Интегральное исчисление функции одной переменной

§1. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла

1.1. Общие понятия

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на (a, b), если для любого $x \in (a, b)$ $F'(x) = f(x)$.

Пример 1. Функция $\sin(5x - 1)$ есть первообразная для функции $5\cos(5x - 1)$ на всей числовой прямой, так как $(\sin(5x - 1))' = 5\cos(5x - 1)$.

Если функция $f(x)$ имеет на (a, b) первообразную $F_0(x)$, то множество всех первообразных функции $f(x)$ на (a, b) совпадает с множеством функций $F(x) = F_0(x) + C$, где C — любая постоянная.

Определение 2. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на (a, b) называется множество всех первообразных $F(x)$ (если они существуют) функции $f(x)$ на (a, b). Неопределенный интеграл от $f(x)$ на (a, b) обозначается символом $\int f(x)\,dx$; $f(x)$ называется подынтегральной функцией.

Пример 2. Пусть $f(x) = x^2$. Функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ есть первообразная для функции $f(x) = x^2$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$, так как $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$. Поэтому

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Пример 3. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Первообразной $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(0, +\infty)$ является функция $F(x) = \ln x$, а на промежутке $(-\infty; 0)$ функция $F(x) = \ln(-x)$. Таким образом, функция $F(x) = \ln|x|$ есть первообразная для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на любом промежутке, не содержащем 0. Поэтому

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Основные свойства неопределенного интеграла:

1) $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$;
2) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$;
3) $\int df(x) = \int f'(x)\,dx$.

Основные правила вычисления неопределенных интегралов.

1) Пусть на (a, b) существуют неопределенные интегралы $\int g(x)\,dx$ и $\int f(x)\,dx$. Тогда для любых α и β на (a, b) справедлива формула:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

2) Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$, $v'(x)$ на промежутке (a, b). Тогда справедливо равенство:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

или

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

3) Пусть на $(\alpha;\beta)$ существует неопределенный интеграл $\int f(t)\,dt = F(t) + C$. Пусть функция $t = u(x)$ имеет непрерывную производную $u'(x)$ на (a, b) и $u((a, b)) \subset (\alpha, \beta)$. Тогда на (a, b) справедливо равенство:

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u(x))\,du(x) = F(u(x)) + C \left(= \int f(t)\,dt\right).$$

4) Пусть строго монотонная функция $x = \omega(t)$ имеет непрерывную производную $\omega'(t)$ на (α, β) и $\omega(t) : (\alpha;\beta) \to (a, b)$. Пусть функция $f(x)$ определена на (a, b) и существует неопределенный интеграл

$$\int f(\omega(t))\omega'(t)\,dt = \int g(t)\,dt = G(t) + C.$$

Тогда на (a, b) имеем:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\omega(t))\,d\omega(t) = \int f(\omega(t))\omega'(t)\,dt = G(t) + C = G(v(x)) + C,$$

где $t = v(x)$ — функция, обратная к функции $x = \omega(t)$.

Таблица основных неопределенных интегралов.

1) $\int 0 \cdot dx = C$;
2) $\int 1\,dx = x + C$;
3) $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$;
4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$;
5) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(0 < a \neq 1)$, $\int e^x\,dx = e^x + C$;
6) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;
7) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;
8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;\ n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$;
9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi n;\ n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$;

10) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$;
11) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\,\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0;\ |x| \neq |a|)$;
12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0;\ |x| < |a|)$;
13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x + \sqrt{x^2+k}| + C \quad (k \neq 0$, в случае $k < 0$ $|x| > |k|)$;
14) $\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + C$;
15) $\int \mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x + C$;
16) $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\,x + C$;
17) $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\,\mathrm{cth}\,x + C; \quad (x \neq 0)$.

Таблица основных дифференциалов.

1) $dx = \frac{1}{a}\,d(ax+b) \quad (a \neq 0)$;
2) $x^p\,dx = \frac{dx^{p+1}}{p+1} \quad (p \neq -1)$;
3) $\frac{dx}{x} = d(\ln|x|) \quad (x \neq 0)$;
4) $\sin x\,dx = -d\cos x$;
5) $\cos x\,dx = d\sin x$;
6) $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\,\mathrm{tg}\,x$;
7) $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\,\mathrm{ctg}\,x$;
8) $a^x\,dx = \frac{da^x}{\ln a}; \quad e^x\,dx = de^x$;
9) $\mathrm{sh}\,x\,dx = d\,\mathrm{ch}\,x$;
10) $\mathrm{ch}\,x\,dx = d\,\mathrm{sh}\,x$;
11) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\arcsin x = -d\arccos x$;
12) $\frac{dx}{1+x^2} = d\,\mathrm{arctg}\,x = -d\,\mathrm{arcctg}\,x$.

1.2. Интегрирование путем замены переменных

Один из наиболее распространенных методов, применяемых при вычислении неопределенных интегралов — метод замены переменных. В его основе лежат правила 3 и 4, сформулированные в предыдущем пункте. Метод подстановки состоит в том, что сообразно виду подынтегральной функции составляют вспомогательную функцию, подстановка которой в исходный интеграл приводит его к виду, более удобному для интегрирования.

Выделяются две формы подстановки.

I. Пусть требуется вычислить интеграл $\int g(x)\,dx$. Согласно правилу 3 выберем, если это удается, такую функцию $u(x)$, что подынтегральное выражение представляется в виде:

$$\int g(x)\,dx = \int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u(x))\,du(x).$$

Тогда, делая замену переменных $t = u(x)$, по сказанному выше, достаточно найти интеграл

$$\int f(t)\,dt, \quad t = u(x).$$

Изложенный метод применяется при вычислении интегралов вида:

1) $\int f(ax+b)\,dx$,
делая замену $t = ax+b$, получим:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b) = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt;$$

2) $\int f(\sin x)\cos x\,dx$,
делая замену $t = \sin x$, получим:

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(\sin x) d\sin x = \int f(t)\,dt;$$

3) $\int f(\cos x)\sin x\,dx$,
делая замену $t = \cos x$, получим:

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx = -\int f(\cos x)\,d\cos x = -\int f(t)\,dt;$$

4) $\int f(\operatorname{tg} x)\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$,
делая замену $t = \operatorname{tg} x$, получим:

$$\int f(\operatorname{tg} x)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int f(\operatorname{tg} x)\,d\operatorname{tg} x = \int f(t)\,dt;$$

5) $\int (\ln x)\frac{1}{x}\,dx$,
делая замену $t = \ln x$, получим:

$$\int f(\ln x)\frac{dx}{x} = \int f(\ln(x))\,d\ln x = \int f(t)\,dt;$$

6) $\int f(e^x)e^x\,dx$,
делая замену $t = e^x$, получим:

$$\int f(e^x)e^x\,dx = \int f(e^x)\,de^x = \int f(t)\,dt;$$

7) $\int (ax^2+b)^p x\,dx$,
делая замену $t = ax^2+b$, получим:

$$\int (ax^2+b)^p x\,dx = \frac{1}{2}\int (ax^2+b)^p\,dx^2 = \frac{1}{2a}\int (ax^2+b)^p\,d(ax^2+b) = \frac{1}{2a}\int t^p\,dt.$$

Пример 4.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x+2}} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x+2)}{\sqrt{5x+2}} = \\ = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{5}\int t^{-1/2}\,dt = \frac{2}{5}\,t^{1/2} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x+2} + C.$$

Пример 5.

$$\int \sin(3x-4)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x-4)\,d(3x-4) = \\ = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\,\cos t + C = -\frac{1}{3}\,\cos(3x-4) + C.$$

Пример 6.

$$\int \frac{dx}{2x-6} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-6)}{2x-6} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\,\ln|t| + C = \frac{1}{2}\,\ln|2x-6| + C.$$

Пример 7.

$$\int \sin^3 x\cos x\,dx = \int \sin^3 x\,d\sin x = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Пример 8.

$$\int \frac{\sin x}{4-\cos x}\,dx = \int \frac{d(-\cos x)}{4-\cos x} = \int \frac{d(-\cos x+4)}{4-\cos x} = \\ = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|4-\cos x| + C.$$

Пример 9.

$$\int \frac{dx}{\sin x\,\cos x} = \int \frac{\cos x}{\sin x\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x}\,\frac{dx}{\cos^2 x} = \\ = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

Пример 10.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x\,d\ln x = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\,\ln^2 x + C.$$

Пример 11.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,d2x = \frac{1}{2}\int \frac{de^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\,\ln|t| + C = \frac{1}{2}\,\ln(e^{2x}+1) + C.$$

Пример 12.

$$\int \frac{x\,dx}{5x^2-3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{5x^2-3} = \frac{1}{2\cdot 5}\int \frac{d(5x^2-3)}{5x^2-3} =$$
$$= \frac{1}{10}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{10}\,\ln|t| + C = \frac{1}{10}\,\ln|5x^2-3| + C.$$

II. Применяя вторую форму подстановки, пользуются правилом 4. В подынтегральное выражение непосредственно подставляют вместо x функцию $x = \omega(t)$, а именно:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\omega(t))\,d\omega(t) = \int f(\omega(t))\omega'(t)\,dt = \int g(t)\,dt,$$

где $g(t)$ — более удобная для интегрирования функция, чем $f(x)$. При этом на функцию $\omega(t)$ накладываются условия строгой монотонности, что обеспечивает существование обратной функции $t = v(x)$ и представление:

$$\int f(x)\,dx = \int g(t)\,dt = G(t) + C = G(v(x)) + C.$$

Пример 13.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(4+\sqrt[3]{x})}.$$

Применяя подстановку $x = t^6$, получим $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = dt^6 = 6t^5\,dt$ и

$$\int \frac{6t^5\,dt}{t^3(4+t^2)} = 6\int \frac{t^2}{4+t^2}\,dt = 6\int \frac{t^2+4-4}{t^2+4}\,dt =$$
$$= 6\int \left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right)\,dt = 6\int dt - 24\int \frac{dt}{t^2+4} =$$
$$= 6t - 12\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} + C = 6\sqrt[6]{x} + 12\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C.$$

Пример 14.

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Применяя подстановку $x = 3\sin t$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, $t = \arcsin\frac{x}{3}$, $dx = d(3\sin t) = 3\cos t\,dt$, получим

$$\int \sqrt{9 - 9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt = \int \sqrt{9\cos^2 t}\,3\cos t\,dt = 9\int \cos^2 t\,dt =$$
$$= 9\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{9}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t\,dt\right) = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\sin 2t + C =$$
$$= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{9}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right) + C.$$

Преобразуем отдельно выражение $\sin\left(2\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)\right)$, для этого воспользуемся формулой:

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

поэтому

$$\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)\cdot\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)} =$$
$$= 2\cdot\frac{x}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{2}{9}x\cdot\sqrt{9-x^2}.$$

Отсюда окончательно получим:

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{9-x^2} + C.$$

1.3. Интегрирование по частям

Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$, $v'(x)$ на промежутке (a, b), тогда справедливо равенство:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx \qquad (1)$$

или

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Необходимо заметить, что применение метода интегрирования по частям приводит к частичному интегрированию, так как и правая часть формулы (1) содержит интеграл. Однако при правильном применении метода интеграл из правой части (1) будет табличным или легко сводящимся к табличному. При вычислении некоторых интегралов метод интегрирования по частям может применяться несколько раз. Правило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, например:

$$\int x^k \ln^m x\,dx, \quad \int x^k \sin ax\,dx, \quad \int x^k \cos ax\,dx, \quad \int x^k e^{ax}\,dx,$$
$$\int x^k \arcsin ax\,dx, \quad \int x^k \arccos ax\,dx, \quad \int x^k \operatorname{arctg} ax\,dx$$

и другие, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

I. При интегрировании функций вида $P_m(x)\sin ax$, $P_m(x)\cos ax$, $P_m(x)e^{ax}$, где $P_m(x)$ произвольный многочлен степени m, в качестве функции $u(x)$ из формулы (1) берется многочлен $P_m(x)$, а в качестве $v'(x)$ другой сомножитель.

Пример 15. $\int x \cdot \sin 3x\,dx$. Пусть $u(x) = x$, $v'(x) = \sin 3x$, тогда

$$dv = \sin 3x\,dx = \frac{\sin 3x}{3}\,d3x = -\frac{1}{3}\,d\cos 3x.$$
$$\int x \cdot \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\int x\,d\cos 3x = -\frac{1}{3}\left(x \cdot \cos 3x - \int \cos 3x\,dx\right) =$$
$$= -\frac{1}{3}\,x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx = -\frac{1}{3}\,x\cos 3x + \frac{1}{9}\int \cos 3x\,d3x =$$
$$= -\frac{1}{3}\,x\cos 3x + \frac{1}{9}\,\sin 3x + C.$$

Пример 16. $\int xe^{-4x}\,dx$. Пусть $u(x) = x$, $v'(x) = e^{-4x}$, тогда

$$v'(x)\,dx = dv(x) = e^{-4x}\,dx = -\frac{e^{-4x}}{4}\,d(-4x) = -\frac{1}{4}\,de^{-4x}.$$
$$\int xe^{-4x}\,dx = -\frac{1}{4}\int x\,de^{-4x} = -\frac{1}{4}\left(x \cdot e^{-4x} - \int e^{-4x}\,dx\right) =$$
$$= -\frac{1}{4}\,xe^{-4x} + \frac{1}{4}\int e^{-4x}\,dx = -\frac{1}{4}\,xe^{-4x} - \frac{1}{16}\int e^{-4x}\,d(-4x) =$$
$$= -\frac{1}{4}\,xe^{-4x} - \frac{1}{16}\,e^{-4x} + C.$$

Как было сказано выше, при вычислении интегралов формула интегрирования по частям может применяться несколько раз.

Пример 17. $\int x^2 \cdot \cos 2x\, dx$. Пусть $u(x) = x^2$, $v'(x) = \cos 2x$, тогда

$$v'(x)\, dx = dv(x) = \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \cos 2x\, d2x = \frac{1}{2}\, d \sin 2x.$$

$$\int x^2 \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \int x^2\, d \sin 2x = \frac{1}{2} \left(x^2 \sin 2x - \int \sin 2x\, dx^2 \right). \qquad (2)$$

Так как $dx^2 = 2x\, dx$, то в последнем интеграле получим

$$\int \sin 2x\, dx^2 = \int (\sin 2x) \cdot 2x\, dx.$$

Полагая $u(x) = 2x$, $v'(x) = \sin 2x$; $v'(x)\, dx = \sin 2x\, dx = \frac{1}{2} \sin 2x\, d2x = -\frac{1}{2}\, d \cos 2x$, имеем

$$\int (\sin 2x) \cdot 2x\, dx = \int 2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) d \cos 2x = -\int x\, d \cos 2x =$$

$$= -\left(x \cos 2x - \int \cos 2x\, dx \right) = -x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x\, d2x =$$

$$= -x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

Окончательно, подставляя последний результат в (2), получим

$$\int x^2 \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \left(x^2 \cdot \sin 2x + x \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

II. При интегрировании функций вида: $P_m(x) \arcsin ax$, $P_m(x) \arccos ax$, $P_m(x) \operatorname{arctg} ax$, $P_m(x) \ln ax$ в качестве $v'(x)$ выбирается многочлен $P_m(x)$, а в качестве $u(x)$ оставшаяся функция.

Пример 18. $\int x \ln x\, dx$. Пусть $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$, тогда

$$v'(x)\, dx = x\, dx = \frac{1}{2}\, dx^2.$$

$$\int x \ln x\, dx = \frac{1}{2} \int \ln x\, dx^2 = \frac{1}{2} \left(x^2 \ln x - \int x^2\, d \ln x \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(x^2 \ln x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx \right) = \frac{1}{2} \left(x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} \right) + C =$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

Пример 19. $\int x \operatorname{arctg} 2x\, dx$. Пусть $u(x) = \operatorname{arctg} 2x$, $v'(x) = x$, тогда

$$\int x \operatorname{arctg} 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{arctg} 2x\, dx^2 = \frac{1}{2}\Big(x^2 \cdot \operatorname{arctg} 2x -$$

$$- \int x^2\, d \operatorname{arctg} 2x\Big) = \frac{1}{2}\left(x^2 \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{2x^2}{1+(2x)^2}\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{2}\int \frac{4x^2+1}{4x^2+1}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{4x^2+1}\, dx\right) =$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{arctg} 2x}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\int \frac{d2x}{(2x)^2+1} = \frac{x^2 \operatorname{arctg} 2x}{2} - \frac{1}{4}x +$$

$$+ \frac{1}{8}\operatorname{arctg} 2x + C.$$

III. При интегрировании функций $e^{ax}\sin bx$, $e^{ax}\cos bx$, $\sqrt{ax^2+b}$ интегрирование по частям применяется два раза. Вычисление интеграла сводится к решению алгебраического уравнения первой степени.

Пример 20.

$$\int e^x \cos x\, dx = \int \cos x\, de^x = e^x\cos x - \int e^x\, d\cos x =$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx = e^x \cos x + \int \sin x\, de^x =$$

$$= e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x\, d\sin x = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx.$$

Обозначим через $I = \int e^x \cos x\, dx$. Перепишем последнее равенство в виде:

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - I,$$

решая это уравнение, получим

$$2I = e^x \cos x + e^x \sin x,$$

$$I = \frac{1}{2}(e^x \cos x + e^x \sin x),$$

отсюда имеем:

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C.$$

Замечание. При интегрировании функций вида $e^{ax}\sin bx$, $e^{ax}\cos bx$ интегрирование по частям применяется два раза, причем в обоих случаях в качестве множителя $u(x)$ берется функция одного и того же типа: показательная или тригонометрическая.

Пример 21.

$$\int \sqrt{7-x^2}\,dx = x\cdot\sqrt{7-x^2} - \frac{1}{2}\int x\cdot\frac{(-2x)}{\sqrt{7-x^2}}\,dx = x\cdot\sqrt{7-x^2} +$$
$$+\int \frac{x^2}{\sqrt{7-x^2}}\,dx = x\sqrt{7-x^2} - \int \frac{7-x^2}{\sqrt{7-x^2}}\,dx + \int \frac{7}{\sqrt{7-x^2}}\,dx =$$
$$= x\cdot\sqrt{7-x^2} - \int \sqrt{7-x^2}\,dx + 7\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}.$$

Обозначим через $I = \int \sqrt{7-x^2}\,dx$. Перепишем последнее равенство в виде:

$$I = x\sqrt{7-x^2} + 7\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}} - I \quad \text{или} \quad 2I = x\sqrt{7-x^2} + 7\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}},$$
$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{7-x^2} + 7\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}\right), \text{ отсюда имеем:}$$
$$\int \sqrt{7-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,x\sqrt{7-x^2} + \frac{7}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}} + C.$$

1.4. Интегрирование рациональных функций

Сначала остановимся на интегрировании так называемых простых дробей. Это дроби следующих четырех типов:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^m},$$
$$\text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}, \quad (m=2,3,\ldots).$$

Интегрирование дробей вида I и II известно:

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C,$$
$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^m}\,dx = -\frac{A}{m-1}\,\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C.$$

При интегрировании дробей III и IV в выражении, стоящем в знаменателе, выделяется полный квадрат

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + k.$$

Тогда интеграл от дроби III запишется в виде:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k}\,dx = \int \frac{A\left(x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}\right)+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k}\,dx =$$

$$= \int \frac{A\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k}\,dx + \int \frac{B-A\cdot\frac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k}\,dx = \int \frac{At}{t^2+k}\,dt + \int \frac{B-A\cdot\frac{p}{2}}{t^2+k}\,dt,$$

где $t = x+\frac{p}{2}$.

Первый интеграл легко вычисляется подстановкой $u = t^2+k$, а именно:

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+k} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{t^2+k} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+k)}{t^2+k} = \frac{1}{2}\,\ln|t^2+k| + C.$$

Второй интеграл $\int \frac{dt}{t^2+k}$ является табличным.

При интегрировании дроби IV аналогично III получим:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \int \frac{Ax+B\,dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k\right)^m} = \int \frac{A\left(x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}\right)+B}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k\right)^m}\,dx =$$

$$= A\int \frac{t\,dt}{(t^2+k)^m} + \left(B-A\cdot\frac{p}{2}\right)\cdot\int \frac{dt}{(t^2+k)^m}.$$

Первый интеграл легко вычисляется подстановкой $u = t^2+k$, а именно:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+k)^m} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{(t^2+k)^m} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+k)}{(t^2+k)^m} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^m} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{u^{m-1}} + C = -\frac{1}{2(m-1)}\cdot\frac{1}{(t^2+k)^{m-1}} + C.$$

Второй интеграл вычисляется методом понижения. Пусть $I_m = \int \frac{dt}{(t^2+k)^m}$, тогда $I_{m-1} = \int \frac{dt}{(t^2+k)^{m-1}}$.

Рассмотрим интеграл I_m:

$$I_m = \int \frac{dt}{(t^2+k)^m} = \frac{1}{k}\int \frac{k}{(t^2+k)^m}\,dt = \frac{1}{k}\int \frac{k+t^2-t^2}{(t^2+k)^m}\,dt =$$

$$= \frac{1}{k}\cdot\left(\int \frac{k+t^2}{(t^2+k)^m}\,dt - \int \frac{t^2}{(t^2+k)^m}\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\int \frac{dt}{(t^2+k)^{m-1}} - \int t\cdot\frac{t\,dt}{(t^2+k)^m}\right) = \frac{1}{k}\cdot\left(I_{m-1} - \frac{1}{2}\int t\frac{d(t^2+k)}{(t^2+k)^m}\right).$$

Последний интеграл вычисляется методом интегрирования по частям:

$$\int t\frac{d(t^2+k)}{(t^2+k)^m} = -\frac{1}{m-1}\int t\,d(t^2+k)^{1-m} =$$
$$= -\frac{1}{m-1}\left(\frac{t}{(t^2+k)^{m-1}} - \int\frac{dt}{(t^2+k)^{m-1}}\right) = \frac{1}{m-1}\left(\frac{t}{(t^2+k)^{m-1}} - I_{m-1}\right).$$

Отсюда имеем, что

$$I_m = \frac{1}{k}\left(I_{m-1} + \frac{1}{2(m-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+k)^{m-1}} - \frac{I_{m-1}}{2(m-1)}\right).$$

Последняя формула сводит вычисление I_m к вычислению I_{m-1}. Зная интеграл (см. таблицу интегралов) $I_1 = \int\frac{dt}{t^2+k}$, найдем $I_2 = \int\frac{dt}{(t^2+k)^2}$ и так далее до интеграла I_m.

Пример 22.

$$\int\frac{2x+5}{x^2+4x-3}\,dx = \int\frac{2x+5}{(x+2)^2-7}\,dx = \int\frac{2(x+2-2)+5}{(x+2)^2-7}\,dx =$$
$$= \int\frac{2\cdot(x+2)}{(x+2)^2-7}\,d(x+2) + \int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2-7} =$$
$$= 2\int\frac{t\,dt}{t^2-7} + \int\frac{dt}{t^2-7} = \int\frac{d(t^2-7)}{t^2-7} + \int\frac{dt}{t^2-7} =$$
$$= \ln|t^2-7| + \frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}-t}{\sqrt{7}+t}\right| + C = \ln|x^2+4x-3| + \frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}-2-x}{\sqrt{7}+2+x}\right| + C.$$

Пример 23.

$$\int\frac{2x+5}{(x^2+4x-3)^2}\,dx = \int\frac{2x+5}{((x+2)^2-7)^2}\,dx = 2\int\frac{x+2}{((x+2)^2-7)^2}\,d(x+2)+$$
$$+\int\frac{d(x+2)}{((x+2)^2-7)^2} = 2\int\frac{t\,dt}{(t^2-7)^2} + \int\frac{dt}{(t^2-7)^2} =$$
$$= \int\frac{d(t^2-7)}{(t^2-7)^2} + \int\frac{dt}{(t^2-7)^2} = -\frac{1}{t^2-7} + \int\frac{dt}{(t^2-7)^2},$$

вычислим отдельно последний интеграл:

$$\int \frac{dt}{(t^2-7)^2} = -\frac{1}{7}\int \frac{(-7)\,dt}{(t^2-7)^2} = -\frac{1}{7}\int \frac{t^2-7-t^2}{(t^2-7)^2}\,dt =$$
$$= -\frac{1}{7}\int \frac{t^2-7}{(t^2-7)^2}\,dt + \frac{1}{7}\int \frac{t^2}{(t^2-7)^2}\,dt = -\frac{1}{7}\int \frac{dt}{(t^2-7)} +$$
$$+ \frac{1}{14}\int t\frac{d(t^2-7)}{(t^2-7)^2} = -\frac{1}{7}\int \frac{dt}{t^2-7} - \frac{1}{14}\int t\,d\frac{1}{t^2-7} =$$
$$= -\frac{1}{7}\int \frac{dt}{t^2-7} - \frac{1}{14}\left(t\cdot\frac{1}{t^2-7} - \int \frac{dt}{t^2-7}\right) =$$
$$= -\frac{1}{14}\int \frac{dt}{t^2-7} - \frac{1}{14}\,\frac{t}{t^2-7} = \frac{1}{14}\cdot\frac{1}{2\sqrt{7}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{7}+t}{\sqrt{7}-t}\right| - \frac{1}{14}\,\frac{t}{t^2-7} + C.$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{2x+5}{(x^2+4x-3)^2}\,dx = -\frac{1}{t^2-7} + \frac{1}{28\sqrt{7}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{7}+t}{\sqrt{7}-t}\right| - \frac{1}{14}\,\frac{t}{t^2-7} + C =$$
$$= -\frac{1}{x^2+4x-3} + \frac{1}{28\sqrt{7}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{7}+2+x}{\sqrt{7}-2-x}\right| - \frac{1}{14}\,\frac{x+2}{x^2+4x-3} + C.$$

Прежде чем перейти к общему случаю интегрирования правильных дробей, сформулируем одну из теорем алгебры, имеющую фундаментальное значение в теории интегрирования рациональных дробей: *каждая правильная дробь* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *может быть представлена в виде суммы конечного числа простых дробей.*

Разложение правильной дроби на простые тесно связано с разложением многочлена $Q(x)$ на множители. Как известно, каждый целый многочлен с вещественными коэффициентами разлагается на вещественные множители типа $(x-a)$ и (x^2+px+q). В схематическом виде разложение многочлена $Q(x)$ можно записать в виде: $Q(x) = (x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^m$. Покажем, как, с учетом разложения $Q(x)$, правильная дробь раскладывается на простые:

1. Если множитель $(x-a)$ входит в разложение $Q(x)$ только в первой степени, мы поставим ему в соответствие единственную простую дробь:

$$(x-a) \to \frac{A}{x-a}.$$

2. Если в разложение $Q(x)$ входит множитель $(x-a)^k$, то есть показатель

степени $k > 1$, то ему соответствует сумма из k простых дробей

$$(x-a)^k \to \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}.$$

3. Если в разложение $Q(x)$ входит множитель x^2+px+q только в первой степени, то в соответствие ему ставится единственная простая дробь:

$$x^2+px+q \to \frac{Mx+N}{x^2+px+q}.$$

4. Если в разложение $Q(x)$ входит множитель $(x^2+px+q)^k$, показатель которого $k > 1$, то ему соответствует сумма из k простых дробей

$$(x^2+px+q)^k \to \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A, M, N используют *метод неопределенных коэффициентов*. Зная форму разложения $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на простые дроби, пишут его с буквенными коэффициентами справа. Приводят дроби к одному знаменателю $Q(x)$ и приравнивают многочлены, стоящие в числителях справа и слева. Затем, приравнивая коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях, находят неизвестные буквенные коэффициенты.

Пример 24. Разложить дробь $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ на простые.

Представим дробь в виде:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Коэффициенты A, B, C, D, E определим, исходя из тождества:

$$2x^2+2x+13 = A\cdot(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2),$$

отсюда получим:

$$2x^2+2x+13 = (A+B)\cdot x^4 + (C-2B)\cdot x^3 + (2A+B-2C+D)\cdot x^2 + \\ + (C-2B+E-2D)\cdot x + A - 2C - 2E.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, придем к системе из пяти уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -2B+C=0, \\ 2A+B-2C+D=2, \\ -2B+C-2D+E=2, \\ A-2C-2E=13, \end{cases}$$

откуда

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=-2, \quad D=-3, \quad E=-4.$$

Окончательно:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Для того чтобы проинтегрировать правильную дробь, ее раскладывают на сумму простых дробей, а затем интегрируют каждую простую дробь отдельно и их результаты складывают.

Пример 25.

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\operatorname{arctg} x + C.$$

Здесь мы воспользовались разложением из примера 24.

1.5. Интегрирование иррациональных выражений

Выше мы научились интегрировать рациональные функции. Здесь рассматривается метод рационализации для интегрирования иррациональных выражений. А именно, ищется подстановка $t = t(x)$, которая привела бы иррациональное выражение к рациональному виду. Здесь и дальше будем полагать, что $R(x, y, z, \ldots)$ — рациональная функция от своих аргументов.

I. Интегрирование выражений вида:

$$\int R\left(x;\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+p}}\right)\,dx,$$

где m — натуральное число, a, b, c, p — постоянные. Положим:

$$t = t(x) = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+p}}, \quad t^m = \frac{ax+b}{cx+p}, \quad x = \varphi(t) = \frac{p\cdot t^m - b}{a - ct^m}, \quad dx = \varphi'(t)\,dt.$$

Интеграл перепишется в виде:

$$\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)\,dt.$$

Вычислив полученный интеграл, вернемся к старой переменной $t = t(x)$.

Пример 26.

$$\int \frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx.$$

Полагаем $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\,dt$, тогда

$$\int \frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx = \int \frac{-3\,dt}{t^3-1} = \int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1}\right) dt =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

II. Интегрирование выражений вида:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx. \tag{3}$$

1) Пусть $a > 0$, тогда интеграл (3) перепишется в виде

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{a}\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx.$$

Так же, как и в случае интегрирования рациональной функции, выделим полный квадрат в квадратном трехчлене, стоящем в знаменателе (см. пункт 1.4):

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{Ax+B}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{A\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k}}\,dx +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{B-A\cdot\frac{p}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{At}{\sqrt{t^2+k}}\,dt + \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{B-A\cdot\frac{p}{2}}{\sqrt{t^2+k}}\,dt,$$

где $t = x + \frac{p}{2}$.

Первый интеграл вычисляется подстановкой $u = t^2+k$

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+k}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{\sqrt{t^2+k}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+k)}{\sqrt{t^2+k}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$$
$$= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = u^{1/2} + C = (t^2+k)^{1/2} + C.$$

Второй интеграл $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k}}$ является табличным.

2) Пусть $a < 0$, тогда интеграл (3) перепишется в виде

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{-a}\sqrt{-x^2-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{Ax+B\,dx}{\sqrt{-x^2-px-q}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{Ax+B}{\sqrt{-(x^2+px+q)}}\,dx.$$

Дальше, выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене и применяя замену $t = x + \frac{p}{2}$, так же как и в предыдущем случае вычисляем полученный интеграл.

Пример 27.

$$\int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \int \frac{5x-1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\,dx = \int \frac{5(x+1-1)-1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\,dx =$$
$$= \int \frac{5t-6}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = 5\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}} - 6\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$
$$= \frac{5}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}} - 6\cdot\ln|t+\sqrt{t^2+1}| + C =$$
$$= \frac{5}{2}\cdot 2(t^2+1)^{1/2} - 6\ln|t+\sqrt{t^2+1}| + C = 5\cdot(x^2+2x+2)^{1/2} -$$
$$- 6\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}| + C.$$

Пример 28.

$$\int \frac{5x+11}{\sqrt{6x-x^2-5}}\,dx = \int \frac{5x+11}{\sqrt{-(x^2-6x+5)}}\,dx =$$
$$= \int \frac{5x+11}{\sqrt{-((x-3)^2-4)}}\,dx = \int \frac{5(x-3+3)+11}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\,dx =$$
$$= \int \frac{5t+26}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = 5\int \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}\,dt + 26\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} =$$
$$= \frac{5}{2}\int \frac{dt^2}{\sqrt{4-t^2}} + 26\arcsin\frac{t}{2} + C = -\frac{5}{2}\int \frac{d(4-t^2)}{\sqrt{4-t^2}} +$$
$$+ 26\arcsin\frac{t}{2} + C = -5\sqrt{4-t^2} + 26\arcsin\frac{t}{2} + C =$$
$$= -5\sqrt{6x-x^2-5} + 26\arcsin\frac{x-3}{2} + C.$$

III. Интегрирование выражений вида:

$$\int (Ax+B)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx.$$

При интегрировании этих функций используются интегралы

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,(x\cdot\sqrt{a^2+x^2}+a^2\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|)+C,$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\left(x\cdot\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)+C,$$

которые вычисляются методом интегрирования по частям (см. пункт 1.3).

Для вычисления интегралов $\int (Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ в квадратном трехчлене выделяется полный квадрат, а затем, аналогично случаю II, все сводится к вычислению интегралов вида $\int t\sqrt{k\pm t^2}\,dt$ и $\int \sqrt{k\pm t^2}\,dt$. Первый из полученных интегралов вычисляем:

$$\int t\sqrt{k\pm t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{k\pm t^2}\,dt^2 = \pm\frac{1}{2}\int \sqrt{k\pm t^2}\,d(k\pm t^2) =$$
$$= \pm\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,(k\pm t^2)^{3/2} = \pm\frac{1}{3}\,(k\pm t^2)^{3/2}+C.$$

Значение второго интеграла см. выше.

Пример 29.

$$\int (2x-1)\sqrt{3x-x^2}\,dx = \int (2x-1)\sqrt{-(x^2-3x)}\,dx =$$
$$= \int (2x-1)\sqrt{-\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right)}\,dx =$$
$$= \int \left(2\left(x-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)-1\right)\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\,dx = \int (2t+2)\sqrt{\frac{9}{4}-t^2}\,dt =$$
$$= 2\int t\sqrt{\frac{9}{4}-t^2}\,dt + 2\int \sqrt{\frac{9}{4}-t^2}\,dt = \int \sqrt{\frac{9}{4}-t^2}\,dt^2 +$$
$$+ 2\cdot\frac{1}{2}\left(t\sqrt{\frac{9}{4}-t^2}+\frac{9}{4}\arcsin\frac{2t}{3}\right) = -\frac{2}{3}\,(3x-x^2)^{3/2} +$$
$$+ \left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot\sqrt{3x-x^2}+\frac{9}{4}\arcsin\frac{2x-3}{3}+C.$$

IV. Интегрирование дифференциальных биномов вида:

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx,$$

где $p = \frac{\alpha}{\beta}$; α, β — целые числа; m, n — произвольные числа.

Данный интеграл интегрируется лишь в следующих трех случаях:

1) если p целое число, то используется подстановка

$$x = t^N, \text{ где } N \text{ — общий знаменатель дробей } m \text{ и } n;$$

2) если $\frac{m+1}{n}$ целое число, то используется подстановка

$$a + bx^n = t^\beta;$$

3) если $\frac{m+1}{n} + p$ целое число, то используется подстановка

$$a + bx^n = x^n t^\beta.$$

Пример 30.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx,$$

где $m = 3$, $n = 2$. Число $\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = 2$ — целое, поэтому используем подстановку (1): $x^2 - 1 = t^2$, $x = \sqrt{t^2+1}$, $dx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$, отсюда

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{(1+t^2)^{3/2}}{t} \cdot \frac{t}{(t^2+1)^{1/2}}\,dt = \int (1+t^2)\,dt =$$

$$= t + \frac{t^3}{3} + C = (x^2-1)^{1/2} + \frac{(x^2-1)^{3/2}}{3} + C.$$

Пример 31.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0 (1+x^4)^{-1/4}\,dx,$$

здесь $m = 0$, $n = 4$, $p = -\frac{1}{4}$. Проверим условие: $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число или ноль. $\frac{m+1}{n} + p = \frac{0+1}{4} - \frac{1}{4} = 0$, поэтому используем подстановку (2); здесь $\beta = 4$: $1 + x^4 = x^4 \cdot t^4$, $t = \sqrt[4]{\frac{1}{x^4} + 1} = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$, $x = (t^4-1)^{-1/4}$, $dx = -t^3(t^4-1)^{-5/4}\,dt$, так что $\sqrt[4]{1+x^4} = tx = t \cdot (t^4-1)^{-1/4}$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2\,dt}{t^4-1} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right)\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C,$$

где $t = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

1.6. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

I. Интегрирование выражений вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

где R — рациональная функция.

В этом случае существует универсальный прием рационализации выражений, стоящих под знаком интеграла. А именно, используя подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$ и тригонометрические формулы:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

получим под интегралом рациональную функцию.

Пример 32.

$$\int \frac{dx}{\cos 3x + 2\sin 3x} = \frac{1}{3}\int \frac{d3x}{\cos 3x + 2\sin 3x} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dz}{\cos z + 2\sin z} = \frac{1}{3}\int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{1-t^2+4t} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{5-(t-2)^2} = \frac{2}{3}\int \frac{du}{5-u^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{2\sqrt{5}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{5}+u}{\sqrt{5}-u}\right| + C = \frac{1}{3\sqrt{5}}\,\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{3x}{2} - 2 + \sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{3x}{2} - 2 - \sqrt{5}}\right| + C.$$

Подстановка, упомянутая выше, приводит часто к сложным преобразованиям, поэтому в нижеприведенных частных случаях предпочтительны следующие, более удобные приемы:

а) пусть $R(u,v) = -R(-u,v)$, тогда рационализация достигается подстановкой $t = \cos x$;

б) пусть $R(u,v) = -R(u,-v)$, тогда рационализация достигается подстановкой $t = \sin x$;

в) пусть $R(u,v) = R(-u,-v)$, тогда рационализация достигается подстановкой $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 33.

$$\int \frac{\sin x}{4+\cos^2 x}\,dx,$$
$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x}{4+\cos^2 x},$$
$$R(-\sin x, \cos x) = -\frac{\sin x}{4+\cos^2 x},$$
$$R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x),$$

поэтому используем подстановку $t = \cos x$:

$$\int \frac{\sin x}{4+\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{4+\cos^2 x} = -\int \frac{dt}{4+t^2} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\cos x}{2}\right) + C.$$

Пример 34.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x\cos x},$$
$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin^2 x - 5\sin x\cos x},$$
$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{\sin^2 x - 5\sin x\cos x},$$
$$R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x),$$

используем подстановку $t = \mathrm{tg}\, x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x\cos x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5\sin x\cos x}{\cos^2 x}\right)} =$$
$$= \int \frac{d\,\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}^2 x - 5\,\mathrm{tg}\, x} = \int \frac{dt}{t^2 - 5t} = \int \frac{dt}{\left(t-\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} =$$
$$= -\frac{1}{5}\,\ln\left|\frac{\frac{5}{2}+t-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}-t+\frac{5}{2}}\right| = -\frac{1}{5}\,\ln\left|\frac{t}{t-5}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{5}\,\ln\left|1-\frac{5}{t}\right| + C = \frac{1}{5}\,\ln|1-5\,\mathrm{ctg}\, x| + C.$$

II. Интегралы вида $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$.

При интегрировании этих выражений оказываются полезными следующие тригонометрические формулы

$$\sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2},\quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

1. Рассмотрим интегралы вида: $\int \sin^m x\,dx$, $\int \cos^m x\,dx$, полагаем, что

а) $m > 0$, четное, $m = 2k$.

$$\int \sin^m x\,dx = \int (\sin^2 x)^k\,dx = \int \frac{(1-\cos 2x)^k}{2^k}\,dx = \frac{1}{2^{k+1}}\int (1-\cos 2x)^k\,d2x.$$

б) $m > 0$, нечетное, $m = 2k+1$.

$$\int \sin^m x\,dx = \int \sin^{2k} x\cdot \sin x\,dx =$$
$$= -\int (\sin^2 x)^k\,d\cos x = -\int (1-\cos^2 x)^k\,d\cos x = -\int (1-t^2)^k\,dt,$$

где $t = \cos x$.

Возведя выражения, стоящие под интегралами по биному Ньютона в соответствующую степень, получаем ряд интегралов типа (а) и (б), но с низшими степенями, их дальше упрощаем тем же образом.

Случай $\int \cos^m x\,dx$ делается аналогично.

Пример 35.

$$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \frac{(1+\cos 2x)^2}{8}\,d2x =$$
$$= \frac{1}{8}\int (1+2\cos z+\cos^2 z)\,dz = \frac{z}{8}+\frac{\sin z}{4}+$$
$$+\frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 2z}{2}\,dz = \frac{3}{8}x+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$$

Пример 36.

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x\,d\sin x = \int (1-\sin^2 x)\,d\sin x =$$
$$= \int (1-t^2)\,dt = t-\frac{t^3}{3}+C = \sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

в) $m = -1$

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)} = \int \frac{d\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}} = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|+C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

г) $m < 0$, $|m| = 2k$.

$$\int \cos^m x\,dx = \int \frac{dx}{\cos^{2k} x} = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{k-1} \frac{dx}{\cos^2 x} =$$
$$= \int \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}\right)^{k-1} d\,\mathrm{tg}\,x = \int (1 + \mathrm{tg}^2\,x)^{k-1}\,d\,\mathrm{tg}\,x =$$
$$= \int (1 + t^2)^{k-1}\,dt, \quad t = \mathrm{tg}\,x,$$

аналогично

$$\int \sin^m x\,dx = \int \frac{dx}{\sin^{2k} x} = -\int (1 + \mathrm{ctg}^2\,x)^{k-1}\,d\,\mathrm{ctg}\,x.$$

Пример 37.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}\,d\,\mathrm{tg}\,x = \int (\mathrm{tg}^2\,x + 1)\,d\,\mathrm{tg}\,x =$$
$$= \int (t^2 + 1)\,dt = \frac{t^3}{3} + t + C = \frac{\mathrm{tg}^3\,x}{3} + \mathrm{tg}\,x + C.$$

д) $m < 0$, $|m| = 2k + 1$.

$$\int \cos^m x\,dx = \int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x} = \int \frac{\cos x}{\cos^{2k+2} x}\,dx =$$
$$= \int \frac{d\sin x}{(1 - \sin^2 x)^{k+1}} = \int \frac{dt}{(1 - t^2)^{k+1}}$$

далее см. пункт 1.4. Случай $\int \frac{dx}{\sin^{2k+1} x}$ делается аналогично.

Пример 38.

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^4 x} = \int \frac{d\sin x}{(\cos^2 x)^2} = \int \frac{d\sin x}{(1 - \sin^2 x)^2} = \int \frac{dt}{(1 - t^2)^2};$$

(далее см. пункт 1.4).

В случае д) для понижения степени удобно применять формулу $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x}\,dx =$$
$$= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x}\right) dx = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,d\cos x.$$

Интегрируя последний интеграл по частям, получим:

$$-\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, d\cos x = \frac{1}{2}\int \sin x\, d\cos^{-2} x =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{d\sin x}{\cos^2 x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\cos x}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

2) Рассмотрим интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx, \quad m > 0, n > 0.$$

е) один из показателей m или n нечетный, без изменения общности полагаем $n = 2k + 1$.

$$\int \sin^m \cos^n x\, dx = \int \sin^m x \cos^{2k+1} x\, dx = \int \sin^m x(\cos^2 x)^k\, d\sin x =$$
$$= \int \sin^m x(1 - \sin^2 x)^k\, d\sin x = \int t^m(1 - t^2)^k\, dt,$$

где $t = \sin x$ и далее по биному Ньютона.

Пример 39.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x\, d\sin x =$$
$$= \int \sin^2 x(1 - \sin^2 x)\, d\sin x = \int t^2(1 - t^2)\, dt =$$
$$= \int (t^2 - t^4)\, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

ж) m и n четные, то есть $m = 2k$, $n = 2l$,

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x\, dx = \int \sin^{2k} x(1 - \sin^2 x)^l\, dx,$$

далее, используя бином Ньютона, сводим к случаю а).

Пример 40.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^2(1 - \sin^2 x)\, dx = \int \sin^2 x\, dx - \int \sin^4 x\, dx.$$

3. Интегралы вида $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}\,dx$ и $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx$.

з) $m = n$, используя формулу $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^m x}\,dx = \int \operatorname{tg}^{m-2}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\,dx =$$
$$= \int \operatorname{tg}^{m-2}\,d\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^{m-2} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tg}^{m-2} x\,dx,$$

получим формулу понижения. Аналогично

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^m x}\,dx = \int \operatorname{ctg}^m x\,dx = -\frac{1}{m-1}\,\operatorname{ctg}^{m-1} x - \int \operatorname{ctg}^{m-2} x\,dx.$$

Пример 41.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \operatorname{tg} x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\,dx =$$
$$= \int \operatorname{tg} x\,d\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x} + \int \frac{d\cos x}{\cos x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

и) показатель числителя m — четный, $m = 2k$.

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx = \int \frac{\cos^{2k} x}{\sin^n x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^k}{\sin^n x}\,dx.$$

Интеграл распадается на сумму интегралов вида (1).

Пример 42.

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^3 x}\,dx =$$
$$= \int \frac{1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^3 x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin^3 x} - 2\int \frac{dx}{\sin x} + \int \sin x\,dx.$$

к) показатель числителя m нечетный, $m = 2k+1$.

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx = \int \frac{\cos^{2k+1} x}{\sin^n x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^k}{\sin^n x}\,d\sin x.$$

Интеграл распадается на отдельные слагаемые вида $\int t^m\,dt$.

Пример 43.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x}\,d\sin x = \int \frac{dt}{t^2} - \int dt =$$
$$= -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C,$$

где $t = \sin x$.

4. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\cos^m x \sin^n x}$, $m > 0$, $n > 0$.

$$\int \frac{dx}{\cos^m x \sin^n x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^m x \cdot \sin^n x}\,dx =$$
$$= \int \frac{dx}{\cos^{m-2} x \sin^n x} + \int \frac{dx}{\cos^m x \sin^{n-2} x},$$

повторив этот прием требуемое количество раз, сводим интеграл к предыдущим типам.

Пример 44.

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^3 x \cdot \sin^2 x}\,dx =$$
$$= \int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x \sin^2 x}\,dx +$$
$$+ \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx + \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

Если $m + n = 2k$, то проще делить члены дроби на $\cos^{m+n} x$.

$$\int \frac{dx}{\cos^m x \sin^n x} = \int \frac{dx}{\cos^{m+n} x \left(\frac{\cos^m x \sin^n x}{\cos^{m+x} x}\right)} =$$
$$= \int \frac{dx}{\cos^{2k} x \operatorname{tg}^n x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \cdot \operatorname{tg}^{-n} x \, d \operatorname{tg} x =$$
$$= \int t^{-n}(1+t^2)^{k-1}\,dt,$$

где $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 45.

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \int \frac{dx}{\cos^4 x \operatorname{tg}^3 x} =$$

$$= \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \operatorname{tg}^{-3} x \, d \operatorname{tg} x = \int t^{-3}(1 + t) \, dt =$$

$$= \int (t^{-3} + t^{-2}) \, dt = -\frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + C.$$

III. Интегралы вида

$$\int \sin(ax + b) \cos(cx + p) \, dx,$$

$$\int \sin(ax + b) \sin(cx + p) \, dx,$$

$$\int \cos(ax + b) \cos(cx + p) \, dx$$

упрощаются на основании тригонометрических тождеств

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

Пример 46.

$$\int \sin(3x + 1) \cos(2x + 3) \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin(5x + 4) +$$

$$+ \sin(x - 2)) \, dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{\sin(5x + 4)}{5} \, d(5x + 4) + \right.$$

$$\left. + \int \sin(x - 2) \, d(x - 2) \right) = -\frac{\cos(5x + 4)}{10} - \frac{\cos(x - 2)}{2} + C.$$

Кроме того, при интегрировании тригонометрических функций можно пользоваться формулами Эйлера

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}), \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}).$$

IV. Интегралы вида

$$\int P(x)\sin ax\,dx, \quad \int P(x)\cos ax\,dx,$$

$$\int e^{bx}\sin ax\,dx, \quad \int e^{bx}\cos ax\,dx,$$

$$\int e^{bx}\sin ax\,dx, \quad \int e^{bx}\cos ax\,dx,$$

где $P(x)$ — целый многочлен, интегрируются по частям, см. пункт 1.3.

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1. $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)\,dx$;
2. $\int \left(x^4 + \sqrt[5]{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)\,dx - \int \left(\frac{1}{x} - 5\right)\,dx$;
3. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)\,dx$;
4. $\int \frac{5x^8+1}{x^4}\,dx$;
5. $\int \frac{x-1}{\sqrt[5]{x^4}}\,dx$;
6. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)\,dx$;
7. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}\,dx$;
8. $\int (2^x + 3^x)\,dx$;
9. $\int 4^x \left(3 + \frac{4^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)\,dx$;
10. $\int e^x \left(2 - \frac{e^{-x}}{x^3}\right)\,dx$;
11. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\,dx$;
12. $\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$;
13. $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)\,dx$;
14. $\int (\sin x + 5\cos x)\,dx$;
15. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\,dx$;
16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$;
17. $\int \frac{3\,\mathrm{tg}^2\,x+4}{\sin^2 x}\,dx$;
18. $\int \frac{3-2\,\mathrm{ctg}^2\,x}{\cos^2 x}\,dx$;
19. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx$;
20. $\int \mathrm{tg}^2\,x\,dx$;
21. $\int \mathrm{ctg}^2\,x\,dx$;
22. $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$;

23. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx$;

24. $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2\, dx$;

25. $\int 2^x e^x\, dx$;

26. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$;

27. $\int \cos 5x\, dx$;

28. $\int \sin 7x\, dx$;

29. $\int \cos\frac{x}{4}\, dx$;

30. $\int e^{-x}\, dx$;

31. $\int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)\, dx$;

32. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$;

33. $\int \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{3}}$;

34. $\int (2+5x)^9\, dx$;

35. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$;

36. $\int \sqrt{2x-5}\, dx$;

37. $\int \sqrt[3]{3-7x}\, dx$;

38. $\int \frac{dx}{5x+2}$;

39. $\int \frac{dx}{2-3x}$;

40. $\int \frac{x\, dx}{x^2+3}$;

41. $\int \operatorname{ctg} x\, dx$;

42. $\int \operatorname{tg} x\, dx$;

43. $\int \frac{\sin x\, dx}{1+3\cos x}$;

44. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)^5}$;

45. $\int \frac{\cos 3x\, dx}{3+\sin 3x}$;

46. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x}\, dx$;

47. $\int \sin^2 x \cos x\, dx$;

48. $\int \cos^3 x \sin x\, dx$;

49. $\int e^{\cos x} \sin x\, dx$;

50. $\int e^{-x^3} x^2\, dx$;

51. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\, dx}{\sqrt{x}}$;

52. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x}$;

53. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^5 x}$;

54. $\int \frac{\sqrt[3]{2+\ln x}}{x}\, dx$;

55. $\int \sqrt{3+\cos 5x}\, \sin 5x\, dx$;

56. $\int \frac{\cos 3x\, dx}{\sqrt[7]{3+5\sin 3x}}$;

57. $\int \frac{e^{4x}}{5+2e^{4x}}\, dx$;

58. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x\, dx}{1+x^2}$;

59. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$;

60. $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}\, dx$;

61. $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}\, dx$;

62. $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$;

63. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx$;

64. $\int \sqrt[5]{x^3 - 8}\, x^2\, dx$;

65. $\int \sqrt[4]{1 - 6x^5}\, x^4\, dx$;

66. $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$;

67. $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}\, dx}{x^2}$;

68. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}}\, dx$;

69. $\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}}\, dx$;

70. $\int \frac{2-4x}{\sqrt{7x-1}}\, dx$;

71. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\, dx$;

72. $\int \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{x^3}\, dx$;

73. $\int 4^{1-3x}\, dx$;

74. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$;

75. $\int e^{-\operatorname{tg} x} \sec^2 x\, dx$;

76. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$;

77. $\int \frac{dx}{x^2-16}$;

78. $\int \frac{dx}{x^2+4}$;

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

80. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$;

81. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$;

82. $\int \frac{dx}{x^2-5}$;

83. $\int \frac{dx}{x^2+3}$;

84. $\int \frac{dx}{2-x^2}$;

85. $\int \frac{dx}{4x^2+5}$;

86. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$;

87. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x^2}}$;

88. $\int \frac{dx}{9x^2-1}$;

89. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$;

90. $\int \frac{dx}{3-5x^2}$;

91. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-5}}$;

92. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x^4}}$;

93. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^8-3}}$;

94. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{5-e^{2x}}}$;

95. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{5-\cos^2 2x}$;

96. $\int \frac{2x-3}{x^2-4}\,dx$;

97. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

98. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

99. $\int \frac{5e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$;

100. $\int \frac{\cos 5x\,dx}{\sqrt{3\cos^2 5x-2}}$;

101. $\int \frac{\sin\frac{x}{3}\,dx}{4\cos^2\frac{x}{3}+9}$;

102. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{4-x^{10}}}$;

103. $\int \frac{x^6\,dx}{x^{14}+5}$;

104. $\int \frac{e^{-x}\,dx}{e^{-2x}+2}$;

105. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

106. $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$;

107. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$;

108. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$;

109. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;

110. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$;

111. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$;

112. $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}\,dx$;

113. $\int \frac{5x-1}{x^2+3x+3}\,dx$;

114. $\int \frac{(1+x)\,dx}{x^2+x-1}$;

115. $\int \frac{2-x}{x^2+4x+29}\,dx$;

116. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$;

117. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{4x^2+4x+3}}\,dx$;

118. $\int \frac{5x+11}{\sqrt{6x-x^2-5}}\,dx$;

119. $\int \frac{1-3x}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$;

120. $\int \frac{3+x}{\sqrt{3x+2x^2}}\,dx$;

121. $\int \frac{4x+11}{\sqrt{x^2+8x+7}}\,dx$;

122. $\int \frac{7x-1}{x^2-6x+1}\,dx$;

123. $\int \frac{x^3}{x-2}\,dx$;
124. $\int \frac{3x^2+5}{x+1}\,dx$;
125. $\int \frac{x^4}{x^2+a^2}\,dx$ $(a \neq 0)$;
126. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}\,dx$;
127. $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}\,dx$;
128. $\int \frac{3x-1}{2x+1}\,dx$;
129. $\int \frac{2x^2-1}{x^2-x+1}\,dx$;
130. $\int \frac{x^4-2x^3}{x-3}\,dx$;
131. $\int \frac{3x^3-2x^2}{x^2-6x+10}\,dx$;
132. $\int \frac{(x^3-2x)\,dx}{x^2-8x+7}$;
133. $\int \frac{3x^2+1}{x^2-x+1}\,dx$;
134. $\int \frac{3+x}{x^2+7x+13}\,dx$;
135. $\int \frac{x^4-3x^2}{x-3}\,dx$;
136. $\int \frac{x^2+3x}{x^2+8x-7}\,dx$;
137. $\int \ln x\,dx$;
138. $\int x\ln x\,dx$;
139. $\int x\ln(3x+2)\,dx$;
140. $\int (x^2+3x+2)\ln x\,dx$;
141. $\int xe^{-x}\,dx$;
142. $\int xe^{5x}\,dx$;
143. $\int x^3e^{-x}\,dx$;
144. $\int x^2e^{-\frac{x}{2}}\,dx$;
145. $\int (2x+3)e^{2x}\,dx$;
146. $\int x\cos x\,dx$;
147. $\int x\sin x\,dx$;
148. $\int (x+1)\cos 3x\,dx$;
149. $\int x^2\cos x\,dx$;
150. $\int x\cos^2 x\,dx$;
151. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$;
152. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$;
153. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$;
154. $\int \arcsin x\,dx$;
155. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$;
156. $\int x\operatorname{arcctg}(1-x)\,dx$;
157. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$;
158. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{7x-1}\,dx$;

159. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx$;
160. $\int e^x \sin x\, dx$;
161. $\int e^x \cos x\, dx$;
162. $\int e^{2x} \cos 3x\, dx$;
163. $\int e^x \sin \frac{x}{2}\, dx$;
164. $\int \ln^2 x\, dx$;
165. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}\, dx$;
166. $\int \ln(x^2+2)\, dx$;
167. $\int \cos(\ln x)\, dx$;
168. $\int \frac{x \cos x\, dx}{\sin^3 x}$;
169. $\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx$;
170. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx$;
171. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$;
172. $\int \frac{\ln(x+2)}{x^2}\, dx$;
173. $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$;
174. $\int \frac{\ln x}{x \sqrt[3]{x}}\, dx$;
175. $\int \sqrt{7-x^2}\, dx$;
176. $\int \sqrt{x^2-5}\, dx$;
177. $\int \sqrt{3-x^2}\, dx$;
178. $\int \sqrt{x^2+2}\, dx$;
179. $\int \sqrt{2-3x^2}\, dx$;
180. $\int \sqrt{2x^2-1}\, dx$;
181. $\int \sqrt{6x-x^2}\, dx$;
182. $\int \sqrt{x^2-4x}\, dx$;
183. $\int \sqrt{x^2+5x+4}\, dx$;
184. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx$;
185. $\int \sqrt{5+4x-x^2}\, dx$;
186. $\int \sqrt{2x-x^2}\, dx$;
187. $\int \sin x \sqrt{2-3\cos^2 x}\, dx$;
188. $\int e^x \sqrt{e^{2x}+3}\, dx$;
189. $\int \cos x \sqrt{\sin^2 x+3}\, dx$;
190. $\int e^{\frac{x}{2}} \sqrt{4-e^x}\, dx$;
191. $\int \sqrt{\ln^2 x+1}\, \frac{dx}{x}$;
192. $\int (2x-1)\sqrt{3x-x^2}\, dx$;
193. $\int (x+3)\sqrt{5x+2x^2}\, dx$;

194. $\int (x-1)\sqrt{-6x-x^2}\,dx$;
195. $\int \sin^2 x\,dx$;
196. $\int \cos^2 x\,dx$;
197. $\int \sin^2 mx\,dx \quad (m\neq 0)$;
198. $\int \cos^2 mx\,dx \quad (m\neq 0)$;
199. $\int \sin^3 x\,dx$;
200. $\int \cos^3 x\,dx$;
201. $\int \cos^4 x\,dx$;
202. $\int \sin^5 x\,dx$;
203. $\int \cos^2 x\sin^2 x\,dx$;
204. $\int \sin^3\frac{x}{4}\,\cos^3\frac{x}{4}\,dx$;
205. $\int \sin^2 x\cdot\cos^4 x\,dx$;
206. $\int \cos^2 x\sin^4 x\,dx$;
207. $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$;
208. $\int \cos^7 x\,dx$;
209. $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$;
210. $\int \cos^3 x\sin^5 x\,dx$;
211. $\int \sin^4\frac{x}{2}\,dx$;
212. $\int (1+2\cos x)^2\,dx$;
213. $\int \cos^5 x\,dx$;
214. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$;
215. $\int \frac{dx}{\cos\frac{x}{3}}$;
216. $\int \frac{dx}{\sin 9x}$;
217. $\int \frac{dx}{\cos 5x}$;
218. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}\,dx$;
219. $\int \sin 3x\cos x\,dx$;
220. $\int \sin 3x\sin 5x\,dx$;
221. $\int \sin nx\sin mx\,dx \ (m+n\neq 0,\ m-n\neq 0)$;
222. $\int \sin 3x\sin x\,dx$;
223. $\int \sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x\,dx$;
224. $\int \sin\frac{x}{3}\,\cos\frac{2x}{3}\,dx$;
225. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^2 x}$;
226. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$;
227. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$;
228. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\,dx$;
229. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}\,dx$;
230. $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$;

231. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$;

232. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$;

233. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$;

234. $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$;

235. $\int \frac{dx}{3+\cos x}$;

236. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$;

237. $\int \frac{dx}{2\sin x+\sin 2x}$;

238. $\int \frac{1+\cos x}{\sin^4 x}\, dx$;

239. $\int \frac{dx}{\sin x-\cos x}$;

240. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$;

241. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$;

242. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$;

243. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x\cdot\cos x}$;

244. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$;

245. $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$;

246. $\int \frac{\sin x\, dx}{b^2+\cos^2 x}$ $(b \neq 0)$;

247. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\, dx$;

248. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x}\, dx$;

249. $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}\, dx$;

250. $\int \frac{e^{3x}\, dx}{e^x+2}$;

251. $\int \frac{e^{4x}\, dx}{e^x-1}$;

252. $\int \frac{e^{3x}\, dx}{e^{2x}-1}$;

253. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\, dx$;

254. $\int \frac{e^{3x}+2e^x}{e^{2x}+e^x+1}\, dx$;

255. $\int \frac{3e^{2x}-4e^x}{e^{2x}+4}\, dx$;

256. $\int \frac{e^{5x}\, dx}{e^x+1}$;

257. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\cos^4 x}$;

258. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$;

259. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$;

260. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\, dx$;

261. $\int \operatorname{ctg}^5 x\, dx$;

262. $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$;

263. $\int (3x-1)\sqrt{-x^2-8x}\, dx$;

264. $\int \frac{3x^3+x^2}{x^2+6x+10}\, dx$;

265. $\int \frac{5e^{2x}-3e^x}{e^x+4-e^{2x}}\,dx$;
266. $\int (5x+3)\sqrt{x^2+3x+5}\,dx$;
267. $\int \frac{a^x\,dx}{a^{2x}+1}$ $(a>0,\ a\neq 1)$;
268. $\int (1-2x)\sqrt{3x^2+8x}\,dx$;
269. $\int \frac{6x-10}{\sqrt{x^2+5x+17}}\,dx$;
270. $\int \sqrt{2x^2+4x+1}\,dx$;
271. $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}\,dx$;
272. $\int \frac{3x+1}{x^2+10x+1}\,dx$;
273. $\int \frac{x\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
274. $\int \sin(\ln x)\,dx$;
275. $\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$;
276. $\int \mathrm{tg}^3\,x\,dx$;
277. $\int x^2\,\mathrm{arctg}(2x+1)\,dx$;
278. $\int \cos mx\cos nx\,dx$ $(m+n\neq 0,\ m-n\neq 0)$;
279. $\int \frac{\ln(\cos x)\,dx}{\sin^2 x}$;
280. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{x^2-9})}{\sqrt{x-3}}\,dx$;
281. $\int \frac{dx}{\sin^2\frac{3x}{2}+1}$;
282. $\int \frac{dx}{3+\sin 5x}$;
283. $\int \frac{dx}{\cos 3x+2\sin 3x}$;
284. $\int \frac{dx}{\cos 2x-\sin 2x+2}$;
285. $\int \frac{dx}{2+3\cos\frac{x}{2}}$;
286. $\int \frac{dx}{2\sin^2 3x-3\cos^2 3x+1}$.

§2. Определенный интеграл, основные свойства определенного интеграла и его приложения

2.1. Общие понятия

Пусть числовая функция $f(x)$ определена на $[a,b]$. Определим разбиение T отрезка $[a,b]$ заданием конечной системы точек $\{x_i\}$: $a=x_0<x_1<\ldots<$ $<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n$. Диаметром разбиения $d(T)$ разбиения T отрезка $[a,b]$ назовем число $d(T)=\max\limits_{i=1,2,\ldots,n}(x_i-x_{i-1})>0$, $0<d(T)\leqslant b-a$. При заданном разбиении T отрезка $[a,b]$ рассмотрим любую систему точек $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\ldots,n)$

$$(a=x_0\leqslant\xi_1\leqslant x_1<\ldots<x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i<\ldots<x_{n-1}\leqslant\xi_n\leqslant x_n=b).$$

Разбиение T отрезка $[a,b]$ вместе с выбранной системой точек $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ назовем размеченным разбиением $[a,b]$ и будем обозначать $T\xi$. По заданной функции $f : [z,b] \to \mathbb{R}$ и размеченному разбиению $T\xi$ с диаметром $d(T) > 0$ построим сумму

$$S_f(T\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Определение 1. Интегралом Римана функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется такое число I (если оно существует), что $\lim\limits_{d(T)\to 0} S_f(T\xi) = I$.

Обозначается интеграл Римана следующим образом: $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Здесь и дальше полагаем: $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$.

Замечание. Интеграл Римана $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ зависит от a, b и f, но не зависит от x, являющейся "немой" переменной (переменной интегрирования), в то время как неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ зависит от x.

Некоторые свойства интеграла Римана.

1) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, тогда для любых α и β справедлива формула:

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

2) Пусть $a < c < b$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

3) Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Пусть $F(x) = \int f(x)\,dx$ — неопределенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a,b]$, тогда:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

4) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на $[\alpha,\beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и $f(\varphi(t))$ определена и

непрерывна на $[\alpha, \beta]$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

5) Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на $[a, b]$, а их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, тогда

$$\int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx.$$

Пример 1. (см. свойство 3).

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

Пример 2. (см. свойство 3).

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

Пример 3. (см. свойство 4).

$$\int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx,$$

рассмотрим подстановку $x = 3\sin t$, $t \in [0, \pi/2]$. Имеем

$$\int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt =$$

$$= 9\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{9}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{9\pi}{4}.$$

Пример 4. (см. свойство 4).

$$\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx,$$

рассмотрим подстановку $x = \frac{1}{\cos t}$, так как $x \in [1, 2]$, то $t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

$$\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx = \int\limits_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}{1/\cos^4 t} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \int\limits_0^{\pi/3} \sin^2 t \cdot \cos t\,dt = \frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Пример 5. (см. свойство 5).

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = x \cdot \operatorname{arctg} x\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x\Bigg|_0^1 -$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

2.2. Геометрические приложения определенного интеграла

I. Длина кривой.

I.1. Кривая задана явным уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, тогда длина кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Пример 6. Найти длину кривой $y = \frac{x^2}{6}$ на участке $x \in [0, 4]$.

$$y' = \left(\frac{x^2}{6}\right)' = \frac{x}{3}$$

$$l = \int\limits_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^4 \sqrt{3^2+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{3^2+x^2} + \frac{9}{2}\ln(x+\sqrt{3^2+x^2})\right]\Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}4 \cdot \sqrt{3^2+4^2} + \frac{9}{2}\ln(4+\sqrt{3^2+4^2}) -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \sqrt{3^2+0} - \frac{9}{2}\ln(0+\sqrt{3^2+0})\right] = \frac{1}{3} \cdot \left[10 + \frac{9}{2}\ln 9 -\right.$$

$$\left.-\frac{9}{2}\ln 3\right] = \frac{1}{3}\left[10 + \frac{9}{2}\ln 3\right] = \frac{10}{3} + \frac{3}{2}\ln 3.$$

I.2. Кривая задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, тогда длина кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

Пример 7. Вычислить длину астроиды $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$.

Так как кривая симметрична относительно обеих координатных осей, то вычислим сначала длину ее четвертой части l_1, расположенной в первом квадранте, в этом случае $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. $x'_t = -6\cos^2 t \cdot \sin t$, $y'_t = 6\sin^2 t \cdot \cos t$, отсюда

$$l_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{36\cos^4 t \sin^2 t + 36\sin^4 t \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 6\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}\, dt = 6\int\limits_0^{\pi/2} \sin t \cos t\, dt = 6\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Длина всей кривой $l = 4l_1 = 4 \cdot 3 = 12$.

Пример 8. Вычислить длину циклоиды: $x = (t - \sin t)$, $y = (1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Найдем производные $x'_t = 1 - \cos t$, $y'_t = \sin t$, тогда

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = \int\limits_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\, dt = -4\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= -4(\cos\pi - \cos 0) = -4(-1-1) = 8.$$

I.3. Кривая задана в полярных координатах: $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, тогда длина кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

Пример 9. Вычислить длину кривой $r = (1 + \cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Найдем производную $r'_\varphi = (1+\cos\varphi)' = -\sin\varphi$, отсюда

$$l = \int_0^\pi \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi =$$
$$= 2\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4\sin\frac{\varphi}{2}\bigg|_0^\pi = 4\cdot\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 4.$$

II. Площади

II.1. Пусть криволинейная трапеция ограниченна сверху и снизу кривыми, уравнения которых $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x \in [a,b]$, $y_1(x) \geqslant y_2(x)$. Тогда площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b [y_1(x) - y_2(x)]\, dx.$$

Пример 10. Даны эллипс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ и прямые $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$, найти площадь фигуры, ограниченной прямыми и эллипсом.

Из уравнения эллипса имеем: $y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$, отсюда

$$S = \int_{-1}^1 \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\, dx = 3\arcsin\frac{x}{2} + \frac{3}{4}x\sqrt{4-x^2}\bigg|_{-1}^1 =$$
$$= 3\arcsin\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{4-1} - 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}\sqrt{4-1} =$$
$$= 6\arcsin\frac{1}{2} + \frac{6}{4}\sqrt{3} = \pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 11. Определить площадь фигуры, заключенной между двумя параболами $y^2 = 6x$ и $x^2 = 6y$.

Из уравнений кривых имеем: $y = \sqrt{6x}$, $y = \frac{x^2}{6}$, $x \in [0,6]$.

$$S = \int_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\right)\, dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\, x^{3/2} - \frac{x^3}{18}\right)\bigg|_0^6 = 12.$$

II.2. Площадь криволинейной трапеции в случае, когда кривая задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, вычисляется по формуле:

$$S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)\, dt.$$

Пример 12. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$.

Вычислим площадь верхней половины и удвоим. Здесь $x \in [-3, 3]$, поэтому t изменяется от π до 0,

$$S = 2 \cdot \int\limits_{\pi}^{0} 2\sin t(-3\sin t)\, dt = 12 \int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 t\, dt =$$

$$= 12 \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = 12 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Bigg|_{0}^{\pi} = 6\pi.$$

Пример 13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной циклоидой $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$S = \int\limits_{0}^{2\pi} (1-\cos t)^2\, dt = \left(\frac{3}{2} t - 2\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Bigg|_{0}^{2\pi} = 3\pi.$$

II.3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} (r(\varphi))^2\, d\varphi.$$

Пример 14. Найти площадь кардиоиды $r = \cos\varphi + 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{2\pi} (\cos\varphi + 1)^2\, d\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi = 2\sin\varphi \right) \Bigg|_{0}^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}.$$

Пример 15. Найти площадь лемнискаты $r^2 = 2\cos 2\varphi$.

Для вычисления общей площади достаточно удвоить площадь правого овала, которому отвечает изменение угла $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$.

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi\, d\varphi = \sin 2\varphi \Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1 - (-1) = 2.$$

III. Объем тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int\limits_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

Пример 16. Найти объем тела, образованного вращением эллипса вокруг оси Ox $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Так как $y^2 = \frac{9}{25}(25 - x^2)$, получим

$$V = \pi \int\limits_{-5}^{5} \frac{9}{25}(25 - x^2)\, dx = 2\pi \int\limits_0^5 \frac{9}{25}(25 - x^2)\, dx =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{9}{25}\left(25x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^5 = 60\pi.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить:

287. $\int\limits_1^2 (x^2 + 1)\, dx$;

288. $\int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx$;

289. $\int\limits_0^\pi \sin x\, dx$;

290. $\int\limits_0^\pi \sin 2x\, dx$;

291. $\int\limits_{2\pi}^{3\pi} x \sin x\, dx$;

292. $\int\limits_1^e \ln x\, dx$;

293. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

294. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^5 x\, dx$;

295. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \, d\varphi;$

296. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \, d\varphi;$

297. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi \, d\varphi;$

298. $\int\limits_{0}^{3} e^{-\frac{x}{3}} \, dx;$

299. $\int\limits_{-1}^{1} x e^{-x^2} \, dx;$

300. $\int\limits_{-1}^{1} x^2 e^{-x} \, dx;$

301. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \, dx;$

302. $\int\limits_{0}^{R} x^3 \sqrt{R^2 - x^2} \, dx \ (R > 0);$

303. $\int\limits_{1}^{e} \ln^2 x \, dx;$

304. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}.$

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

305. $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$;

306. $y = x^2$, $y = 1$;

307. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$;

308. $y = x^2 - 1$, $x = 2$, $y = 0$, где $x \geqslant 1$;

309. $y = \sin 3x$, $y = 0$, где $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$;

310. $y = \sin x$, $y = \sin^3 x$, где $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$;

311. $y = x^2$, $y = x$;

312. $y = \arcsin 2x$, $x = 0$, $y = -\frac{\pi}{2}$;

313. $y = \sin 2x$, $y = 1$, $x = \frac{\pi}{2}$, где $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$;

314. $x^2 - y^2 = 1$, $x = 2$;

315. $y = x^3$, $y = -1$, $x = 0$;

316. $y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$;

317. $y = x(3 - x)$, $y = x - 3$;

318. $y = 3x - x^2$, $y = x^2 - x$;

319. $xy = 5$, $x + y = 6$;

320. $xy = -2$, $y = x - 3$;

321. $xy = 4$, $x = 4$, $y = 4$, $x = 0$, $y = 0$;

322. кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$;

323. $\rho = a\cos 2\varphi$;

324. $\rho = a\sin 2\varphi$;

325. $\rho = 2 + \sin 2\varphi$;

326. $\rho = ae^{\varphi}$, где $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$;

327. $\rho = a\sin 3\varphi$;

328. $\rho = a\cos 3\varphi$;

329. одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ и осью OX;

330. $\rho = a\cos 4\varphi$;

331. $\rho = a\sin 4\varphi$.

332. Вычислить площади фигур, изображенных на рисунках 1 — 6.

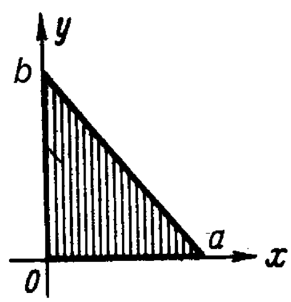

Рис. 1

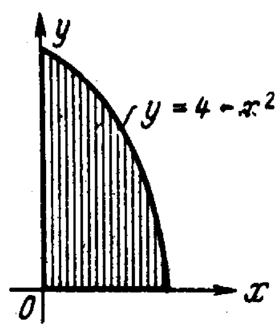

Рис. 2

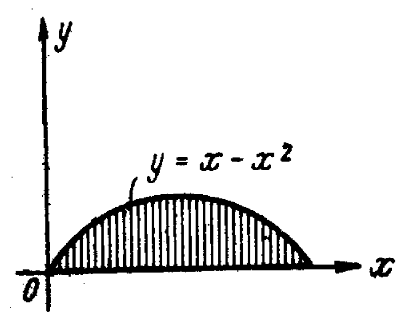

Рис. 3

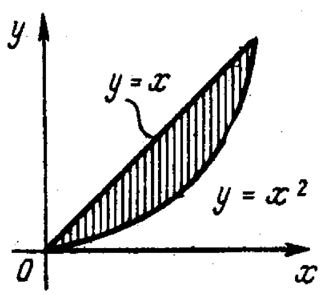

Рис. 4

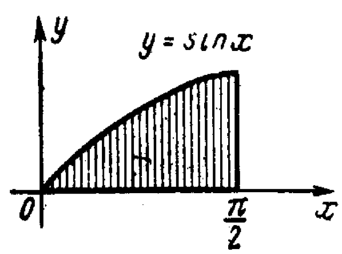

Рис. 5

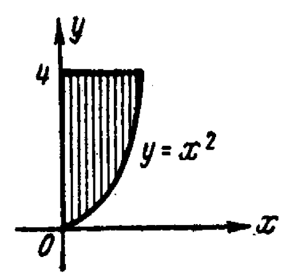

Рис. 6

Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями:

333. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, где $x \geqslant 0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

334. $y = x - x^2$, $y = 0$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y = 0$, 2) $x = 0$, 3) $x = 2$, 4) $x = -2$, 5) $y = -1$, 6) $y = 2$;

335. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

336. $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$, где $x \geqslant 0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

337. $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

338. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

339. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = 0$, где $y \geqslant 0$ вокруг оси x;

340. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y = 0$, 2) $x = 0$, 3) $y = -1$, 4) $x = 1$, 5) $x = -1$, 6) $y = 1$;

341. $y = \sin x$, $y = 0$, где $0 \leqslant x \leqslant \pi$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y = 0$, 2) $x = 0$, 3) $x = 2\pi$, 4) $x = -1$, 5) $x = -2$, 6) $y = 1$, 7) $y = -2$;

342. $x^2 - y^2 = 4$, $y = 2$, $y = 0$ вокруг оси x;

343. $y = x$, $y = x^2$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

344. $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = 0$, где $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

345. $y = \sin x$, $y = 0$, где $2\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $y = 0$, 2) $x = 0$, 3) $x = \pi$, 4) $y = -2$;

346. $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг каждой из следующих прямых: 1) $x = 0$, 2) $y = 0$, 3) $x = -1$, 4) $y = 1$;

347. $y = \frac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y;

348. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$ вокруг: 1) оси x, 2) оси y.

Вычислить длину дуги кривой:

349. $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = 1$;

350. $y = \ln\cos x$, отсеченной прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$;

351. $y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$;

352. $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$, отсеченной прямой $x = -1$;

353. $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ между осью y и прямой $x = a$;

354. $y = x^2 - 1$, отсеченной осью x;

355. $y = \ln\sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$;

356. астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$;

357. одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

358. кардиоиды $r = 4(1 - \cos\varphi)$;

359. первого завитка спирали $r = a\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$;

360. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$ от $x = 1$ до $x = e$.

§3. Несобственные интегралы

3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема в любой конечной его части $[a, A]$, так что интеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx$ имеет смысл при любом $A > a$.

Определение 1. Несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a;+\infty)$ называется предел (если он существует) $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx$, его величина обозначается

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx. \tag{1}$$

В случае, если этот предел конечен, то говорят, что интеграл (1) сходится, если предел (1) бесконечен или вовсе не существует, то говорят, что интеграл расходится.

Пример 1. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$. Функция $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ на любом промежутке $[0,A]$ интегрируема

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^A\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}.$$

По определению интеграл сходится и его величина равна $\frac{\pi}{2}$.

Пример 2. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\sin x\,dx$. Функция $f(x)=\sin x$ интегрируема на любом промежутке $[0,A]$. Так как

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^A\sin x\,dx = \lim_{A\to+\infty}(-\cos A)$$

не существует, то по определению интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\sin x\,dx$ расходится.

Пример 3. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$. Функция $f(x)=\frac{1}{x^p}$ интегрируема на любом промежутке $[0,A]$. Так как

$$\int\limits_1^A\frac{dx}{x^p} = \begin{cases}\frac{1}{1-p}\,(A^{1-p}-1), & p\neq 1,\\ \ln A, & p=1,\end{cases}$$

то интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$.

Свойства несобственного интеграла.

1. Если существуют несобственные интегралы от функций $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[a;+\infty)$, то для любых постоянных α и β справедливо равенство:

$$\int\limits_a^{+\infty}(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx+\beta\int\limits_a^{+\infty}g(x)\,dx.$$

2. Пусть $a<c<+\infty$, и существует несобственный интеграл от функции $f(x)$ на $[a;+\infty)$, тогда

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx=\int\limits_a^{c}f(x)\,dx+\int\limits_c^{+\infty}f(x)\,dx.$$

3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$, то для любой строго монотонной и непрерывно дифференцируемой на $[\alpha;\beta)$ функции $\varphi:\ [\alpha;\beta)\to[a;+\infty)$ справедливо равенство

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^{\beta}f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a;+\infty)$ и существует $\lim\limits_{A\to+\infty}f(x)g(x)$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty}g(x)\,dx$ одновременно сходятся или расходятся, и в случае их сходимости имеет место равенство

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty}-\int\limits_a^{+\infty}f'(x)g(x)\,dx.$$

Замечание. Аналогично (1) определяется интеграл от функции $f(x)$ на $(-\infty;a]$

$$\int\limits_{-\infty}^{a}f(x)\,dx=\lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^{a}f(x)\,dx,$$

равно как и интеграл функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;+\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{\substack{B\to-\infty\\A\to+\infty}}\int\limits_B^{A}f(x)\,dx.$$

Пример 4.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to-\infty} (-\operatorname{arctg} A) = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 5.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

3.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ задана на конечном промежутке $[a;b]$, но неограничена в этом промежутке. Положим, что в любом промежутке $[a;b-\varepsilon]$ $(0<\varepsilon<b-a)$ $f(x)$ ограничена и интегрируема, но оказывается неограниченной в каждом промежутке $[b-\varepsilon,b]$. Точка b в этом случае называется особой точкой.

Определение 2. Несобственным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ называется предел $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^b f(x)\,dx$, его величина обозначается

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{2}$$

В случае, если этот предел конечен, говорят, что интеграл (2) сходится. Если же предел (2) бесконечен или вовсе не существует, то говорят, что интеграл (2) расходится.

Замечание. В случае, если $f(x)$ ограничена и интегрируема в любом промежутке $[a+\varepsilon;b]$ и неограничена в каждом промежутке $[a;a+\varepsilon]$ справа от точки a (особая точка), тогда несобственный интеграл функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ определяется равенством

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Замечание. Пусть $c\in[a,b]$ и функция $f(x)$ неограничена в точке c, причем на промежутках $[a;c-\varepsilon_1]$ $(0<\varepsilon_1<c-a)$ и $[c+\varepsilon_2,b]$ $(0<\varepsilon_2<b-c)$

функция $f(x)$ интегрируема, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Пример 6. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x=-1$ — особая точка.

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^{0} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin 0 - \arcsin(-1+\varepsilon)) = -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится и его величина равна $\frac{\pi}{2}$.

Пример 7. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x=1$ — особая точка.

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_{0}^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится и его величина равна $\frac{\pi}{2}$.

Пример 8. $\int\limits_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, $x=0$ — особая точка.

$$\int\limits_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int\limits_{0}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon_2}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{3}{2}\cdot x^{2/3}\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\frac{3}{2}\,x^{2/3}\Big|_{\varepsilon_2}^{8} =$$

$$= \frac{3}{2}\,(8^{2/3} - (-1)^{2/3}) = \frac{3}{2}\cdot(4-1) = \frac{9}{2}.$$

Пример 9. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{2x\,dx}{x^2-1}$, $x=-1$, $x=1$ — особые точки.

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \int\limits_{-2}^{-1} \frac{2x\,dx}{x^2-1} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2-1}\,dx + \int\limits_{1}^{2} \frac{2x}{x^2-1}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{-2}^{-1-\varepsilon_1} \frac{dx^2}{x^2-1} + \lim_{\substack{\varepsilon_2\to 0\\ \varepsilon_3\to 0}} \int\limits_{-1+\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_3} \frac{dx^2}{x^2-1} + \lim_{\varepsilon_4\to 0} \int\limits_{1+\varepsilon_4}^{2} \frac{dx^2}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0} \ln|x^2-1|\Big|_{-2}^{-1-\varepsilon_1} + \lim_{\substack{\varepsilon_2\to 0\\ \varepsilon_3\to 0}} \ln|x^2-1|\Big|_{-1+\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_3} + \lim_{\varepsilon_4\to 0} \ln|x^2-1|\Big|_{1+\varepsilon_4}^{2} = \infty.$$

Интеграл расходится.

Пример 10. $\int\limits_{0}^{a} \frac{dx}{(a-x)^p}$, $x=a$ — особая точка.

$$\int\limits_{0}^{a} \frac{dx}{(a-x)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0}^{a-\varepsilon} \frac{dx}{(a-x)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{a} \frac{dt}{t^p} = \lim_{\varepsilon\to 0} \begin{cases} \frac{1}{1-p}\left(a^{1-p}-\varepsilon^{1-p}\right), & p\neq 1\\ (\ln a - \ln\varepsilon), & p=1, \end{cases}$$

отсюда интеграл $\int\limits_{0}^{a} \frac{dx}{dx}(a-x)^p$ сходится, если $p<1$, и расходится, если $p \geqslant 1$.

Замечание. Несобственные интегралы от неограниченных функций обладают теми же свойствами, что и несобственные интегралы на бесконечном промежутке. При их формулировке промежуток $[a;+\infty)$ заменяется на промежуток $[a,b]$.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить:

361. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$;

362. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$;

363. $\int\limits_{6}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x}$;

364. $\int\limits_{0}^{+\infty} \operatorname{arcctg} x\,dx$;

365. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x}\,dx;$

366. $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx;$

367. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x\,dx;$

368. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha};$

369. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}};$

370. $\int\limits_0^1 \ln x\,dx;$

371. $\int\limits_0^1 \ln^2 x\,dx;$

372. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x\,dx;$

373. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}};$

374. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2};$

375. $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}};$

376. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x};$

377. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha};$

378. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx.$

Ответы

1. $\frac{x^3}{3}+\frac{3x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x$. **2.** $\frac{x^5}{5}+\frac{5}{6}\,x\sqrt[5]{x}+2x\sqrt{x}-\frac{1}{x}-\ln|x|+5x$.
3. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}$. **4.** $x^5-\frac{1}{3x^3}$. **5.** $\frac{5}{6}\sqrt[5]{x}\,(x-6)$. **6.** $\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}$.
7. $\frac{2}{3}\,x\sqrt{x}-3x+6\sqrt{x}-\ln|x|$. **8.** $\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3^x}{\ln 3}$. **9.** $\frac{3\cdot 4^x}{\ln 4}-\frac{2}{\sqrt{x}}$. **10.** $2e^x+\frac{1}{2x^2}$.
11. $2\operatorname{arctg}x-3\arcsin x$. **12.** $\frac{x^?}{3}-x+\operatorname{arctg}x$. **13.** $e^x+\operatorname{tg}x$.
14. $5\sin x-\cos x$. **15.** $-(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)$. **16.** $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$. **17.** $3\operatorname{tg}x-4\operatorname{ctg}x$.
18. $3\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}x$. **19.** $\cos x-\operatorname{ctg}x$. **20.** $\operatorname{tg}x-x$. **21.** $-(x+\operatorname{ctg}x)$.
22. $\frac{1}{2}\,(x-\sin x)$. **23.** $\frac{1}{2}\,(x+\sin x)$. **24.** $x+\cos x$. **25.** $\frac{(2e)^x}{\ln 2+1}$.
26. $\arcsin x-\ln|x+\sqrt{1+x^2}|$. **27.** $\frac{\sin 5x}{5}$. **28.** $-\frac{\cos 7x}{7}$. **29.** $4\sin\frac{x}{4}$.
30. $-e^{-x}$. **31.** $2(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})$. **32.** $\frac{\operatorname{tg}3x}{3}$. **33.** $-3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$. **34.** $\frac{(2+5x)^{10}}{50}$.
35. $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}$. **36.** $\frac{1}{3}\,(2x-5)^{\frac{3}{2}}$. **37.** $-\frac{3}{28}\,(3-7x)^{\frac{4}{3}}$. **38.** $\frac{1}{5}\,\ln|5x+2|$.
39. $-\frac{1}{3}\,\ln|2-3x|$. **40.** $\frac{1}{2}\,\ln(x^2+3)$. **41.** $\ln|\sin x|$. **42.** $-\ln|\cos x|$.
43. $-\frac{1}{3}\,\ln|1+3\cos x|$. **44.** $-\frac{1}{4(\ln x+1)^4}$. **45.** $\frac{1}{3}\,\ln|3+\sin 3x|$. **46.** $\ln|\sin 2x|$.
47. $\frac{\sin^3 x}{3}$. **48.** $-\frac{\cos^4 x}{4}$. **49.** $-e^{\cos x}$. **50.** $-\frac{1}{3}\,e^{-x^3}$. **51.** $2e^{\sqrt{x}}$.
52. $-\frac{1}{2}\,\operatorname{cosec}^2 x$. **53.** $\frac{1}{4\cos^4 x}$. **54.** $\frac{3}{4}\,(2+\ln x)^{\frac{4}{3}}$. **55.** $-\frac{2}{15}\,(3+\cos 5x)^{\frac{3}{2}}$.
56. $\frac{7}{90}\,(3+5\sin 3x)^{\frac{6}{7}}$ **57.** $\frac{1}{8}\,\ln(5+2e^{4x})$. **58.** $\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3}$. **59.** $\frac{3}{4}\,(\arcsin x)^{\frac{4}{3}}$.
60. $\frac{\sin x-2}{\cos x}$. **61.** $2\ln|\sin x|-\operatorname{ctg}x$. **62.** $e^{\sin x}$. **63.** $e^{\operatorname{tg}x}$. **64.** $\frac{5}{18}\,(x^3-8)^{\frac{6}{5}}$.
65. $-\frac{2}{75}\,(1-6x^5)^{\frac{5}{4}}$. **66.** $\frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2}$. **67.** $-\frac{3^{\frac{1}{x}}}{\ln 3}$. **68.** $\frac{2x+9}{4}\cdot\sqrt{4x+1}$.
69. $\frac{2(44-15x)}{27}\cdot\sqrt{1-3x}$. **70.** $\frac{4(17-14x)}{147}\sqrt{7x-1}$. **71.** $e^{\operatorname{arctg}x}$. **72.** $\frac{1}{2}\,\cos\frac{1}{x^2}$.
73. $-\frac{4^{1-3x}}{3\ln 4}$. **74.** $-\frac{\arccos^2 x}{2}$. **75.** $-e^{-\operatorname{tg}x}$. **76.** $\frac{\arcsin^2 x}{2}-\sqrt{1-x^2}$.
77. $\frac{1}{8}\,\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|$. **78.** $\frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. **79.** $\arcsin\frac{x}{2}$. **80.** $\ln|x+\sqrt{4+x^2}|$.
81. $\ln|x+\sqrt{x^2-3}|$. **82.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}\,\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|$. **83.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$. **84.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|$.
85. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\,\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{5}}$. **86.** $\frac{1}{2}\,\arcsin\frac{2x}{5}$. **87.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\ln|\sqrt{2}\,x+\sqrt{3+2x^2}|$.
88. $\frac{1}{6}\,\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|$. **89.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\,\arcsin\frac{\sqrt{15}\,x}{5}$. **90.** $\frac{1}{2\sqrt{15}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5x}}{\sqrt{3}-\sqrt{5x}}\right|$.
91. $\frac{1}{3}\,\ln|3x+\sqrt{9x^2-5}|$. **92.** $\frac{1}{2}\,\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{2}}$. **93.** $\frac{1}{4}\,\ln|x^4+\sqrt{x^8-3}|$.
94. $\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{5}}$. **95.** $\frac{1}{4\sqrt{5}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{5}-\cos 2x}{\sqrt{5}+\cos 2x}\right|$. **96.** $\frac{1}{4}\,\ln|(x-2)(x+2)^7|$.
97. $\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+\sqrt{x^2+1}$. **98.** $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$. **99.** $5\ln|e^x+\sqrt{e^{2x}-4}|$.
100. $\frac{1}{5\sqrt{3}}\,\arcsin(\sqrt{3}\,\sin 5x)$. **101.** $-\frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}\frac{2\cos\frac{x}{3}}{3}$. **102.** $\frac{1}{5}\,\arcsin\frac{x^5}{2}$.
103. $\frac{1}{7\sqrt{5}}\,\operatorname{arctg}\frac{x^7}{\sqrt{5}}$. **104.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\operatorname{arctg}\frac{e^{-x}}{\sqrt{2}}$. **105.** $\operatorname{arctg}(x+2)$. **106.** $\frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}$.
107. $\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}|$. **108.** $\arcsin\frac{x-2}{2}$. **109.** $\arcsin\frac{x+1}{2}$.
110. $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\arcsin\frac{4x-3}{5}$. **111.** $\frac{1}{4}\,\ln\left|\frac{x-1}{x+\frac{1}{3}}\right|$. **112.** $\frac{3}{2}\,\ln(x^2-2x+5)+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}$.

113. $\frac{5}{2}\ln(x^2+3x+3)-\frac{17}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}$. **114.** $\frac{1}{2}\ln|x^2+x-1|+\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+1-\sqrt{5}}{2x+1+\sqrt{5}}\right|$. **115.** $\frac{4}{5}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{5}-\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+29)$. **116.** $-3\sqrt{5-4x-x^2}-8\arcsin\frac{x+2}{3}$. **117.** $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+\frac{3}{4}}\right|-\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+3}$. **118.** $26\arcsin\frac{x-3}{2}-5\sqrt{6x-x^2-5}$. **119.** $3\sqrt{6x-x^2}-8\arcsin\frac{x-3}{3}$. **120.** $\frac{1}{2}\sqrt{3x+2x^2}+\frac{9}{4\sqrt{2}}\ln\left|x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x}\right|$. **121.** $4\sqrt{x^2+8x+7}-5\ln|x+4+\sqrt{x^2+8x+7}|$. **122.** $\frac{7}{2}\ln|x^2-6x+1|+\frac{5}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-3-2\sqrt{2}}{x-3+2\sqrt{2}}\right|$. **123.** $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+8\ln|x-2|$. **124.** $\frac{3}{2}x^2-3x+8\ln|x+1|$. **125.** $\frac{x^3}{3}-a^2x+a^3\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. **126.** $\ln\frac{(x-2)^2}{|x-3|}$. **127.** $\frac{(x+4)^2}{2}+\ln\frac{(x-1)^8}{|x|}$. **128.** $\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\ln|2x+1|$. **129.** $2x+\ln(x^2-x+1)-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **130.** $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+9x+27\ln|x-3|$. **131.** $\frac{3}{2}x^2+16x+33\ln(x^2-6x+10)+38\operatorname{arctg}(x-3)$. **132.** $\frac{(x+8)^2}{2}+\frac{55}{2}\ln|x^2-8x+7|+\frac{82}{3}\ln\left|\frac{x-7}{x-1}\right|$. **133.** $3x+\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **134.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+7x+13)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{3}}$. **135.** $\frac{x^4}{4}+x^3+3x^2+18x+54\ln|x-3|$. **136.** $x-\frac{5}{2}\ln|x^2+8x-7|+\frac{27}{2\sqrt{23}}\ln\left|\frac{x+4-\sqrt{23}}{x+4+\sqrt{23}}\right|$. **137.** $x(\ln x-1)$. **138.** $\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)$. **139.** $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{9}\right)\ln(3x+2)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}$. **140.** $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}-\frac{3x^2}{4}-2x$. **141.** $-e^{-x}(x+1)$. **142.** $\frac{e^{5x}}{25}(5x-1)$. **143.** $-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)$. **144.** $-2e^{-\frac{x}{2}}(x^2+4x+8)$. **145.** $e^{2x}(x+1)$. **146.** $x\sin x+\cos x$. **147.** $\sin x-x\cos x$. **148.** $\frac{x+1}{3}\sin 3x+\frac{\cos 3x}{9}$. **149.** $(x^2-2)\sin x+2x\cos x$. **150.** $\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x$. **151.** $\ln|\sin x|-x\operatorname{ctg}x$. **152.** $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|$. **153.** $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **154.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. **155.** $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}$. **156.** $\frac{x^2}{2}\operatorname{arcctg}(1-x)-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)$. **157.** $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}$. **158.** $x\operatorname{arctg}\sqrt{7x-1}-\frac{1}{7}\sqrt{7x-1}$. **159.** $\frac{x^2-1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x$. **160.** $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$. **161.** $\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$. **162.** $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)$. **163.** $\frac{2}{5}e^x\left(2\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)$. **164.** $x[1+(\ln x-1)^2]$. **165.** $\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4}\left(\ln x-\frac{5}{4}\right)$. **166.** $x\ln x(x^2+2)-2x+\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$. **167.** $\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]$. **168.** $-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x$. **169.** $\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+x\operatorname{tg}x$. **170.** $-\frac{\operatorname{arctg}x}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$. **171.** $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}$. **172.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|-\frac{\ln(x+2)}{x}$. **173.** $2\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\ln|1+x|$. **174.** $\frac{-3}{\sqrt[3]{x}}(3+\ln x)$. **175.** $\frac{x}{2}\sqrt{7-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}$. **176.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-5}-\frac{5}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-5}|$. **177.** $\frac{x}{2}\sqrt{3-x^2}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}$. **178.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+2}+\ln|x+\sqrt{x^2+2}|$. **179.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x\sqrt{\frac{2}{3}-x^2}+\frac{2}{3}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$. **180.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}\right|\right)$. **181.** $\frac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x-3}{3}$.

182. $\frac{x-2}{2}\sqrt{x^2-4x}-2\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x}|$. **183.** $\frac{2x+5}{4}\sqrt{x^2+5x+4}-$ $-\frac{9}{8}\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x+4}\right|$. **184.** $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}$. **185.** $\frac{x-2}{2}\sqrt{5+4x-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x-2}{3}$. **186.** $\frac{x-1}{2}\sqrt{2x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin(x-1)$. **187.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}\cos x}{2}\sqrt{2-3\cos^2 x}+\arcsin\frac{\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{2}}\right]$. **188.** $\frac{e^x}{2}\sqrt{e^{2x}+3}+$ $+\frac{3}{2}\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+3})$. **189.** $\frac{\sin x}{2}\sqrt{\sin^2 x+3}+\frac{3}{2}\ln|\sin x+\sqrt{\sin^2 x+3}|$. **190.** $e^{\frac{x}{2}}\sqrt{4-e^x}+4\arcsin\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$. **191.** $\frac{\ln x}{2}\sqrt{\ln^2 x+1}+\frac{1}{2}\ln|\ln x+$ $+\sqrt{\ln^2 x+1}|$. **192.** $\frac{9}{4}\arcsin\frac{2x-3}{3}+\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{3x-x^2}-\frac{2}{3}(3x-x^2)^{\frac{3}{2}}$. **193.** $\frac{1}{6}(5x+2x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{4\sqrt{2}}\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)\sqrt{\frac{5}{2}x+x^2}-\frac{25}{16}\ln\left|x+\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{5}{2}x+x^2}\right|\right]$. **194.** $-\frac{1}{3}(-6x-x^2)^{\frac{3}{2}}-2\left[(x+3)\sqrt{-6x-x^2}+9\arcsin\frac{x+3}{3}\right]$. **195.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$. **196.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$. **197.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{4m}\sin 2mx$. **198.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4m}\sin 2mx$. **199.** $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}$. **200.** $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}$. **201.** $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$. **202.** $\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}-\cos x$. **203.** $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}$. **204.** $\frac{\cos^3\frac{x}{2}}{12}-\frac{\cos\frac{x}{2}}{4}$. **205.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}$. **206.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}$. **207.** $\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}$. **208.** $\sin x-\sin^3 x+\frac{3\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}$. **209.** $\frac{3x}{128}-\frac{\sin 4x}{128}+\frac{\sin 8x}{1024}$. **210.** $\frac{\sin^6 x}{6}-\frac{\sin^8 x}{8}$. **211.** $\frac{3}{8}x-\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{16}$. **212.** $3x+4\sin x+\sin 2x$. **213.** $\sin x-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}$. **214.** $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x|$. **215.** $3\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{6}\right)\right|$. **216.** $\frac{1}{9}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{9x}{2}\right|$. **217.** $\frac{1}{5}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5x}{2}\right)\right|$. **218.** $\frac{1}{2}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\right]$. **219.** $-\frac{1}{8}(\cos 4x+2\cos 2x)$. **220.** $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x$. **221.** $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]$. **222.** $\frac{1}{8}(2\sin 2x-\sin 4x)$. **223.** $-\frac{1}{12}\cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{8}\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$. **224.** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x$. **225.** $-\frac{1}{\sin x}-\sin x$. **226.** $\frac{1}{\cos x}+\cos x$. **227.** $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|$. **228.** $-\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}$. **229.** $\frac{1}{2\cos^2 x}+2\ln|\cos x|-\frac{\cos^2 x}{2}$. **230.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x$. **231.** $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg} x$. **232.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2}$. **233.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. **234.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|$. **235.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)$. **236.** $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|$. **237.** $\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$. **238.** $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3\sin^3 x}$. **239.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right|$. **240.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|$. **241.** $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}\right)$. **242.** $\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg} x+3+\sqrt{13}}\right|$. **243.** $\frac{1}{5}\ln|1-5\operatorname{ctg} x|$. **244.** $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|$. **245.** $-\frac{1}{\operatorname{tg} x+1}$. **246.** $-\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{b}\right)$. **247.** $\frac{\sin^2 x}{2}-\frac{1}{2\sin^2 x}-2\ln|\sin x|$. **248.** $\operatorname{tg}^2 x$. **249.** $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)-2\operatorname{arctg}(e^x)$. **250.** $\frac{e^{2x}}{2}-2e^x+4\ln(e^x+2)$. **251.** $\frac{e^{3x}}{3}+\frac{e^{2x}}{2}+e^x+\ln|e^x-1|$. **252.** $e^x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|$. **253.** $2\ln|e^x-1|-x$. **254.** $e^x-\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+e^x+1)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}$. **255.** $\frac{3}{2}\ln(e^{2x}+4)-2\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}$. **256.** $\frac{e^{4x}}{4}-\frac{e^{3x}}{3}+\frac{e^{2x}}{2}-e^x+\ln(e^x+1)$. **257.** $\operatorname{tg} x-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}$. **258.** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\operatorname{tg} x$. **259.** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)$.

260. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+\ln|\operatorname{tg}x|)$. **261.** $\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^4 x}+\ln|\sin x|$. **262.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}x)$. **263.** $-(-x^2-8x)^{\frac{3}{2}}-\frac{13}{2}\left[(x+4)\sqrt{-x^2-8x}+16\arcsin\frac{x+4}{4}\right]$. **264.** $\frac{3}{2}x^2-17x+36\ln(x^2+6x+10)-46\operatorname{arctg}(x+3)$. **265.** $\frac{1}{2\sqrt{17}}\ln\left|\frac{2e^x-1-\sqrt{17}}{2e^x-1+\sqrt{17}}\right|-\frac{5}{2}\ln|e^x+4-e^{2x}|$. **266.** $\frac{5}{3}(x^2+3x+5)^{\frac{3}{2}}-\frac{9}{4}\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2+3x+5}+\frac{11}{4}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+5}\right|\right]$. **267.** $\frac{1}{\ln a}\operatorname{arctg}(a^x)$. **268.** $-\frac{2}{9}(3x^2+8x)^{\frac{3}{2}}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\left[\left(x+\frac{4}{3}\right)\sqrt{x^2+\frac{8}{3}x}-\frac{16}{9}\ln\left|x+\frac{4}{3}+\sqrt{x^2+\frac{8}{3}x}\right|\right]$. **269.** $6\sqrt{x^2+5x+17}-25\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x+17}\right|$. **270.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(x+1)\sqrt{x^2+2x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+\frac{1}{2}}\right|\right]$. **271.** $4\sqrt{2-x}-2\sqrt{2-x}\arcsin\frac{x}{2}$. **272.** $\frac{3}{2}\ln|x^2+10x+1|-\frac{7}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x+5-2\sqrt{6}}{x+5+2\sqrt{6}}\right|$. **273.** $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$. **274.** $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))$. **275.** $\frac{x-1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}+2\arcsin\frac{x-1}{2}$. **276.** $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|$. **277.** $\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{12}\right)\operatorname{arctg}(2x+1)-\frac{x^2}{12}+\frac{x}{6}-\frac{1}{24}\ln\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)$. **278.** $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$. **279.** $-\operatorname{ctg}x\ln(\cos x)-x$. **280.** $2\sqrt{x-3}\ln(x+\sqrt{x^2-9})-4\sqrt{x+3}$. **281.** $\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right)$. **282.** $\frac{1}{5\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{5x}{2}+1}{2\sqrt{2}}$. **283.** $\frac{1}{3\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-2+\sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-2-\sqrt{5}}\right|$. **284.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{2}}$. **285.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{x}{4}-\sqrt{5}}\right|$. **286.** $\frac{1}{6\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}3x-\sqrt{\frac{2}{3}}}{\operatorname{tg}3x+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right|$. **287.** $\frac{10}{3}$. **288.** $\frac{1}{3}$. **289.** 2. **290.** 0. **291.** 5π. **292.** 1. **293.** $\operatorname{arctg}2$. **294.** $\frac{1}{4}\ln\frac{4}{e}$. **295.** $\frac{5}{6\sqrt{2}}$. **296.** $\frac{2}{3}$. **297.** $\frac{2}{15}$. **298.** $\frac{3(e-1)}{e}$. **299.** 0. **300.** $\frac{e^2-5}{e}$. **301.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2$. **302.** $\frac{2}{15}R^5$. **303.** $e-2$. **304.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. **305.** 1. **306.** $\frac{4}{3}$. **307.** $\frac{8}{3}$. **308.** $\frac{4}{3}$. **309.** $\frac{2}{3}$. **310.** $\frac{1}{3}$. **311.** $\frac{1}{6}$. **312.** $\frac{1}{2}$. **313.** $\frac{\pi-2}{4}$. **314.** $2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})$. **315.** $\frac{3}{4}$. **316.** $\frac{2(e-1)}{\sqrt{e}}$. **317.** $\frac{32}{3}$. **318.** $\frac{8}{3}$. **319.** $12-5\ln 5$. **320.** $\frac{3}{2}-2\ln 2$. **321.** $4\ln(4e)$. **322.** $\frac{3\pi}{2}a^2$. **323.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **324.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **325.** $\frac{9\pi}{2}$. **326.** $\frac{a^2(e^{4\pi}-1)}{4}$. **327.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **328.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **329.** $3\pi a^2$. **330.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **331.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **332.** $\frac{19}{3}$, $\frac{2e-1}{3}$, a^2, 2, $\frac{3\pi a^2}{8}$, $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$. **333.** $\frac{256}{15}\pi$, 8π. **334.** $\frac{\pi}{30}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{11}{30}\pi$, $\frac{19}{30}\pi$. **335.** $\frac{\pi(e^2-1)}{2}$, 2π. **336.** $\frac{128}{5}\pi$, 8π. **337.** $\frac{178}{15}\pi$, $\frac{21}{2}\pi$. **338.** $\frac{6\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{5}$. **339.** $\frac{4\pi ab^2}{3}$. **340.** $\pi(e-2)$, $\frac{\pi(e^2+1)}{2}$, πe, $\frac{\pi(e^2-3)}{2}$, $\frac{\pi(e^2+5)}{2}$, $\pi(4-e)$. **341.** $\frac{\pi^2}{2}$, $2\pi^2$, $6\pi^2$, $2\pi(\pi+2)$, $2\pi(\pi+4)$, $\frac{\pi(8-\pi)}{2}$, $\frac{\pi(\pi+16)}{2}$. **342.** $\frac{32\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **343.** $\frac{2\pi}{15}$, $\frac{\pi}{6}$. **344.** $\frac{\pi^2}{8}$, $\frac{\pi}{4}(\pi-2)$. **345.** $\frac{\pi^2}{2}$, $10\pi^2$, $6\pi^2$, $\frac{\pi(\pi+16)}{2}$. **346.** $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{16\pi}{15}$, $\frac{16\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{5}$. **347.** 12π, 24π. **348.** $\frac{\pi(\pi+2)}{4}$, $\pi\ln 2$. **349.** $\frac{2}{27}(13\sqrt{13}-8)$. **350.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **351.** $\frac{670}{27}$. **352.** $\frac{28}{3}$. **353.** $\frac{a(e^2-1)}{2e}$. **354.** $\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$. **355.** $\ln 3$.

356. $6a$. **357.** $8a$. **358.** 32. **359.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$.
360. $\frac{e^2+1}{4}$. **361.** 1. **362.** $\frac{1}{\alpha-1}$ при $\alpha > 1$; расходится при $\alpha \leqslant 1$.
363. $\frac{1}{4}\ln 3$. **364.** Расходится. **365.** Расходится. **366.** Расходится.
367. -1. **368.** $\frac{1}{1-\alpha}$ при $\alpha < 1$; расходится при $\alpha \geqslant 1$. **369.** $\frac{\pi}{2}$. **370.** -1.
371. 2. **372.** Расходится. **373.** 0. **374.** Расходится. **375.** $6\sqrt[3]{2}$.
376. Расходится. **377.** Расходится. **378.** $\frac{1}{2}$.