воды. По условию $p - p_0 = \Delta p$. Скоростью воды в точке А в данном случае можно пренебречь, т.к. диаметр бака существенно больше диаметра выходного отверстия фонтана. Из уравнения (*) выразим скорость

$$v = \sqrt{\frac{2(p - p_0) + 2\rho gh}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(\Delta p + \rho gh)}{\rho}}.$$

Высоту фонтана определим с помощью закона сохранения механической энергии для каждого элемента массы струи Δm

$$\frac{\Delta m v^2}{2} = \Delta m g H.$$

Тогда
$$H = \frac{v^2}{2g} = \frac{2(\Delta p + \rho gh)}{2\rho g} = \frac{\Delta p}{\rho g} + h.$$

После расчета получим $H = 7,1 \text{ м}$.

Замечание: если уравнение Бернулли сразу применить для точек А и С (рис.1.86), т.е.

$$\rho gh + p = \rho g H + p_0,$$

то мы получили бы тот же ответ.

2. Расход воды определим из следующих соображений: за время Δt из отверстия вырывается струя воды длиной $L = v\Delta t$, ее объем равен $W = LS = vS\Delta t$, где S – площадь выходного отверстия. Тогда

$$\begin{aligned} Q &= \frac{W}{\Delta t} = vS = S \sqrt{\frac{2(\Delta p + \rho gh)}{\rho}} = \\ &= \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2(\Delta p + \rho gh)}{\rho}} \end{aligned}$$

Произведя расчет, находим

$$Q = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с} = 3,7 \text{ л/с}.$$

27(б). По горизонтальной трубе течет жидкость. Разность уровней этой жидкости в трубках А и В $\Delta h = 0,1 \text{ м}$ (рис.1.87). Диаметры трубок А и В одинаковы. Найти скорость течения жидкости в трубе \vec{v} .

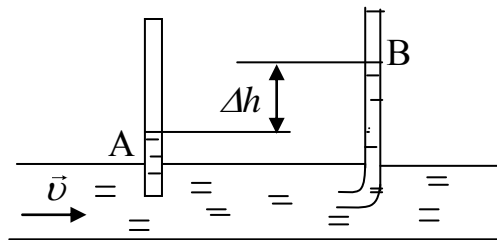


Рис.1.87

Решение

Применим уравнение Бернулли для точек жидкости находящихся в плоскости нижних отверстий трубок А и В (рис.1.87). Вблизи нижнего отверстия трубки А жидкость имеет скорость \vec{v} и находится под давлением p_1 , а в плос-

кости нижнего отверстия трубки В жидкость имеет практически нулевую скорость и находится под давлением p_2 . В этом случае уравнение Бернулли запишем в виде

$$\frac{\rho v^2}{2} + p_1 = p_2. \quad \text{Откуда} \quad v = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}}.$$

Разность давлений $p_2 - p_1$ связана с разностью уровней воды в трубках $p_2 - p_1 = \rho g \Delta h$. Окончательно получим

$$v = \sqrt{\frac{2\rho g \Delta h}{\rho}} = \sqrt{2g \Delta h} = 1,4 \text{ м/с}.$$

Замечание: На этом принципе работает устройство, называемое трубкой Пито–Прандтля. С ее помощью можно измерить скорости потоков газа или жидкости. В частности, таким образом можно определять скорость самолета.

28(a). Площадь соприкосновения слоев текущей жидкости $S = 10 \text{ см}^2$, коэффициент динамической вязкости жидкости $\eta = 0,001 \text{ Па}\cdot\text{с}$, а возникающая сила трения между слоями $F = 0,1 \text{ мН}$. Определите градиент скорости жидкости.

Решение

Силу вязкого трения между слоями определим по формуле (1.68)

$$F_{\text{тр}} = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S. \quad \text{Тогда градиент скорости} \quad \left| \frac{dv}{dz} \right| = \frac{F_{\text{тр}}}{\eta S}.$$

$$\text{Произведем расчет} \quad \left| \frac{dv}{dz} \right| = \frac{0,1 \cdot 10^{-3}}{0,001 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} \text{ с}^{-1} = 100 \text{ с}^{-1}.$$

28(б). Тонкий горизонтальный диск радиуса $R = 10 \text{ см}$ расположен в цилиндрической полости с маслом, вязкость которого $\eta = 8 \text{ мПа}\cdot\text{с}$ (рис.1.88). Зазоры между диском и горизонтальными торцами полости h одинаковы и равны 1 мм. Найти мощность, которую развивают силы вязкости, действующие на диск, при вращении его с угловой скоростью $\omega = 60 \text{ рад/с}$. Краевыми эффектами пренебречь.

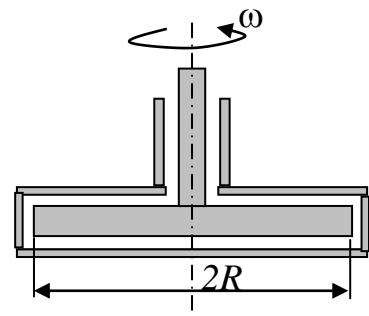


Рис. 1.88

Решение

Мощность определим по формуле $N = M \omega$, где момент силы вязкого трения M находим, интегрируя моменты сил вязкого трения, действующих на отдельные элементы диска.

Для этого выделим на диске осесимметричный кольцевой элемент шириной dr на расстоянии r от оси (рис.1.89). Его площадь $dS = 2\pi r dr$, скорость $v = \omega r$, а силу вязкого трения, действующую на него со стороны жидкости, получим по формуле Ньютона (1.68)

$$dF = \eta \frac{\Delta v}{h} 2dS = \eta \frac{\omega r}{h} 4\pi r dr.$$

Здесь учтено, что силы трения действуют на обе плоские поверхности диска. Момент силы трения, действующей на кольцевой элемент, определим по формуле

$$dM = r dF,$$

а мощность

$$N = M\omega = \omega \int dM = \omega \int_0^R r\eta \frac{\omega r}{h} 4\pi r dr = \frac{\pi\omega^2\eta R^4}{h}.$$

Проверим размерность и произведем расчет:

$$[N] = \text{Па} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м}^4 / \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1} = \text{Дж/с} = \text{Вт}.$$

$$N = \frac{3,14 \cdot 0,008 \cdot 3600 \cdot 10^{-4}}{0,001} \text{ Вт} = 9 \text{ Вт}.$$

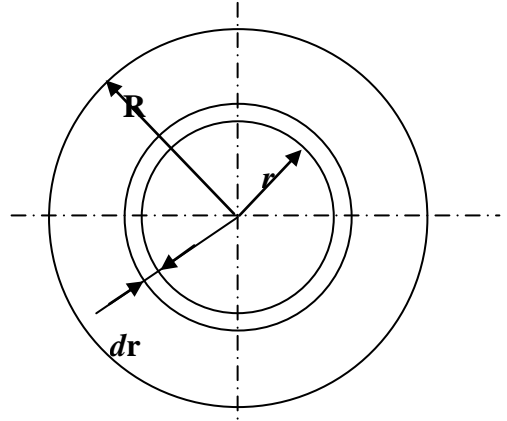


Рис.1.89

Глава 2. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

2.1. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

29. Четыре точечных заряда размещены в вершинах квадрата со стороной $b = 0,1$ м (рис.2.5). Заряды в вершинах 1 и 2 - положительные, а в вершинах 3 и 4 - отрицательные. Величины всех зарядов по модулю одинаковые и равны $Q = 10$ нКл. Определить: 1) напряженность и 2) потенциал электрического поля в центре квадрата.

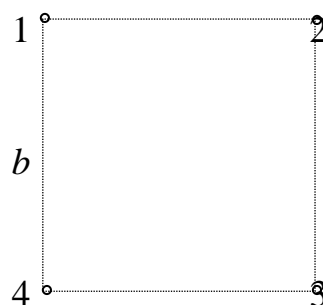


Рис.2.5

Решение

1. Величина напряженности электрического поля каждого из рассматриваемых зарядов в центре квадрата одинакова по величине и равна

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r^2}, \quad \text{где } r = b \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ — половина диагонали квадрата.}$$

Направления векторов \vec{E}_i указаны на рис.2.6. Результирующий вектор \vec{E} находим как векторную сумму этих векторов (в данном случае как диагональ квадрата со стороной $2E_i$) $E = 2E_i \sqrt{2}$.

$$\text{Таким образом, } E = 2\sqrt{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{\sqrt{2}Q}{\pi\epsilon_0 b^2}.$$

$$\text{Выполним расчет } E = \frac{\sqrt{2} \cdot 10 \cdot 10^{-9}}{3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} \text{ кВ/м} = 51 \text{ кВ/м.}$$

2. Потенциалы полей зарядов суммируются как скалярные величины

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_4}{r}$$

$$\text{или с учетом знаков } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} (1 + 1 - 1 - 1) = 0.$$

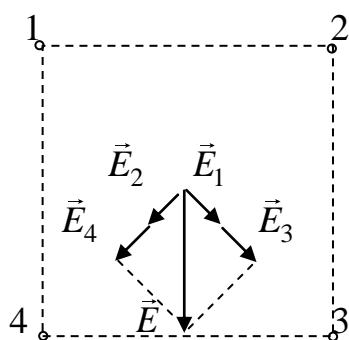


Рис. 2.6

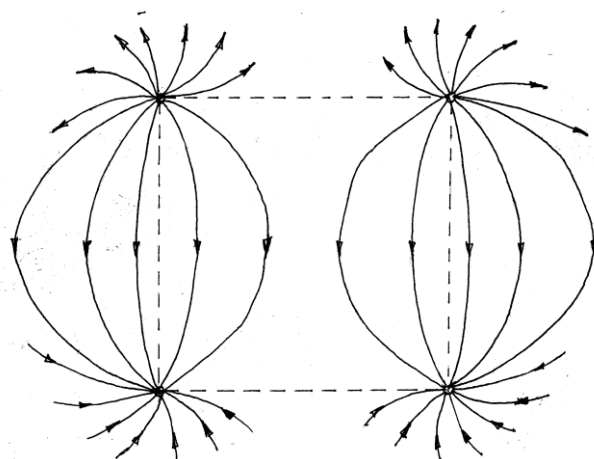


Рис. 2.7

Замечание: В подобных задачах представляет интерес дать качественное изображение линий напряженности электрического поля. При построении картины линий поля необходимо учитывать, что между разноименными зарядами линии поля располагаются по типу линий диполя (рис. 2.3б), а между одноименными по типу рис. 2.3а. Для рассматриваемой системы зарядов приближенная картина линий поля приведена на рис. 2.7.

30. Тонкий стержень длиной $L = 8$ см заряжен с линейной плотностью $\tau = 400$ нКл/м. Найти для точки, расположенной на перпендикуляре к стержню, проведенном через один из его концов, на расстоянии $b = 6$ см от этого конца:

1. Напряженность электрического поля.
2. Потенциал электрического поля.

Решение

1. Выделим на стержне физически малый участок длиной $d l$ (рис. 2.8^а). Находящийся на нем заряд $d Q = \tau d l$ можно рассматривать как точечный и тогда напряженность поля этого элемента определим по формуле (2.6)

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dl}{r^2} \vec{e}_r.$$

Прежде чем интегрировать это выражение (см. формулу (2.9)), необходимо две переменные величины в правой части $d l$ и r выразить через одну. Для этого воспользуемся тригонометрическими равенствами

$$r = \frac{b}{\cos \alpha} \quad \text{и} \quad l = b \operatorname{tg} \alpha.$$

Дифференцируя последнее, получим $d l = b \frac{1}{\cos^2 \alpha} d \alpha$.

2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ ГАУССА

31. Бесконечный пустотелый цилиндр радиуса $R = 10$ см имеет на своей поверхности равномерно распределенный заряд. На единицу длины цилиндра приходится $\tau = 1$ нКл/м электрического заряда.

1. Построить график изменения напряженности электрического поля в зависимости от расстояния до оси цилиндра $E = E(r)$.
2. Найти разность потенциалов между осью цилиндра и точкой A , находящейся на расстоянии $d = 20$ см от нее.

Решение

1. Из соображений симметрии, очевидно, что вектор напряженности электрического поля может быть направлен только радиально. Заметим, что напряженность поля внутри и снаружи цилиндра может иметь различный закон изменения с расстоянием от оси. Поэтому исследуем отдельно область 1 – внутри цилиндра и область 2 – снаружи.

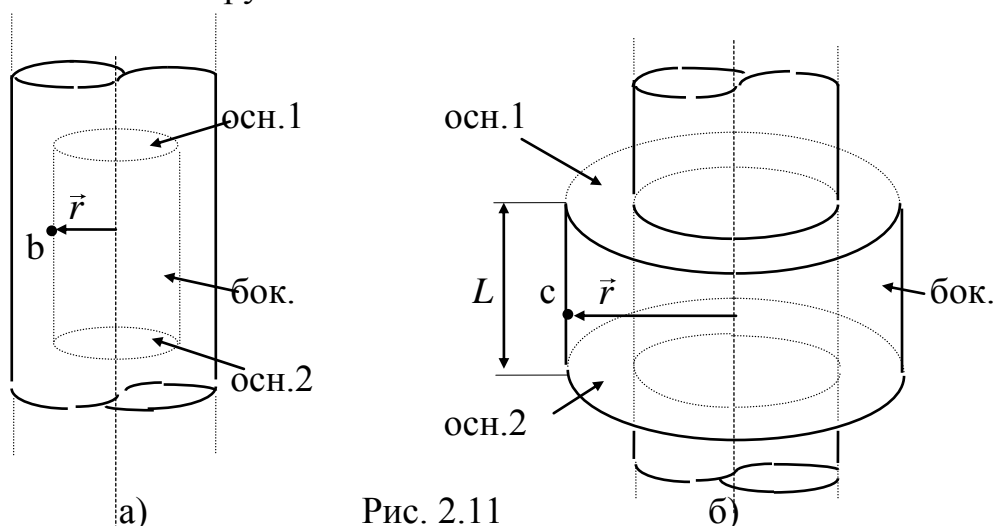


Рис. 2.11

Определим напряженность в произвольной точке b , находящейся внутри заданного цилиндра (рис.2.11а). Выберем замкнутую поверхность в виде второго цилиндра, ось которого совпадает с осью заданного цилиндра (коаксиальные цилиндры). Второй цилиндр имеет боковую поверхность и два основания.

Его радиус равен расстоянию от оси до точки b . Таким образом, точка b находится на боковой поверхности второго (вспомогательного) цилиндра. Внутри него зарядов нет. Поэтому теорема Гаусса запишется в виде $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 0$,

где интеграл по замкнутой поверхности S можно представить в виде суммы интегралов по основаниям и боковой поверхности

$$\int_{\text{осн1}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\text{осн2}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\text{бок}} \vec{E} d\vec{S} = 0. \quad (*)$$

Так как вектор напряженности радиален, то скалярные произведения $\vec{E}d\vec{S}$ в первых двух интегралах равны нулю, а в последнем $-\vec{E}d\vec{S} = E dS \cdot \cos 0 = E dS$. Из соображения симметрии напряженность поля в точках, принадлежащих боковой поверхности, должна быть одинаковой. Тогда равенство (*) примет вид

$$E \int_{\text{бок}} dS = 0,$$

что может иметь место только при выполнении условия $E = 0$. Таким образом, в любой точке внутри заряженного по поверхности цилиндра напряженность электрического поля равна нулю.

Для определения напряженности в произвольной точке “с” снаружи заданного цилиндра поступим аналогично. Выберем вспомогательную замкнутую поверхность в виде третьего коаксиального цилиндра высотой L (рис. 2.11б). Его радиус равен расстоянию от точки “с” до оси заданного цилиндра. Внутри вспомогательной поверхности интегрирования находится заряд $Q = \tau L$. Поэтому теорему Гаусса для нее запишем в виде

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \tau L.$$

Интеграл в левой части этого равенства по аналогии с предыдущим случаем представим в виде суммы таких же трех интегралов, из которых не нулевым является только интеграл по боковой поверхности (рис. 2.11б)

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{\text{осн1}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\text{осн2}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{\text{бок}} \vec{E} d\vec{S} = \int_{\text{бок}} E dS = E \int_{\text{бок}} dS,$$

где последний интеграл равен площади боковой поверхности цилиндра $S_{\text{бок}} = 2\pi rL$. Тогда из теоремы Гаусса получим

$$E 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} \tau L.$$

После преобразований находим

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{при } r > R.$$

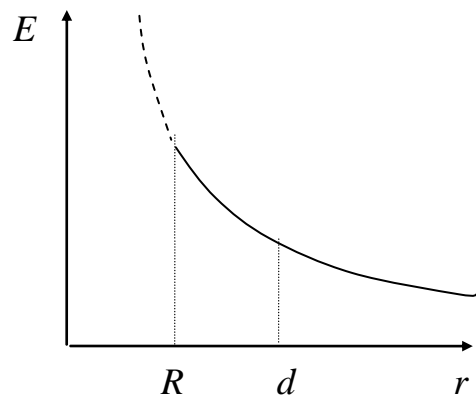


Рис. 2.12

График изменения напряженности электрического поля с расстоянием от оси цилиндра приведен на рис. 2.12. Максимальное значение напряженности поля принимает при $r = R$

$$E_{\text{max}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

2. Так как внутри цилиндра поле отсутствует, то разность потенциалов между осью и заданной точкой А равна разности потенциалов между поверхностью цилиндра и этой точкой

$$\varphi_0 - \varphi_A = \varphi_R - \varphi_A = \int_R^d E dr = \int_R^d \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln r \Big|_R^d.$$

После подстановки пределов интегрирования получим

$$\Delta\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{R}.$$

Произведем расчет $\Delta\varphi = \frac{1 \cdot 10^{-9} \ln 2}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \text{ В} = 12,5 \text{ В}.$

32. В соответствии с выводами квантовой теории атом водорода можно смоделировать в виде положительного ядра (протона, размерами которого в данной задаче можно пренебречь) и “облака” отрицательного заряда электрона, объемная плотность которого изменяется с расстоянием от ядра по закону

$$\rho = -\frac{e}{\pi R^3} e^{-\frac{2r}{R}},$$

где r – расстояние от центра ядра, $R = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м (характерный параметр, называемый радиусом первой боровской орбиты электрона в атоме водорода), $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд. Найти напряженность электрического поля на расстоянии R от ядра.

Решение

Выберем замкнутую сферическую поверхность с центром в ядре атома и радиусом равным R . Из соображений симметрии во всех точках этой поверхности вектор напряженности электрического поля имеет одинаковую величину и перпендикулярен к поверхности (рис. 2.13). Поэтому теорема Гаусса для выбранной поверхности S запишется в виде

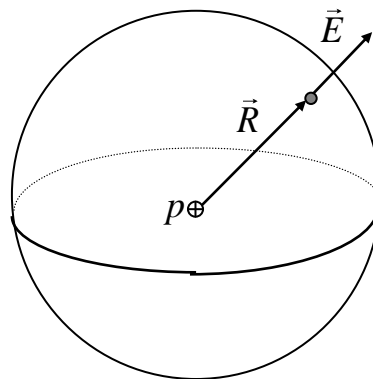


Рис. 2.13

$$E \oint_S dS = \frac{1}{\epsilon_0} Q,$$

где Q – суммарный заряд, находящийся внутри выбранной сферы, т.е. положительный заряд протона равный $+e$ и отрицательный заряд электронного облака Q_e . Последний определим интегрированием плотности отрицательного заряда электронного “облака” по внутреннему объему выбранной сферы.

Тогда $Q = e + Q_e = e + \int_V \rho dV$.

Учитывая сферическую симметрию элемент объема dV можно представить в виде $dV = 4\pi r^2 dr$. Тогда

$$Q_e = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = -\frac{e}{\pi R^3} 4\pi \int_0^R e^{-\frac{2r}{R}} r^2 dr.$$

Для последующих преобразований можно использовать метод интегрирования по частям или воспользоваться математическими справочниками. Предоставим читателям сделать это самостоятельно. В результате получим

$$Q_e = -e(1 - 5e^{-2}) = -0,323e, \quad Q = e + Q_e = 0,677e.$$

Подставим это значение в теорему Гаусса

$$E \oint_S dS = \frac{1}{\epsilon_0} 0,677e,$$

где интеграл в левой части равен площади поверхности сферы $S = 4\pi R^2$.

Тогда $E 4\pi R^2 = \frac{1}{\epsilon_0} 0,677e$ или $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,677e}{R^2}$.

Произведем вычисления

$$E = \frac{0,677 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,53^2 \cdot 10^{-20}} \text{ В/м} \approx 3,5 \cdot 10^{11} \text{ В/м}.$$

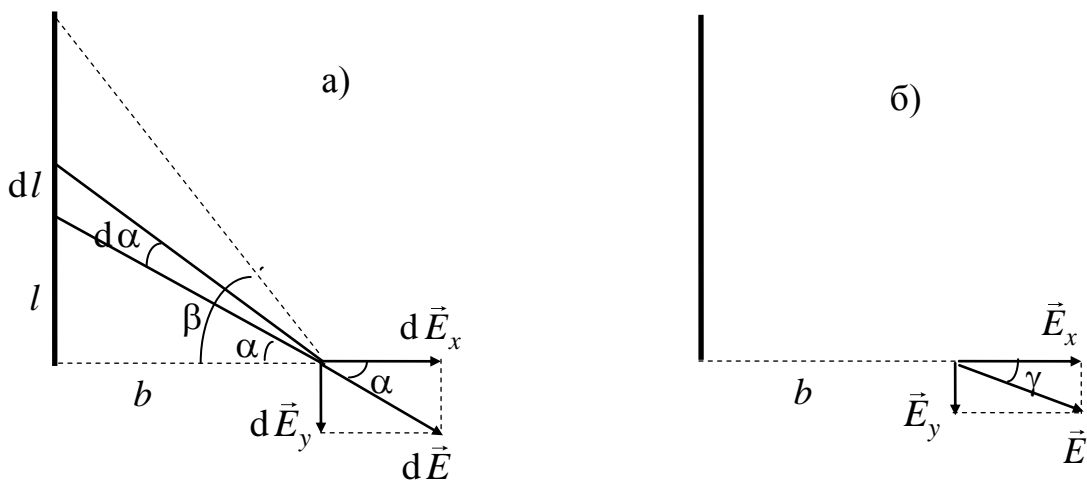


Рис. 2.8

Подставляя полученные выражения для r и dl в формулу для напряженности, получим

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau b \cos^2 \alpha}{b^2 \cos^2 \alpha} d\alpha \cdot \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{b} d\alpha \cdot \vec{e}_r.$$

Представим вектор $d\vec{E}$ как сумму двух составляющих: $d\vec{E}_x$ – перпендикулярную стержню и $d\vec{E}_y$ – параллельную ему. Из рис.2.8^a видно, что $dE_x = \cos \alpha dE$, а $dE_y = \sin \alpha dE$.

Тогда интегрируя эти выражения, получим

$$E_x = \int_0^\beta \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{b} \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{b} \int_0^\beta \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{b} \sin \beta,$$

$$E_y = \int_0^\beta \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{b} \sin \alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{b} \int_0^\beta \sin \alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{b} (1 - \cos \beta).$$

Из рис. 2.8^a следует, что

$$\sin \beta = \frac{L}{\sqrt{L^2 + b^2}} = 0,8, \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{L^2 + b^2}} = 0,6.$$

Произведем вычисления

$$E_x = \frac{400 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^{-2}} \cdot 0,8 \text{ В/м} = 48,0 \text{ кВ/м},$$

$$E_y = \frac{400 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^{-2}} \cdot (1 - 0,6) \text{ В/м} = 24,0 \text{ кВ/м}.$$

Величину напряженности электрического поля определим по формуле

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

После подстановки полученных значений и вычисления получим $E = 53,7$ кВ/м. Направление вектора напряженности зададим углом γ (рис.2.8^b), который найдем по формуле $\operatorname{tg} \gamma = \frac{E_y}{E_x} = 0,5$.

2. Для вычисления потенциала поля в заданной точке используем формулу (2.14). Подставляя в нее полученные выше выражения для r и $d l$, получим

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\beta \frac{\tau b \cos \alpha}{b \cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\beta \frac{1}{\cos \alpha} d\alpha =$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \Big|_0^\beta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Так как $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1$, то $\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0$. Используя тригонометрические формулы, сделаем преобразования

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sqrt{1 - \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{1 + \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{\sqrt{1 + \sin\beta}}{\sqrt{1 - \sin\beta}} = 3.$$

Тогда $\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln 3$.

Произведем вычисления $\varphi = \frac{400 \cdot 10^{-9} \ln 3}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \text{ В} = 3960 \text{ В}$.

2.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ

33(a). Три точечных заряда расположены в вершинах правильного треугольника со стороной $a = 10 \text{ см}$ (рис. 2.18). Величины зарядов $Q_1 = 10 \text{ нКл}$, $Q_2 = 10 \text{ нКл}$, $Q_3 = -20 \text{ нКл}$. Найти:

1. Максимальное значение модуля напряженности электрического поля на расстоянии $r_0 = 1 \text{ м}$ от центра треугольника.
2. Максимальное значение модуля потенциала на расстоянии $r_0 = 1 \text{ м}$ от центра треугольника.

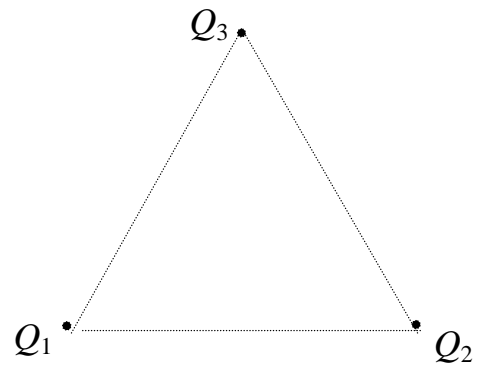


Рис. 2.18

Решение

Выберем систему координат, как показано на рис. 2.19. Поле нейтральной системы зарядов на больших расстояниях от нее определяется величиной ее дипольного момента. Формулу (2.19) в проекциях на выбранные оси координат (с учетом, что $x_3 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$) запишем в виде

$$p_x = Q_1 \left(-\frac{a}{2}\right) + Q_2 \frac{a}{2} = 0,$$

$$p_y = Q_3 a \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

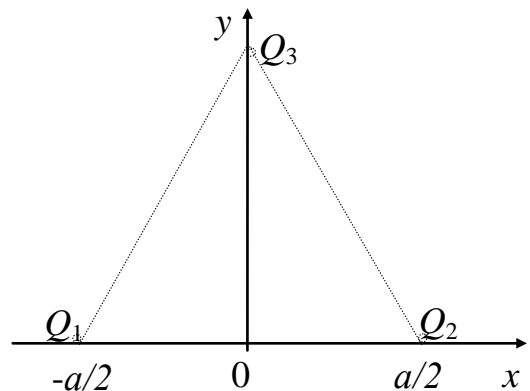


Рис. 2.19

Таким образом, электрический дипольный момент системы направлен вдоль оси Oy и, с учетом знака заряда, его проекция на эту ось равна

$$p_y = -20 \cdot 10^{-9} \cdot 0,1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ Кл}\cdot\text{м} = -17,3 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}\cdot\text{м}.$$

В соответствии с формулами (2.20) и (2.21) максимальные значения модулей напряженности и потенциала будут при $\vartheta_1 = 0$ и $\vartheta_2 = \pi$, т.е. в точках, находящихся на оси Oy

$$E_{\max} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \varphi_{\max} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Так как $p = |Q_3|a \frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$$E_{\max} = \frac{|Q_3|a\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \varphi_{\max} = \frac{|Q_3|a\sqrt{3}}{8\pi\epsilon_0 r^2}.$$

После вычислений получим

$$E_{\max} = 31,2 \text{ В/м}, \quad \varphi_{\max} = 15,6 \text{ В}.$$

33(б). Диполь с электрическим моментом $p = 2 \text{ нКл}\cdot\text{м}$ находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 30 \text{ кВ/м}$. Направление вектора \vec{p} составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с направлением силовых линий электрического поля. Определить:

1. Момент сил действующих на диполь.
2. Произведенную ими работу при повороте диполя на угол $\beta = 30^\circ$.

Решение

1. В соответствии с формулой (2.22) находим момент сил

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}] \quad \text{или} \quad M = pE \sin \alpha.$$

Его направление таково, что он стремится повернуть диполь в сторону совпадения направлений векторов \vec{p} и \vec{E} (рис. 2.20а). Произведем расчет

$$M = 2 \cdot 10^{-9} \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ Н}\cdot\text{м} = 52 \cdot 10^{-6} \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

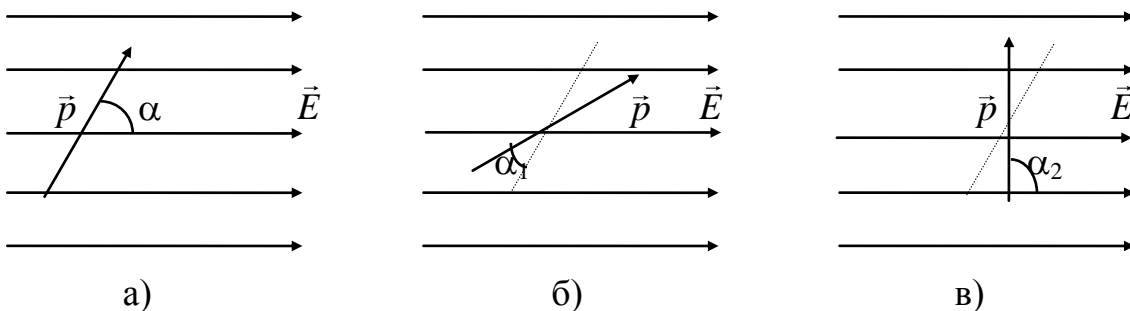


Рис. 2.20

2. Из исходного положения (рис. 2.20а) диполь можно повернуть на угол $\beta = 30^\circ$ двумя способами: по часовой стрелке (рис. 2.20б) до угла $\alpha_1 = \alpha - \beta = 30^\circ$ или против часовой стрелки до угла $\alpha_2 = \alpha + \beta = 90^\circ$ (рис. 2.20в).

В первом случае диполь будет поворачиваться под действием механического момента сил поля, и работа этих сил положительная. Во втором случае поворот может быть осуществлен только под действием внешних сил, а механический момент сил поля препятствует этому повороту. Следовательно, работа сил поля при этом будет отрицательная. В обоих случаях работу определим через изменение потенциальной энергии диполя в электрическом поле

$$A = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Используя формулу (2.23), в первом случае можно записать

$$A_1 = -pE \cos 60^\circ + pE \cos 30^\circ,$$

а во втором

$$A_2 = -pE \cos 60^\circ + pE \cos 90^\circ.$$

Произведя расчет, получим $A_1 = 22,0$ мкДж, $A_2 = -30,0$ мкДж.

2.4. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ

34. Три одинаковые плоские металлические пластины площадью $S = 100 \text{ см}^2$ и толщиной $d = 1$ мм каждая расположены параллельно друг другу (рис. 2.22). Расстояние между соседними пластинами равно их толщине. Крайние пластины подсоединены к электрической цепи. Определить емкость этой системы проводников. Принять, что диэлектрическая проницаемость окружающей пластины среды $\epsilon = 1$.

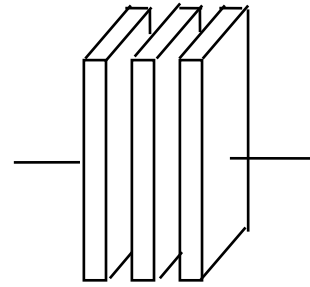


Рис. 2.22

Решение

Воспользуемся формулой (2.25). Предположим, что крайним пластинам через электрическую цепь сообщили заряды $+Q$ и $-Q$. Так как пластины расположены близко друг от друга, то их можно считать бесконечными. Внутри пластин электрическое поле отсутствует, а снаружи каждая из заряженных пластин создает электрическое поле напряженностью

$$E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} = \frac{Q}{2\epsilon_0\epsilon S},$$

где σ - поверхностная плотность зарядов на пластинах. Направление векторов напряженности полей пластин таково, что при их сложении вне зазоров между пластинами результирующее поле будет нулевым, а в зазорах напряженность будет равна $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 2\vec{E}_+$. Соответственно величина напряженности

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0\epsilon S}.$$

Разность потенциалов между соседними пластинами при однородном поле определим по формуле

$$\Delta\varphi = Ed.$$

Тогда разность потенциалов между крайними пластинами

$$\Delta\varphi_{\text{общ}} = 2Ed = \frac{2Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

По определению $C = \frac{Q}{\Delta\varphi_{\text{общ}}}$. Тогда $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{2d}$.

Произведем расчет

$$C = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3}} \text{ Ф} \approx 44,2 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 44,2 \text{ пФ}.$$

2.5. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

35. Модель некоторой молекулы представляет из себя шесть электрических зарядов, расположенных в вершинах правильного шестиугольника со стороной $a = 3 \cdot 10^{-10}$ м (рис. 2.24). Заряды Q_1, Q_3 и Q_5 - положительные, а заряды Q_2, Q_4 и Q_6 - отрицательные. Величины всех зарядов одинаковы и равны элементарному заряду $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Определить изменение энергии взаимодействия системы зарядов молекулы, если заряды Q_1 и Q_3 поменять местами с зарядами Q_4 и Q_6 .

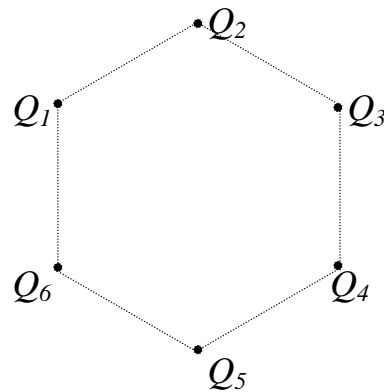


Рис. 2.24

Решение

Энергия взаимодействия заданной системы зарядов является суммой потенциальных энергий взаимодействия 15 пар зарядов. На рис. 2.25 соответствующие пары зарядов одинакового знака соединены пунктирными линиями, а пары зарядов разных знаков соединены сплошными линиями. Энергии взаимодействия между 1-м и 2-м, 2-м и 3-м, 3-м и 4-м, 4-м и 5-м, 5-м и 6-м, 6-м и 1-м зарядами одинаковые по величине

$$W_{12} = W_{23} = W_{34} = W_{45} = W_{56} = W_{61} = - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{a} < 0.$$

Энергии взаимодействия между этими зарядами отрицательные, так как один из участвующих во взаимодействии зарядов отрицательный, а другой положительный.

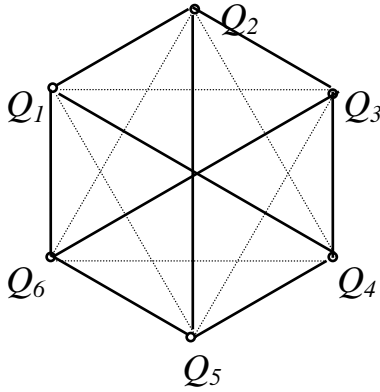


Рис.2.25

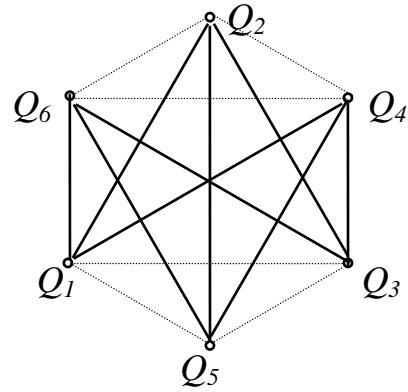


Рис.2.26

Аналогично одинаковыми и отрицательными являются энергии взаимодействия между 1-м и 4-м, 2-м и 5-м, 3-м и 6-м зарядами

$$W_{14}=W_{25}=W_{36}=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{2a}<0.$$

Энергии взаимодействия между одноименными зарядами 1-м и 3-м, 2-м и 4-м, 3-м и 5-м, 4-м и 6-м, 5-м и 1-м, 6-м и 2-м положительные и равны

$$W_{13}=W_{24}=W_{35}=W_{46}=W_{51}=W_{62}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a\sqrt{3}}>0.$$

Полная электростатическая энергия взаимодействия в исходной конфигурации равна

$$\begin{aligned} W_1 &= 6W_{12} + 6W_{13} + 3W_{14} = \\ &= -6\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a} + 6\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a\sqrt{3}} - 3\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{2a}. \end{aligned}$$

После обмена местами расположение зарядов будет соответствовать рис. 2.26. Теперь

$$W_{16}=W_{34}=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a}<0,$$

$$W_{26}=W_{24}=W_{35}=W_{51}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a}>0,$$

$$W_{12}=W_{23}=W_{56}=W_{54}=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a\sqrt{3}}<0,$$

$$W_{46}=W_{13}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a\sqrt{3}}>0,$$

$$W_{14}=W_{25}=W_{36}=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{2a}<0.$$

Полная электростатическая энергия взаимодействия во второй конфигурации равна

$$\begin{aligned}
 W_2 &= 2W_{16} + 4W_{26} + 4W_{12} + 2W_{46} + 3W_{14} = \\
 &= -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} + 4 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} - 4 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a\sqrt{3}} + \\
 &\quad + 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a\sqrt{3}} - 3 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2a}.
 \end{aligned}$$

Находим, что при изменении конфигурации энергия взаимодействия системы зарядов повысится на величину

$$\begin{aligned}
 \Delta W &= W_2 - W_1 = \\
 &= 8 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} - 8 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a\sqrt{3}} = 8 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right).
 \end{aligned}$$

После вычисления получим

$$\Delta W = 26,0 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 16,2 \text{ эВ}.$$

36. Определить энергию электростатического поля металлического шара, которому сообщен заряд $Q = 100 \text{ нКл}$, если радиус шара $R = 10 \text{ см}$.

Решение

В металлическом шаре заряд распределяется по поверхности. Электрическое поле внутри шара отсутствует, а снаружи изменяется по закону

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

где r – расстояние от центра шара. Энергию поля находим интегрированием плотности энергии по всей области существования поля, т.е. в пределах от R до бесконечности

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV = \int_V \frac{\epsilon_0 Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} dV.$$

Учитывая сферическую симметрию, элемент объема dV можно представить в виде $dV = 4\pi r^2 dr$. Тогда

$$W = \int_R^\infty \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_R^\infty = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Произведем расчет

$$W = \frac{(1 \cdot 10^{-7})^2}{8 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1} \text{ Дж} = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж} = 450 \text{ мкДж}.$$

37. Электрон начинает двигаться в однородном электрическом поле из точки, потенциал которой $\phi_1 = 8,6 \text{ В}$, и за время $t = 0,1 \text{ мкс}$ пролетает рас-

стояние $S = 10$ см. Определить напряженность электрического поля, действующего на электрон, и потенциал φ_2 конечной точки этого пути.

Решение

Из условия следует, что начальная скорость электрона равна нулю. Тогда пройденный путь S и ускорение a связаны кинематической формулой

$$S = \frac{at^2}{2}. \quad \text{Из нее выразим ускорение } a = \frac{2S}{t^2}.$$

Зная ускорение, определим силу, действующую на электрон $\vec{F} = m\vec{a}$, которая связана с действующей на заряд электрона $q_e = -e$ напряженностью электрического поля $\vec{F} = -e\vec{E}$. Направление вектора напряженности противоположно направлению его движения. Находим модуль напряженности электрического поля $E = \frac{F}{e} = \frac{ma}{e} = \frac{2mS}{et^2}$.

Разность потенциалов однородного поля между начальной и конечной точками определим, воспользовавшись формулой (2.18). В однородном поле $\varphi_1 - \varphi_2 = \vec{E}\Delta\vec{r}$. При этом необходимо учесть, что электрон, имея отрицательный заряд, ускоряется и движется в направлении, противоположном линиям напряженности поля (рис.2.27).

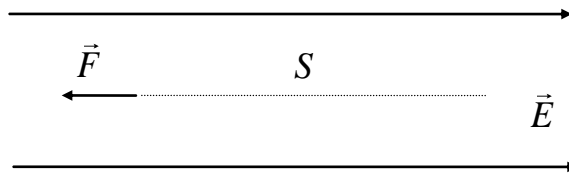


Рис.2.27

Поэтому $\vec{E}\Delta\vec{r} = ES \cos \pi = -ES$. Тогда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -ES \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \varphi_1 + ES = \varphi_1 + \frac{2mS^2}{et^2}.$$

Выполним расчет

$$E = \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 0,1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-14}} \text{ В/м} \approx 114 \text{ В/м},$$

$$\varphi_2 \approx (8,6 + 11,4)\text{В} = 20 \text{ В}.$$

Замечание: Аналогичный результат получим, воспользовавшись законом сохранения механической энергии (2.29)

$$-e(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{mv^2}{2},$$

где скорость v в конце пути S определим по формуле $v = 2S/t$. Тогда

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{mv^2}{2e} = \varphi_1 + \frac{2mS^2}{et^2}.$$

2.6. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ

38(а). Электрический ток силой $I = 8$ А протекает по стальной проволоке круглого сечения. Радиус сечения $r = 0,5$ мм. Рассчитать скорость направленного движения (дрейфа) электронов в проволоке. Принять концентрацию электронов проводимости равной 10^{29} м⁻³.

Решение

Используя формулу (2.31), выразим среднюю скорость направленного движения через плотность тока

$$\langle v \rangle = \frac{j}{en}, \quad \text{где} \quad j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r^2}.$$

Тогда

$$\langle v \rangle = \frac{I}{en\pi r^2}.$$

Произведем вычисления получим

$$\langle v \rangle = \frac{8}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{29} \cdot 3,14 \cdot 0,25 \cdot 10^{-6}} \text{ м/с} \approx 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}.$$

38(б). В эксперименте, аналогичном опыту Стюарта и Толмена, катушка из $N = 400$ витков медной проволоки приводилась во вращательное движение вокруг своей оси с частотой $\nu = 100$ с⁻¹. Концы проволоки с помощью двух скользящих контактов присоединялись к баллистическому гальванометру. Диаметр катушки $d = 50$ см, общее сопротивление всей цепи $R = 50$ Ом. При резком затормаживании катушки через гальванометр прошел заряд $Q = 1,1 \cdot 10^{-8}$ Кл. Оценить удельный заряд носителей тока в меди q/m .

Решение

Кинетическая энергия движения электронов после торможения катушки переходит в тепловую, которую в соответствии с законом Джоуля–Ленца для оценки искомой величины представим в виде

$$I_{\text{cp}}^2 R t = Q I_{\text{cp}} R = Q j_{\text{cp}} S R,$$

где I_{cp} – средний ток, текущий в цепи за время затухания t , j_{cp} – соответствующая средняя плотность тока. Считая, что скорость носителей тока равномерно убывает от v_{max} до 0, выразим среднюю плотность тока через среднюю скорость $\langle v \rangle = 0,5 v_{\text{max}}$

$$j_{\text{cp}} = qn \langle v \rangle = 0,5 qn v_{\text{max}}.$$

Закон сохранения энергии запишем в виде

$$N_{\text{эл}} \frac{m v_{\text{max}}^2}{2} = 0,5 qn v_{\text{max}} Q S R,$$

где $N_{эл}$ -общее число носителей тока в катушке. Оно связано с их концентрацией n и объемом проволоки $N_{эл} = nLS = nN\pi dS$. Скорость носителей тока перед торможением зависит от частоты вращения $V_{max} = \pi d v$. Подставив эти равенства в закон сохранения энергии, получим

$$nN\pi^2 dS m d v = Q q n S R.$$

После сокращений и преобразований находим искомую величину

$$\frac{q}{m} = \frac{\pi^2 d^2 v N}{Q R}.$$

Произведем вычисления

$$\frac{q}{m} = \frac{3,14^2 \cdot 0,5^2 \cdot 100 \cdot 400}{1,1 \cdot 10^{-8} \cdot 50} \text{ Кл/кг} = 1,79 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}.$$

Сравните полученное значение с удельным зарядом электрона.

2.7. СИЛА ЛОРЕНЦА И СИЛА АМПЕРА

39(a). Протон, ускоренный разностью потенциалов $U = 500$ кВ, влетает в область однородного поперечного магнитного поля (рис. 7.3). Ширина области $d = 10$ см, индукция магнитного поля $B = 0,51$ Тл. Под каким углом к первоначальному направлению движения протон вылетит из области поля? Масса протона $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Решение

Влетев в точке a в область однородного магнитного поля протон под действием силы Лоренца (2.34) начинает двигаться с центростремительным ускорением по дуге окружности (рис. 2.32). Запишем второй закон Ньютона для рассматриваемого случая, учитывая, что заряд протона равен элементарному заряду e

$$\vec{F}_M = m \vec{a}_c \quad \text{или} \quad e v B \sin \frac{\pi}{2} = \frac{m v^2}{R}.$$

Необходимое для расчетов значение скорости протона находим, применив закон сохранения энергии в области ускоряющего напряжения

$$eU = \frac{m v^2}{2}. \quad \text{Тогда} \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Подставив это выражение в формулу второго закона Ньютона, получим уравнение для расчета радиуса окружности

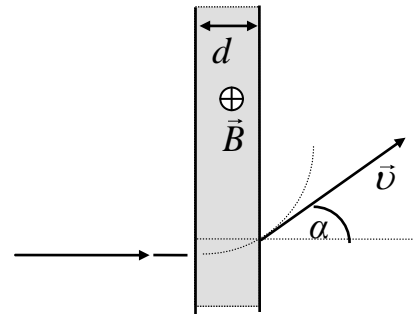


Рис. 2.32

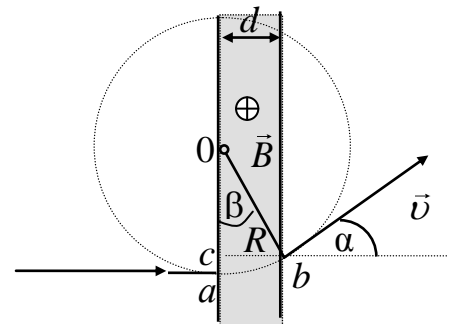


Рис. 2.33

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

После расчета имеем $R = 0,2$ м. Это значение больше ширины области магнитного поля $d = 0,1$ м и протон вылетит из нее, описав только часть окружности – дугу ab . Вылетев из области действия магнитного поля в точке b , протон будет двигаться прямолинейно по касательной к окружности. Угол отклонения протона α равен углу β , стягивающему дугу окружности между точками a и b (по двум взаимно перпендикулярным сторонам). Из треугольника Obc следует, что

$$\sin \alpha = \frac{d}{R} = \frac{1}{2}. \quad \text{Тогда } \alpha = \pi/6.$$

39(б). Электрон движется в однородном магнитном поле так, что вектор его скорости, равной $2 \cdot 10^6$ м/с, составляет с направлением вектора индукции магнитного поля угол $\alpha = \pi/3$. Определить шаг винтовой линии, по которой движется электрон, если $B = 0,01$ Тл.

Решение

Сложное движение электрона в данных условиях представим как сумму двух независимых движений: вдоль направления поля \vec{B} и в плоскости, перпендикулярной направлению поля \vec{B} . Для этого разложим вектор скорости на две составляющие $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$, где $\vec{v}_\perp \perp \vec{B}$ и $\vec{v}_\parallel \parallel \vec{B}$ (на рис. 2.34 вектор \vec{B} направлен параллельно оси Oz). Действующая на электрон сила Лоренца зависит только от \vec{v}_\perp и ее направление перпендикулярно полю \vec{B} . Поэтому в направлении вдоль поля \vec{B} ускорение электрона равно нулю, и он движется с постоянной скоростью \vec{v}_\parallel .

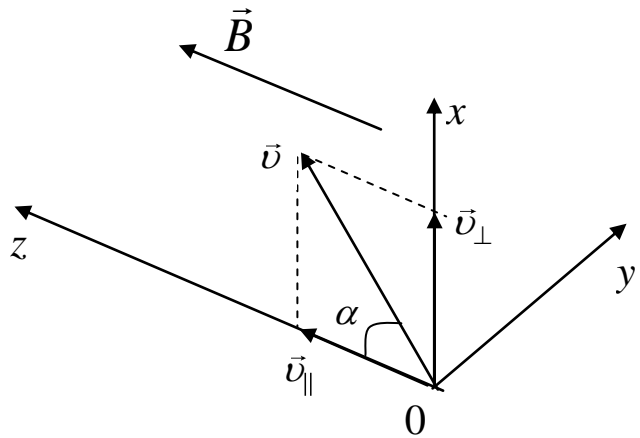


Рис. 2.34

Одновременно под действием силы Лоренца электрон движется по окружности в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{B} (на рис. 2.34 в плоскости Oxy). Результирующим является движение по винтовой линии (рис. 2.35). Шаг винтовой линии h (расстояние между соседними витками) равен перемещению электрона вдоль оси Oz за один период вращательного движения T со скоростью \vec{v}_\parallel , т.е. $h = v_\parallel T$. Для определения периода запишем второй закон Ньютона

$$\vec{F}_M = m\vec{a}_u \text{ или } e v_{\perp} B = \frac{m v_{\perp}^2}{R}.$$

Тогда $R = \frac{m v_{\perp}}{e B}$, а период

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m v_{\perp}}{e B v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{e B}.$$

Подставим полученное выражение для периода в формулу $h = v_{\parallel} T$:

$$h = \frac{2\pi m v_{\parallel}}{e B} = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{e B}.$$

После вычислений получим $h = 3,57 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,57 \text{ мм}$.

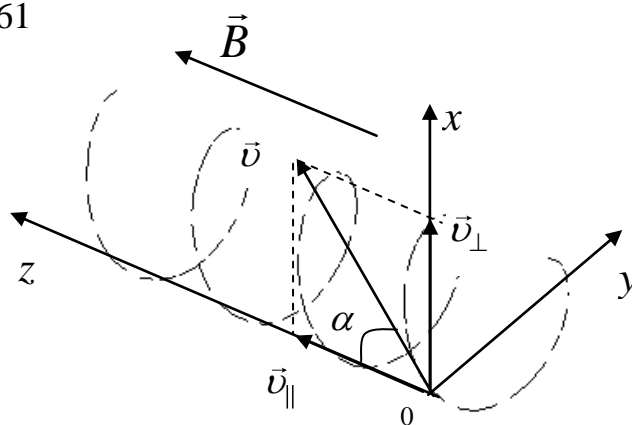


Рис. 2.35

40. Тонкое резиновое кольцо с электропроводным покрытием поместили в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости кольца. Индукция магнитного поля $B = 0,3 \text{ Тл}$. На сколько процентов увеличится радиус кольца, если по нему пропустить ток силой $I = 10 \text{ А}$? Коэффициент упругости кольца $k = 10 \text{ Н/м}$.

Решение

Разобьем кольцо сечением AC на две половины и определим результирующую силу Ампера, действующую на правую половину кольца (рис. 2.36). Для этого выделим на нем малый элемент длины $d\vec{l}$. По закону Ампера на него действует сила $d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$. Ее направление определим по правилу векторного произведения. В данном случае сила $d\vec{F}$ направлена радиально от центра кольца.

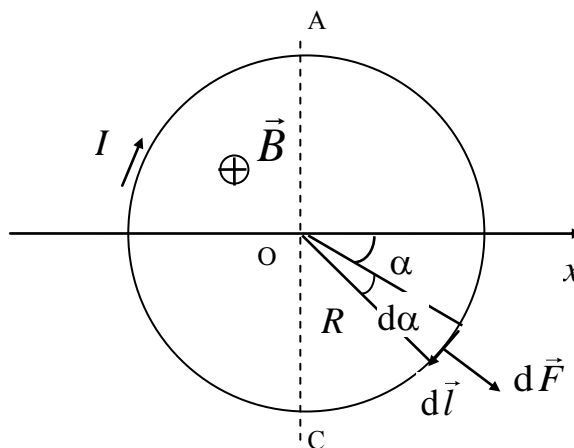


Рис. 2.36

Учитывая, что $d\vec{l} \perp \vec{B}$, запишем закон Ампера в виде $dF = IB dl$. Результирующая сила, действующая на правую сторону кольца, определим интегрированием $d\vec{F}$ по длине правой части L . Из соображений симметрии учитываем только проекцию этой силы dF_x . Тогда

$$F_x = \int_L dF_x = \int_L IB dl \cdot \cos \alpha.$$

Элемент дуги dl и угол $d\alpha$ связаны геометрическим соотношением $dl = R d\alpha$. С учетом этого перепишем выражение для F_x в виде

$$F_x = IBR \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = IBR \sin \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 2IBR.$$

На левую половину кольца действует такая же сила в противоположном направлении. Следовательно, в сечениях кольца А и С (и в любом другом) действует сила натяжения

$$F_H = \frac{F_x}{2} = IBR.$$

Эта сила равна силе упругости $F_{\text{упр}} = k\Delta L$, где изменение длины кольца равно $\Delta L = L_2 - L_1 = 2\pi(R - R_0)$. Тогда $IBR = 2\pi k(R - R_0)$ или

$$\frac{IB}{2\pi k} = 1 - \frac{R_0}{R}.$$

После преобразований получим $\frac{R}{R_0} = \frac{1}{1 - \frac{IB}{2\pi k}}$.

Выполним расчет $\frac{R}{R_0} = 1,05$. Таким образом, радиус кольца увеличился на 5%.

2.8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

41. Бесконечная заряженная плоскость, параллельная плоскости zOx , движется со скоростью $v_x = 0,5c$ (c – скорость света в вакууме) в лабораторной системе отсчета (рис.2.48). В собственной системе отсчета поверхностная плотность зарядов на плоскости равна 1 нКл/м^2 . Определить напряженность электрического поля и индукцию магнитного поля на расстоянии $L = 1 \text{ м}$ от плоскости в собственной и в лабораторной системах отсчета.

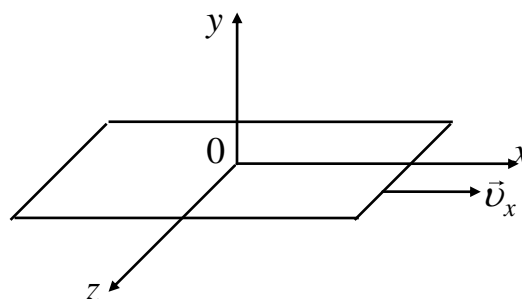


Рис. 2.48

Решение

В собственной системе отсчета плоскости заряды неподвижны и магнитного поля нет, а напряженность электрического поля равна

$$E'_y = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

где знак $+$ относится к области, где $y > 0$, а знак $-$ к области $y < 0$.

Тогда в соответствии с формулами преобразования компонент полей (2.38) получим:

$$\begin{aligned} E_x &= 0, & B_x &= 0, \\ E_y &= \gamma E'_y, & B_y &= 0, \\ E_z &= 0, & B_z &= \gamma \frac{1}{c^2} v_x E'_y, \end{aligned}$$

$$\text{где } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{0,5^2 c^2}{c^2}}} = 1,15.$$

На основании этих формул делаем вывод, что электрическое и магнитное поля заряженной движущейся плоскости не зависят от расстояния до плоскости, т.е.

однородны. Линии поля \vec{E} перпендикулярны плоскости (рис. 2.49), а линии поля \vec{B} параллельны ей и направлены перпендикулярно вектору скорости. Выполнив расчеты, находим

$$E' = E'_y = 56,5 \text{ В/м},$$

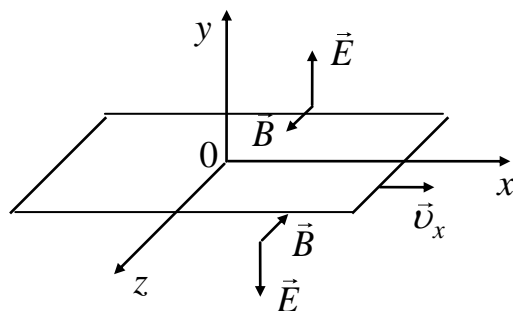


Рис. 2.49

$$E = E_y = \gamma E'_y = 65,3 \text{ В/м},$$

$$B = B_z = \gamma \frac{1}{c^2} v_x E'_y = 1,09 \cdot 10^{-7} \text{ Тл.}$$

42. Электрон и протон зарегистрированы в некоторый момент движущимися навстречу друг другу с одинаковыми скоростями $v = 10^6$ м/с. Расстояние между ними $b = 10^{-9}$ м. Определить индукцию магнитного поля в точке, находящейся на одинаковом расстоянии $L = 7,05 \cdot 10^{-10}$ м от обеих частиц.

Решение

Для определения магнитного поля частиц в нерелятивистском случае воспользуемся формулой (2.40). Поле протона в некоторой точке А

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_p [\vec{v}_p, \vec{e}_{pr}]}{L^2},$$

где \vec{e}_{pr} - единичный вектор, направленный от протона p к точке А.

Направление вектора магнитной индукции \vec{B}_p , определенное по векторному произведению, показано на рис. 2.50 (касательно к пунктирной окружности). Аналогично находим величину и направление вектора магнитной индукции поля электрона

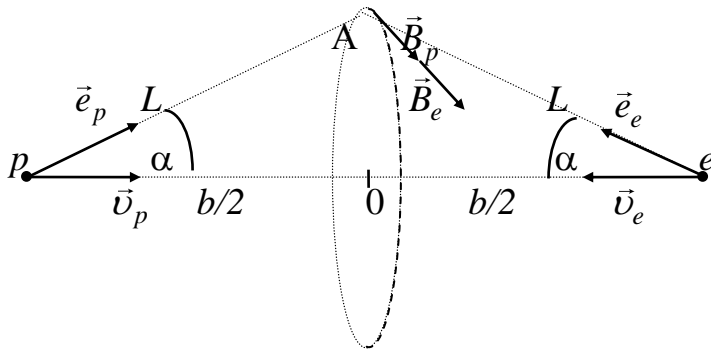


Рис. 2.50

$$\vec{B}_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_e [\vec{v}_e, \vec{e}_{er}]}{L^2}.$$

С учетом отрицательного знака заряда электрона направление его магнитного поля совпадает с направлением магнитного поля протона.

Заряд протона численно равен заряду электрона $q_p = -q_e = e$. Поэтому по величине оба вектора тоже равны: $B_p = B_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev}{L^2} \sin \alpha$.

Используя заданные в условии значения b и L , определим $\sin \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{b/2}{L} = \frac{b}{2L}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4L^2}}.$$

Тогда результирующее поле можно рассчитать по формуле

$$B = B_p + B_e = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev}{L^2} \sqrt{1 - \frac{b^2}{4L^2}}.$$

После расчета получим $B = 45,4$ мТл.

2.9. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТОКОВ

43. Длинный провод с током $I = 50$ А изогнут в точке O под углом 120° (рис. 2.54). Определить магнитную индукцию в точке A , расположенной на биссектрисе этого угла на расстоянии $d = 5$ см от точки O .

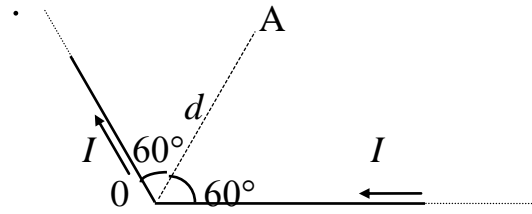


Рис. 2.54

Решение

В соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей магнитная индукция в точке A будет равна векторной сумме магнитных индукций \vec{B}_1 и \vec{B}_2 полей, создаваемых прямыми участками, т.е.

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Учтем, что для всех участков провода векторное произведение $d\vec{l} \times \vec{e}_r$ имеет одно направление, перпендикулярное плоскости рисунка. Поэтому суммирование и интегрирование выполним в скалярной форме: $B = B_1 + B_2$. Магнитную индукцию поля каждого из прямых участков находим с помощью формулы (2.43), приняв для правого участка $\varphi_1 = 0^\circ$ (считаем, что правый конец провода находится в бесконечности), $\varphi_2 = 120^\circ$ (см. рис. 2.53). Тогда

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \left(\cos 0 - \cos \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{3\mu_0 I}{8\pi r_0},$$

где $r_0 = d \sin \frac{\pi}{3}$. Таким образом

Для левого участка $\varphi_1 = 60^\circ$, а $\varphi_2 = 180^\circ$. Соответственно

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \pi \right) = \frac{3\mu_0 I}{8\pi r_0}.$$

$$\text{Суммируем поля} \quad B = B_1 + B_2 = \frac{6\mu_0 I}{8\pi d \sin \frac{\pi}{3}}.$$

$$\text{Выполним расчет} \quad B = \frac{6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{8\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 3,46 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$$

44. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течет ток силой $I = 50$ А, расположена прямоугольная рамка так, что две ее стороны длиной $b = 65$ см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из сторон равно ее ширине. Чему равен поток вектора магнитной индукции через рамку?

Решение

Находим поток Φ вектора магнитной индукции через поверхность площадью S

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS,$$

где B_n -компонента вектора \vec{B} , перпендикулярная элементу площади dS . Для определения магнитной индукции, создаваемой прямым бесконечным проводом с током, используем теорему о циркуляции (2.45)

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i.$$

Допустим, что точка А, в которой необходимо определить магнитную индукцию, находится на расстоянии x от провода (рис. 2.55).

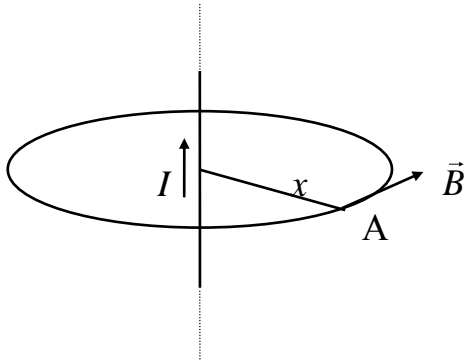


Рис. 2.55

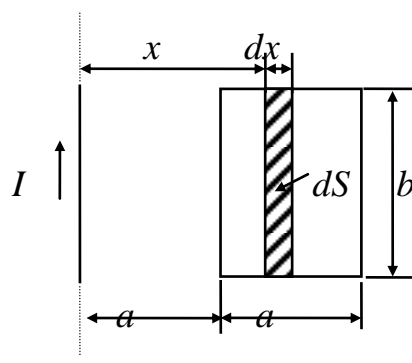


Рис. 2.56

Проведем через нее окружность с центром на оси провода. Линии поля магнитной индукции касательны к этой окружности. Поэтому $\vec{B} d\vec{l} = B dl$. В силу симметрии задачи на всем выбранном контуре величина вектора магнитной индукции \vec{B} постоянна и ее выносим за знак интеграла. Тогда левую часть теоремы о циркуляции запишем в виде

$$B \oint_L dl = B 2\pi x,$$

а правую

$$\mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 I.$$

Приравнивая эти выражения, получим $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$.

В нашем случае вектор магнитной индукции \vec{B} во всех точках плоскости рамки перпендикулярен к ней. Для вычисления потока вектора магнитной индукции через площадь рамки разобьем ее на узкие полоски длиной b , шириной dx и площадью $dS = b \cdot dx$ (рис. 2.56). В пределах одной полоски магнитную индукцию считаем постоянной, так как все части площади полоски равноудалены от провода (на расстояние x). С учетом сделанных замечаний элементарный поток магнитной индукции через площадь dS запишем в виде

$$d\Phi = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx.$$

Проинтегрировав полученное выражение в пределах от $x_1 = a$ до $x_2 = 2a$, находим поток

$$\Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{2a}{a} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln 2.$$

Произведя вычисления, получим $\Phi = 4,5 \cdot 10^{-6}$ Вб.

2.10. КОНТУР С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

45. Подвижный элемент гальванометра представляет из себя квадратную рамку, содержащую $N = 100$ витков тонкой проволоки, помещенную в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл. Плоскость рамки параллельна линиям индукции. Сторона рамки $a = 4$ см.

1. Определить механический момент сил, действующих на рамку со стороны магнитного поля, при пропускании по ней тока силой $I = 1$ мА.
2. Какую работу совершат эти силы при повороте рамки в положение с антипараллельными векторами магнитной индукции и дипольного магнитного момента?

Решение

1. Дипольный магнитный момент рамки равен сумме дипольных магнитных моментов всех витков $p_m = ISN = Ia^2 N$ и направлен перпендикулярно плоскости рамки и вектору \vec{B} (рис. 2.58). Тогда механический момент сил \vec{M} , определяемый по формуле (2.47), направлен так, что стремится повернуть вектор \vec{p}_m до совпадения с вектором \vec{B} . Его величину определим по формуле

$$M = p_m B \sin \frac{\pi}{2} = Ia^2 NB.$$

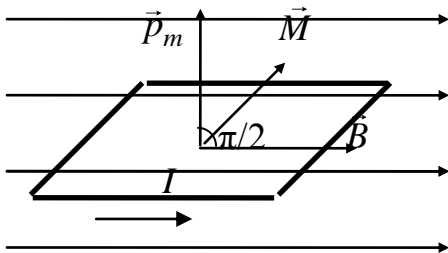


Рис. 2.58

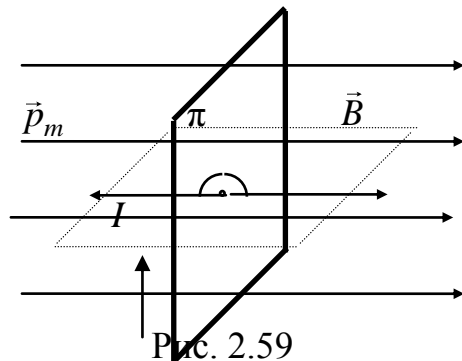


Рис. 2.59

2. Работа сил Ампера при повороте рамки из исходного положения ($\alpha_1 = \pi/2$) в требуемое ($\alpha_2 = \pi$) равна разности значений потенциальной энергии в начальном и конечном положении

$$A = W_{p1} - W_{p2} = (-p_m B \cos \pi/2) - (-p_m B \cos \pi) = -p_m B = -Ia^2 NB.$$

Произведя расчет, получим $M = 16$ мкН·м, $A = -16$ мкДж.

Замечание: Отрицательное значение работы объясняется тем, что действующий со стороны магнитного поля момент сил стремится повернуть рамку в противоположном направлении.

2.11. ЗАКОН ФАРАДЕЯ - ЛЕНЦА

46(a). Одним из простейших способов получения переменного тока является вращение проводящей рамки в однородном магнитном поле. Ось вращения OO' перпендикулярна вектору магнитной индукции и нормали к плоскости рамки (рис. 2.60).

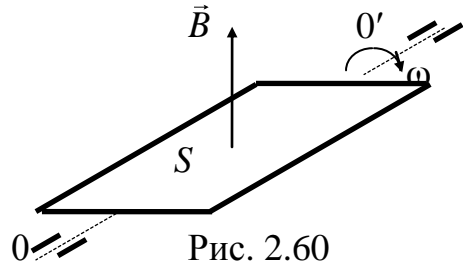


Рис. 2.60

Какова должна быть частота вращения рамки, чтобы максимальное значение возникающей в ней ЭДС достигало 20 В? Рамка содержит $N = 500$ витков проволоки, ее площадь $S = 42,5$ см², магнитная индукция $B = 0,1$ Тл.

Решение

При вращении рамки угол α между нормалью к ней и направлением вектора магнитной индукции изменяется по закону $\alpha = \omega t = 2\pi n t$, где n - искомая частота вращения. Соответственно магнитный поток, пронизывающий рамку, будет определяться формулой

$$\Phi = BS \cos 2\pi n t.$$

Тогда, используя формулу (2.56), получим

$$\varepsilon_i = -NBS \frac{d \cos 2\pi n t}{dt} = -NBS 2\pi n \sin 2\pi n t.$$

Следовательно, в рамке возникает переменная (синусоидальная) ЭДС с максимальным (амплитудным) значением $\varepsilon_{i \max} = NBS 2\pi n$. Искомое значение необходимой частоты вращения находим по формуле

$$n = \frac{\varepsilon_{i \max}}{2\pi NBS}.$$

После расчета получим $n = 15$ с⁻¹.

46(б). Изолированный металлический диск помещен в однородное магнитное поле. Ось диска совпадает с линией вектора магнитной индукции. Поток вектора магнитной индукции через поверхность диска $\Phi = 0,02$ Вб. Определить ЭДС индукции между центром и краем диска, возникающую при его вращении с частотой $n = 50$ с⁻¹.

Решение

Находим ЭДС между точками a и b (рис. 2.61) Формула (2.53) в данной ситуации оказывается непригодной, так как поток вектора магнитной индукции через любой контур, проходящий через точки ab , не изменяется. Для расчета возникающей ЭДС воспользуемся непосредственно формулой (2.51) для движущегося радиального участка измерительного контура (пунктирная линия). Векторы \vec{v} , \vec{B} и $d\vec{l} = d\vec{r}$ для каждого участка этой линии взаимно перпендикулярны.

$$\text{Тогда } \varepsilon_i = \int_0^R [\vec{v}, \vec{B}] d\vec{r} = \int_0^R vB dr = B \int_0^R v dr.$$

Скорость элемента dr , находящегося на расстоянии r от центра диска, связана с частотой вращения соотношением $v = \omega r = 2\pi nr$. Преобразуем интеграл

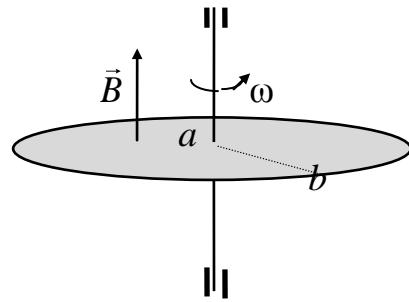


Рис. 2.61

$$\varepsilon_i = B \int_0^R 2\pi nr dr = 2\pi nB \int_0^R r dr = \pi nBr^2 = nBS = n\Phi$$

После расчета получим $\varepsilon_i = 1$ В.

2.12. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ. ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

47. Края соленоида с квадратным сечением соединили, образовав кольцо с внутренним радиусом $R = 10$ см (рис. 2.75). Сторона квадратного сечения соленоида $a = 10$ см. Определить энергию магнитного поля, запасенную внутри соленоида, если его обмотка имеет $N = 1000$ витков и по ней течет ток силой $I = 10$ А. Считать, что каркас соленоида изготовлен из материала с магнитной проницаемостью $\mu = 1$.

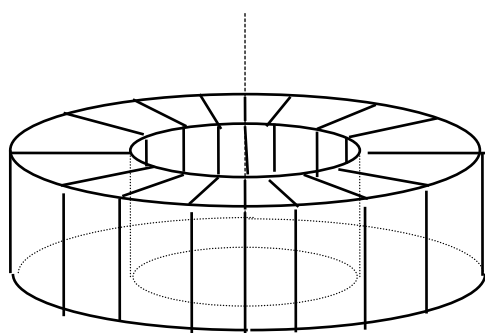


Рис. 2.75

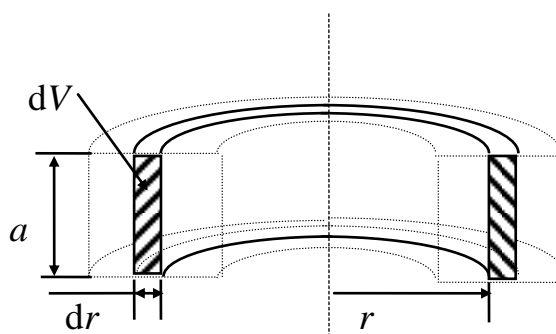


Рис. 2.76

Решение.

Величину магнитной индукции внутри соленоида определим с помощью теоремы о циркуляции (2.45). С этой целью выберем контур L в виде окружности радиусом r , проходящей внутри соленоида ($R < r < R+a$). Центр окружности находится на оси кольца. В этом случае теорему о циркуляции вектора \vec{B} (2.45) запишем в виде

$$B2\pi r = \mu_0 NI.$$

Следовательно, магнитное поле внутри соленоида зависит от расстояния до оси кольца r по закону

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

Запасенную энергию определим интегрированием плотности энергии магнитного поля (2.60) по объему соленоида V . При этом элементарный объем dV выберем в виде кольцевого слоя прямоугольного сечения толщиной dr и высотой a (рис. 2.76) : $dV = 2\pi rad r$. Тогда

$$\begin{aligned} W_B &= \int_R^{R+a} \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi rad r = \int_R^{R+a} \frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{4\pi^2 r^2 2\mu_0} 2\pi rad r = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} N^2 I^2 a \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \end{aligned}$$

Подставив значения величин и произведя вычисления, получим

$$W_B = 10^{-7} \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-1} \ln 2 \text{ Дж} \approx 0,7 \text{ мДж}.$$

48. На рис. 2.77 показана идеальная цепь, состоящая из источника постоянного тока с ЭДС $\varepsilon = 1,5 \text{ В}$ и катушки индуктивности $L = 0,1 \text{ Гн}$. Полное сопротивление цепи равно нулю. Какой ток будет в цепи спустя 1 с после замыкания ключа K ?

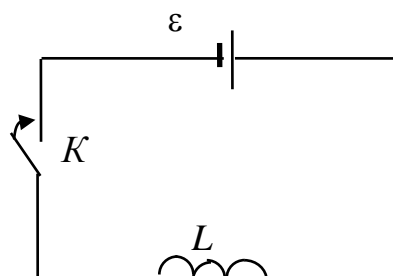


Рис. 2.77

Решение.

Запишем закон Ома (2.58^а) для указанной цепи $L \frac{dI}{dt} = \varepsilon$. Интегрируем это выражение, применяя метод разделения переменных.

$$dI = \frac{\varepsilon}{L} dt \quad \text{или} \quad I = \int \frac{\varepsilon}{L} dt + b.$$

После интегрирования получим $I = \frac{\varepsilon}{L} t + b$, где постоянную интегрирования b находим из условия равенства нулю тока в начальный момент времени. Тогда $b = 0$ и $I = \frac{\varepsilon}{L} t$. После подстановки данных и расчета получим $I = 15 \text{ А}$.

Глава 3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

3.1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ВАКУУМЕ

49. Плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме в соответствии с уравнениями (3.1), где $\vec{E}_0 = \{30; 30; 0\}$ мВ/м, вектор \vec{B} параллелен некоторому вектору $\vec{a} = \{-1; 1; 0\}$, $\omega = 3 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$. Найти:

1. Направление распространения волны.
2. Волновое число.
3. Максимальное значение плотности энергии волны в произвольной точке.

Решение

1. Векторы \vec{E} , \vec{B} и \vec{k} составляют правовинтовую тройку (рис. 3.1). Это значит, что вектор \vec{k} сонаправлен векторному произведению $[\vec{E}, \vec{B}]$. Воспользовавшись этим свойством, определим направление вектора \vec{k} , которое совпадает с направлением распространения электромагнитной волны

$$[\vec{E}, \vec{B}] \uparrow \uparrow [\vec{E}_0, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_{x0} & E_{y0} & 0 \\ a_x & a_y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_z (E_{x0} a_y - E_{y0} a_x) = \vec{e}_z (30 + 30) \text{ мВ/м} = 60 \vec{e}_z \text{ мВ/м}.$$

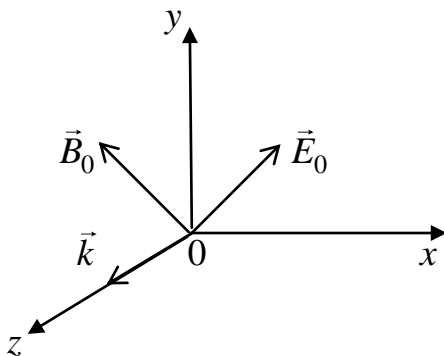


Рис.3.2.

Следовательно, волна распространяется в направлении $+0z$ (рис.3.2).

2. Волновое число находим по формуле (3.2)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \frac{3 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} \text{ м}^{-1} = 0,1 \text{ м}^{-1}.$$

3. Максимальное значение плотности энергии электромагнитного поля в любой точке пространства получим по формуле (3.5) при условии $E^2 = E_0^2$ и $B^2 = B_0^2$. Тогда

$$w_{\max} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \varepsilon_0 E_0^2 = \varepsilon_0 (E_{0x}^2 + E_{0y}^2)$$

Произведем вычисления:

$$w_{\max} = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (30^2 + 30^2) \cdot 10^{-6} \text{ Дж/м}^3 = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ Дж/м}^3.$$

50. Космическая станция зарегистрировала электромагнитное излучение удаленного объекта, которое в принятой на этой станции системе отсчета можно описать в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(2\pi\nu t - kx),$$

где $\nu = 15 \text{ кГц}$, $\vec{E}_0 = \{0; 1; 0\} \text{ мВ/м}$.

1. Записать закон изменения вектора \vec{E} в точке $A(10^5; 10; 10^2) \text{ м}$, где расположена другая станция, неподвижная относительно первой.
2. Найти величину вектора \vec{E} в точке A в момент времени $t = 1 \text{ мс}$.

Решение

1. Уравнение $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(2\pi\nu t - kx)$ описывает плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси Ox . Ее волновое число рассчитаем по формуле (3.2)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi \cdot 15 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} \text{ м}^{-1} = \pi \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}.$$

Тогда величина произведения kx_A в точке расположения станции A равна $\pi \cdot 10^{-4} \cdot 10^5 = 10\pi$. Разность фаз электромагнитной волны для этих станций равна 10π , а закон изменения вектора \vec{E} в точке расположения второй станции имеет вид

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(2\pi\nu t - 10\pi) = \vec{E}_0 \cos 2\pi\nu t.$$

2. Подставив в него заданное значение времени, находим величину вектора напряженности

$$E = E_0 \cos(2\pi \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}) = E_0 \cos 30\pi = E_0 = 1 \text{ мВ/м}.$$

3.2. ПОЛЯРИЗАЦИЯ

51. Определить состояние поляризации радиоволны, являющейся наложением двух плоских линейно-поляризованных электромагнитных волн вида

$$\vec{E}_1 = E_{10} \vec{e}_y \cos(2\pi\nu t - kx), \quad \vec{E}_2 = E_{20} \vec{e}_z \cos(2\pi\nu t - kx + \varphi),$$

где амплитуды связаны соотношением $E_{10} = 2E_{20}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\nu = 1$ МГц.

Решение

Поляризация плоской волны в вакууме не зависит от выбора системы координат. Поэтому, для простоты рассмотрим поведение вектора \vec{E} результирующей волны в плоскости yOz при $x = 0$. Тогда

$$\begin{cases} E_{1y} = E_{10} \cos 2\pi\nu t, \\ E_{2z} = E_{20} \cos\left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{2}\right) = -E_{20} \sin 2\pi\nu t. \end{cases}$$

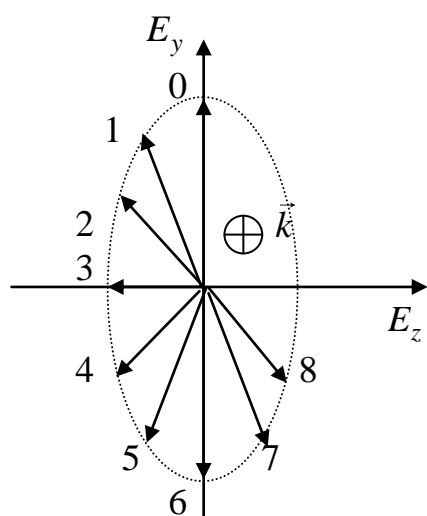
Эти формулы задают в параметрической форме уравнение траектории, по которой движется конец вектора $\vec{E} = \vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2z}$ в плоскости yOz . Для получения уравнения траектории в неявном виде сделаем преобразования:

$$\begin{cases} \left(\frac{E_{1y}}{E_{10}}\right)^2 = \cos^2 2\pi\nu t, \\ \left(\frac{E_{2z}}{E_{20}}\right)^2 = \sin^2 2\pi\nu t. \end{cases}$$

Сумма правых частей этих уравнений равна 1. Поэтому, сложив уравнения, получим каноническое уравнение эллипса с полуосями E_{10} и E_{20}

$$\left(\frac{E_{1y}}{E_{10}}\right)^2 + \left(\frac{E_{2z}}{E_{20}}\right)^2 = 1.$$

Полученный результат свидетельствует об эллиптической поляризации результирующей волны, но не отвечает на вопрос о направлении вращения вектора \vec{E} . Для его определения используем метод геометрического сложения векторов для нескольких последовательных значений времени t_n . Для удобства выберем $t_n = n \frac{T}{12}$, где $T = \frac{1}{\nu}$ — период волны, $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 8$, и составим таблицу данных с учетом $E_{10} = 2E_{20}$ (таблица 3.2).



Откладывая на соответствующих осях приведенные в таблице значения E_{1y} и E_{2z} , построим векторы \vec{E}_n результирующей волны в точке $x = 0$ (рис. 3.6). Из последовательности их расположения следует, что волна является левовинтовой эллиптически поляризованной.

Рис. 3.6

Таблица 3.2

| n | $2\pi\nu t_n$ | $E_{1y} = 2E_{20} \cos(2\pi\nu t_n)$ | $E_{2z} = -E_{20} \sin(2\pi\nu t_n)$ |
|-----|-----------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 0 | 0 | 2 | 0 |
| 1 | $\frac{1}{6}\pi$ | $\sqrt{3} \approx 1,73$ | -0,5 |
| 2 | $\frac{2}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi$ | 1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,87$ |
| 3 | $\frac{3}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi$ | 0 | -1 |
| 4 | $\frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,87$ |
| 5 | $\frac{5}{6}\pi$ | $-\sqrt{3} \approx -1,73$ | -0,5 |
| 6 | $\frac{6}{6}\pi = \pi$ | -2 | 0 |
| 7 | $\frac{7}{6}\pi$ | $-\sqrt{3} \approx -1,73$ | 0,5 |
| 8 | $\frac{8}{6}\pi = \frac{4}{3}\pi$ | -1 | $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$ |

52. При прохождении естественного света через систему из двух поляризаторов его интенсивность уменьшилась в два раза. Когда между поляризаторами на пути луча поместили кварцевую пластинку, интенсивность уменьшилась еще в два раза. На какой угол повернулась плоскость колебаний луча в кварцевой пластине? Поглощением пренебречь.

Решение

Несмотря на хаотичность ориентации вектора \vec{E} в естественном свете, представим его в каждое мгновение через сумму двух векторов, один из которых лежит в плоскости первого поляризатора, а другой перпендикулярен ей. Соответственно первая проекция пройдет через этот поляризатор, а вторая нет. Из равновероятности различных направлений вектора \vec{E} в естественном свете следует, что интенсивность прошедшего первого поляризатора света равна интенсивности задержанной части. Следовательно, уже после первого поляризатора интенсивность уменьшилась в два раза $I_1 = \frac{I_0}{2}$. В начальном расположении второй поляризатор не изменил интенсивность света, что указывает на параллельность плоскостей обоих поляризаторов (рис. 3.7).

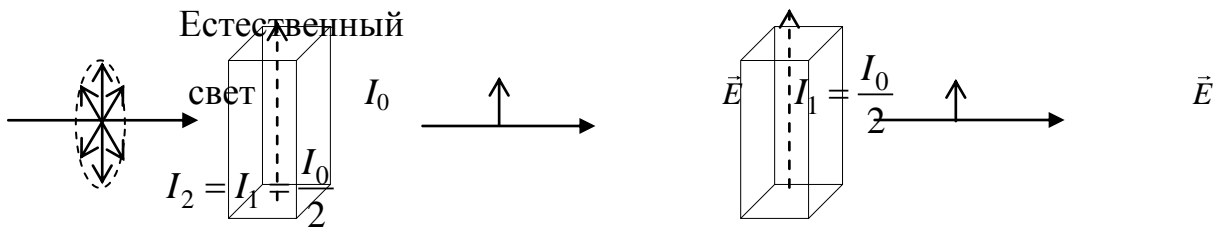


Рис. 3.7.

Во второй ситуации (рис. 3.8) после поворота плоскости колебаний света кварцевой пластиной на угол α второй поляризатор пропустит только проекцию повернутого вектора \vec{E} на свою плоскость (см. формулу 3.9). Закон Малюса (3.10) в этом случае запишем в виде

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha = \frac{I_0}{2} \cos^2 \alpha.$$

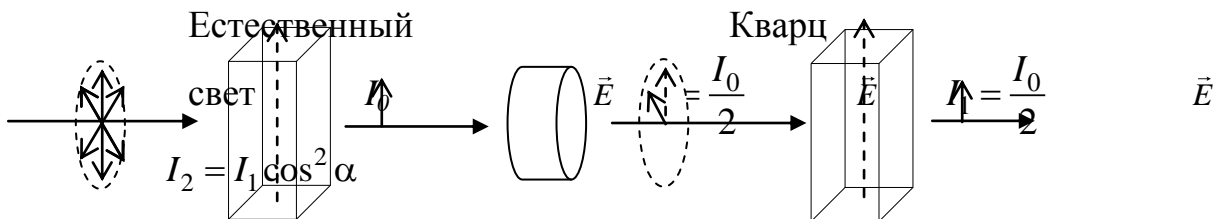


Рис. 3.8

По условию $I_2 = \frac{I_1}{2} = \frac{I_0}{4}$. Тогда $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$ или $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Этому результату удовлетворяют значения

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} \pm n\pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

3.3. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

53. Плоская монохроматическая световая волна (длина волны $\lambda = 0,5$ мкм) падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, отстоящими друг от друга на расстояние $d = 2,5$ мм. На экране, расположенном за диафрагмой на расстоянии $L = 1$ м, образуется система интерференционных полос. Определить ширину интерференционных полос.

Решение

Рассмотрим узкие щели как два вторичных линейных источника когерентных волн, интерферирующих на экране. Ширина интерференционной полосы Δx равна расстоянию между двумя последовательными минимумами на экране (или двумя последовательными максимумами) $\Delta x = x_{n+1} - x_n$ (рис.3.11). С учетом свойств прямоугольных треугольников запишем $x_{n+1} = L \operatorname{tg} \theta_{n+1}$ и $x_n = L \operatorname{tg} \theta_n$.

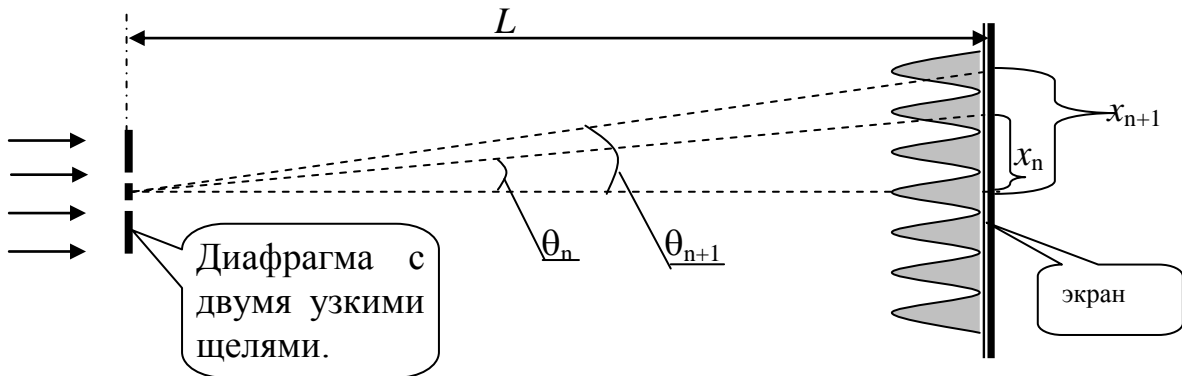


Рис.3.11

Значения соответствующих углов входят в формулы для условий минимумов

$$d \sin \theta_{n+1} = \left[2(n+1) + 1 \right] \frac{\lambda}{2} \quad \text{и} \quad d \cdot \sin \theta_n = (2n+1) \frac{\lambda}{2}.$$

По условию эксперимента $L \gg d$ и тогда выполняется приближенное равенство для малых углов $\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta$. С учетом этого

$$\begin{aligned} \Delta x &= L(\operatorname{tg} \theta_{n+1} - \operatorname{tg} \theta_n) \approx L(\sin \theta_{n+1} - \sin \theta_n) = \\ &= L \left[2(n+1) + 1 - (2n+1) \right] \frac{\lambda}{2d} = \frac{L\lambda}{d}. \end{aligned}$$

Отметим, что ширина не зависит от номера максимума. Выполним вычисления

$$\Delta x \approx \frac{1 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}}{2,5 \cdot 10^{-3}} \text{ м} = 0,2 \text{ мм} .$$

54. Четыре антенны расположены в линию и находятся на одинаковых расстояниях $d = 5 \text{ м}$ друг от друга (рис.3.10). Антенны излучают радиоволны с одинаковой линейной поляризацией на частоте $\nu = 3 \cdot 10^7 \text{ Гц}$ и сфазированы так, что $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_3 = 2\pi$, $\varphi_4 = 3\pi$. Определить интенсивность излучения, принимаемого в удаленных точках в направлениях a ($\alpha = 0^\circ$) и b ($\alpha = 60^\circ$), если известно, что при работе каждой из антенн в отдельности интенсивность излучения в точках регистрации равна соответственно $I_1 = I_3 = I_0$, $I_2 = I_4 = 4I_0$, где I_0 – некоторая единица интенсивности.

Решение

Выберем систему координат с началом в точке расположения 1^й антенны.

Ось Ox направим вдоль направления a . В удаленных точках наблюдения излучаемые волны можно считать плоскими. Запишем выражение (3.17) для комплексной результирующей амплитуды волны в направлении a . Учитывая одинаковую поляризацию волн суммируем в скалярной форме

$$\hat{E}_a = E_{01} e^{i0} + E_{02} e^{i(-\vec{k}\vec{\Delta} + \pi)} + E_{03} e^{i(-\vec{k}2\vec{\Delta} + 2\pi)} + E_{04} e^{i(-\vec{k}3\vec{\Delta} + 3\pi)},$$

где $\vec{\Delta}$ - вектор расстояния между соседними антеннами (рис. 3.10). Учитывая заданное соотношение между интенсивностями излучения отдельных антенн $I_2 = I_4 = 4 I_1 = 4 I_3 = 4 I_0$ и формулу (3.12) находим соотношение для амплитуд волн $E_{02} = E_{04} = 2E_{01} = 2E_{03}$. Для рассматриваемого направления $\vec{k}\vec{\Delta} = kd \cos \theta$, где $d = 5 \text{ м}$ – расстояние между соседними антеннами, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$. Тогда $\vec{k}\vec{\Delta} = \frac{2\pi\nu}{c} d = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} 5 = \pi$ и выражение для комплексной результирующей амплитуды волны в направлении a примет вид

$$\hat{E}_a = E_{01} \left[1 + 2e^{i(-\pi + \pi)} + e^{i(-2\pi + 2\pi)} + 2e^{i(-3\pi + 3\pi)} \right] = 6E_{01}.$$

Вновь учитывая формулу (3.2), получим $I_a = 36I_1 = 36I_0$.

Замечание: Простая арифметическая сумма интенсивностей волн равна $10I_0$.

При анализе результата сложения волн в направлении b учитываем, что

$$\vec{k}\vec{\Delta} = kd \cos \alpha = \frac{\pi}{2}. \text{ Тогда выражение для комплексной результирующей амплитуды волны в направлении } b \text{ запишем в виде}$$

решение

$$\hat{E}_b = E_{01} \left[1 + 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right)} + e^{i(-\pi + 2\pi)} + 2e^{i\left(-\frac{3}{2}\pi + 3\pi\right)} \right] = E_{01} [1 + 2i - 1 - 2i] = 0$$

$$\hat{E}_b = E_{01} \left[1 + 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right)} + e^{i(-\pi + 2\pi)} + 2e^{i\left(-\frac{3}{2}\pi + 3\pi\right)} \right] = E_{01} [1 + 2i - 1 - 2i] = 0$$

Соответственно и интенсивность излучения в этом направлении равна нулю.

3.4. ДИФРАКЦИЯ ВОЛН

55. Дифракция с круглым отверстием расположена посередине между точечным источником монохроматического света ($\lambda = 500$ нм) и экраном (рис. 3.19). Расстояние между источником и экраном $L = 4$ м. При каком радиусе отверстия центр дифракционных колец на экране будет наиболее темным?

Решение

При дифракции Френеля на круглом отверстии в центре дифракционной картины на экране темное пятно наблюдается при четном числе открытых зон Френеля. Увеличение радиуса отверстия ведет к ослабеванию эффекта и в пределе дифракционная картина пропадает. Следовательно, наиболее темное пятно будет в том случае, если число открытых зон равно двум и радиус отверстия r совпадает с радиусом второй зоны Френеля. Используя формулу 4.1, при $k = 2$, $a + b = L$, $a = b = L/2$ получим

$$r = \rho_2 = \sqrt{\frac{L^2/4}{L} m \lambda} = \sqrt{\frac{L \lambda}{2}}.$$

Выполним расчет $r = \sqrt{\frac{4 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{2}} \text{ м} = 10^{-3} \text{ м} = 1 \text{ мм}.$

56. На дифракционную решетку, имеющую $n = 500$ щелей на одном миллиметре ширины, нормально падает свет от разрядной трубки, наполненной гелием. Найти:

1. Наибольший порядок дифракционного максимума, который дает эта решетка для фиолетового участка спектра с длиной волны $\lambda = 410$ нм.
2. На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается синяя линия $\lambda_c = 447$ нм спектра третьего порядка?

Решение

1. Из формулы (3.24) следует, что наибольший порядок дифракционного максимума получается при максимальном значении синуса. Так как синус не может быть больше единицы, то должно выполняться неравенство

$$d \geq m \lambda \quad \text{или} \quad m \leq \frac{d}{\lambda}.$$

Период решетки, как расстояние между соседними щелями, находим из

$$\text{формулы } d = \frac{1}{n}. \text{ Тогда } m \leq \frac{1}{n\lambda}.$$

Подставив заданные значения, получим $m \leq 4,88$. Если учесть, что порядок максимума является целым числом, то $m_{\max} = 4$.

2. При наложении спектральных линий условие максимума выполняется для каждой из них

$$d \sin \varphi = 3\lambda_c \quad \text{и} \quad d \sin \varphi = 2\lambda_x.$$

Тогда $3\lambda_c = 2\lambda_x$ и после расчета имеем $\lambda_x = 670$ нм.

3.5. ГРУППЫ ВОЛН. ДИСПЕРСИЯ

57. Уравнение плоской электромагнитной волны в вакууме вблизи источника (при $x = 0$) имеет вид $E(t, x) = E_0 \sin(\omega_1 t) + 0,5 E_0 \sin(2\omega_1 t)$, где $\omega_1 = 3\pi \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$. Методом графического сложения определить форму излучаемого сигнала $E(t, 0)$ и пространственную форму волны в вакууме $E(t_0, x)$ на отрезке от $x_1 = 0$ до $x_2 = 2\lambda_1$ в момент времени t_0 , где λ_1 - длина волны в вакууме гармонической компоненты с частотой ω_1 , $t_0 = 100T = 200\pi/\omega_1$.

Решение

Для удобства построения сделаем преобразование $\omega_1 t = 2\pi \frac{t}{T}$, где T - период первой компоненты. На рис. 3.24 пунктирными линиями построены графики каждой гармонической компоненты волны

$$\xi(t) = E_0 \sin 2\pi \frac{t}{T} \text{ и } \psi(t) = 0,5 E_0 \sin 4\pi \frac{t}{T}.$$

Сплошной линией обозначен результат их сложения $E(t)$ при $x = 0$.

При построении пространственной формы бегущей волны в момент времени t_0 учтем, что $\omega t_0 = \omega_1 100T = 200\pi$. Тогда с учетом периодичности синуса уравнение волны примет вид

$$E(t_0, x) = E_0 \sin(200\pi - k_1 x) + 0,5 E_0 \sin(400\pi - k_2 x) = -E_0 \sin(k_1 x) - 0,5 E_0 \sin(k_2 x).$$

В вакууме волновые числа запишем в виде

$$k_1 = \frac{\omega_1}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{\omega_2}{c} = \frac{2\omega_1}{c} = \frac{4\pi}{\lambda},$$

где λ - длина волны первой компоненты. Соответственно перепишем и уравнение волны

$$E(t_0, x) = -E_0 \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} - 0,5 E_0 \sin 4\pi \frac{x}{\lambda}.$$

Это уравнение аналогично уравнению для $E(t)$, но с противоположным знаком. Поэтому и пространственная форма волны (рис. 3.25) симметрична графику $E(t)$ на рис. 3.24 относительно оси абсцисс.

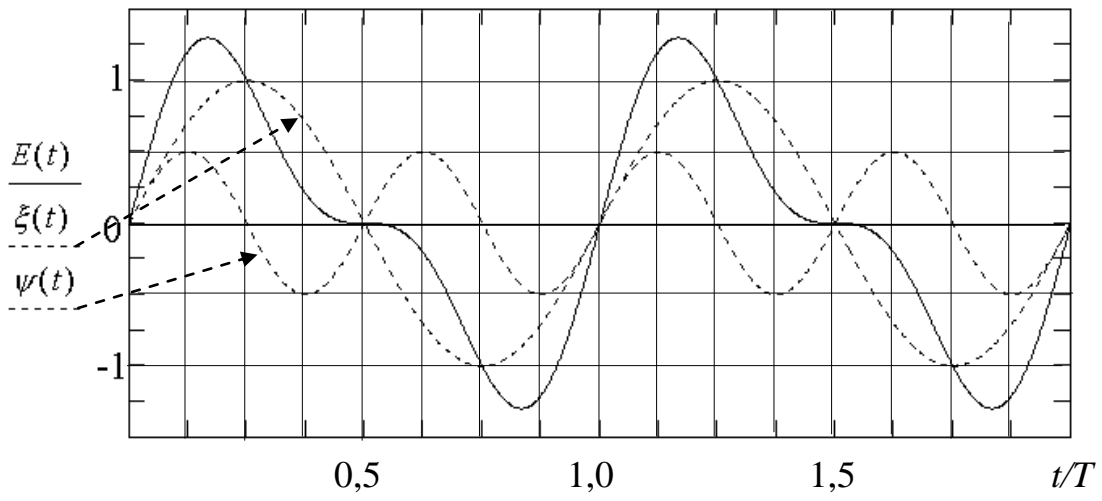


Рис. 3.24

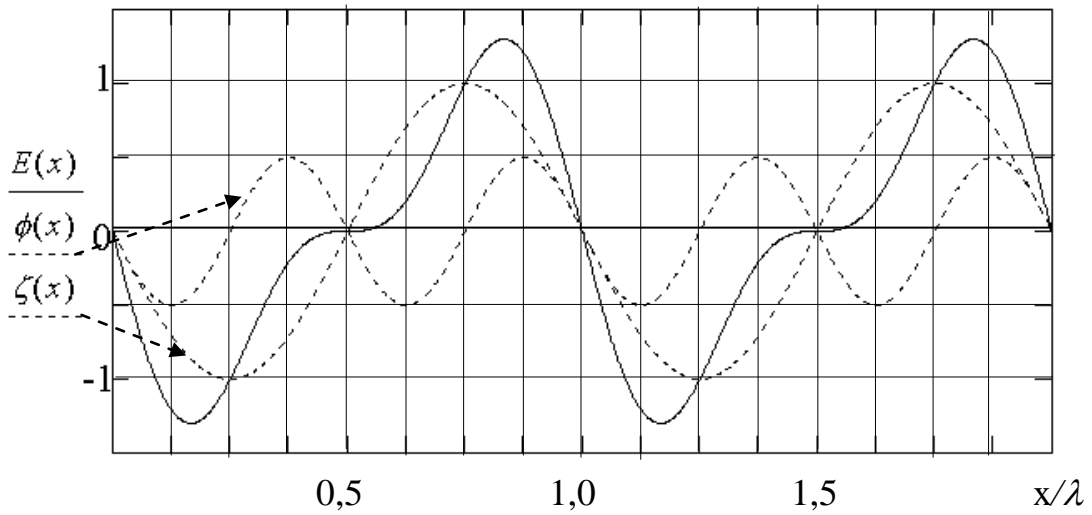


Рис. 3.25

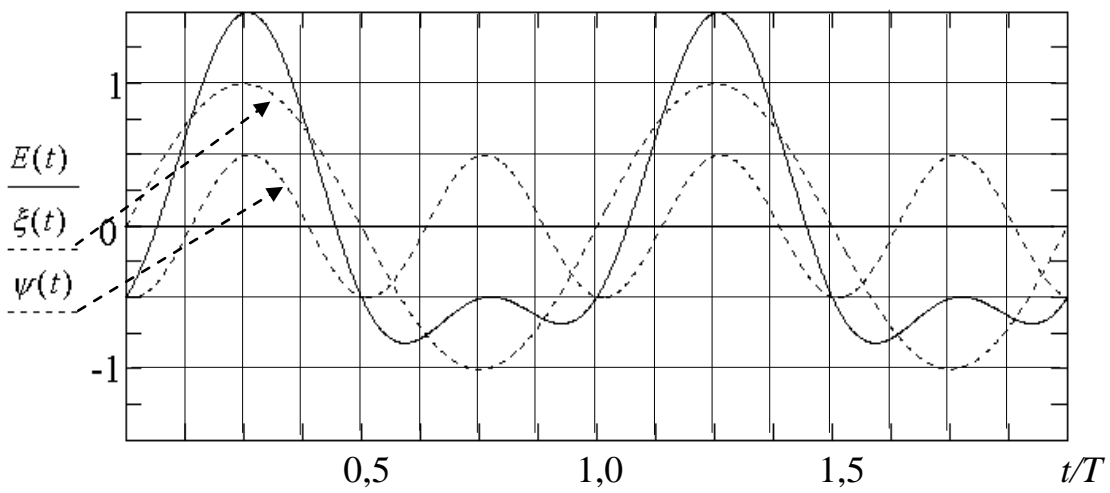


Рис. 3.26

58. Уравнение плоской электромагнитной волны в среде вблизи источника (при $x = 0$) имеет вид $E(t, 0) = E_0 \sin(\omega_1 t) + 0,5 E_0 \sin(2\omega_1 t)$, где $\omega_1 = 3\pi 10^7 \text{ с}^{-1}$. Методом графического сложения определить форму сигнала $E(t, L)$, регистрируемого приемником, расположенным на расстоянии $L = 3\lambda_{\text{ср}}$ в направлении распространения волны. Для удобства выполнить построение для отрезка времени от 0 до $2T$. T и $\lambda_{\text{ср}}$ – период и длина волны в данной среде гармонической компоненты с частотой ω_1 . Принять, что показатель преломления среды зависит от частоты по формуле $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$, где $\omega_0 = \pi 10^7 \text{ с}^{-1}$ – так называемая плазменная частота этой среды. Поглощением излучения пренебречь.

Решение

Уравнение заданной бегущей волны запишем в виде

$$E(t, x) = E_0 \sin(\omega_1 t - k_1 x) + 0,5 E_0 \sin(2\omega_1 t - k_2 x). \quad (*)$$

С учетом формулы (3.29) волновое число второй компоненты представим в виде $k_2 = \frac{\omega_2}{c} n_2 = \frac{2\omega_1}{c} n_2 = 2k_1 \frac{n_2}{n_1} = 2 \frac{2\pi}{\lambda_{\text{ср}}} \frac{n_2}{n_1}$. Преобразуем уравнение (*)

$$E(t, x) = E_0 \sin\left(\omega_1 t - 2\pi \frac{x}{\lambda_{\text{ср}}}\right) + 0,5 E_0 \sin\left(2\omega_1 t - 2 \frac{n_2}{n_1} 2\pi \frac{x}{\lambda_{\text{ср}}}\right).$$

В точке расположения приемника $x = L = 3\lambda_{\text{ср}}$. Кроме того, $\omega_1 t = 2\pi \frac{t}{T}$ и уравнение принимаемого сигнала запишем в виде

$$E(t, L) = E_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - 6\pi\right) + 0,5 E_0 \sin\left(4\pi \frac{t}{T} - 12\pi \frac{n_2}{n_1}\right). \quad (**)$$

Перед его построением необходимо произвести расчет показателей преломления по заданной формуле:

$$n_1 = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}} = \sqrt{1 - \frac{(\pi 10^7)^2}{(3\pi 10^7)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} \approx 0,943,$$

$$n_2 = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2^2}} = \sqrt{1 - \frac{(\pi 10^7)^2}{(6\pi 10^7)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{36}} \approx 0,986,$$

$$\text{и величины } 12\pi \frac{n_2}{n_1} = 12\pi \frac{0,986}{0,943} = 12,55\pi = 12\pi + 0,55\pi.$$

Заметим, что фазовые скорости обеих составляющих волны больше скорости света (см. формулу (3.30)). С учетом периодичности синуса упростим уравнение принимаемого сигнала (**)

$$\begin{aligned}
 E(t, L) &= E_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + 0,5E_0 \sin\left(4\pi \frac{t}{T} - 0,55\pi\right) = \\
 &= E_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + 0,5E_0 \sin 4\pi\left(\frac{t}{T} - 0,1375\right)
 \end{aligned}$$

и построение выполним в интервале времени от 0 до $2T$. При этом учтем, что в отличие от исходного сигнала аргумент у второго синуса изменился на $-0,55\pi$. Т.е., вследствие различия фазовых скоростей составляющих сигнала на графике вторая составляющая сместится по оси абсцисс на 0,1375 вправо. Графическое сложение произведено на рис. 3.26.

Замечание: По сравнению с исходной (рис. 3.24) форма сигнала существенно исказилась. Следовательно, в заданной среде сигнал с таким широким спектром для передачи информации использовать нельзя. Поэтому в радиотехнике, в отличие от рассмотренного случая, сигнал формируют с помощью суперпозиции сплошного спектра гармонических волн, частоты которых находятся в узком диапазоне. Это позволяет свести последствия дисперсии к минимуму.

Глава 4. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

4.1. КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВОЙ ДУАЛИЗМ.

СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

59(a). Фототок, вызываемый падением электромагнитного излучения с длиной волны $\lambda_1 = 0,44$ мкм на катод, прекращается при задерживающей разности потенциалов $U_3 = 0,95$ В (рис. 4.1).

1. Определить работу выхода катода.
2. Найти максимальную скорость фотоэлектронов.
3. Какой станет максимальная скорость фотоэлектронов, если у падающего излучения длина волны уменьшится в два раза?

Решение

1. Для расчета работы выхода напишем формулу Эйнштейна (4.2), используя выражение для энергии фотонов (4.1) $\varepsilon_\phi = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ и равенство $T = eU_3$:

$$\frac{hc}{\lambda_1} = A + eU_3 \quad \text{или} \quad A = \frac{hc}{\lambda_1} - eU_3.$$

Подставим числовые значения величин и произведем вычисления:

$$\begin{aligned} A &= \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,44 \cdot 10^{-6}} \text{ Дж} - 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,95 \text{ Дж} = \\ &= 3,00 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,88 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

Полученное значение работы выхода характерно для цезия (см. приложение).

2. Скорость фотоэлектрона определим через кинетическую энергию, равную в первом случае $T_1 = eU_3 = 0,95$ эВ. Эта величина значительно меньше энергии покоя электрона ($m_0c^2 = 0,511$ МэВ). Следовательно, в данном случае можно использовать нерелятивистское выражение для кинетической энергии

$$T_1 = \frac{m_0 v_{1\max}^2}{2}.$$

Тогда

$$v_{1\max} = \sqrt{\frac{2T_1}{m_0}} = \sqrt{\frac{2eU_3}{m_0}}.$$

Произведем вычисления:

$$v_{1\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,95}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \text{ м/с} \approx 5,8 \cdot 10^5 \text{ м/с.}$$

3. При замене падающего излучения на излучение с длиной волны $\lambda_2 = \lambda_1/2 = 0,22 \text{ мкм}$ энергия фотона увеличится в два раза, а кинетическая энергия фотоэлектрона увеличится в соответствии с формулой (4.2)

$$T_2 = \varepsilon_{\phi 2} - A \text{ или } T_2 = \frac{hc}{\lambda_2} - A.$$

Учитывая, что $v_{2\max} = \sqrt{\frac{2T_2}{m_0}}$, получим

$$v_{2\max} = \sqrt{\frac{2}{m_0} \left(\frac{hc}{\lambda_2} - A \right)}.$$

Произведем вычисления:

$$v_{2\max} = \sqrt{\frac{2}{9,1 \cdot 10^{-31}} \left(\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,22 \cdot 10^{-6}} - 3 \cdot 10^{-19} \right)} \text{ м/с} \approx \\ \approx 1,15 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

59(б). Фотон с импульсом $p = 1,02 \text{ МэВ/с}$, где c - скорость света, рассеялся на покоившемся свободном электроне, в результате чего импульс фотона стал равным $p' = 0,255 \text{ МэВ/с}$.

1. Под каким углом рассеялся фотон.

2. Какая доля энергии первичного фотона приходится на кинетическую энергию электрона отдачи?

Решение

1. При столкновении фотона со свободным электроном (рис. 4.2) выполняется формула (4.3). Запишем ее, выразив длины волн исходного λ и рассеянного λ' фотонов через импульсы с помощью формулы (4.1)

$$\frac{h}{p} - \frac{h}{p'} = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \vartheta).$$

После преобразований получим $m_0 c \frac{p - p'}{pp'} = 1 - \cos \vartheta$.

Тогда $\vartheta = \pm \arccos \left[1 - m_0 c \frac{p - p'}{pp'} \right]$. Для облегчения расчетов представим

эту формулу в виде

$$\vartheta = \pm \arccos \left[1 - m_0 c^2 \frac{pc - p'c}{pcp'c} \right],$$

где $m_0c^2 = 0,511$ МэВ – энергия покоя электрона. По условию задачи $pc = 1,02$ МэВ, $p'c = 0,255$ МэВ. После подстановки этих значений получим

$$\vartheta = \pm \arccos \left[1 - 0,511 \frac{1,02 - 0,255}{1,02 \cdot 0,255} \right] \approx \pm \arccos(-0,5) = \pm \frac{2}{3} \pi.$$

2. Запишем закон сохранения энергии

$$\varepsilon_\phi + m_0c^2 = \varepsilon'_\phi + m_0c^2 + T,$$

где T - кинетическая энергия электрона отдачи, $\varepsilon_\phi = pc$, $\varepsilon'_\phi = p'c$.

Рассчитаем требуемое отношение:

$$\frac{T}{\varepsilon_\phi} = \frac{\varepsilon_\phi - \varepsilon'_\phi}{\varepsilon_\phi} = \frac{p - p'}{p} = 0,75,$$

т.е. на кинетическую энергию электрона отдачи приходится 75% энергии первичного фотона.

60. Сравнить длину волн де Бройля молекулы водорода с ее диаметром. Считать, что молекула имеет скорость, равную средней квадратичной скорости молекул газообразного водорода при температуре 0°C . Диаметр молекулы водорода $d = 0,27$ нм.

Решение

Из молекулярно–кинетической теории следует, что средняя квадратичная скорость молекул газа определяется по формуле

$$v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, $T = 273$ К – абсолютная температура газа, m – масса молекулы газа. С учетом этого формулу де Бройля (4.5) запишем в виде

$$\lambda_B = \frac{h}{mv_{\text{ср.кв.}}} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}} = h \sqrt{\frac{N_A}{3MkT}},$$

где $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ - число Авогадро, $M = 0,002$ кг/моль - молярная масса водорода.

После подстановки этих величин и расчета получим $\lambda_B \approx 0,11$ нм. Эта величина одного порядка с размерами молекулы водорода.

61. Электрон локализован в области в виде плоской пластины, толщина которой $l = 25$ нм. Используя соотношение неопределенностей, оценить кинетическую энергию электрона, при которой ее относительная неопределенность будет порядка $\eta = 0,01$.

Решение

При локализации частицы неопределенность ее координаты примерно равна размерам области локализации. Считаем, что $\Delta x \approx l/2$, $\Delta y \rightarrow \infty$, $\Delta z \rightarrow \infty$, а со-

отношение неопределенностей (4.6) для оценочных расчетов запишем со знаком приближительного равенства

$$\Delta x \Delta p_x \approx \frac{\hbar}{2}. \quad \text{Тогда} \quad \Delta p_x \approx \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{l}, \quad \Delta p_y \approx 0 \quad \text{и} \quad \Delta p_z \approx 0.$$

Для определения взаимосвязи неопределенности кинетической энергии ΔT с неопределенностью импульса возьмем дифференциал от левой и правой частей нерелятивистской формулы кинетической энергии $T = p^2/2m$ (считая, что $p \equiv p_x$)

$$dT = \frac{p_x dp_x}{m}.$$

В приближенных расчетах можно считать, что $\Delta T = \frac{p_x \Delta p_x}{m}$.

Тогда относительную неопределенность кинетической энергии запишем в виде $\eta = \frac{\Delta T}{T} = \frac{p_x \Delta p_x 2m}{mp_x^2} = \frac{2\Delta p_x}{p_x}$.

После подстановки в эту формулу значения неопределенности импульса получим $\eta \approx \frac{2\hbar}{p_x l}$.

Отсюда определим импульс $p_x \approx \frac{2\hbar}{\eta l}$ и искомое значение кинетической энергии $T = \frac{p_x^2}{2m} \approx \frac{4\hbar^2}{2m\eta^2 l^2} = \frac{2\hbar^2}{m\eta^2 l^2}$.

Где масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. Произведем расчет

$$T \approx \frac{8 \cdot (1,05 \cdot 10^{-34})^2}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-4} \cdot 625 \cdot 10^{-18}} \text{ Дж} \approx 14 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 2,4 \text{ эВ}.$$

4.2. КВАНТОВЫЕ СОСТОЯНИЯ ЧАСТИЦ

62. После дифракции на щели электроны вызывают на экране Э сцинтилляционные вспышки (рис. 4.3). Интенсивность вспышек на небольшой площади экрана вблизи точки А составляет 10 с^{-1} , а на такой же площади вблизи точки В – 40 с^{-1} . Чему равно отношение волновых функций электронов в этих точках?

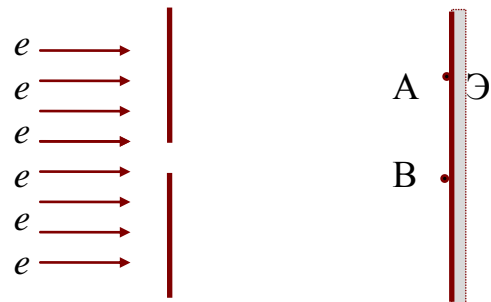


Рис. 4.3

Решение

Интенсивность вспышек прямо пропорциональна плотности вероятности обнаружения электронов в соответствующей точке $I \sim |\psi|^2$. Получаем

$$\frac{|\psi_B|^2}{|\psi_A|^2} = \frac{I_B}{I_A} = \frac{40}{10} = 4 \quad \text{или} \quad \frac{|\psi_B|}{|\psi_A|} = 2.$$

63. Поток электронов проходит через две узкие щели A и B (рис. 4.4), образуя на экране Э интерференционную картину. Интенсивность ее в минимуме равна I_0 . Какова интенсивность в максимуме, если щель B пропускает в 4 раза больше электронов, чем щель A?

Решение

Так как щель B пропускает в 4 раза больше электронов, то $\psi_B^2 = 4\psi_A^2$ или $\psi_B = \pm 2\psi_A$. Интенсивность пропорциональна плотности вероятности обнаружения электронов, которая в максимуме равна квадрату суммы волновых функций, а в минимуме квадрату их разности:

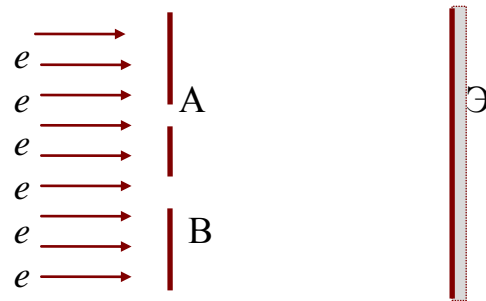


Рис. 2.2

$$I_{\max} \sim (\psi_B + \psi_A)^2 = 9\psi_A^2, \quad \text{а} \quad I_{\min} = I_0 \sim (\psi_B - \psi_A)^2 = \psi_A^2$$

Сравнивая эти соотношения, получим $I_{\max} = 9I_0$.

64. Электрон локализован в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками в пределах области на оси x от 0 до l . Его состояние описывается волновой функцией

$$\psi(x) = A \sin \frac{3\pi}{l} x \cdot \cos \frac{2\pi}{l} x.$$

Определить вероятность обнаружения электрона в средней четверти ямы.

Решение

Искомую вероятность находим с помощью формулы (4.9). Предварительно преобразуем заданную пси функцию в соответствии с тригонометрической формулой

$$2\sin\alpha \cdot \cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta).$$

$$\text{Тогда} \quad \psi(x) = A \sin \frac{3\pi}{l} x \cdot \cos \frac{2\pi}{l} x = \frac{A}{2} \sin \frac{\pi}{l} x + \frac{A}{2} \sin \frac{5\pi}{l} x.$$

Анализ этого выражения показывает, что $\psi(x)$ является суперпозицией двух стационарных состояний (собственных функций) электрона в потенци-

альной яме (4.14) с квантовыми числами $n = 1$ и $n = 5$. На рис. 4.5 приведен график $\psi(x)$ полученный сложением соответствующих графиков $\psi_1(x)$ и $\psi_5(x)$.

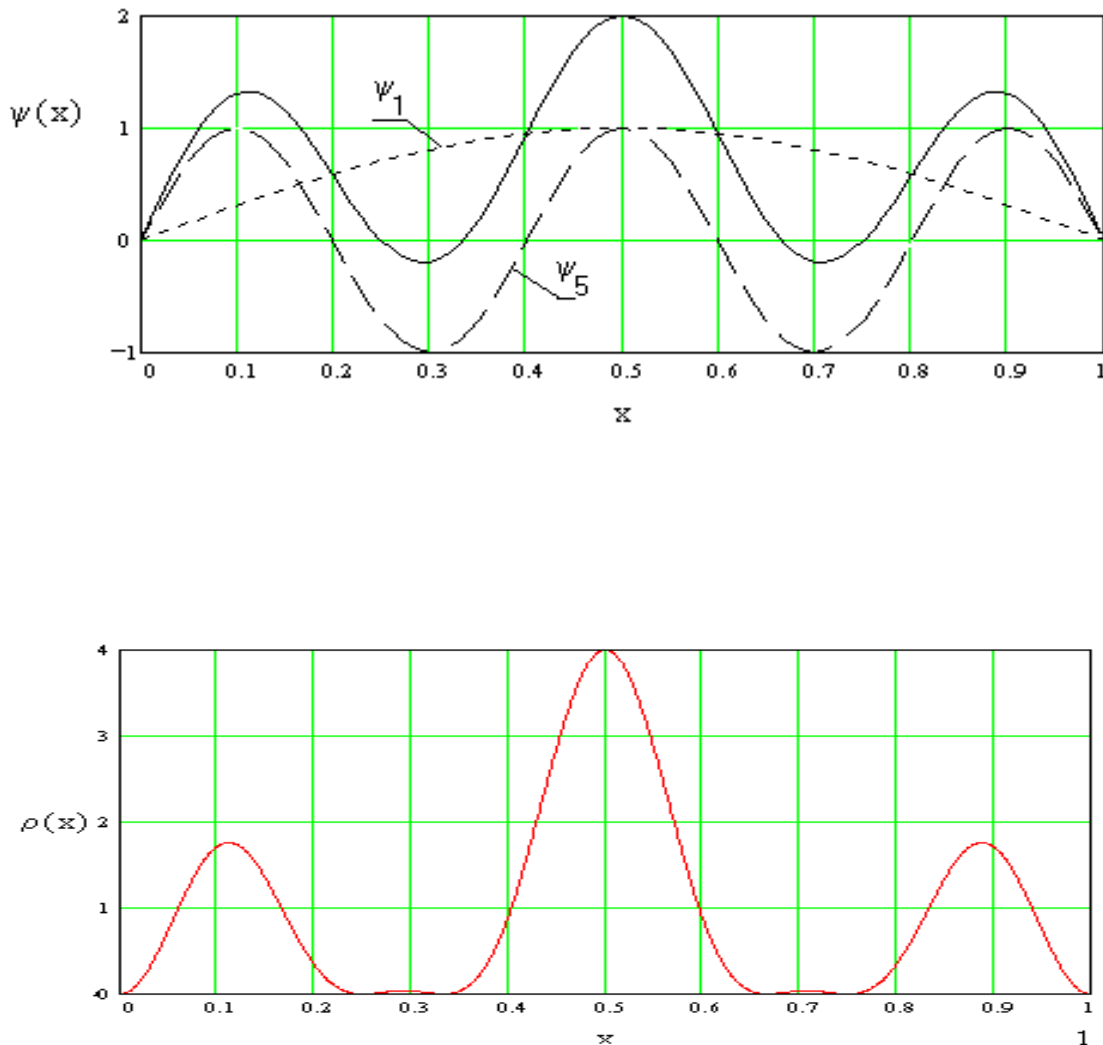


Рис. 4.5

Для определения постоянной A воспользуемся условием нормировки

$$\frac{A^2}{4} \int_0^l \left(\sin \frac{\pi}{l} x + \sin \frac{5\pi}{l} x \right)^2 dx = 1.$$

Сделаем преобразования

$$\frac{A^2}{4} \left[\int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx + 2 \int_0^l \sin \frac{\pi}{l} x \cdot \sin \frac{5\pi}{l} x dx + \int_0^l \sin^2 \frac{5\pi}{l} x dx \right] = 1.$$

При интегрировании используем тригонометрические равенства

$$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \quad \text{и} \quad 2\sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta).$$

Тогда
$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2\pi}{l} x \right) dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^l = \frac{l}{2},$$

$$2 \int_0^l \sin \frac{\pi}{l} x \cdot \sin \frac{5\pi}{l} x dx = \int_0^l \cos \frac{4\pi}{l} x dx - \int_0^l \cos \frac{6\pi}{l} x dx = 0,$$

$$\int_0^l \sin^2 \frac{5\pi}{l} x dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{10\pi}{l} x\right) dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^l = \frac{l}{2}.$$

После вычислений получим $\frac{A^2}{4} \left[\frac{l}{2} + 0 + \frac{l}{2} \right] = 1$ или $A = \frac{2}{\sqrt{l}}$.

Вероятность обнаружения электрона в средней четверти ямы определим интегрированием плотности вероятности (4.9) в заданных пределах от $x_1 = 3l/8$ до $x_2 = 5l/8$

$$W = \frac{1}{l} \int_{x_1}^{x_2} \left(\sin \frac{\pi}{l} x + \sin \frac{5\pi}{l} x \right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{l} \left[\int_{x_1}^{x_2} \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx + 2 \int_{x_1}^{x_2} \sin \frac{\pi}{l} x \cdot \sin \frac{5\pi}{l} x dx + \int_{x_1}^{x_2} \sin^2 \frac{5\pi}{l} x dx \right].$$

После соответствующих преобразований и вычислений получим $W = 0,57$. Этот результат качественно подтверждает график плотности вероятности обнаружения электрона $\rho = |\psi|^2$, приведенный на рис. 4.5. Максимум этой функции приходится на середину ямы.

65. Электрон находится в основном состоянии в одномерной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками ($0 \leq x \leq l$). Найти среднее квадратичное отклонение проекции импульса частицы p_x от $\langle p_x \rangle_{cp}$.

Решение

Определим $\langle p_x \rangle_{cp}$ по формуле (4.12) $\langle p_x \rangle_{cp} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* p_x \psi_1 dx$, где

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} x, \quad p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \text{ Получим}$$

$$\langle p_x \rangle_{cp} = \int_0^l \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} x dx =$$

$$= -\frac{2i\hbar}{l} \int_0^l \sin \frac{\pi}{l} x d(\sin \frac{\pi}{l} x) = -\frac{2i\hbar}{l} \sin^2 \left(\frac{\pi}{l} x \right) \Big|_0^l = 0$$

Этот результат можно было ожидать из соображений симметрии: движение электрона равновероятно вправо и влево, что приводит к нулевой средней

проекции импульса. Для определения среднего квадратичного отклонения используем формулу (4.13) с учетом того, что $\langle p_x \rangle_{\text{ср}} = 0$

$$\begin{aligned} (\delta p_x)^2 &= \int_0^l \psi_1(p_x)^2 \psi_1 dx = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{\pi}{l} x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \sin \frac{\pi}{l} x dx = \\ &= -\frac{2\hbar}{l} \int_0^l \sin \frac{\pi}{l} x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sin \frac{\pi}{l} x \right) dx = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{l^3} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx = \\ &= \frac{2\pi^2 \hbar^2}{l^3} \frac{l}{2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{l^2}. \end{aligned}$$

Тогда среднее квадратичное отклонение $\delta p_x = \frac{\pi \hbar}{l}$.

66. Электрон, находящийся в потенциальной яме кубической формы с абсолютно непроницаемыми стенками, перешел из возбужденного состояния с квантовыми числами $\{4, 2, 1\}$ на соседнее состояние с меньшей энергией. Сторона куба $l = 1$ нм. Определить выделившуюся при этом энергию и кратность вырождения нового состояния.

Решение

Первоначальное состояние имеет энергию (см. формулу (2.9))

$$E_{4,2,1} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (4^2 + 2^2 + 1^2) = 21 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}.$$

Соседним состоянием с меньшей энергией может быть состояние, для которого сумма квадратов квантовых чисел равна 20, 19, 18 и меньше. Перебирая возможные числа, определяем, что ближайшими являются 3 состояния с квантовыми числами $\{1, 3, 3\}$, $\{3, 1, 3\}$ и $\{3, 3, 1\}$, имеющие одинаковую энергию

$$E_{1,3,3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (1^2 + 3^2 + 3^2) = 19 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}.$$

Следовательно, кратность вырождения нового состояния равна трем, а выделившуюся при переходе энергию рассчитаем по формуле

$$\Delta E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (21 - 19) = \frac{3,14^2 \cdot 1,05^2 \cdot 10^{-68} \cdot 2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-18}} \text{ Дж} \approx$$

$$\approx 1,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 0,75 \text{ эВ}.$$

4.3. ПРОХОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР

67. Поток электронов встречает на своем пути потенциальный барьер в виде ступеньки высотой U_0 (рис. 4.6). Считая, что все электроны до барьера имели одинаковую кинетическую энергию $T = 2U_0$:

1. Определить долю электронов, прошедших потенциальный барьер.
2. Найти качественный вид волновой функции и функции плотности вероятности обнаружения электронов до и после барьера.

Решение

1. Доля электронов, прошедших потенциальный барьер, это отношение числа частиц, прошедших барьер за интервал времени Δt , к числу частиц, упавших на барьер за то же время. Для ее определения используем формулу (4.17). Учитывая, что $E = T = 2U_0$, получим

$$D = \frac{4\sqrt{2U_0}\sqrt{U_0}}{(\sqrt{2U_0} + \sqrt{2U_0 - U_0})^2} \approx 0,97.$$

2. До и после ступеньки потенциальная энергия не зависит от координаты. В области 1 волновая функция $\psi_1(x)$ является суперпозицией падающей и отраженной волн де Бройля, а $\psi_2(x)$ в области 2 соответствует только прошедшей волне де Бройля:

$$\psi_1 = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}, \text{ где } k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mT};$$

$$\psi_2 = A_2 e^{ik_2 x}, \text{ где } k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{mT}.$$

Из условия непрерывности ψ – функции и ее производной на границе при $x = 0$ получим

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 \\ k_1(A_1 - B_1) = k_2 A_2 \end{cases}.$$

Разделив все члены этих уравнений на A_1 , и введя обозначения

$$b_1 = \frac{B_1}{A_1} \quad \text{и} \quad a_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad \text{находим}$$

$$\begin{cases} 1 + b_1 = a_2 \\ k_1(1 - b_1) = k_2 a_2 \end{cases}.$$

Решая эту систему уравнений, определяем

$$a_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2\sqrt{2T}}{\sqrt{2T} + \sqrt{T}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \approx 1,17,$$

$$b_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{\sqrt{2T} - \sqrt{T}}{\sqrt{2T} + \sqrt{T}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \approx 0,17.$$

Тогда $\psi_1 = A_1 e^{ik_1 x} + 0,17A_1 e^{-ik_1 x}$, $\psi_2 = 1,17A_1 e^{ik_2 x}$.

Соответственно плотности вероятности обнаружения электронов до и после ступеньки равны

$$\begin{aligned} |\psi_1|^2 &= A_1^2 (e^{ik_1 x} + 0,17e^{-ik_1 x})(e^{-ik_1 x} + 0,17e^{ik_1 x}) \approx \\ &\approx A_1^2 [1 + 0,03 + 0,17(e^{i2k_1 x} + e^{-i2k_1 x})] \approx \\ &\approx A_1^2 [1,03 + 0,34 \cos 2kx]. \\ |\psi_2|^2 &\approx 1,37A_1^2 e^{ik_2 x} e^{-ik_2 x} = 1,37A_1^2. \end{aligned}$$

Замечание: Появление осциллирующего множителя $\cos 2kx$ в выражении для плотности вероятности обнаружения электронов в области $x < 0$ связано с образованием стоячей волны при интерференции падающей и отраженной волн. В области $x > 0$ плотность вероятности постоянна.

4.4. АТОМЫ

68. Какое максимальное число электронов в атоме могут иметь следующие одинаковые квантовые числа: 1) n, l, m ; 2) n, l .

Решение

1. В соответствии с принципом Паули в атоме не может быть более одного электрона с одинаковыми четырьмя квантовыми числами. В первом случае три из них фиксированы, а четвертое (спиновое) m_s может принимать только два значения. Следовательно, в атоме только два электрона могут иметь одинаковый набор квантовых чисел n, l, m .

2. При заданном значении квантовых чисел n, l магнитное квантовое число m может принимать значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$, т.е. всего $2l+1$ значений. При каждом из них возможны два значения спинового квантового числа. Следовательно, в атоме не более $2(2l+1)$ электронов могут иметь одинаковый набор квантовых чисел n, l .

69. Электрон в атоме водорода находится в $4d$ состоянии. Какой максимальный квант энергии может выделиться при его самопроизвольном переходе в основное состояние?

Решение

Правило отбора (4.23) накладывает ограничение на прямой переход из 4d в 1s состояние. Поэтому переход возможен только в два этапа: из 4d в какое либо p-состояние, а затем в основное 1s. Соответственно при переходе будет выделено два кванта энергии. Возможными являются переходы (рис. 4.8) $4d \rightarrow 3p \rightarrow 1s$ и $4d \rightarrow 2p \rightarrow 1s$. Энергия перехода определяется с помощью формулы (4.20)

$$\Delta E = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2}\right).$$

Ее величина будет максимальной при переходе $3p \rightarrow 1s$ ($n_i=1, n_j=3$). Произведем расчет

$$\begin{aligned} \Delta E &= -9^2 \cdot 10^{18} \cdot \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6^4 \cdot 10^{-76}}{2 \cdot 1,05^2 \cdot 10^{-68}} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2}\right) \text{ Дж} \approx \\ &\approx 19,3 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 12,1 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

70. Электронная конфигурация атома калия ($Z=19$) имеет вид $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$. Определить число свободных состояний в 3-ей оболочке.

Решение

В соответствии с формулой (4.22) на 3-й оболочке может находиться $2n^2 = 2 \cdot 3^2 = 18$ электронов. У атома калия на ней 2 электрона в s-состоянии и 6 электронов в p-состоянии. Следовательно, остаются вакантными 10 d-состояний на 3-й оболочке.

Глава 5. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

И ТЕРМОДИНАМИКА

5.1. СОСТОЯНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

71(a). Сколько молекул содержится в 1 см^3 воды?

Решение

На первый взгляд для решения задачи слишком мало данных. Но как и во многих других задачах здесь имеется в виду, что студенту известны основные свойства воды: плотность, молярная масса, температуры кипения воды и плавления льда, химическая формула и т.д. Если это не так, то советуем обратиться к справочнику и запомнить соответствующую информацию.

Для решения задачи достаточно воспользоваться одной из пропорций (5.1)

$\frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$, где массу воды определим, используя известное значение ее плотности $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, т.е. $m = \rho V$.

Выполнив преобразования, получим $N = \frac{m}{M} N_A = \frac{\rho V}{M} N_A$.

Учитывая, что молярная масса воды $M = 0,018 \text{ кг/моль}$, а число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль}$, произведем вычисления

$$N = \frac{1000 \cdot 10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{0,018} \approx 3,3 \cdot 10^{22}.$$

Анализ результата

Для того чтобы проникнуться «уважением» к полученной цифре, оцените, сколько времени потребуется человеку для подсчета этих молекул:

а) при устном счете;

б) при счете на ЭВМ с быстротой 10^6 операций в секунду.

Сравните полученное время со средней продолжительностью жизни человека $\sim 10^9$ с и «возрастом» вселенной $\sim 10^{18}$ с.

71(б). Оцените объем одной молекулы воды и её линейные размеры.

Решение

В предыдущей задаче было получено, что в объеме $V = 1 \text{ см}^3$ содержится $N = 3,3 \cdot 10^{22}$ молекул воды. Тогда на долю одной молекулы приходится объем

$$V_1 = \frac{V}{N} \approx 3 \cdot 10^{-23} \text{ см}^3 = 3 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3.$$

Несжимаемость воды (точнее малая сжимаемость) означает, что ее молекулы достаточно плотно «упакованы» в занимаемом объеме. Тогда полученное значение V_1 примерно соответствует объему одной молекулы и для оценки линейного размера молекулы принимаем, что ее объем имеет форму куба со стороной d . Тогда

$$d = \sqrt[3]{V_1} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Замечание: оказывается, что размеры всех атомов и молекул неорганических соединений находятся в диапазоне $(0,5 \div 10) \cdot 10^{-10} \text{ м}$, а размеры молекул азота и кислорода практически не отличаются от полученного значения для воды.

72(а). Определите плотность воздуха при нормальных условиях ($T = 273 \text{ К}$, $p = 100 \text{ кПа}$). Молярная масса азота $M = 0,029 \text{ кг/моль}$.

Решение.

По определению $\rho = \frac{m}{V}$. Это отношение получим из уравнения состояния

идеальных газов (5.3) (с учетом пропорции (5.1)) $pV = \frac{m}{M}RT$.

Тогда $\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}$. После вычислений получим $\rho = 1,28 \text{ кг/м}^3$.

72(б). Какая часть объема воздуха при нормальных условиях (см. предыдущий пример) приходится на сами молекулы? Принять, что молекула воздуха имеет объем $V_1 = 3 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$.

Решение

Выразим искомую часть объема η через отношение $\eta = \frac{NV_1}{V}$, где N – количество молекул воздуха объеме V . Используем пропорцию (5.1) $N = N_A \frac{m}{M}$, где массу воздуха определим из уравнения Клапейрона–Менделеева (5.3) с учетом (5.1)

$$m = \frac{MpV}{RT}.$$

$$\text{Тогда } \eta = \frac{NV_1}{V} = N_A \frac{m}{M} \frac{V_1}{V} = \frac{N_A MPV_1}{MRTV} = \frac{N_A PV_1}{RT}.$$

После расчета получим $\eta \approx 8,0 \cdot 10^{-4}$.

Анализ результата

Полученная величина свидетельствует о том, что в газах при нормальных условиях расстояния между молекулами существенно превышают размеры самих молекул.

72(в). В сосуде объемом $V = 15 \text{ л}$ содержится $N = 1,8 \cdot 10^{24}$ молекул газа при температуре $T = 300 \text{ К}$. Определить давление газа, считая его идеальным.

Решение

Для определения давления воспользуемся уравнением состояния Клапейрона–Менделеева (5.3)

$$p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{NRT}{N_A V}.$$

Произведя вычисления, получим $p = 500 \text{ кПа}$.

72(з). Некоторое количество водорода находится в сосуде при температуре $T_1 = 200 \text{ K}$ и давлении $p_1 = 400 \text{ Па}$. Газ нагревают до температуры $T_2 = 10000 \text{ K}$, при которой практически все молекулы водорода распадаются на атомы. Определить установившееся давление газа, если его объем и масса остались без изменения.

Решение

При распаде (диссоциации) молекул водорода на атомы изменяется количество молекул газа. Если вначале было N молекул двухатомного водорода, то стало $2N$ молекул одноатомного (атомарного) водорода. При использовании уравнения состояния идеального газа это означает, что вместо ν молей вещества стало 2ν молей, вместо концентрации n стало $2n$. Запишем уравнение (5.2) или (5.3) для двух описанных в условии состояний газа.

При использовании уравнения (5.2):

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = nkT_1 \\ p_2 = 2nkT_2 \end{array} \right\} \Rightarrow p_2 = 2 \frac{T_2}{T_1} p_1.$$

При использовании уравнения (5.3):

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = \frac{\nu RT_1}{V} \\ p_2 = \frac{2\nu RT_2}{V} \end{array} \right\} \Rightarrow p_2 = 2 \frac{T_2}{T_1} p_1.$$

В любом случае после вычислений получим ответ $p_2 = 40 \text{ кПа}$.

5.2. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

73(а). Объем идеального газа увеличился в два раза: в первом случае при постоянной температуре, а во втором при постоянном давлении.

1. В каком случае газ совершит большую работу, если начальное состояние одинаковое?
2. Сравнить полученное газом количество теплоты.

Решение

1) Построим графики процессов в $p - V$ координатах (рис. 5.2). Работа газа в каждом случае соответствует площади под линией, изображающей процесс. Тогда очевидно, что

$$A_{1-2} < A_{1-3}.$$

Для подтверждения этого вывода воспользуемся формулой (5.7). При изобарном процессе преобразуем ее к виду

$$A_{1-3} = p_1(V_2 - V_1) = p_1(2V_1 - V_1) = p_1V_1.$$

При изотермическом процессе давление является функцией объема газа.

Из уравнения состояния следует, что $p = \frac{\nu RT_1}{V}$. Тогда

$$A_{1-2} = \nu RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1V_1 \ln 2.$$

Так как $\ln 2 < 1$, то $A_{1-2} < A_{1-3}$.

2) Для определения полученного в процессах количества теплоты используем первое начало термодинамики. При изотермическом процессе $\Delta U = 0$. Тогда $Q_{1-2} = A_{1-2} = p_1V_1 \ln 2$.

При изобарном процессе $Q_{1-3} = \Delta U_{1-3} + A_{1-3}$, где ΔU_{1-3} определим по формуле (5.10). С учетом уравнения состояния идеального газа и формулы (5.9) преобразуем ее к виду

$$\Delta U_{1-3} = \nu C_V \Delta T = C_V \frac{p_1 \Delta V}{R} = \frac{C_V}{R} p_1 V_1 = \frac{1}{\gamma - 1} p_1 V_1$$

Так как $1 < \gamma < 1,66$, то $\ln 2 < 1 < \frac{1}{\gamma - 1}$. Следовательно, $Q_{1-3} > Q_{1-2}$.

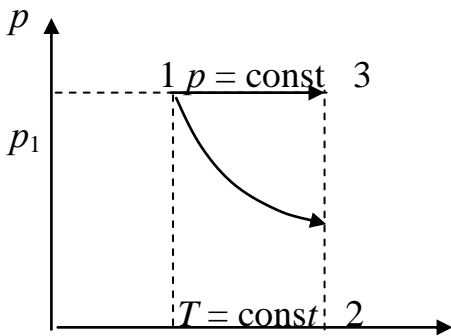
73(б). Для получения низких температур производят адиабатическое расширение гелия, имевшего первоначальную температуру $T_0 = 300$ К и объем $V_0 = 10$ л. При этом давление падает от $P_0 = 5$ МПа до $P = 0,2$ МПа. Найти объем и температуру гелия в конечном состоянии. Для гелия показатель адиабаты $\gamma = 1,66$.

Решение

Запишем уравнение (5.8) в виде

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma. \text{ После преобразования получим } V = V_0 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 69 \text{ л.}$$

Для определения конечной температуры используем уравнение



$V_1 \quad 2V_1 \quad V$

Рис. 5.2

$$\frac{pV}{T} = \text{const}. \text{ Тогда } \frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0} \text{ или } T = T_0 \frac{pV}{p_0V_0} = 83 \text{ К.}$$

73(в). Состояние одного моля идеального газа изменяется по замкнутому циклу, состоящему из двух изобарических процессов и двух изохорических (рис. 5.3). В состоянии 1 температура газа $T_1 = 100 \text{ К}$, в состоянии 3 температура газа $T_3 = 400 \text{ К}$. В состояниях 2 и 4 температуры одинаковы.

- 1) Определить работу, совершенную газом за цикл.
- 2) Найти изменение внутренней энергии и количество теплоты, полученное газом за цикл. Считать показатель адиабаты $\gamma = 1,4$.

Решение

- 1) Работа газа за цикл равна сумме работ на отдельных участках

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-4} + A_{4-1}.$$

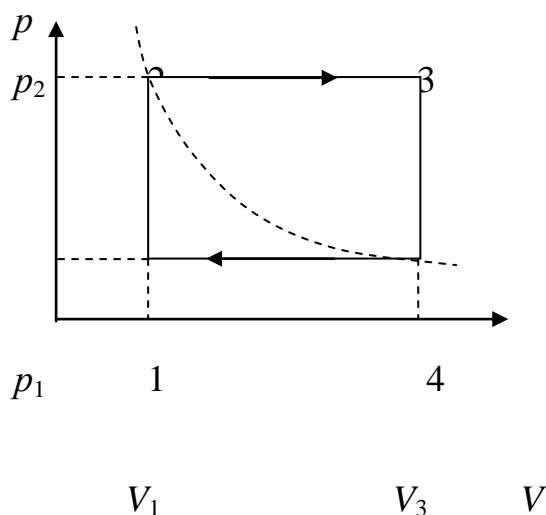


Рис. 5.3

На участках 1-2 и 3-4 объем газа не изменяется (изохорические процессы) и, в соответствии с формулой (5.7), работа равна нулю. На участке 2-3 давление постоянно (изобарический процесс) и формулу (5.7) преобразуем к виду

$$A_{2-3} = \int_{2-3} p dV = p_2 \int_{V_1}^{V_3} dV = p_2(V_3 - V_1).$$

Этой формуле можно сопоставить площадь прямоугольника под линией процесса. Используя уравнение Клапейрона - Менделеева $pV = \nu RT$, ее можно переписать в виде

$$A_{2-3} = \nu(RT_3 - RT_2).$$

Аналогично получим формулу работы на участке 4-1

$$A_{4-1} = \int_{4-1} p dV = p_1 \int_{V_3}^{V_1} dV = p_1(V_1 - V_3) = \nu RT_1 - \nu RT_4.$$

Так как $V_1 < V_3$, то полученное значение меньше нуля. Величина работы также равна площади под линией процесса, но с отрицательным знаком. Тогда работа за весь цикл равна площади прямоугольника 1-2-3-4-1 или

$$A = \nu(RT_3 - RT_2 + RT_1 - RT_4).$$

Учитывая, что по условию задачи $T_2 = T_4 = T$, полученную формулу можно переписать в виде $A = \nu (RT_3 - 2RT + RT_1)$.

Температуру T можно выразить через T_1 и T_3 , если воспользоваться уравнением состояния идеального газа Клапейрона–Менделеева. Запишем его для состояний 1, 2, 3 и 4

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 V_1 = \nu R T_1 \\ p_2 V_1 = \nu R T \\ p_2 V_3 = \nu R T_3 \\ p_1 V_3 = \nu R T \end{array} \right. \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \frac{T}{T_3} \text{ или } T = \sqrt{T_1 \cdot T_3}.$$

$$\text{Тогда } A = \nu (RT_3 - 2R\sqrt{T_1 T_3} + RT_1) = \nu R (\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2.$$

После расчета получим $A = 831$ Дж.

2) Внутренняя энергия является функцией состояния. Поэтому за цикл

$$\Delta U = U_1 - U_1 = 0.$$

На участке 1 – 2 газ нагревается без совершения работы. Следовательно, его внутренняя энергия увеличивается только за счет полученного количества теплоты $\Delta U = Q$. На участке 2 – 3 газ продолжает нагреваться, его внутренняя энергия увеличивается и, кроме того, газ совершает положительную работу. Тогда $Q = \Delta U + A > 0$, т.е. газ, как и на участке 1 – 2 получает количество теплоты. Участки 3 – 4 и 4 – 1 аналогичны участкам 1 – 2 и 2 – 3, но процессы идут с уменьшением температуры, и работа совершается над газом. Поэтому для этих участков $Q < 0$, и в соответствии с формулой (5.5)

$$Q_{\text{получ}} = Q_{1-2} + Q_{2-3} = \nu C_V (T - T_1) + \nu C_p (T_3 - T),$$

$$\text{где } T = \sqrt{T_1 T_3}, \quad C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R \quad \text{и} \quad C_V = \frac{1}{\gamma - 1} R.$$

После вычислений получим $Q_{\text{получ}} = 7,9$ кДж.

Анализ решения: Сравним полученное газом количество теплоты и совершенную им работу, т.е, определим КПД цикла $\eta = A/Q_{\text{получ}} \approx 0,1$. Следовательно, 90% полученного газом количества теплоты в таком циклическом процессе «не работает».

5.3. РАВНОВЕСНЫЕ СВОЙСТВА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

74(а). Сколько молекул водорода находится в сосуде емкостью $V = 2$ л, если средняя квадратичная скорость движения молекул $v_{\text{ср.кв.}} = 500$ м/с, а давление на стенки равно 10^4 Па?

Решение

Для решений задачи достаточно применить основное уравнение кинетической теории газов (5.12)

$$p = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{3} nm \langle v^2 \rangle.$$

Из него выражаем концентрацию n и получим искомую величину

$$N = nV = \frac{3pV}{m \langle v^2 \rangle}, \text{ где масса молекулы водорода } m = \frac{M}{N_A}. \text{ Тогда}$$

$$N = \frac{3pVN_A}{M \langle v^2 \rangle} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{26}}{2 \cdot 500^2} \approx 0,72 \cdot 10^{23}.$$

74(б). Чему равна кинетическая энергия поступательного и кинетическая энергия вращательного движения молекул, содержащихся в 2кг водорода при температуре $T = 400$ К?

Решение

Молекула водорода двухтомная. При температуре $T = 400$ К связь между атомами можно считать жесткой. В этом случае у двухатомной молекулы 3 поступательные и 2 вращательные степени свободы. В среднем на каждую степень свободы приходится энергия $(1/2)kT$. Тогда кинетическая энергия поступательного движения

$$E_{\text{пост}} = 3N \frac{1}{2} kT = \frac{m}{M} N_A \frac{3}{2} kT \approx 5,0 \text{ МДж}.$$

Соответственно для вращательного движения

$$E_{\text{вр}} = 2N \frac{1}{2} kT = \frac{m}{M} N_A kT \approx 3,3 \text{ МДж}.$$

74(в). Во сколько раз изменится число ударов жестких двухтомных молекул газа о поверхность сосуда в единицу времени, если газ адиабатически расширить в два раза?

Решение

Удары молекул о стенку сопровождаются передачей импульса. В результате стенка испытывает силу давления со стороны газа, которая пропорцио-

нальна количеству ударов в единицу времени N и среднему изменению импульса молекул при ударах (см. вывод основного уравнения молекулярно-кинетической теории). Среднее изменение импульса пропорционально величине среднего импульса $\langle m\upsilon \rangle$. Тогда давление $p \sim N \langle m\upsilon \rangle$. Соответственно

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{N_2 \langle m\upsilon_2 \rangle}{N_1 \langle m\upsilon_1 \rangle} \quad \text{или} \quad \frac{N_2}{N_1} = \frac{P_2 \langle \upsilon_1 \rangle}{P_1 \langle \upsilon_2 \rangle}.$$

Учтем, что средняя скорость $\langle \upsilon \rangle$ пропорциональна \sqrt{T} (см. (5.13)). Получим

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{p_2 \sqrt{T_1}}{p_1 \sqrt{T_2}}.$$

Принимая во внимание уравнения адиабаты

$$pV^\gamma = \text{const} \quad \text{и} \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad \text{запишем}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

Тогда

$$\frac{N_2}{N_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

Для жестких (без учета колебательного движения) двухатомных молекул число степеней свободы $i = 5$ (три поступательные и две вращательные степени свободы). Поэтому $\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5} = 1,4$ и $\frac{\gamma+1}{2} = 1,2$. Принимая во внимание, что по условию $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$ получим ответ $\frac{N_2}{N_1} = 2^{-1,2} = 0,435$.

Таким образом, число ударов уменьшится более чем в два раза.

74(г). Баллон содержит водород массой $m = 10$ г при температуре $T = 280$ К. Определить кинетическую энергию всех молекул газа.

Решение

Двухатомные молекулы водорода при заданной температуре имеют пять степеней свободы, и на каждую из них приходится энергия $(1/2)kT$. Тогда кинетическая энергия молекул газа будет равна $E_{\text{кин}} = N \frac{5}{2} kT$, где N – количество

во молекул в 10 г водорода. Его определим по формуле $N = \frac{m}{M} N_A$. Получим

$$\text{ответ } E_{\text{кин}} = \frac{5m}{2M} k N_A T = \frac{5m}{2M} RT = 29,1 \text{ кДж.}$$

74(д). При вакуумировании электронно-лучевой трубки объемом $V = 10$ л достигнуто давление $P_1 = 10^{-4}$ Па при температуре $T = 300$ К. Сколько молекул нужно еще удалить, чтобы давление понизилось до $P_2 = 10^{-5}$ Па при неизменной температуре?

Решение

Давление газа связано с концентрацией и температурой уравнением состояния $p = nkT$. Тогда в первом случае, при давлении $p_1 = 10^{-4}$ Па общее количество молекул можно рассчитать по формуле $N_1 = n_1 V = \frac{p_1 V}{kT}$. Соответственно при давлении $p_2 = 10^{-5}$ Па общее количество молекул станет равным $N_2 = n_2 V = \frac{p_2 V}{kT}$. Искомая величина равна разности

$$\Delta N = N_1 - N_2$$

или $\Delta N = N_1 - N_2 = \frac{p_1 V}{kT} - \frac{p_2 V}{kT} = \frac{V}{kT} (p_1 - p_2)$. Подставив заданные в условии значения величин и вычислив, получим

$$\Delta N = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} (1 \cdot 10^{-4} - 10^{-5}) \approx 2,17 \cdot 10^{14}.$$

5.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА

75(a). В некотором объеме содержится один моль газа. Рассматривая этот газ как идеальный, определить число молекул ΔN , величина скорости которых меньше $0,001 v_{\text{нв}}$.

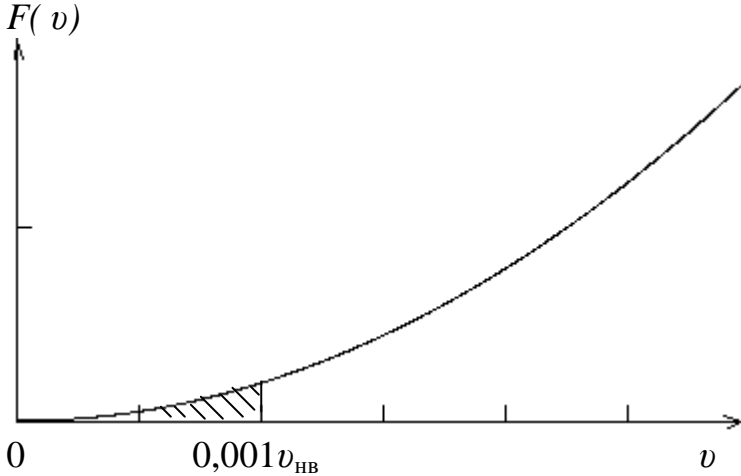


Рис. 5.7

Решение.

Требуемую величину находим как произведение общего количества молекул (в данной задаче N_A) и вероятности ΔP того, что отдельная молекула имеет скорость в заданном интервале от 0 до $0,001 v_{\text{нв}}$. На рис. 5.7 приведен начальный участок графика распределения Максвелла. Величине ΔP соответствует площадь заштрихованного участка. Эту вероятность получим интегрированием функции распределения (5.20)

$$\Delta N = N_A \int_0^{0,001 v_{\text{нв}}} F(v) dv.$$

Процесс интегрирования можно существенно упростить, если учесть, что по условию в заданном диапазоне $v \ll v_{\text{нв}}$. С учетом (5.21) это неравенство можно переписать в виде $\frac{mv^2}{2kT} \ll 1$. Тогда выполняется приближение

$e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \approx 1 - \frac{mv^2}{2kT}$ и подынтегральное выражение можно существенно упростить

$$\begin{aligned} \Delta N &= N_A \int_0^{0,001 v_{\text{нв}}} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv \approx \\ &\approx 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} N_A \int_0^{0,001 v_{\text{нв}}} \left(1 - \frac{mv^2}{2kT} \right) v^2 dv. \end{aligned}$$

Как уже отмечалось $\frac{mv^2}{2kT} \ll 1$. Поэтому стоящей в скобках величиной $\frac{mv^2}{2kT}$ можно пренебречь. Тогда

$$\Delta N \approx 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} N_A \int_0^{0,001v_{\text{HB}}} v^2 dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} N_A \frac{v^3}{3} \Big|_0^{0,001v_{\text{HB}}} =$$

$$\frac{4}{3} \pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} N_A \cdot 10^{-9} v_{\text{HB}}^3.$$

Подставив значение $v_{\text{HB}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$, находим искомое число молекул

$$\Delta N \approx \frac{4}{3} \pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} N_A \cdot 10^{-9} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} N_A \cdot 10^{-9} \approx 4,5 \cdot 10^{14}.$$

75(б). Найти отношение η числа молекул водорода, проекции скоростей которых v_x лежат в интервале 3000-3010 м/с, к числу молекул водорода, имеющих проекции скоростей v_x в интервале 1500-1505 м/с. Температура водорода 300 К.

Решение

Так как заданные интервалы скоростей относительно небольшие, то заштрихованные участки для каждого из них на рис. 5.5 превращаются в узкие вертикальные полосы шириной Δv_{1x} и Δv_{2x} соответственно. Поэтому примем, что плотность вероятности $f(v_x)$ на каждом интервале постоянна. Формулу (5.18) запишем в виде $\Delta N = Nf(v_x)\Delta v_x$ и получим требуемое отношение

$$\eta = \frac{Nf(v_{1x})\Delta v_{1x}}{Nf_2(v_{2x})\Delta v_{2x}} = \frac{e^{-\frac{Mv_{1x}^2}{2kT}} \Delta v_{1x}}{e^{-\frac{Mv_{2x}^2}{2kT}} \Delta v_{2x}},$$

где $v_{1x} = 3000$ м/с, $\Delta v_{2x} = 10$ м/с, $v_{2x} = 1500$ м/с, $\Delta v_{1x} = 5$ м/с. Выполним упрощения и произведем расчет

$$\eta = e^{-\frac{M}{2kT}(v_{1x}^2 - v_{2x}^2)} \frac{\Delta v_{1x}}{\Delta v_{2x}} = 2e^{-2,7} \approx 0,13.$$

75(в). Средняя энергия молекул гелия $\langle E \rangle = 3,92 \cdot 10^{-21}$ Дж. Определить среднюю скорость $v_{\text{ср}}$ молекул гелия при тех же условиях.

Решение

У одноатомной молекулы гелия только три поступательные степени свободы. Поэтому ее средняя энергия определяется только поступательным движением и ее запишем в виде

$$\langle E \rangle = \frac{m v_{\text{ср.кв}}^2}{2}. \text{ Тогда } v_{\text{ср.кв}}^2 = \sqrt{\frac{2\langle E \rangle}{m}}.$$

Используя формулы (5.23) и (5.24), можно установить связь между $v_{\text{ср}}$ и $v_{\text{ср.кв}}$

$$v_{\text{ср}} = v_{\text{ср.кв}} \sqrt{\frac{8}{3\pi}} = \sqrt{\frac{16\langle E \rangle}{3\pi m}}, \text{ где масса молекулы гелия } m = \frac{M}{N_A}.$$

Произведя расчет, получим $v_{\text{ср}} \approx 1000$ м/с.

76(а). *Какая дополнительная сила действует на обшивку самолета (в расчете на 1 м^2 плоской поверхности) за счет перепада давления в салоне и снаружи самолета, если давление в салоне равно $1 \cdot 10^5$ Па, высота полета 10000 м, температура атмосферы $t = -23$ °С и не зависит от высоты? Давление на поверхности земли $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па.*

Решение

Искомая сила $F = (p_0 - p_h)S$, где p_0 - давление в салоне, $S = 1 \text{ м}^2$, p_h - давление за бортом на высоте $h = 10000$ м, которое находим по барометрической формуле (4.9). Тогда

$$F = p_0 S \left(1 - e^{-\frac{Mgh}{RT}} \right), \text{ где молярная масса воздуха } M = 0,029 \text{ кг/моль.}$$

Подставив значения величин в эту формулу и произведя вычисления, получим $F = 1 \cdot 10^5 \cdot 1 \left(1 - e^{-\frac{29,9,8 \cdot 10^4}{8,3 \cdot 10^3 \cdot 250}} \right) \approx 0,75 \cdot 10^5$ Н.

Замечание: Получили весьма ощутимую величину силы, которую необходимо учитывать в расчетах конструкций на прочность.

76(б). *Определить толщину слоя воздуха Δh в вертикальном направлении, в пределах которого концентрация взвешенных в нем пылинок различается не более чем на 1%. Температуру воздуха считать постоянной и равной 300 К , масса каждой пылинки равна $1 \cdot 10^{-18}$ г.*

Решение

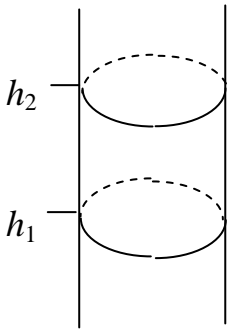


Рис 5.8

Воспользуемся следствием из распределения Больцмана. В равновесии концентрация пылинок n зависит от координаты h по вертикальной оси (5.27)

$$n(h) = n(0)e^{-\frac{U(h)}{kT}} = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}.$$

Отношение концентрации на высоте h_1 и h_2 (рис.5.8) соответственно равно

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{mg(h_2-h_1)}{kT}}.$$

Решая это уравнения относительно $\Delta h = h_2 - h_1$ находим требуемую толщину слоя воздуха

$$\Delta h = -\frac{kT}{mg} \ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right).$$

При вычислении ответа учитываем, что $\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_1 - 0,01n_1}{n_1} = 1 - 0,01$ и исполь-

зуем приближение $\ln(1-x) \approx -x$ при $x \ll 1$.

$$\text{Получим } \Delta h = \frac{kT}{mg} 0,01 = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 4,2 \text{ мм}.$$

76(в). Найти среднее значение вертикальной координаты молекул воздуха в поле тяготения Земли при температуре $T = 300 \text{ К}$. Считать температуру и ускорение свободного падения не изменяющимися по высоте.

Решение

Среднее значение координаты определяется по формуле (5.22)

$z_{\text{ср}} = \int_0^{\infty} z f(z) dz$, где $f(z)$ - функция распределения молекул по координатам

(распределение Больцмана (5.25)). В поле тяготения эта функция имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz} e^{-\frac{mgz}{kT}}.$$

Находим отдельно интеграл, стоящий в знаменателе

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz = -\frac{kT}{mg} e^{-\frac{mgz}{kT}} \Big|_0^{\infty} = \frac{kT}{mg}.$$

Учтем, что $\frac{k}{m} = \frac{R}{M}$. Тогда $z_{\text{cp}} = \frac{Mg}{RT} \int_0^{\infty} z e^{-\frac{Mgz}{RT}} dz$. Произведя замену переменной $z = \frac{RT}{Mg} W$ и преобразуем интеграл к виду

$$z_{\text{cp}} = \frac{RT}{Mg} \int_0^{\infty} W e^{-W} dW.$$

Применив метод интегрирования по частям, получим

$$z_{\text{cp}} = \frac{RT}{Mg} = \frac{8,31 \cdot 10^3 \cdot 300}{29 \cdot 9,8} \text{ м} = 8772 \text{ м} \approx 8,77 \text{ км}.$$

Замечание: Таким образом, основная масса воздуха сосредоточена в пределах небольшого слоя вблизи поверхности Земли. Попробуйте оценить общий объем Земной атмосферы, и вы поймете, насколько актуальны вопросы охраны земной атмосферы от «фабричных труб».

76(г). Вывести формулу зависимости концентрации молекул газа в центрифуге от расстояния r до оси вращения. Масса молекулы газа m , температура T , угловая скорость вращения центрифуги ω .

Решение

Центрифугу можно смоделировать цилиндрическим сосудом (рис. 5.9), который очень быстро вращается вокруг своей оси. Молекулы внутри центрифуги имеют центростремительное ускорение $a_{\text{ц}} = \omega^2 r$. В неинерциальной системе отсчета, связанной с вращающейся центрифугой, это проявляется в наличии поля центробежных сил $F = m\omega^2 r$, которое, как и все центральные поля, можно описать с помощью потенциальной энергии. Потенциальная энергия равна

$$U(\vec{r}) = -\int \vec{F} d\vec{r} + C = -\frac{m\omega^2 r^2}{2} + C.$$

Приняв, что при $r = 0$ потенциальная энергия равна нулю, получим $C = 0$. Тогда искомую формулу выведем с помощью следствия из распределения Больцмана (5.27)

$$n(r) = n(0) e^{-\frac{U(r)}{kT}} = n(0) e^{-\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}},$$

где $n(0)$ - концентрация молекул на оси центрифуги.

Анализ результата

На рис. 5.10. приведены графики зависимости концентраций молекул газа от расстояния до оси вращения $n(r)$ для двух сортов газов с отношением масс молекул $m_1 : m_2 = 1 : 1,2$.

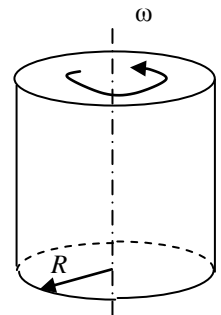
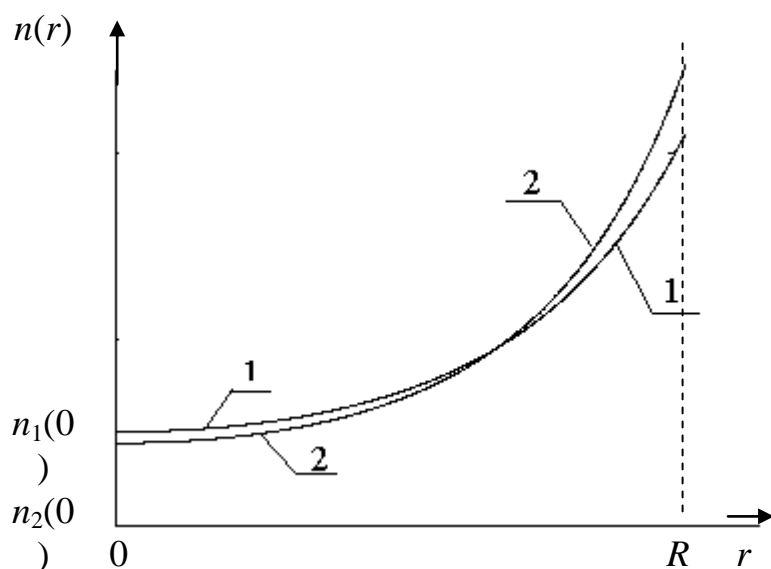


Рис. 5.9

Рис.5.10 (1 – m_1 , 2 – m_2)

Для простоты принято, что количества молекул обоих сортов одинаково $N_1 = N_2$. В результате работы центрифуги вблизи ее оси происходит обогащение смеси легкими молекулами $n_1(0) > n_2(0)$. На периферии же больше концентрация тяжелых молекул $n_1(R) < n_2(R)$, что позволяет использовать центрифуги для разделения смеси частиц (молекул) по массам.

5.5. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

77(а). Статистический вес идеального газа, находящегося в герметичном баллоне, зависит от внутренней энергии в соответствии с формулой

$$\Omega = CU^{\frac{3}{2}N},$$

где C - некоторая постоянная, зависящая от объема и количества газа, N - число молекул газа, U - внутренняя энергия газа. Вывести формулу для расчета энтропии газа.

Решение

Применив формулу (5.28), получим

$$S = k \ln \Omega = \frac{3}{2} kN \ln U + k \ln C.$$

77(б). Найти приращение энтропии воды массой $m = 0,1$ кг при нагревании ее от температуры $t_1 = 0$ °C до температуры $t_2 = 100$ °C и последующем превращении воды в пар.

Решение

Находим отдельно изменение энтропии воды при нагревании ΔS_1 и при превращении ее в пар ΔS_2 . Используем формулу (5.31). При нагревании

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_{уд} m dT}{T},$$

где теплоемкость c заменена произведением удельной теплоемкости $c_{уд}$ и массы воды. После интегрирования

$$\Delta S_1 = c_{\text{уд}} m \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Произведя вычисления получим $\Delta S_1 = 131$ Дж/К.

При испарении воды температура остается постоянной. Поэтому, интегрируя формулу (5.30) при постоянной температуре, получим

$$\Delta S_2 = \frac{Q_{\text{исп}}}{T_2} = \frac{rm}{T_2},$$

где r – удельная теплота испарения воды. После вычислений находим

$$\Delta S_2 = 606 \text{ Дж/К}, \quad \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 737 \text{ Дж/К}.$$

78. Определить изменение энтропии, если температура одного моля идеального газа увеличивается в $e \approx 2,7$ раз при; а) изобарическом, б) изохорическом, в) адиабатическом процессах.

Решение

Если первое начало термодинамики запишем в виде $\delta Q = dU + p dV$ и заменим δQ , используя формулу (5.30) в виде равенства, получим $T dS = dU + p dV$. Учтем, что изменение внутренней энергии одного моля идеального газа dU_m запишем в виде $dU_m = C_V dT$ (формулы (5.16) и (5.17), где C_V – мольная теплоемкость газа при постоянном объеме. Тогда

$$T dS = \nu C_V dT + p dV.$$

а) Продифференцируем уравнение Клапейрона-Менделеева $pV = \nu RT$ при изобарическом процессе $p dV = \nu R dT$. С учетом этого перепишем первое начало термодинамики

$$T dS = \nu C_V dT + \nu R dT$$

$$\text{или} \quad dS = \nu (C_V + R) \frac{dT}{T} = \nu C_p \frac{dT}{T}.$$

После интегрирования последней формулы получим

$$\Delta S = \nu C_p \ln \frac{T_2}{T_1} = \nu C_p \ln e = \nu C_p.$$

б) При изохорическом процессе $dV=0$. Тогда $T dS = \nu C_V dT$ или $dS = \nu C_V \frac{dT}{T}$. После интегрирования этой формулы находим

$$\Delta S = \nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1} = \nu C_V \ln e = \nu C_V.$$

в) При адиабатическом процессе $\delta Q = 0$ и, в соответствии с (5.30), $\Delta S = 0$.

79(а). Рабочее вещество тепловой машины совершает цикл, в пределах которого абсолютная температура изменяется в два раза, а сам цикл в координатах T - S имеет вид, показанный на рисунке 5.11. Найти коэффициент полезного действия η цикла.

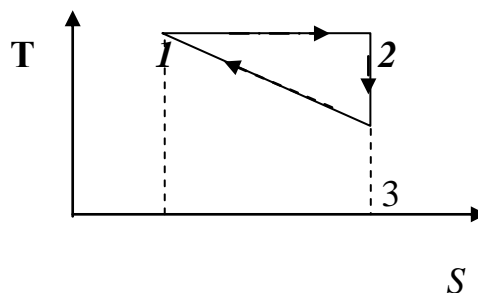


Рис. 5.11

Решение

$$\text{По определению } \eta = \frac{A_{\text{полезн}}}{Q_{\text{получ}}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 - количество теплоты, получаемое тепловой машиной за цикл, и Q_2 количество теплоты, отдаваемое за цикл холодильнику. Используем формулу (5.31), т.е. $Q = \int T dS$. Учтем, что на диаграмме величина интеграла соответствует площади криволинейной трапеции под линией процесса. Интегрирование можно разбить на три участка 1-2, 2-3 и 3-1. На участке 1-2 $dS > 0$. Тогда $Q_{1-2} = T_1 \int dS = T_1 \Delta S_{1-2} > 0$ (машина получает количество теплоты). На участке 2-3 $dS = 0$ (теплообмена нет). На участке 3-1 $dS < 0$. Тогда $Q_{3-1} = \int T dS = \frac{T_1 + T_3}{2} \Delta S_{3-1} < 0$ (машина отдает количество теплоты холодильнику). Учтем, что $T_1 = 2T_3$ и $\Delta S_{1-2} = -\Delta S_{3-1}$. Тогда

$$\eta = \frac{T_1 \Delta S - \frac{3}{4} T_1 \Delta S}{T_1 \Delta S} = 0,25.$$

79(б). Идеализированный цикл бензинового двигателя внутреннего сгорания изображен на p - V диаграмме (рис. 5.12). Участок 1-2 - соответствует адиабатическому сжатию горючей смеси; участок 2-3 - изохорическому увеличению давления при сгорании топлива; участок 3-4 - адиабатическому расширению газообразных продуктов сгорания топлива «рабочий ход»; участок 4-1 - изохорическому выхлопу отработавших газов. Выразить КПД двигателя через степень сжатия газа $k = \frac{V_1}{V_2}$. Сделать расчет для $k = 7$ при показателе адиабаты $\gamma = 1,4$.

Решение

По определению $\eta = \frac{A_{\text{полезн}}}{Q_{\text{получ}}}$.

Проанализируем процессы с точки зрения теплообмена и совершения работы:

1-2 - адиабатический процесс с уменьшением объема $Q_{1-2} = 0$, $A_{1-2} < 0$ – работа совершается внешними силами при сжатии газа

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV < 0.$$

Для расчета интеграла используем уравнение адиабаты $pV^\gamma = p_2V_2^\gamma$.

Тогда $p = p_2V_2^\gamma \frac{1}{V^\gamma}$ и, после преобразования подинтегрального выражения, получим

$$\begin{aligned} A_{1-2} &= p_2V_2^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^\gamma} dV = \\ &= \frac{p_2V_2^\gamma}{1-\gamma} \left[\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right] = \\ &= \frac{p_2V_2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = \frac{p_2V_2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{1}{k} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] < 0. \end{aligned}$$

2-3 – изохорический процесс. В этом случае работа $A_{2-3} = 0$. Увеличение давления связано с увеличением температуры. Следовательно, внутренняя энергия газа увеличивается за счет получаемого при сгорании топлива количества теплоты

$$Q_{2-3} = \nu C_V (T_3 - T_2) = \nu C_V \left(\frac{p_3V_2}{\nu R} - \frac{p_2V_2}{\nu R} \right) = \frac{C_V V_2}{R} (p_3 - p_2) > 0.$$

3-4 – процесс аналогичен процессу 1-2, но идет в противоположном направлении. Поэтому $Q_{3-4} = 0$, и работа $A_{3-4} > 0$

$$A_{3-4} = -\frac{p_3V_2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = \frac{p_3V_2}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{1}{k} \right)^{\gamma-1} \right].$$

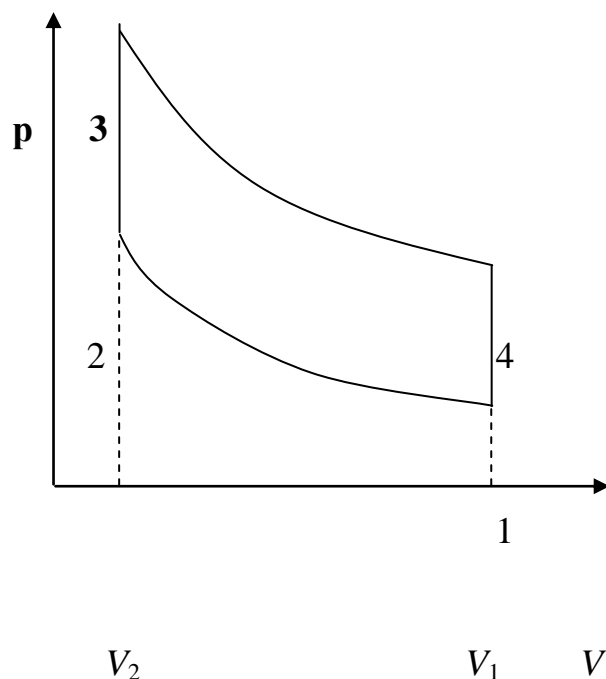


Рис. 5.12

4-1 - процесс аналогичен процессу 2-3. Работа $A_{4-1} = 0$, температура и внутренняя энергия газа уменьшаются за счет «сбрасывания» количества теплоты в атмосферу $Q_{4-1} < 0$.

Используя полученные результаты, можно найти коэффициент полезного действия. При этом необходимо учесть, что полезной (результатирующей) работой является величина $A_{3-4} + A_{1-2}$, где $A_{1-2} < 0$:

$$\eta = \frac{A_{\text{полезн}}}{Q_{\text{получ}}} = \frac{A_{3-4} + A_{1-2}}{Q_{2-3}} = \frac{V_2(p_3 - p_2) \left(1 - \frac{1}{k^{\gamma-1}}\right)}{\frac{C_V V_2}{R} (p_3 - p_2)}.$$

Учтем, что $\frac{R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \gamma - 1$. Тогда

$$\eta = 1 - \frac{1}{k^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{7^{0,4}} \approx 0,54 \text{ или } \eta \approx 54\%.$$

Замечание: реальный КПД бензиновых двигателей гораздо меньше, так как в расчетах не учтены силы трения, теплообмен со стенками цилиндров и другие факторы.

80. Найти КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно, если при адиабатическом расширении рабочей смеси давление уменьшается в 2 раза. Постоянная адиабаты $\gamma = 1,5$.

Решение

Цикл Карно состоит из двух адиабат и двух изотерм (рис. 5.13). Его КПД

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Для определения отношения минимальной T_2 и максимальной T_1 температур в цикле можно использовать уравнение адиабаты

$$pV^\gamma = \text{const}.$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона–Менделеева, его преобразуем его к виду

$$p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T = \text{const}.$$

Тогда для участка 2-3

$$p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_1 = p_3^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_2 \quad \text{или} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

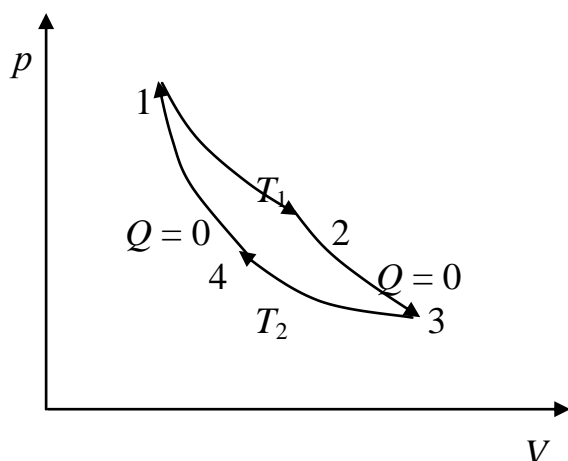


Рис. 5.13

По условию задачи $\frac{p_2}{p_3} = 2$. С учетом этого рассчитаем значение КПД

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - 2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1 - 2^{\frac{1}{3}} \approx 0,21.$$

5.6. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

81(а). Определить среднюю длину свободного пробега молекул кислорода, находящегося в сосуде емкостью $V = 2$ л при температуре $t = 27^\circ\text{C}$ и давлении $P = 100$ кПа. Рассчитать число соударений, происходящих между всеми молекулами в этом сосуде за 1 с. Эффективный диаметр молекулы кислорода равен $2,9 \cdot 10^{-10}$ м.

Решение.

Средняя длина свободного пробега молекул вычисляется по формуле (5.40)

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

Необходимое для расчета значение концентрации молекул выразим из уравнения $p = nkT$. Тогда

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \approx 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Число соударений w , происходящих между всеми молекулами за 1 с, находим как произведение количества молекул N и частоты соударений ν каждой молекулы $w = \frac{1}{2} N\nu$. Множитель $1/2$ связан с тем, что молекулы соударяются попарно и произведение учитывает каждый удар дважды. Учтем, что

$$\nu = \frac{v_{\text{ср}}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad \text{и} \quad N = N_A \frac{pV}{RT}.$$

$$\text{Тогда} \quad w = \frac{1}{2} N\nu = \frac{N_A pV}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi MRT}} \approx 9,7 \cdot 10^{31} \text{ с}^{-1}.$$

81(б). Определить коэффициент диффузии азота, имеющего температуру $T = 300$ К при давлении $p = 100$ кПа. Эффективный диаметр молекул азота принять равным $3,1 \cdot 10^{-10}$ м.

Решение

Коэффициент диффузии определяется по формуле (6.4) $D = \frac{1}{3} v_{\text{ср}} \lambda$. Средняя длина свободного пробега находится так же, как и в предыдущей задаче

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}. \quad \text{Тогда}$$

$$D = \frac{2kT}{3\pi d^2 p} \sqrt{\frac{RT}{\pi M}} \approx 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$$

81(в). Температура воздуха между стеклами оконных рам изменяется от $t_1 = 0^\circ \text{C}$ у наружного стекла до $t_2 = +10^\circ \text{C}$ у внутреннего. Оценить среднее значение коэффициента теплопроводности для этих условий и с его помощью рассчитать поток тепла через окно за счет явления теплопроводности. Площадь окна $S = 2 \text{ м}^2$, зазор между стеклами $b = 0,05 \text{ м}$. Эффективный диаметр молекул воздуха равен $3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Решение

Коэффициент теплопроводности газа оценивается по формуле (5.38)

$$K = \frac{1}{3} \nu_{\text{ср}} \lambda \left(\frac{i}{2} kn \right),$$

где число степеней свободы для молекул воздуха (двухатомные азот и кислород) при указанных температурах $i = 5$, $\nu_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$.

$$\text{Тогда } K = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \frac{ikn}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{ik}{3\pi d^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi M}}.$$

Произведя вычисления, получим $K \approx 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$.

Поток тепла через окно вычисляется с помощью закона Фурье (5.35)

$$\Phi_q = j_q S = -K \frac{dT}{dz} S.$$

Знак минус указывает направление потока и в расчетах опускается. С достаточной точностью величину $\frac{dT}{dz}$ можно заменить на $\frac{T_2 - T_1}{b}$. Тогда

$$\Phi_q = K \frac{T_2 - T_1}{b} S \approx 5,2 \text{ Дж/с}.$$

82(а). Два тонкостенных коаксиальных цилиндра длиной $H = 0,1 \text{ м}$, могут свободно вращаться вокруг их общей оси (рис.5.14). Радиус R большего цилиндра равен $0,05 \text{ м}$. Между цилиндрами имеется зазор размером $b = 2 \text{ мм}$. Оба цилиндра находятся в воздухе при нормальных условиях. Внутренний цилиндр приводят во вращение с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 125,6 \text{ рад/с}$. Внешний цилиндр заторможен. Определить, через какое время Δt с момента освобождения внешнего цилиндра он приобретет угловую скорость

$\omega_2 = 6,28 \text{ рад/с}$. Коэффициент динамической вязкости воздуха при нормальных условиях равен $1,72 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$, масса внешнего цилиндра $m = 0,1 \text{ кг}$. Изменением относительной скорости цилиндров пренебречь.

Решение

При вращении внутреннего цилиндра в воздушном зазоре возникает градиент скорости, который в силу большего различия между ω_1 и ω_2 можно считать приблизительно постоянным

$$\frac{dv}{dr} \approx \frac{\Delta v}{b} \approx \frac{(\omega_1 R - \omega_2 R)}{b} \approx \frac{\omega_1 R}{b}.$$

Поэтому на каждый элемент поверхности ΔS внешнего цилиндра действует сила вязкого трения, направленная по касательной к поверхности (5.36⁶)

$$\Delta F_{\text{тр}} = \eta \left| \frac{dv}{dr} \right| \Delta S = \eta \frac{\omega_1 R}{b} \Delta S.$$

Это приведет к возникновению момента сил трения относительно оси цилиндров $M = \sum \Delta F_{\text{тр}} R = \sum \eta \left| \frac{dv}{dr} \right| \Delta S R =$

$$= \eta \frac{\omega_1 R}{b} R \sum \Delta S = \eta \frac{\omega_1 R^2}{b} 2\pi R H.$$

Тогда, согласно основному уравнению динамики вращательного движения твердого тела, изменение момента импульса внешнего цилиндра ΔL запишем в виде $\Delta L = M \Delta t$. Учтем, что $\Delta L = I \omega_2$, где момент инерции внешнего цилиндра $I = mR^2$. После преобразований получим

$$\Delta t = \frac{\Delta L}{M} = \frac{mR^2 \omega_2 b}{\eta \omega_1 R 2\pi R^2 H} = \frac{m \omega_2 b}{\eta \omega_1 2\pi R H}.$$

Подставив значения величин и произведя вычисления, получим

$$\Delta t \approx 18,5 \text{ с}.$$

82(б). В качестве примера диффузии часто указывают на распространение запаха в воздухе. Оцените время диффузионного смещения молекулы примеси на расстояние $L = 3 \text{ м}$. Принять, что молекулы примеси мало отличаются от молекул воздуха и их коэффициент диффузии $D = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

Решение

Диффузионное смещение молекул можно оценить по формуле (6.8)

$$L_{\text{дифф}} \approx \sqrt{D\tau}. \text{ Тогда } \tau = \frac{L^2}{D}.$$

Произведя вычисления, получим $\tau \approx 55,6$ часов.

Замечание: Из опыта следует, что запах распространяется значительно быстрее. Дело в том, что при решении не учитывались конвективные потоки, су-

ществующие в воздухе. Кроме того, используемая формула оценивает размер области, на границах которой концентрация молекул примеси достигает значение, примерно равное 0,37 от максимальной концентрации. Обоняние человека, как правило, гораздо чувствительнее, и мы ощущаем уже "передний фронт" диффундирующих молекул.

Глава 6. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКИ

6.1. РАВНОВЕСНОЕ ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

83. Температура стенок вакуумированной полости равна 3000 К. Ее объем $V=1$ л.

1. Какова частота моды равновесного электромагнитного излучения в полости, средняя заселенность которой фотонами равна 1?
2. Чему равна спектральная плотность мод при этом значении частоты?

Решение

1. Используя формулу (6.1) для средней заселенности мод фотонами при $\langle n \rangle = 1$, запишем

$$e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} = \frac{1}{\langle n \rangle} + 1, \quad e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} = 2 \quad \text{или} \quad \frac{\hbar\omega}{kT} = \ln 2.$$

Тогда
$$\omega = \frac{kT}{\hbar} \ln 2.$$

После вычислений получим $\omega \approx 2,7 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$.

2. Спектральную плотность мод на этой частоте рассчитаем по формуле (6.2)

$$D(\omega) = \frac{10^{-3} \cdot 2,7^2 \cdot 10^{28}}{3,14^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^3} \text{ с} \approx 0,28 \text{ с}.$$

84. При какой температуре с каждого квадратного сантиметра поверхности абсолютно черного тела вылетает ежесекундно в среднем по 10 фотонов в диапазоне длин волн от $\lambda_1 = 549$ нм до $\lambda_2 = 551$ нм?

Решение

Используя определение спектральной плотности энергетической светимости (6.4), находим энергию, испускаемую единицей поверхности абсолютно черного тела в интервале длин волн $d\lambda$:

$$dR = r_\lambda d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda.$$

Учитывая малость величины $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, это выражение запишем в виде

$$\Delta R = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \Delta\lambda,$$

где $\lambda = 550$ нм - средняя длина волны в заданном диапазоне. Тогда среднее количество фотонов N_0 , покидающих каждую единицу поверхности абсолютно черного тела, определим по формуле

$$N_0 = \frac{\Delta R}{\epsilon_{\phi}} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \Delta\lambda.$$

Здесь $N_0 = N/S$, $S = 1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2$. Из этой формулы выразим искомую температуру:

вначале
$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} = 1 + \frac{2\pi c \Delta\lambda S}{\lambda^4 N},$$

а затем
$$T = \frac{hc}{\lambda k \ln \left(1 + \frac{2\pi c \Delta\lambda S}{\lambda^4 N} \right)}.$$

Произведя вычисления, получим ответ: $T = 552 \text{ К}$.

85. В модели абсолютно черного тела (рис. 6.1) температура стенок полости поддерживается равной 2000 К. площадь отверстия $S = 1 \text{ мм}^2$. Определить количество энергии излучаемой через отверстие за минуту.

Решение

Воспользовавшись законом Стефана-Больцмана (6.5) получим искомую величину

$$E = R * St = \sigma T^4 St,$$

где по условию $T = 2000 \text{ К}$, $t = 60 \text{ с}$, $S = 10^{-6} \text{ м}^2$.

Произведя вычисления, получим ответ: $E = 54,4 \text{ Дж}$.

86. Максимум испускательной способности поверхности Солнца приходится на длину волны $\lambda_{\text{max}} = 0,5 \text{ мкм}$.

1. Определить температуру солнечной поверхности, считая, что она по своим свойствам близка к абсолютно черному телу.

2. Найти значение солнечной постоянной – интенсивности солнечного излучения вблизи Земли за пределами ее атмосферы.

Решение

1. Температуру солнечной поверхности определим с помощью закона Вина (6.6): $T = b/\lambda_{\max}$. Произведя вычисления, получим $T = 5800$ К.

2. Значение солнечной постоянной C найдем, разделив поток энергии Φ_E , излучаемый Солнцем по всем направлениям, на площадь поверхности сферы, радиус которой равен среднему расстоянию от Земли до Солнца $L = 1,5 \cdot 10^{11}$ м (рис.6.3). Поток энергии Φ_E равен произведению энергетической светимости Солнца R^* на площадь его поверхности

$$\Phi_E = R^* 4\pi r_c^2,$$

где $r_c \approx 7 \cdot 10^8$ м - радиус Солнца. Тогда

$$C = \frac{4\pi r_c^2}{4\pi L^2} R^* = \frac{r_c^2}{L^2} \sigma T^4.$$

Произведя вычисления, получим ответ: $C = 1400$ Дж/м²·с, $T = 5800$ К.

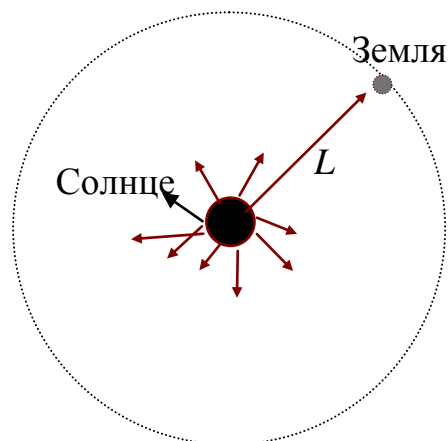


Рис. 6.3

6.2. КОЛЕБАНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

87. Определить среднее число фононов в моде упругих колебаний кристаллической решетки, для которой спектральная плотность числа фононов максимальна. Считать выполненным условие $T < 0,5 \vartheta_D$.

Решение

Определим частоту моды, соответствующей максимальной спектральной плотности числа фононов. Функцию спектральной плотности числа фононов $f(\omega)$ получим перемножая спектральную плотность фононных мод $D(\omega)$ на среднее число фононов в моде $\langle n \rangle$

$$f(\omega) = D(\omega) \langle n \rangle = \frac{3V\omega^2}{2\pi^2 v_{зв}^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Для упрощения последующих преобразований произведем замену $\frac{\hbar\omega}{kT} = x$.

$$\text{Тогда } f(x) = \frac{3V(kT)^2}{2\pi^2 v_{зв}^3 \hbar^2} \frac{x^2}{e^x - 1} = a \frac{x^2}{e^x - 1},$$

где $a = \frac{3V(kT)^2}{2\pi^2 v_{зв}^3 \hbar^2}$. При $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow \infty$ эта неотрицательная функция стремится к нулю. Значит, где-то между нулем и бесконечностью должен быть максимум функции $f(x)$. Дифференцируя полученное выражение по x , и приравнявая результат к нулю, находим

$$\frac{2x(e^x - 1) - x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{(e^x - 1)^2} (2e^x - 2 - xe^x) = 0.$$

Удовлетворяющие этому уравнению значения $x = 0$ и $x = \infty$, как отмечалось выше, соответствуют минимумам функции $f(x)$. Запишем условие максимума

$$(2e^x - 2 - xe^x) = 0 \quad \text{или} \quad x = 2(1 - e^{-x}).$$

Решая это трансцендентное уравнение методом последовательных приближений, получим $x_m = 1,59$. Произведя обратную замену, находим частоту моды ω_m , соответствующей максимуму функции спектральной плотности числа фононов $f(\omega)$:

$$\omega_m = \frac{1,57kT}{\hbar}.$$

Тогда искомое среднее число фононов в этой моде рассчитаем по формуле (6.9)

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\frac{\hbar\omega}{e^{kT}} - 1} = \frac{1}{e^{1,57} - 1} \approx 0,26.$$

88. Сравнить количества теплоты, необходимые для нагревания одного моля железа на $\Delta T = 10$ К от температуры $T_1 = 0$ К и от температуры $T_2 = 900$ К. Для железа температура Дебая $\vartheta_D = 470$ К.

Решение

Учитывая малое увеличение объема железа при нагревании, первое начало термодинамики запишем в виде $Q \approx \Delta U$. Тогда при низких температурах, с учетом формулы (6.16), необходимое для нагревания количество теплоты будет равно

$$Q_1 \approx \Delta U = \frac{3\pi^4 N_A k \Delta (T^4)}{5\vartheta_D^3} = \frac{3\pi^4 R \Delta (T^4)}{5\vartheta_D^3},$$

где $R = 8,31$ Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная.

Во втором случае можно считать, что выполняется условие $T_2 \gg \vartheta_D$ и необходимое для нагревания количество теплоты находим с помощью формулы (6.15)

$$Q_2 \approx \Delta U = 3N_A k \Delta T = 3R \Delta T.$$

Выполним расчеты:

$$Q_1 = \frac{3 \cdot 3,14^4 \cdot 8,31 \cdot 10^4}{5 \cdot 470^3} \text{ Дж} = 46,8 \text{ мДж},$$

$$Q_2 = 3 \cdot 8,31 \cdot 10 \text{ Дж} = 249,3 \text{ Дж}.$$

6.3. ЭЛЕКТРОНЫ В МЕТАЛЛАХ И ПОЛУПРОВОДНИКАХ

89. Определить концентрацию свободных электронов в металле при температуре $T = 0 \text{ К}$, если известно, что их средняя энергия равна $1,5 \text{ эВ}$.

Решение

Концентрацию свободных электронов определим с помощью формулы (6.23) для энергии Ферми, которая связана со средней энергией свободных электронов соотношением (6.24). После преобразований запишем расчетную формулу

$$n = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2mE_F(0)}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{10m\langle E \rangle}{3\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Выполнив расчет, получим $n = 2,1 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

90. Образец из чистого полупроводника нагревают на $\Delta T = 125 \text{ К}$ от температуры $T_1 = 250 \text{ К}$. При этом его удельная электрическая проводимость увеличивается в 800 раз. Как она изменится при последующем нагревании еще на $\Delta T = 125 \text{ К}$?

Решение

Используя формулу температурной зависимости удельной электрической проводимости чистого полупроводника (6.26), запишем отношение ее значения σ_2 при температуре $T_2 = T_1 + \Delta T$ к значению σ_1 при температуре T_1 :

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = e^{\frac{\Delta E}{2k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)} \quad \text{или} \quad \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\Delta E}{2k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = \frac{\Delta E}{2k} \frac{\Delta T}{T_1 T_2}.$$

Аналогичное соотношение для значений σ_3 при температуре $T_3 = T_1 + 2\Delta T$ и σ_2 имеет вид:

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = e^{\frac{\Delta E}{2k} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3} \right)} \quad \text{или} \quad \ln \frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{\Delta E}{2k} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3} \right) = \frac{\Delta E}{2k} \frac{\Delta T}{T_2 T_3}.$$

Решая полученную систему уравнений (исключая ширину запрещенной зоны ΔE), находим

$$\ln \frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{\Delta E}{2k} \frac{\Delta T}{T_2 T_3} = \frac{\Delta T}{T_2 T_3} \frac{T_1 T_2}{\Delta T} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{T_1}{T_3} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{T_1}{T_1 + 2\Delta T} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Учитывая, что $T_1 + 2\Delta T = 2T_1$, упростим это выражение

$$\ln \frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{T_1}{T_1 + 2\Delta T} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \ln \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}.$$

Тогда
$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \approx 28,3.$$

Глава 7. ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

7.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ АТОМНЫХ ЯДЕР

91. Оценить расстояние между центрами нуклонов в ядрах атомов.

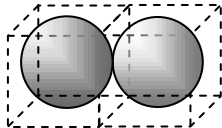
Решение

Используя формулу (7.1), определим объём ядра атома с массовым числом A

$$V \approx \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (1,3 \cdot 10^{-15})^3 A = 9,2 \cdot 10^{-45} A \text{ м}^3.$$

Тогда на каждый нуклон приходится объём, равный

$$v = \frac{V}{A} = 9,2 \cdot 10^{-45} \text{ м}^3.$$



Принимая для простоты, что каждый нуклон занимает в ядре кубическую ячейку, оценим расстояние между центрами нуклонов, считая его равным стороне куба

$$l \approx \sqrt[3]{v} = 2,1 \cdot 10^{-15} \text{ м}.$$

Замечание: Полученную величину полезно сравнить с типичным расстоянием между атомами в молекулах $l_{\text{ат}} \approx (1 \div 5) \cdot 10^{-10} \text{ м}$ и между молекулами в газах $l_{\text{г}} \approx (10^{-8} \div 10^{-9}) \text{ м}$.

92. Считая, что ядро ${}_{40}^{95}\text{Zr}$ моделируется однородно заряженным шаром, оценить потенциал электрического поля в точке, расположенной на поверхности ядра.

Решение

В заданном приближении потенциал электрического поля на поверхности ядра определим с помощью закона Гаусса по формуле

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R},$$

где $q = Ze$ — заряд ядра, R — его радиус, e — элементарный заряд.

Тогда, используя формулу (7.1), преобразуем ее к виду

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{1,3 \cdot 10^{-15} A^{\frac{1}{3}}}.$$

Подставив в нее заданные величины ($Z = 40$ и $A = 95$), получим

$$\varphi \approx 9,7 \cdot 10^6 \text{ В.}$$

93. Определить отношение второго слагаемого к первому в формуле Вейцеккера (7.4): а) для ядра ${}_{13}^{27}\text{Al}$, б) для ядра ${}_{47}^{107}\text{Ag}$.

Решение

Искомое соотношение можно вычислить по формуле

$$\eta = \frac{C_{\text{пов}} A^{\frac{2}{3}}}{C_{\text{об}} A} = \frac{C_{\text{пов}}}{C_{\text{об}}} A^{-\frac{1}{3}} = 1,13 A^{-\frac{1}{3}}.$$

У алюминия $A_1 = 27$, соответственно $\eta_1 \approx 0,38$. У серебра $A_2 = 107$, соответственно $\eta_2 \approx 0,24$. Как видим, для ядер с небольшим массовым числом большая доля нуклонов находится в поверхностном слое с ненасыщенными связями.

94. Вычислить разность масс «зеркальных» ядер атомов ${}^{33}\text{S}$ и ${}^{33}\text{Cl}$.

Решение

По периодической системе элементов определяем, что в ядре атома заданного изотопа серы ${}^{33}\text{S}$ число протонов $Z_1 = 16$, а число нейтронов $N_1 = 17$. В ядре ${}^{33}\text{Cl}$, наоборот, $Z_2 = 17$, а $N_2 = 16$. Поэтому они называются «зеркальными». Массу каждого ядра определим как сумму масс образующих его нуклонов за вычетом дефекта масс:

$$M_1 = (Z_1 m_p + N_1 m_n) - \frac{E_{1\text{св}}}{c^2} = (16m_p + 17m_n) - \frac{E_{1\text{св}}}{c^2};$$

$$M_2 = (Z_2 m_p + N_2 m_n) - \frac{E_{2\text{св}}}{c^2} = (17m_p + 16m_n) - \frac{E_{2\text{св}}}{c^2}.$$

Тогда искомая разность масс равна

$$\Delta M = M_2 - M_1 = (m_p - m_n) - \frac{1}{c^2}(E_{2\text{св}} - E_{1\text{св}}).$$

Для удобства расчетов выразим ее в энергетических единицах

$$\Delta M c^2 = (m_p c^2 - m_n c^2) - (E_{2\text{св}} - E_{1\text{св}}),$$

где $m_p c^2 = 938,26$ МэВ – энергия покоя протона, $m_n c^2 = 939,55$ МэВ – энергия покоя нейтрона.

Используя формулу Вейцеккера (7.4), получим (с учетом, что $A_1 = A_2$)

$$E_{2\text{св}} - E_{1\text{св}} = -0,71 \frac{Z_2^2 - Z_1^2}{A^{\frac{1}{3}}}.$$

$$\text{Тогда } \Delta M c^2 = (m_p c^2 - m_n c^2) + 0,71 \frac{Z_2^2 - Z_1^2}{A^{\frac{1}{3}}}.$$

После расчета получим $\Delta M c^2 \approx 6,0$ МэВ = $9,6 \cdot 10^{-13}$ Дж.

Соответственно

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} = 1,07 \cdot 10^{-29} \text{ кг} = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ а.е.м.}$$

На эту величину масса ядра ^{33}Cl больше, чем масса ядра ^{33}S .

7.2. РАДИОАКТИВНОСТЬ.

ПРОХОЖДЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО

95. Какие изотопы образуются в последовательности $\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ радиоактивных распадов ядра радона ^{222}Rn ?

Решение

Так как α – частица содержит два протона и два нейтрона, то при α – распаде зарядовое и массовое числа ядра уменьшаются соответственно на две и четыре единицы, и образуется новый элемент, который в периодической системе находится на две позиции левее исходного элемента. У радона зарядовое число равно 86. Следовательно, образуется $^{218}_{84}\text{Po}$. Аналогично последующий α – распад приведет к образованию $^{214}_{82}\text{Pb}$. При β – распаде свинца один из ней-

тронов ядра превращается в протон. Общее число нуклонов в ядре не изменяется, а зарядовое число увеличивается на единицу. В результате β – распада образуется новый элемент, который в периодической системе находится на одну позицию правее свинца. Это изотоп висмута ${}^{214}_{83}\text{Bi}$. Его α – распад приведет опять к смещению на две позиции левее в периодической системе элементов, т.е. к образованию изотопа таллия ${}^{210}_{81}\text{Tl}$.

96. В хорошо откаченную вакуумную камеру объемом $V = 1$ л поместили 1 кг радиоактивного полония ${}^{210}\text{Po}$. В результате α - распада полония в камере появляется газообразный гелий. Определить его давление через час, если температура стенок камеры равна 300 К.

Решение

Для определения давления гелия используем уравнением состояния идеального газа Клапейрона – Менделеева

$$pV = \nu RT$$

где ν - число молей образовавшегося гелия. При каждом акте α - распада ядра атома полония образуется одна молекула гелия. Поэтому число молей образовавшегося гелия соответственно равно числу молей распавшегося полония, которое связано с числом распавшихся атомов ΔN известным соотношением

$$\nu = \frac{\Delta N}{N_A},$$

где N_A - число Авогадро.

Используя формулу (7.5) получим:

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = N_0(1 - e^{-\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}}).$$

Период полураспада полония ${}^{210}\text{Po}$ равен 138 суткам, что значительно превышает время эксперимента, т.е. выполняется условие $t \ll T_{1/2}$. Тогда из выражения для ΔN (используя приближенную формулу $e^{-x} \approx 1 - x$ при $x \rightarrow 0$) получим

$$\Delta N \approx N_0 \frac{t}{T_{1/2}} \ln 2.$$

Число радиоактивных атомов полония N_0 определим по формуле

$$N_0 = \frac{m}{M} N_A,$$

где M – молярная масса полония ($M = 0,210$ кг/моль). Таким образом, искомое давление определим по формуле:

$$p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{RT \Delta N}{V N_A} = \frac{RT N_0 t \ln 2}{N_A V T_{1/2}} = \frac{m R T t \ln 2}{M V T_{1/2}}.$$

После подстановки значений величин и расчета получим $p = 2,5$ кПа.

97. Точечный радиоактивный источник ^{60}Co находится в центре свинцового контейнера с толщиной стенок $x = 1$ см и наружным радиусом $R = 20$ см. Определить максимальную активность источника, который можно хранить в контейнере, если допустимая плотность потока γ квантов при выходе из контейнера равна $8 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$. Учтеть, что при каждом акте распада ядра ^{60}Co испускается два γ кванта, средняя энергия которых $\langle E_\gamma \rangle = 1,25$ МэВ.

Решение

Так как при каждом акте распада испускается 2γ кванта, то полный поток излучения связан с активностью соотношением $\Phi = 2A$. Плотность потока на расстоянии R от точечного источника излучения (без защитного слоя)

$$j_0 = \frac{\Phi}{S} = \frac{\Phi}{4\pi R^2}.$$

Эта величина связана с допустимой плотностью потока снаружи контейнера формулой (7.9)

$$j = j_0 e^{-\mu x}.$$

Тогда искомая величина максимальной активности источника равна

$$A_{\max} = \frac{\Phi}{2} = \frac{4\pi R^2 j_0}{2} = 2\pi R^2 j e^{\mu x}.$$

По графину на рис. 7.1 находим, что линейный коэффициент ослабления μ для γ - квантов с энергией 1,25 МэВ равен $0,64 \text{ см}^{-1}$. После вычислений получим $A_{\max} = 3,8$ МБк.

7.3. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

98. При бомбардировке нейтронами ядер изотопа бора ^{10}B наблюдается испускание α - частиц. Какое получается остаточное ядро? Рассчитать энергию реакции.

Решение

Запишем уравнение реакции в виде $^{10}_5\text{B} + {}^1_0n \rightarrow ? + {}^4_2\text{He}$. Для нее баланс протонов $5 + 0 = Z + 2$, баланс нейтронов $5 + 1 = N + 2$. Очевидно, что $Z = 3$ и $N = 4$. Следовательно, остаточное ядро - ${}^7_3\text{Li}$. Для расчета энергии реакции сравним суммы масс ядра мишени и нейтрона с суммой масс образовавшихся ядер (в а.е.м). Используя данные таблицы (см. приложения), получим:

$$M(^{10}\text{B}) + m(^1n) = 10,01294 + 1,00867 = 11,02161,$$

$$M(^7\text{Li}) + M(^4\text{He}) = 7,01601 + 4,00260 = 11,01861.$$

Разность масс $\Delta m = 0,003$ а.е.м., что в пересчете соответствует высвобожденной энергии $Q = 0,003 \cdot 931,5 \text{ МэВ} = 2,7945 \text{ МэВ}$.

7.4. ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

99. Указать причины, запрещающие нижеследующие процессы:

1. $\Sigma^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$.
2. $\pi^- + p \rightarrow K^+ + K^-$
3. $K^- + n \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0$.
4. $n + p \rightarrow \Sigma^+ + \Lambda^0$.
5. $\pi^- \rightarrow \mu^- + e^+ + e^-$.
6. $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \tilde{\nu}_\mu$.

Решение

Проверим выполнимость законов сохранения в каждой из приведенных реакций.

В процессе 1 нарушается закон сохранения энергии – импульса. В частности, в системе отсчета центра масс, где сигма-минус-гиперон Σ^- покоится, его энергия равна $m_{\Sigma^-} c^2 = 1197 \text{ МэВ}$, что меньше суммы энергий покоя продуктов распада $m_{\Lambda^0} c^2 + m_{\pi^-} c^2 = 1256 \text{ МэВ}$.

В процессе 2 нарушается закон сохранения барионного заряда. Действительно, в начальном состоянии он равен $B = 0 + 1 = 1$, а в конечном $B = 0$.

В процессе 3 нарушается закон сохранения электрического заряда ($-1 + 0 \neq -1 + 1$).

В процессе 4 нарушается закон сохранения странности ($0 + 0 \neq -1 - 1$).

В процессе 5 нарушается закон сохранения лептонного заряда L_μ ($0 \neq 1 + 0 + 0$).

В процессе 6 нарушается закон сохранения лептонного заряда L_e . До распада $L_e = 0$, а после распада $L_e = 2$.

100. Найти кварковый состав π^+ -мезона и протона p .

Решение

Используя формулу 7.11, подбираем из таблицы 7.7 комбинацию кварков так, чтобы результирующие квантовые числа совпадали с квантовыми числами заданных адронов (таблица 7.6):

π^+ имеет состав $(u\bar{d})$,

p имеет состав (uud) .