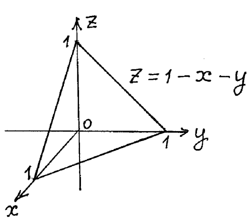
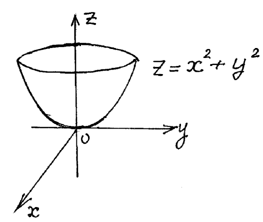
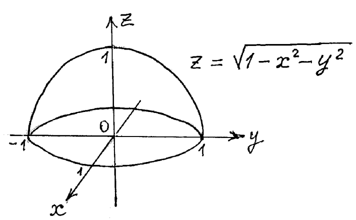
Функция нескольких переменных

§1. Понятие функции нескольких переменных

Определение. Переменная z называется функцией двух переменных x и y, если по некоторому закону каждой паре $(,)$ из некоторого множества ставится в соответствие вполне определенное значение z. Обозначение: $z = f(x, y)$. Переменные и называются независимыми переменными или аргументами. Функцию $z = f(x, y)$ можно наглядно изобразить с помощью некоторой поверхности в пространственной прямоугольной системе координат. На рисунках представлены графики некоторых функций.







Определение. Переменная u называется функцией трех переменных , и z, если по некоторому закону каждой тройке $(, , z)$ из некоторого множества ставится в соответствие вполне определенное число u. Это записывается так: $u = f(x, y, z)$.

§2. Частные производные

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Если мы зафиксируем одну из переменных, то получим функцию только одной переменной. Зафиксируем, например, значение y, положив $y = y_0$. Тогда $z = f(x, y_0)$ будет функцией одной независимой переменной x, для которой производная в точке x_0 имеет обычный смысл:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle_x z}{\triangle x},$$

где $\triangle_x z = f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)$ и называется частным приращением функции $z = f(x, y)$ по x. Этот предел, если он существует, называется частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке (x_0, y_0) и обозначается

$$f'_x(x_0, y_0) = z'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

В различных точках плоскости частная производная по x имеет, вообще говоря, разные значения, т. е. сама является функцией двух переменных и обозначается

$$f'_x(x, y) \quad \text{или} \quad z'_x(x, y) \quad \text{или} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Аналогично определяют частное приращение и частную производную по y:

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle_y z}{\triangle y}.$$

Способы нахождения частных производных не отличаются от нахождения производных в случае функции одной переменной. Нужно только помнить, что если, например, мы находим частную производную по x, то y следует рассматривать как постоянную.

Пример 1. Найти частные производные функции

$$z = x^2 y^3 + 4x^3 y^2 + 5x - 4y + 1.$$

Решение.

$$z'_x = 2xy^3 + 12x^2 y^2 + 5$$
$$z'_y = 3x^2 y^2 + 8x^3 y - 4$$

(при дифференцировании по x мы считаем y постоянным, а при дифференцировании по y мы считаем постоянным x).

Пример 2. Найти частные производные функции

$$z = (x^2 + y^2)e^{xy}.$$

Решение.

$$z'_x = (x^2+y^2)'_x e^{xy} + (x^2+y^2)(e^{xy})'_x = \\ = 2xe^{xy} + (x^2+y^2)e^{xy}y = (2x+x^2y+y^3)e^{xy}$$

$$z'_y = (x^2+y^2)'_y e^{xy} + (x^2+y^2)(e^{xy})'_y = \\ = 2ye^{xy} + (x^2+y^2)e^{xy}x = (2y+x^3+xy^2)e^{xy}.$$

§3. Частные производные высших порядков

Определение. Частными производными второго порядка называются частные производные от частных производных. Обозначения:

$$(z'_x)'_x = z''_{xx} = f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
$$(z'_x)'_y = z''_{xy} = f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
$$(z'_y)'_x = z''_{yx} = f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$
$$(z'_y)'_y = z''_{yy} = f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Расположение символов x и y или $\partial x, \partial y$ соответствует порядку дифференцирования. Производные третьего порядка обозначаются так:

$$(z''_{xx})'_x = z'''_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$
$$(z''_{yx})'_y = z'''_{yxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$$

и т. д.

Пример 1. Найти все вторые частные производные функции $z = \sin(xy)$.

Решение.

$$z'_x = y\cos(xy),$$
$$z'_y = x\cos(xy),$$
$$z''_{xx} = (y\cos(xy))'_x = -y^2\sin(xy),$$
$$z''_{xy} = (y\cos(xy))'_y = \cos(xy) - xy\sin(xy),$$
$$z''_{yx} = (x\cos(xy))'_x = \cos(xy) - xy\sin(xy),$$
$$z''_{yy} = (x\cos(xy))'_y = -x^2\sin(xy).$$

Бросается в глаза, что $z''_{xy} = z''_{yx}$, т. е. в "смешанных" производных порядок дифференцирования не играет роли.

Пример 2. Дана функция $z = e^x(x\cos y - y\sin y)$. Доказать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Решение.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x\cos y = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y),$$
$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y),$$
$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y) + e^x\cos y = \\ = e^x(x\cos y - y\sin y + 2\cos y),$$
$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^x(-x\cos y - \cos y - \cos y + y\sin y) = \\ = -e^x(x\cos y - y\sin y + 2\cos y).$$

Приводя подобные члены, убеждаемся, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

§4. Дифференциалы функции многих переменных.

Частным дифференциалом функции $u = f(x, y, ..., t)$ по x называется главная часть соответствующего частного приращения

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, ..., t) - f(x, y, ..., t),$$

линейная относительно приращения Δx. Аналогично определяются частные дифференциалы функции по каждому из ее аргументов. Частные дифференциалы функции u по x, по $y, ...,$ по t обозначаются соответственно $d_x u$, $d_y u, ..., d_t u$. Из определения частных производных следует, что

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}dx, \quad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad ..., \quad d_t u = \frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

Полным дифференциалом функции $u = f(x, y,..., t)$ называется главная часть ее полного приращения $\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, ..., t+\Delta t) - f(x, y,..., t)$, линейная относительно $\Delta x, \Delta y, ..., \Delta t$. Полный дифференциал du функции $u = f(x, y,..., t)$ равен сумме всех её частных дифференциалов:

$$du = d_x u + d_y u + ... + d_t u = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + ... + \frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

При достаточно малых $\Delta x, \Delta y, ..., \Delta t$ полное приращение функции можно со сколь угодно малой относительной погрешностью заменить ее полным дифференциалом: $\Delta u \approx du$. Вычисление полного дифференциала функции значительно проще, чем вычисление ее полного приращения. Поэтому указанное приближенное равенство используется для приближенных вычислений.

Пример 1. Дана функция $z = xy$ и две точки $(2; 3)$ и $(2,1; 3,2)$. Вычислить приближенное значение функции в точке , заменив приращение функции при переходе от точки к точке B полным дифференциалом, и оценить в процентах погрешность, возникающую при замене Δz на dz.

Решение. $z(A) = 2 \cdot 3 = 6$; $z_1 = z(B) = 2,1 \cdot 3,2 = 6,72$;

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y = 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 = 0,7, \text{ где}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \,|_{x=2,y=3} = 3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \,|_{x=2,y=3} = 2;$$

$$\Delta x = 0,1; \; \Delta y = 0,2;$$

$$\Delta z = z(B) - z(A) \Rightarrow z(B) = z(A) + \Delta z.$$

Заменяем Δz на dz:

$$z(B) \approx z(A) + dz = 6 + 0,7 = 6,7 = z_2.$$

Следовательно, приближенная формула $z(B) \approx z(A) + dz$ даёт ответ с ошибкой 0,02, что составляет в процентах

$$\frac{|z_1 - z_2|}{z_1} \cdot 100\% = \frac{6,72 - 6,7}{6,72} \cdot 100\% < 0,3\%.$$

§5. Экстремум функции двух переменных.

1. Окрестностью радиуса δ (δ-окрестностью) точки ${}_0(x_0, y_0)$ называется множество всех точек $P(x, y)$, удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

т.е. множество точек, лежащих внутри круга радиуса δ с центром в точке $P_0(x_0, y_0)$.

2. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой максимума функции $z = f(x, y)$, если существует такая δ-окрестность этой точки, что $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$ для всех (x, y) из этой окрестности.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой минимума функции $z = f(x, y)$ если существует такая δ-окрестность этой точки, что $f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)$ для всех точек (x, y) из этой окрестности.

3. Необходимое условие экстремума.

Точки, в которых частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ равны нулю или не существуют, называются критическими. Из теории известно, что если функция имеет точки экстремума, то они находятся среди критических точек. Однако обратное утверждение неверно. То есть из того, что точка является критической, не следует, что она обязательно является точкой экстремума.

4. Достаточные условия экстремума.

Пусть функция имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно в некоторой окрестности точки ${}_0(x_0, y_0)$; пусть, кроме того, точка M_0 является критической точкой функции, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 0$$

Вычислим $\Delta = AC - B^2$, где

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0); \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0); \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0).$$

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то M_0 — точка экстремума:

а) если $A > 0$,то M_0 — точка минимума;

б) если < 0, то ${}_0$ — точка максимума;

2) если $\Delta < 0$, то в точке ${}_0$ нет экстремума;

3) если $\Delta = 0$ — сомнительный случай (требуется дальнейшее исследование)

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

Решение.

Находим критические точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow M_1(0,0),\ M_2(1, \frac{1}{2})$ Исследуем эти точки, для этого найдём вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48y.$$

Исследуем точку M_1:

а) $A = 6x\,|_{M_1} = 0,\ B = -6\,|_{M_1} = -6,\ C = 48y\,|_{M_1} = 0,$
$\Delta(M_1) = A \cdot C - B^2 = 0 \cdot 0 - (-6)^2 = -36 < 0.$
В точке M_1 нет экстремума, т. к. $\Delta < 0$.

Исследуем точку M_2:

б) $A = 6x\,|_{M_2} = 6,\ B = -6\,|_{M_2} = -6,\ C = 48y\,|_{M_2} = 24.$
$\Delta(M_2) = 108 > 0,\ A > 0$, значит, в точке M_2 — минимум.

$$z_{min} = z\left(1; \frac{1}{2}\right) = 0.$$

§6. Наибольшее и наименьшее значения функции

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $z = f(x, y)$ в ограниченной замкнутой области D, можно руководствоваться правилом:

1. Найти критические точки, лежащие внутри области D, и вычислить значения функции в этих точках (при этом можно не вдаваться в исследование, есть в них экстремум или нет);

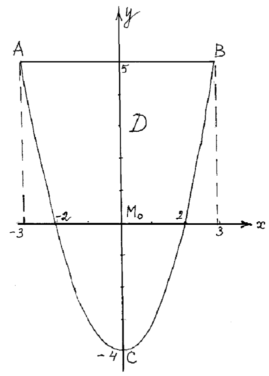
2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на границе области D;

3. Из полученных в пп. 1 и 2 значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Как правило, наиболее трудным является пункт 2. Определение наибольшего и наименьшего значения функции $z = f(x, y)$ на границе области D сводится к решению нескольких задач (по числу кривых, ограничивающих область D) на наибольшее и наименьшее значение функции одной переменной.

Напомним: для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \varphi(x)$ на замкнутом интервале $[a, b]$, надо найти критические точки, лежащие внутри интервала $[a, b]$, и сравнить между собой значения функции в этих критических точках и на концах интервала (при этом можно не вдаваться в исследование, есть в критических точках экстремум или нет).

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + 2xy - 10$ в области D: $y \geqslant x^2 - 4$; $y \leqslant 5$.



Решение.

1. Найдем критические точки, лежащие внутри области:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x.$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = 0.$$

$_0(0, 0)$ — критическая точка, лежащая в области D; $z(0, 0) = -10$.

2. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе области:

а) на отрезке AB $y = 5$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$:

$z = z(x) = x^2 + 2x \cdot (5) - 10 = x^2 + 10x - 10,$
$z' = 2x + 10,\ z' = 0$ при $x = -5$.

Точка $\; = -5$ лежит вне интервала $[-3, 3]$, поэтому она не рассматривается.

Вычисляем значения функции $z(x)$ на концах интервала $[-3, 3]$:

$z_1(-3) = -31, z_2(3) = 29.$

б) на параболе ACB $y = x^2 - 4$:

$z = z(x) = x^2 + 2x \cdot (x^2 - 4) - 10 = 2x^3 + x^2 - 8x - 10$ при $x \in [-3, 3]$.

$z'(x) = 6x^2 + 2x - 8 \Rightarrow z' = 0$ при $x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{4}{3}$.

Точки $_1$ и $_2$ лежат внутри интервала $[-3, 3]$.

$z_3(1) = -15;\ z_4(-\frac{4}{3}) = -\frac{62}{27};$

$z_5(-3) = 31;\ z_6(3) = 29.$

Сопоставляя значения z на всей границе ABCA, найдем наибольшее значение на всей границе как

$$\max\{-31, 29, -15, -\frac{62}{27}\} = 29;$$

наименьшее значение как

$$\min\{-31, 29, -15, -\frac{62}{27}\} = -31.$$

3. Сравнивая значения z во внутренней критической точке $M_0(0, 0)$ с ее наибольшим и наименьшим значениями на границе области, находим:

наибольшее значение z в заданной области как

$$\max\{-10, 29, -31\} = 29,$$

наименьшее значение как

$$\min\{-10, 29, -31\} = -31.$$

Итак: $z_{\text{наиб}} = z(B) = 29;\ z_{\text{наим}} = z(A) = -31.$

§7. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня скалярного поля

Если в каждой точке пространства или части пространства определено значение некоторой величины, то говорят, что задано поле данной величины. Поле может быть скалярным или векторным в зависимости от характера исследуемой величины. Задание скалярного поля определяется заданием скалярной функции точки M: $u = u(M)$.

Если в пространстве введена декартова система координат, то задание скалярного поля $u = u(M)$ эквивалентно заданию функции трех переменных $u = u(x, y, z)$.

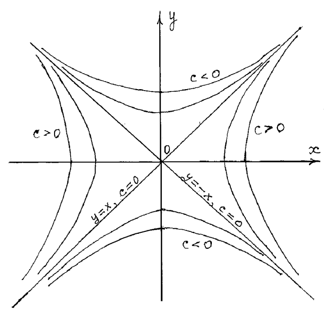
Если исследуемая величина по своему смыслу задана в плоскости, то $u(M) = u(x, y)$, а соответствующее поле называется плоским. Геометрической характеристикой скалярного поля u служат поверхности (линии) уровня — совокупности точек, в которых скалярная функция поля принимает одно и то же значение, т. е. $u = const$.

Пример 1. Найти линии уровня скалярного поля $u = x^2 - y^2$.

Решение. Линии уровня определяются уравнениями $x^2 - y^2 = c$, $c = const$.

При $c = 0$ получаем пару прямых $x^2 - y^2 = 0$, т. е. $(x - y)(x + y) = 0$, т.е. $y = x$ или $y = -x$.

При $c \neq 0$ получаем семейство гипербол $x^2 - y^2 = c$.



Пример 2. Найти поверхности уровня скалярного поля $u = x + 2y + 3z$.

Решение. Поверхности уровня определяются уравнениями $x + 2y + 3z = c$, $c = const$. Это — семейство параллельных плоскостей.

§8. Производная по направлению. Градиент

Важной характеристикой скалярного поля является скорость изменения функции поля в заданном направлении $\overline{\ell}$.

1) Пусть имеем плоское скалярное поле $u = f(x, y)$. Производной функции $u = f(x, y)$ в данной точке $M(x, y)$ по направлению вектора $\overline{\ell} = \overline{MM_1}$ называется предел

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \lim_{|MM_1| \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{|MM_1|}.$$

Если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то производная в данном направлении $\overline{\ell}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta, \tag{1}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ — направляющие косинусы вектора $\overline{\ell} = \{X, Y\}$, которые находятся по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\overline{\ell}|}; \quad \cos\beta = \frac{Y}{|\overline{\ell}|}; \quad |\overline{\ell}| = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial \ell}(M)$ является скоростью изменения функции u в точке M по направлению вектора $\overline{\ell}$.

2) В случае пространственного скалярного поля $u = f(x, y, z)$ производная по направлению определяется аналогично, а формула (1) имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{2}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\ell = \{X,\ Y,\ Z\}$, которые находят по формулам

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\overline{\ell}|}; \quad \cos\beta = \frac{Y}{|\overline{\ell}|}; \quad \cos\gamma = \frac{Z}{|\overline{\ell}|}; \quad |\overline{\ell}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

3) Правую часть формулы (1) можно представить в виде скалярного произведения двух векторов:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = (\frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j}) \cdot (\cos\alpha \cdot \overline{i} + \cos\beta \cdot \overline{j}).$$

Первый из них называется градиентом скалярного поля и обозначается

$$\overline{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j}. \tag{3}$$

Второй вектор $\overline{\ell^0} = \cos\alpha \cdot \overline{i} + \cos\beta \cdot \overline{j}$ — единичный вектор направления $\overline{\ell}$. Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = (\overline{grad}\, u, \quad \overline{\ell^0}). \tag{4}$$

В случае пространственного скалярного поля $u = f(x,\ y,\ z)$ градиент функции u равен

$$\overline{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}. \tag{5}$$

Свойства градиента:

1. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня (или к линии уровня, если поле плоское).

2. Градиент направлен в сторону возрастания функции поля.

3. Модуль градиента равен наибольшей производной по направлению в данной точке поля.

Эти свойства говорят о том, что вектор $\overline{\text{grad}}\, u$ указывает направление и величину наибыстрейшего роста функции u в данной точке. Производная $\frac{\partial u}{\partial \ell}$ в направлении градиента имеет наибольшее значение, равное

$$(\frac{\partial u}{\partial \ell})_{\boldsymbol{n}} = |\overline{grad}\, u| = \sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2}.$$

Пример 1. Найти градиент скалярного поля $u = x - 2y + 3z$.

Решение. Найдём частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3.$$

Согласно формуле (5) имеем:
$\overline{\text{grad}}\, u = 1 \cdot \overline{i} + (-2) \cdot \overline{j} + 3 \cdot \overline{k}$, или $\overline{\text{grad}}\, u = (1, -2, 3)$.

Поверхностями уровня данного скалярного поля являются плоскости $x - 2y + 3z = c$; вектор градиент $\overline{\text{grad}}\, u = (1, -2, 3)$ есть нормальный вектор плоскостей этого семейства.

Пример 2. Найти градиент функции $u = x^3 - xy$ в точке $(1, 2)$ и производную $\frac{\partial u}{\partial a}$ в точке M в направлении вектора $\overline{a} = 5\overline{i} - 3\overline{j}$.

Решение. Найдём значения частных производных в точке M:

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{M(1,2)} = (3x^2 - y)|_{x=1,y=2} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{M(1,2)} = -x|_{x=1,y=2} = -1.$$

Следовательно, по формуле (3)

$$(\overline{\text{grad}}\, u)_M = \overline{i} - \overline{j} = \{1,\ -1\}.$$

В соответствии с формулой (1) находим $\frac{\partial u}{\partial a}$. Направляющие косинусы вектора $\overline{a} = 5\overline{i} - 3\overline{j}$, $\quad |\overline{a}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$ будут:

$$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}, \quad \cos\beta = \frac{-3}{\sqrt{34}}.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 1 \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} + (-1) \cdot (\frac{-3}{\sqrt{34}}) = \frac{8}{\sqrt{34}}\ .$$