***ВОПРОСЫ ТЕОРИИ***

## I. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

**1)** Дать определение матрицы. Что такое нулевая и единичная матрицы? При каких условиях матрицы считаются равными? Как выполняется операция транспонирования? Когда возможна операция сложения матриц и как вычисляется результат? Как найти произведение матрицы на число?

2) Когда возможна операция умножения матриц? Какова размерность результата умножения? По какому правилу вычисляется элемент матрицы - результата при перемножении матриц? Какие матрицы называются взаимно обратными?

3) У каких матриц может быть найден определитель? Как вычислить определитель второго порядка? Что такое минор? Что является алгебраическим дополнением элемента матрицы? Как вычисляется определитель n-го порядка Перечислите свойства определителей.

4) Какая матрица является обратной по отношению к данной матрице? Условия существования обратной матрицы. Как вычисляется обратная матрица.

## II. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

5) Общий вид СЛАУ. Какая система называется однородной? Что такое решение системы? Из чего состоят основная и расширенная матрицы системы? Что такое ранг матрицы? Каково соотношение между числом неизвестных, числом решений и рангом системы? Сформулировать теорему Крамера.

6) Как вычисляются неизвестные СЛАУ матричным методом? В чем заключается метод Гаусса для решения СЛАУ? Какие преобразования матриц называются элементарными? Какие СЛАУ являются эквивалентными?

## III. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

7) Дайте определение вектора. Какие векторы являются коллинеарными, а какие - компланарными? Какие векторы считаются равными? Что такое линейная комбинация системы векторов? Линейно-зависимые и линейно-независимые системы векторов.

8) Что такое базис, ортогональный базис, ортонормированный базис? Что такое разложение вектора по заданному базису? Какой смысл имеют коэффициенты в разложении вектора по ортонормированному базису? Как вычислить модуль вектора, заданного координатами в ортонормированном базисе? Как связаны между собой косинусы направляющих углов вектора?

9) Каким законам подчиняются операции сложения и вычитания векторов? Как производятся линейные операции над векторами, заданными разложениями в одном и том же базисе? Что происходит при умножении вектора на число?

10) Дать определение скалярного произведения двух векторов. Какие значения могут получиться в результате скалярного произведения? Перечислите свойства скалярного произведения. Чему равно скалярное произведение вектора самого на себя? Как вычислить скалярное произведение, если векторы заданы своими координатами в

ортонормированном базисе? Сформулируйте необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов. Как найти угол между векторами?

11) Какая тройка векторов считается правой (левой)? Что такое векторное произведение двух векторов? Каков геометрический смысл модуля результата векторного произведения? Как перемножить векторно векторы, заданные своими координатами в декартовой системе координат? В чем состоит условие коллинеарности векторов?

12) Что такое смешанное произведение трех векторов? Каков геометрический смысл модуля результата смешанного произведения? Как вычислить смешанное произведение трех векторов, заданных своими координатами в декартовой системе координат? В чем состоит условие компланарности трех векторов?

## IV. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

13) Напишите известные Вам виды уравнений прямой на плоскости и объясните смысл величин, входящих в эти уравнения. Как вычислить угол между двумя прямыми? Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

14) Написать общее уравнение плоскости. Объяснить смысл величин, входящих в это уравнение. Как вычислить угол между плоскостями? Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

15) Каноническое и параметрическое уравнения прямой в пространстве. Как вычислить угол между двумя прямыми? Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

16) Как вычислить угол между прямой и плоскостью? Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Как выяснить, что прямая и плоскость имеют точку пересечения, прямая принадлежит плоскости, прямая параллельна плоскости и не принадлежит ей?

## V. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

17) Дать определение окружности, эллипса. Напишите канонические уравнения окружности, эллипса и объясните смысл величин, входящих в эти уравнения. Что характеризует эксцентриситет эллипса? Написать уравнения директрис эллипса, объяснить смысл величин в этих уравнениях, показать расположение директрис и эллипса на чертеже.

18) Дать определения гиперболы, параболы. Напишите канонические уравнения гиперболы и параболы, объясните смысл величин, входящих в эти уравнения. Напишите уравнения директрис, асимптот гиперболы, покажите на чертеже их расположение относительно гиперболы. Чему равен эксцентриситет параболы? Покажите на чертеже расположение директрисы относительно параболы.

19) Что такое параллельный перенос системы координат? Приведите формулы связи "старых" и "новых" координат. Приведите формулы связи "старых" и "новых" координат при повороте системы координат без изменения её начала. Объясните методику приведения общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду, используя последовательно поворот системы координат и параллельный перенос системы

координат. Какой результат достигается на каждом из этих этапов преобразования системы координат?

20) Определение комплексного числа, его геометрическое представление. Операции сложения, вычитания, умножения и деления. Тригонометрическая форма, модуль и аргумент комплексного числа. Возведение в степень и извлечение корня. Показательная форма комплексного числа.

***ЗАДАЧИ***

(1) Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

а) Какую матрицу нужно прибавить к матрице А, чтобы получить единичную матрицу Е? б) Найти (-3)А, А+В, в) Найти AD и DA.

(2) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ дважды: по элементам первой строки и элементам первого столбца.

(3) Для матрицы $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ найти обратную.

(4) Используя метод Крамера, найти решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}.$$

(5) Используя метод Гаусса, найти решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

(6) Даны две точки A(1,4,-2) и B(6,-2,1). Найти координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$. Вычислить их длины.

(7) Вычислить длину и направляющие косинусы вектора {12,-15,-16}.

(8) Определить координаты конца вектора, если начало его расположено в начале координат, длина его равна 12, при этом направляющие углы $\alpha = \beta = \gamma$.

(9) Определить, при каких $t$ и $r$ векторы $\bar{a} = 4\bar{i} + 2\bar{j} - t\cdot\bar{k}$ и $\bar{b} = 2i - r\cdot\bar{j} + 6\bar{k}$ коллинеарны.

(10) Установить, служат ли точки А(2,3,-6), В(7,3,2), С(12,7,3), Д(12,11,-4) вершинами трапеции АВСД.

(11) Даны векторы $\bar{a} = \{4;-2;-4\}, \bar{b} = \{6;-3;2\}$. Вычислить
$1)\ \bar{a}\bar{b};\ 2)\ \sqrt{\bar{a}^2}$; $3)\ \sqrt{\bar{b}^2};\ 4)\ (2\bar{a} - 3\bar{b})(\bar{a} + 2\bar{b});\ \ 5)\ (\bar{a} + \bar{b})^2;\ \ 6)\ (\bar{a} - \bar{b})^2$.

(12) Известно, что $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 5$. Определить, при каком значении *k* векторы $\bar{a} + k\bar{b},\ \bar{a} - k\bar{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

(13) Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = 2\pi/3$. Зная, что $|\bar{a}| = 1,\quad |\bar{b}| = 2$, вычислить:
а) $\left[\bar{a}\bar{b}\right]^2$; б) $\left|\left[(2\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + 2\bar{b})\right]\right|^2$; в) $\left|\left[(\bar{a} + 3\bar{b})(3\bar{a} - \bar{b})\right]\right|^2$.

(14) Даны точки А(1,2,0), В(3,0,-3) и С(5,2,6). Вычислить площадь треугольника АВС.

(15) Даны 3 точки А(1,2,0), В(3,0,-3) и С(5,2,6). Вычислить объем параллелепипеда, построенного на ребрах ОА, ОВ и ОС.

(16) Даны 3 вектора а(1,2,0), в(3,0,-3) и с(5,2,*к*). При каком значении *к* эти векторы компланарны.

(17) Найти расстояние от точки М ( 5; 1; - 1 ) до плоскости $x - 2y - 2z + 4 = 0$.

(18) Написать уравнение плоскости, проходящей через точку М1 ( 0; - 2; 3 ) и а) ось Ох, б) осьОу, в) ось Оz.

(19) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку М (2; 0; - 3) параллельно: а) вектору $\bar{a} = \{2; -3; 5\}$, б) прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$, в) оси Ох.

(20) Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} \qquad\qquad 2x + 3y + z - 1 = 0$$

(21) Найти проекцию точки М ( 5; 2; - 1 ) на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.

(22) Найти проекцию точки P (- 8; 12 ) на прямую, проходящую через точки A( 2; -3 ) и B ( - 5; 1 ).

(23) Даны вершины треугольника M1 ( 2; 1), M2 ( - 1; - 1 ) и M3 ( 3; 2 ). Составить уравнения его высот.

(24) Определить угол между двумя прямыми:

$$5x - y + 7 = 0, \quad 3x + 2y = 0;$$

(25) Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев: а) точки A (3; 2) и B (-1; 6) являются концами одного из диаметров окружности; б) центр окружности совпадает с точкой C (1; - 1), и прямая $5x - 12y + 9 = 0$ является касательной к окружности.

(26) Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти:

а) его полуоси;
б) фокусы;
в) эксцентриситет;
г) уравнения директрис.

(27) Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

а) расстояние между его фокусами 2 c = 6 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

б) его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

в) его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

г) расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами равно 4.

(28) Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметричны относительно начала координат, зная, кроме этого, что:

а) расстояние между фокусами 2 c = 6 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

б) ось 2 a = 16 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

в) уравнение асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами 2 c = 20;

г) расстояние между директрисами равно $22\frac{2}{13}$ и расстояние между фокусами 2 c = 26.

(29) Установить, что следующее уравнение определяет гиперболу, и найти координаты её центра C, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис:

$$16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0;$$

(30) Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная что:

а) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно оси Ox, и её параметр p = 3;

б) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ox, и её

параметр p = 0,5;
в) парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично относительно оси Оy, и её параметр p = $\frac{1}{4}$;
г) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относи-тельно оси Оy, и её параметр p = 3.

(31) Найти фокус F и уравнение директрисы параболы $y^2 = 24x$.

(32) Составить уравнение параболы, если даны её фокус F (7; 2) и директриса $x - 5 = 0$.

(33) Определить точки пересечения прямой $3x + 4y - 12 = 0$ и параболы $y^2 = -9x$.

(34) Выяснить геометрический смысл уравнений:
а) $4x^2 - y^2 = 0$ ,
б) $4x^2 + y^2 = 0$,
в) $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$,
г) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$,

(35) Поворотом осей координат преобразовать уравнение к каноническому виду и построить кривую:

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 = 24,$$

(36) Преобразовать уравнение к каноническому виду и сделать чертеж:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$$

(37) Даны 2 комплексных числа: Z1=2+3i, Z2=3-5i. Вычислить:

a) Z1+Z2, b) Z1-Z2, c) Z1xZ2, d)Z1/Z2

(38) Решить уравнение:

$$Z^2\text{-}2iZ+3=0$$

(39) Число Z=1+i представить в тригонометрической и показательной формах и

вычислить $Z^6$ и $Z^{1/4}$