

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Экзаменационные вопросы и задачи по дисциплине
Математический анализ
для студентов 1 курса специальности 230101,
осенний семестр

Блок № 1

1. Степенная функция с рациональным показателем.
2. Показательная и логарифмическая функции.
3. Тригонометрические функции.
4. Обратные тригонометрические функции.
5. Гиперболические функции.
6. Элементарные преобразования графиков функций: параллельный перенос вдоль осей координат.
7. Элементарные преобразования графиков функций: растяжение и сжатие вдоль осей координат.
8. Элементарные преобразования графиков функций: симметричное отражение относительно осей координат, модуль функции и модуль аргумента.
9. Чётность, нечётность функции. Монотонность функции.
10. Периодичность функции. Нули функции. Обратная функция.
11. Сложная функция. Элементарная функция.
12. Функция, заданная параметрически. Полярная система координат.

Образцы теоретических задач по блоку № 1:

1. Найти композицию $f \circ g$ для следующих отображений $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x - 9 & \text{при } x \geq 3, \\ -2x & \text{при } x < 3; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geq 0, \\ x^3 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

2. Пусть отображение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ действует по правилу

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{при } x \geq -2, \\ x - 3 & \text{при } x < -2. \end{cases}$$

Найти $f((-4; 2])$, $f^{-1}([-4; 2])$.

Задачи по блоку № 1 будут на темы:

- цепочка преобразований и построение графиков элементарных функций;
- построение графика сложной функции;
- построение графика суммы, разности и произведения двух функций;
- построение графика функции в полярной системе координат;
- построения графика, заданного параметрически;

Блок № 2

1. Числовая последовательность. Монотонная и ограниченная последовательности. Теорема о монотонной ограниченной последовательности.
2. Предел последовательности. Бесконечно малая и бесконечно большая последовательности.
3. Предел функции. Свойства предела функции: единственность, ограниченность, постоянство знака. Односторонние пределы.
4. Непрерывность функции в точке. Непрерывность функции на отрезке. Первый замечательный предел.
5. Теорема об арифметических операциях над функциями, имеющими предел (сумма, произведение, частное). Второй замечательный предел.
6. Бесконечно малая и бесконечно большая функции. Теорема: связь между бесконечно малой и бесконечно большой функциями.
7. Эквивалентные бесконечно малые функции. Таблицы эквивалентностей. Теорема о применении эквивалентностей к нахождению пределов.
8. Первая и вторая теоремы Больцано-Коши. Существенность условий теоремы.
9. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса. Существенность условий теоремы.
10. Точки разрыва функции. Классификация и нахождение точек разрыва.

Образцы теоретических задач по блоку № 2:

1. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{2n^2+5}{n^2+1}$ убывающая.
2. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{n+3}$ ограничена.
3. Доказать по определению предела последовательности, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{3n-1} = \frac{4}{3}$.
4. Доказать по определению предела, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$ является бесконечно малой последовательностью.
5. Доказать по определению предела, что последовательность с общим членом $x_n = n^3 + 2$ является бесконечно большой последовательностью.
6. Доказать по определению предела, что $\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 3) = 7$.
7. Доказать по определению предела, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x+2} = 0$.
8. Доказать по определению предела, что $\lim_{x \rightarrow -2+} \frac{5}{x+2} = +\infty$.
9. Доказать по определению предела, что $\lim_{x \rightarrow -3-} \frac{7}{x+3} = -\infty$.
10. Доказать по определению предела, что функция $f(x) = \frac{3}{x-4}$ является бесконечно большой при $x \rightarrow 4$.
11. Доказать по определению предела, что функция $f(x) = x^2 - 9$ является бесконечно малой при $x \rightarrow -3$.
12. Доказать по определению предела, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x} = +\infty$.
13. Доказать, что функции $\ln(1+x)$ и x эквивалентны при $x \rightarrow 0$.
14. Доказать, что функции $3^x - 1$ и $x \ln 3$ эквивалентны при $x \rightarrow 0$.
15. Доказать, что функции $\arcsin x$ и x эквивалентны при $x \rightarrow 0$.
16. Доказать, что функции x и $\operatorname{tg} x$ эквивалентны при $x \rightarrow 0$.

Задачи по блоку № 2 будут из методического пособия № 1191 на темы:

- нахождение пределов функций и последовательностей;
- нахождение и классификация точек разрыва функции.

Блок № 3

1. Определение производной функции. Связь между существованием конечной производной и непрерывностью функции. Производная обратной функции.
2. Правила нахождения производной (суммы, разности, произведения и частного двух функций). Производная степенно-показательной функции.
3. Односторонние производные. Производная сложной функции. Логарифмическая производная.
4. Дифференциал, его геометрический смысл. Правила вычисления дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала.
5. Производная первого порядка функции, заданной параметрически. Формулы для вычисления второй производной функции, заданной параметрически.
6. Производные и дифференциалы высших порядков. Производная функции, заданной неявно.
7. Формула Лейбница для n -й производной произведения двух функций. Первое и второе правила Лопиталя.
8. Вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты графика функции. Алгоритм нахождения горизонтальных и наклонных асимптот.
9. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие монотонности функции на интервале.
10. Первый и второй достаточные признаки существования точек экстремума. Алгоритм нахождения интервалов монотонности и точек экстремума.
11. Достаточное условие существования экстремума по производным высшего порядка. Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на отрезке.
12. Выпуклость вверх и вниз графика функции в точке и на отрезке. Различные определения. Достаточное условие выпуклости функции на интервале.
13. Точка перегиба функции. Необходимый и достаточный признаки существования точки перегиба.
14. Достаточный признак существования точки перегиба по производным высшего порядка. Алгоритм нахождения интервалов выпуклости и точек перегиба.
15. Теорема Ферма и теорема Ролля. Их геометрический смысл.
16. Теорема Лагранжа и её геометрический смысл. Теорема Коши.

Образцы теоретических задач по блоку № 3:

1. Найти по определению производную функции $y = x^5$ при $x = -1$.
2. Найти по определению производную функции $y = \sin x$ при $x = \frac{\pi}{3}$.
3. Найти по определению производную функции $y = \log_3 x$.
4. Вывести производную функции $y = \arcsin x$.
5. Проверить выполнение условий теоремы Ролля для функции $y = \ln \sin x$ на отрезке $[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$ и найти значение c из условия теоремы.
6. Удовлетворяет ли функция $y = 3x^2 - 6x + 2$ условию теоремы Лагранжа на отрезке $[2; 5]$? Если да, то найти значение c из условия теоремы.
7. На кривой $y = x^3$ найти точку, в которой касательная к графику функции параллельна хорде, соединяющей точки $(1; 1)$, $(2; 8)$.
8. Проверить, что функции $f(x) = x^2 + 2$ и $g(x) = x^3 - 4x^2 + 9x + 9$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке $[0; 3]$ и найти значение c из условия теоремы.

Задачи по блоку № 3 будут из методического пособия № 1444 на темы:

- производная функции;
- производная степенно-показательной функции;
- производная первого и второго порядка функции, заданной параметрически;
- нахождение производных по формуле Лейбница;
- нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке;
- исследование функции на максимум, минимум и перегиб с помощью производных высшего порядка;
- исследование поведения функции на границе области определения;
- нахождение промежутков знакопостоянства функции;
- нахождение асимптот функции;
- нахождение интервалов монотонности и точек экстремума функции;
- нахождение интервалов выпуклости и точек перегиба функции.

О Б Р А З Е Ц

Экзаменационного билета по математическому анализу

1а. Чётность, нечётность функции. Монотонность функции.

Найти композицию $f \circ g$ для следующих отображений $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{при } x \geq 1, \\ -2 - x & \text{при } x < 1; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

1б. Построить график функции $y = x + \sin x$.

1в. Построить график функции в полярной системе координат $r = 1 - 2 \cos \varphi$.

2а. Бесконечно малая и бесконечно большая функции. Теорема: связь между бесконечно малой и бесконечно большой функциями.

Доказать, что функции $\ln(1 + x)$ и x эквивалентны при $x \rightarrow 0$.

2б. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{2x}$.

2в. Найти и классифицировать точки разрыва функции $y = \frac{1}{1-2^{1/x}}$.

3а. Теорема Лагранжа и её геометрический смысл. Теорема Коши.

Удовлетворяет ли функция $y = 3x^2 - 6x + 2$ условию теоремы Лагранжа на отрезке $[2; 5]$? Если да, то найти значение c из условия теоремы.

3б. Для функции $y = (x^3 - 2x)e^{3x}$ вычислить производную $y^{(4)}$ по формуле Лейбница.

3в. Исследовать поведение функции на границе области определения, найти интервалы монотонности и точки экстремума функции

$$y = - \left(\frac{x}{x+2} \right)^2.$$