

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ»**

---

**Кафедра аэродинамики, конструкции и прочности летательных аппаратов**

**М.С. Кубланов, В.В. Трофимов**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ**

**ПОСОБИЕ**

**по изучению дисциплины и  
выполнению контрольных и лабораторных работ**

*для студентов II курса  
специальности 330500  
дневного обучения*

Москва - 2005

Научный редактор и рецензент д-р техн. наук, проф. В.Г. Ципенко

Кубланов М.С., В.В. Трофимов

Моделирование систем и процессов: Методические указания по изучению дисциплины и выполнению контрольных и лабораторных работ для студентов II курса специальности 330500 дневного обучения. – М.: МГТУ ГА, 2006. – 45 с.

Данные методические указания издаются в соответствии с учебным планом для студентов II курса специальности 330500 дневного обучения.

Рассмотрены и одобрены на заседаниях кафедры АКПЛА ???.?? г. и методического совета по специальности 330500 ???.?? г.

## СОДЕРЖАНИЕ

	с.
1. ВВЕДЕНИЕ.....	4
2. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ.....	4
3. СТРУКТУРА КУРСА.....	5
4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ.....	5
5. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	18
6. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА.....	20
7. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1.....	21
8. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2.....	21
9. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3.....	28
10. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4.....	36
11. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5.....	39
12. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ.....	40

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания содержат общие рекомендации по изучению дисциплины "Моделирование систем и процессов": цель и задачи дисциплины, описание структуры курса, программу дисциплины с методическими указаниями по изучению ее разделов, список рекомендуемой литературы, контрольные вопросы, а также общие рекомендации по выполнению лабораторных работ и варианты контрольных работ.

В связи с отсутствием доступных учебников по данной дисциплине самостоятельная работа студентов по ее освоению должна проводиться с помощью предлагаемой основной литературы [1, 2, 3], которая содержит необходимый минимум материала по дисциплине. При работе с другой литературой следует учитывать особенности применяемой терминологии и опираться на основную рекомендуемую литературу.

## 2. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью преподавания дисциплины является формирование у студентов знаний методических основ разработки и применения моделей механических процессов и систем в авиационной и космической технике.

Задачи изучения дисциплины (минимально необходимый комплекс знаний и умений):

– иметь представление о классификации моделей, о методике разработки моделей в научных и инженерных исследованиях, о методике применения моделей в научных и инженерных исследованиях, о методах оценки адекватности моделей поведению изучаемого объекта, о математических методах, применяемых в моделировании, о методах планирования вычислительного эксперимента, о задачах идентификации и оптимизации;

– знать основные понятия теории моделирования, основные типы моделей процессов и систем, основные требования, предъявляемые к разработке математических моделей;

– уметь составлять математическое описание математических моделей, проводить вычислительный эксперимент на детерминированной математической модели и модели случайного процесса;

– иметь опыт составления математического описания для простейших математических моделей объектов авиационной и космической техники, составления плана вычислительного эксперимента, проведения вычислительного эксперимента на простейшей математической модели случайного процесса.

### 3. СТРУКТУРА КУРСА

На дневном отделении Московского государственного технического университета гражданской авиации курс "Моделирование систем и процессов" для специальности 330500 обеспечивается в течение одного семестра тридцатью лекциями, пятью лабораторными работами и завершается сдачей зачета.

Лекции предназначены для первичного ознакомления с материалом в методически правильной постановке. И хотя дисциплина насыщена математическими формулами, на лекциях следует стремиться не столько к точному их воспроизведению, сколько к пониманию логических связей отдельных элементов курса, разделов, методов. Поэтому рекомендуется составлять конспект лекций на одной (правой) стороне разворота тетради, оставляя другую (левую) для последующей самостоятельной работы. В процессе самостоятельной работы с учебными пособиями и другой литературой можно восполнить пробелы фактического материала, дополнить новым материалом, а также зафиксировать свои собственные мысли. Все это позволит в дальнейшем продуктивно использовать конспект в качестве справочника.

Лабораторные работы предназначены для ознакомления с видами оформления математических моделей на ПЭВМ, удобными для пользователей (диалоговый режим, выверенность программного обеспечения, предусматривающего все возможные ситуации и ошибочные действия), методами планирования эксперимента и обработки данных для получения достоверного результата. Все лабораторные работы выполняются на ПЭВМ с помощью специального программного обеспечения. Отчет о выполненной лабораторной работе защищается у преподавателя.

Зачет проводится после успешного выполнения учебного плана (после защиты всех лабораторных) с помощью контролирующей программы на ПЭВМ в объеме контрольных вопросов каждого раздела программы дисциплины.

### 4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

#### 1. Понятие о моделях и моделировании.

Цели научных и инженерных исследований. Место моделирования в них.

Понятия оригинала и модели. Примеры моделей. Понятие моделирования. Процесс моделирования и необходимая последовательность этапов этого процесса. Причины, вынуждающие применять моделирование.

*Методические указания к изучению раздела*

Литература: [1] введение, § 1.1.

Центральные вопросы раздела: Понятия оригинала и модели. Понятие моделирования.

Контрольные вопросы:

- 1.1. Модель и оригинал.
- 1.2. Что такое модель?
- 1.3. Что такое моделирование?
- 1.4. Для чего необходим этап постановки задачи в процессе моделирования?
- 1.5. На какие условия следует обратить внимание при выборе модели?

2. Классификация моделей.

Два аспекта отношения модели к оригиналу. Классификация моделей по особенностям выражения свойств оригинала и особенности функционирования модели. Классификация моделей по основаниям для преобразования свойств модели в свойства оригинала.

*Методические указания к изучению раздела*

Литература: [1] § 1.2.

Центральные вопросы раздела: Два аспекта отношения модели к оригиналу.

Контрольные вопросы:

- 2.1. По каким аспектам классифицируются модели?
- 2.2. Что такое логические модели и как они подразделяются?
- 2.3. Что такое материальные модели и как они подразделяются?
- 2.4. Что такое условные модели?
- 2.5. Что такое аналогичные модели?
- 2.6. Какие бывают виды математических моделей?
- 2.7. На чем основаны математические модели?

3. Математические модели и их виды.

Математическое описание. Виды математического описания. Полнота математического описания. Отличие математической модели от ее математического описания. Виды математических моделей. Понятие "математическая модель в узком смысле" – подобная детерминированная математическая модель. Понятие "имитационная модель" – стохастическая математическая модель. Состав математического описания имитационных моделей и их особенности.

*Методические указания к изучению раздела*

Литература: [1] § 2.1.

Центральные вопросы раздела: Математическое описание. Состав математического описания и математической модели.

Контрольные вопросы:

- 3.1. Какие бывают виды математического описания?
- 3.2. Что входит в математическое описание?
- 3.3. Какие бывают виды математических моделей, определяемые их природой?
- 3.4. Что такое математическая модель в узком смысле?

#### 4. Понятие адекватности модели.

Вычислительный эксперимент. Понятие о планировании вычислительного эксперимента. Достоверность результата. Понятие об адекватности математической модели, точность и непротиворечивость. Статистическая основа проверки адекватности. Необходимые данные для проверки адекватности. Факторы, которые необходимо учитывать при проверке адекватности. Точность и погрешность. Абсолютная и приведенная погрешности. Понятие грубой, случайной и систематической погрешности. Причины возникновения погрешности при математическом моделировании. Оценка погрешности.

*Методические указания к изучению раздела*

Литература: [1] § 2.2.

Центральные вопросы раздела: Понятие вычислительного эксперимента. Понятие адекватности модели, точность и непротиворечивость. Точность и погрешность.

Контрольные вопросы:

- 4.1. Что такое вычислительный эксперимент?
- 4.2. Что такое планирование вычислительного эксперимента и для чего оно применяется?
- 4.3. Может ли вычислительный эксперимент включать в себя неоднократные расчеты?
- 4.4. Что такое достоверность результата вычислительного эксперимента?
- 4.5. Что такое адекватность математической модели?
- 4.6. Что надо сравнивать для оценки адекватности математической модели?
- 4.7. Почему проверку адекватности необходимо проводить с применением математической статистики?
- 4.8. Какой математический аппарат используется для оценки адекватности математической модели?
- 4.9. Что необходимо иметь для оценки адекватности математической модели?
- 4.10. Что надо учитывать при оценке адекватности математической модели?
- 4.11. Чем определяется точность моделирования?
- 4.12. Что такое грубая, случайная и систематическая погрешности?
- 4.13. Причины погрешности математического моделирования.
- 4.14. Из-за чего появляется погрешность математической модели?
- 4.15. Как используется и интерпретируется доверительный интервал в качестве критерия точности моделирования?

#### 5. Понятие об обратных задачах.

Задача идентификации при построении математической модели. Методы решения задач идентификации. Понятие об обратных задачах. Задача оптимизации.

*Методические указания к изучению раздела*

Литература: [1] § 2.3.

Центральные вопросы раздела: Понятие об обратных задачах. Задачи идентификации и оптимизации.

Контрольные вопросы:

- 5.1. Что такое обратные задачи?
- 5.2. Что такое задача идентификации?
- 5.3. Что такое задача оптимизации?
- 5.4. Какой метод лежит в основе решения задачи идентификации?

6. Алгоритм научных исследований с помощью математического моделирования.

Строгость процесса математического моделирования. Алгоритм научных исследований с помощью математического моделирования. Процессы построения математической модели и ее идентификации.

*Методические указания к изучению раздела*

Литература: [1] § 2.4.

Центральные вопросы раздела: Строгость процесса математического моделирования. Процессы построения математической модели и ее идентификации.

Контрольные вопросы:

- 6.1. Почему применение математического моделирования требует выполнения определенных этапов?
- 6.2. В чем состоит цель этапа изучения оригинала?
- 6.3. В чем состоит суть этапа феноменологического описания оригинала?
- 6.4. Какой этап необходим после составления математического описания?
- 6.5. Для чего проводится контрольный эксперимент?
- 6.6. Что необходимо делать, если получена неудовлетворительная оценка адекватности?
- 6.7. Каким этапом завершается процесс построения математической модели?
- 6.8. Какой этап предшествует проведению эксперимента на построенной модели?
- 6.9. Чем завершается алгоритм научных исследований?

7. Основные принципы математического моделирования механических систем и процессов

Принципы математического моделирования механических систем и процессов.

*Методические указания к изучению раздела*

Литература: [1] § 2.5.

Центральные вопросы раздела: Принципы адекватности, планирования, конкретизации условий и области применения, опережающей математической строгости и глубины феноменологического описания.

Контрольные вопросы:

- 7.1. Для чего служат принципы математического моделирования?
- 7.2. Принцип адекватности математической модели.



- 7.3. Принцип гибкости, инвариантности и динамичности; чем он обеспечивается?
- 7.4. Принцип состоятельности результатов вычислительного эксперимента; чем он обеспечивается?
- 7.5. Принцип удобства исследователя; чем он обеспечивается?
- 7.6. Чем обеспечивается принцип планирования вычислительного эксперимента?
- 7.7. Суть принципа конкретизации условий и области применения разрабатываемой математической модели.
- 7.8. Принцип опережающей математической строгости и глубины феноменологического описания явления.

## 8. Проблемы построения математических моделей.

Сложные и простые математические модели. Построение математической модели как компромисс между простотой и адекватностью. Проблемы построения математических моделей. "Многокритериальность", "проклятие размерности". Проблема адекватности. Методы математического моделирования. Ранжирование, агрегирование. Методы экспертных оценок и их обработка. Теория катастроф. Методы последовательных приближений, проб и ошибок, перебора.

*Методические указания к изучению раздела*

Литература: [1] § 3.1.

Центральные вопросы раздела: Проблемы многокритериальности, большой размерности и адекватности. Основные характеристики методов моделирования.

Контрольные вопросы:

- 8.1. Какой компромисс необходимо обеспечить при построении математической модели?
- 8.2. Что понимается под многокритериальностью?
- 8.3. Что понимается под "проклятием размерности"?
- 8.4. С помощью каких методов решается проблема многокритериальности?
- 8.5. С помощью каких методов решается проблема "проклятия размерности"?
- 8.6. При решении проблемы адекватности математической модели следует расширять или сужать область ее применимости? Почему?
- 8.7. Краткая характеристика приема ранжирования.
- 8.8. Для чего применяются методы экспертных оценок?
- 8.9. На чем основаны методы экспертных оценок?
- 8.10. Для каких целей проводится статистическая обработка данных экспертизы?
- 8.11. Краткая характеристика приема агрегирования.
- 8.12. Краткая характеристика теории катастроф.
- 8.13. Характеристика метода последовательных приближений.
- 8.14. Характеристика метода проверки гипотез.

## 9. Подобие и анализ размерностей.

Подобие. Анализ размерностей как метод математического моделирования. Степенной комплекс. Понятие о П-теореме. Критерий подобия.

*Методические указания к изучению раздела*

Литература: [1] § 3.2.

Центральные вопросы раздела: Понятие подобия объектов. Степенной комплекс. Критерий подобия.

Контрольные вопросы:

- 9.1. Понятие подобия объектов.
- 9.2. Какова особенность математических описаний подобных объектов?
- 9.3. Как связаны соответствующие переменные подобных объектов?
- 9.4. Что такое степенной комплекс?
- 9.5. Какое место в описании законов природы занимают степенные комплексы?
- 9.6. Как формулируется основной прикладной вывод ПИ-теоремы?
- 9.7. Что такое критерий подобия?
- 9.8. Каким образом безразмерный степенной комплекс помогает строить математическое описание?
- 9.9. С помощью уравнений какого вида определяется точный вид безразмерного степенного комплекса?
- 9.10. С точностью до какой величины может быть найдена функциональная зависимость при помощи ПИ-теоремы?
- 9.11. Какой факт лежит в основе уравнений для отыскания показателей степеней в степенном комплексе при помощи ПИ-теоремы?

## 10. Основы теории вероятностей и математической статистики.

Вероятность. Случайная величина. Закон распределения. Параметры закона распределения случайной величины. Распределение ошибки, нормальный закон распределения. Центральная предельная теорема.

Математическая статистика. Генеральная совокупность и выборка. Выборочное распределение. Содержание первичной обработки информации и статистического анализа.

Точечные оценки. Методы моментов и наибольшего правдоподобия. Распределение выборочных функций. Интервальные оценки.

Понятие статистических гипотез. Критерии оценки гипотез.

Вопросы статистического анализа. Смысл среднеквадратического отклонения и коэффициента корреляции. Задачи корреляционного, регрессионного, конъюнктного и дисперсионного анализа. Дисперсионные и регрессионные модели как статистические закономерности.

*Методические указания к изучению раздела*

Литература: [2] §§ 5.1–5.4, 6.1–6.4.

Центральные вопросы раздела: Понятие вероятности. Случайная величина. Закон распределения случайной величины. Нормальный закон распределения. Генеральная совокупность и выборка. Понятие точечных оценок. Свойства точечных оценок. Методы вычисления точечных оценок. Распределение выборочных функций. Интервальные оценки. Понятие статистических гипотез. Критерии оценки гипотез. Смысл среднеквадратического отклонения и коэффициента корреляции. Понятие о статистическом анализе: дисперсионный, корреляционный, регрессионный.

Контрольные вопросы:

- 10.1. Каков предмет науки теории вероятностей?
- 10.2. Что такое случайная величина?
- 10.3. Что такое закон распределения случайной величины?
- 10.4. Каким законом распределения характеризуется случайная ошибка (наблюдений, замеров, опытов)?
- 10.5. Для чего служит математическая статистика?
- 10.6. Что такое генеральная совокупность и выборка?
- 10.7. Что такое математическое ожидание?
- 10.8. Что такое дисперсия?
- 10.9. Что такое среднеквадратическое отклонение?
- 10.10. Обобщенное понятие точечных оценок.
- 10.11. Какие характеристики случайных величин можно получить с помощью точечных оценок?
- 10.12. Что такое свойство несмещенности точечной оценки?
- 10.13. Что такое свойство состоятельности точечной оценки?
- 10.14. Что такое свойство эффективности точечной оценки?
- 10.15. Основная идея метода моментов.
- 10.16. Основной недостаток метода моментов.
- 10.17. Основная идея метода наибольшего правдоподобия.
- 10.18. Основной недостаток метода наибольшего правдоподобия.
- 10.19. Что такое функция наибольшего правдоподобия?
- 10.20. В чем проявляется фундаментальность нормального закона распределения?
- 10.21. Построение выборочных функций.
- 10.22. Основная цель использования выборочных функций.
- 10.23. Общее понятие доверительного интервала.
- 10.24. Роль выборочных функций в построении доверительных интервалов.
- 10.25. Как доверительный интервал определяет точность оценки?
- 10.26. Что входит в первичную обработку информации?
- 10.27. Что может и чего не может сделать статистическая проверка?
- 10.28. Для чего служит проверка статистических гипотез?
- 10.29. Роль функции правдоподобия в проверке гипотез.
- 10.30. Что такое ошибка I рода?
- 10.31. Что такое ошибка II рода?

- 10.32. Понятие альтернативной гипотезы?
- 10.33. Виды альтернативных гипотез.
- 10.34. Основные вопросы, решаемые статистическим анализом.
- 10.35. Прикладной смысл среднеквадратического отклонения и коэффициента корреляции.
- 10.36. Ковариация как характеристика тенденции связи случайных величин.
- 10.37. Какой характер имеет соотношение коррелированности с зависимостью?
- 10.38. Основная задача корреляционного анализа.
- 10.310. Основная задача регрессионного анализа.
- 10.40. Основная задача дисперсионного анализа.
- 10.41. Дисперсионные и регрессионные модели как статистические закономерности.

## 11. Методы статистической обработки результатов.

Оценка адекватности математической модели как задача математической статистики. Случайность и закономерность рассогласования. Систематическая погрешность. Оценка рассогласования. Построение статистического закона распределения и определение статистических оценок его параметров. Проверка критерия значимости гипотезы о равенстве нулю математического ожидания рассогласования. Проверка критерия согласия между наблюдаемым и нормальным законами распределения. Доверительные интервалы.

Последовательность обработки результатов вычислительного эксперимента для выявления экспериментальной зависимости (регрессии, аппроксимации). Построение статистического закона распределения регрессионной зависимости. Выбор вида регрессионной зависимости. Применение метода наименьших квадратов для отыскания параметров регрессионной зависимости. Формулы для полиномиальной регрессии. Понятие об аппроксимации и сглаживании экспериментальных данных.

*Методические указания к изучению раздела*

Литература: [2] §§ 5.7, 6.4.

Центральные вопросы раздела: Статистические приемы оценок точности и непротиворечивости. Метод наименьших квадратов. Основы выбора вида регрессии. Аппроксимация.

Контрольные вопросы:

- 11.1. Может ли математическая модель считаться адекватной поведению оригинала, если рассогласование соответствующих параметров неслучайно?
- 11.2. Какой вывод о рассогласовании соответствующих параметров модели и оригинала можно сделать с помощью проверки статистической гипотезы о нормальном распределении рассогласования?
- 11.3. К какому значению статистического среднего случайной величины рассогласования соответствующих параметров модели и оригинала следует стремиться для улучшения степени адекватности?

- 11.4. Какую погрешность характеризует закон распределения с нулевым математическим ожиданием?
- 11.5. Какую оценку рассогласования соответствующих параметров модели и оригинала дает доверительный интервал для математического ожидания?
- 11.6. Какие соображения кладутся в основу выбора вида экспериментальной зависимости?
- 11.7. С помощью какого метода отыскиваются параметры экспериментальной зависимости?
- 11.8. Какая величина служит критерием в методе наименьших квадратов?
- 11.9. Уравнения какого вида дают возможность определить полиномиальную аппроксимацию методом наименьших квадратов?

## 12. Понятие о теории массового обслуживания и методе Монте-Карло.

Понятие о теории массового обслуживания. Примеры систем массового обслуживания. Поток заявок. Состояния системы и переходы из одного состояния в другое. Граф состояний и переходов системы массового обслуживания. Законы распределения состояний и переходов как результат статистической обработки результатов наблюдений за оригинальной системой. Принцип подбора модели систем массового обслуживания. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) как прием для имитации работы системы. Единичный жребий и процедуры его реализации. Пример построения имитационной математической модели работы аэродрома. Возможность выявления новых свойств объекта при имитационном моделировании.

### *Методические указания к изучению раздела*

Литература: [1] §§ 3.4, 3.5.

Центральные вопросы раздела: Теория массового обслуживания. Граф состояний и переходов. Единичный жребий. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Особенности имитационных моделей.

Контрольные вопросы:

- 12.1. Для построения каких моделей применяется метод статистических испытаний?
- 12.2. Что является предметом теории массового обслуживания?
- 12.3. Что такое единичный жребий?
- 12.4. Какова методика розыгрыша единичного жребия?
- 12.5. В чем суть метода статистических испытаний?
- 12.6. С помощью какого приема в имитационных моделях воспроизводится событие?
- 12.7. Позволяет ли имитационное моделирование воспроизводить процесс функционирования оригинала?
- 12.8. Можно ли с помощью имитационной модели выявить свойства оригинала, явно не участвовавшие в построении модели?
- 12.9. Необходима ли оценка адекватности имитационной модели и почему?

12.10. Из чего состоит математическое описание имитационных моделей?

12.11. Краткая характеристика основных принципов моделирования.

### 13. Вычислительные методы алгебры

Системы линейных алгебраических уравнений – методы исключения. Системы нелинейных алгебраических уравнений – итерационные методы. Понятие о рекуррентных формулах и процедуре отделения корней. Методы: секущих (хорд), деления отрезка пополам, золотого сечения, касательных (Ньютона). Методы интерполяции (кусочно-постоянная, линейная, квадратичная, полиномиальная, сплайновая, пример). Аппроксимация (сглаживание).

*Методические указания к изучению раздела*

Литература: [1] § 4.1.

Центральные вопросы раздела: Существование и единственность решения уравнений итерационными методами. Интерполяция. Аппроксимация.

Контрольные вопросы:

13.1. Для решения каких задач применяются итерационные методы?

13.2. Общая характеристика итерационных методов.

13.3. В каких методах применяется пошаговое уточнение значения искомого параметра?

13.4. Что такое рекуррентная формула для решения нелинейного уравнения?

13.5. Для чего служат условия сходимости итерационного метода?

13.6. Каким свойствам должна удовлетворять зависимость на исходном интервале для применимости методов деления отрезка пополам, секущих, золотого сечения?

13.7. Характеристика метода секущих.

13.8. Характеристика метода деления отрезка пополам.

13.9. Характеристика метода золотого сечения.

13.10. Характеристика метода касательных (Ньютона).

13.11. Для чего служат методы интерполяции функций?

13.12. Характеристика линейной интерполяции.

13.13. Характеристика полиномиальной интерполяции.

13.14. Характеристика сплайновой интерполяции.

13.15. Общий принцип методов аппроксимации.

13.16. В чем принципиальное различие между понятиями интерполяции и аппроксимации?

### 14. Вычислительные методы решения дифференциальных уравнений

Разностные схемы. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (решения задачи Коши) – разностные методы: Эйлера, Адамса, "прогноз-коррекция", Рунге-Кутта. Порядок разностных методов. Понятие о возможности контроля погрешности и изменения шага интегрирования. Сравнение методов численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Подходы к решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и более высоких порядков.

Краевые задачи. Методы сеток – метод прогонки. Пример. Метод стрельбы (пристрелки).

Особенности разностных методов интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными.

*Методические указания к изучению раздела*

Литература: [1] § 4.2.

Центральные вопросы раздела: Разностные схемы. Понятие о возможности контроля погрешности и изменения шага интегрирования.

Контрольные вопросы:

- 14.1. На чем основаны разностные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений?
- 14.2. Какой вид дифференциальных уравнений решается методом Эйлера?
- 14.3. Чем определяется порядок разностных методов?
- 14.4. Основная идея метода Эйлера для решения задачи Коши.
- 14.5. Характеристика методов Рунге-Кутты.
- 14.6. Характеристика метода Адамса.
- 14.7. Характеристика методов "прогноза-коррекции".
- 14.8. Какие методы допускают оценку погрешности на шаге интегрирования?
- 14.9. Какие методы допускают изменение шага интегрирования в процессе вычислений?
- 14.10. С какой целью применяется изменение шага интегрирования в процессе вычислений?
- 14.11. Что такое краевая задача?
- 14.12. Какие методы применяются для решения краевых задач?
- 14.13. Краткая характеристика метода прогонки.
- 14.14. Краткая характеристика метода стрельбы.
- 14.15. На чем основываются методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными?

15. Понятие о математических методах оптимизации.

Общая формулировка задач оптимизации. Уравнения связей, фазовые координаты, управления, критерий оптимальности (целевая функция). Пример. Типы задач оптимизации.

Задача линейного программирования. Описание симплекс-метода (формы записи и виды решений).

Задача нелинейного программирования. Классический подход. Методы решения задач нелинейного программирования для унимодального критерия оптимальности от одного переменного: методы деления отрезка пополам и золотого сечения. Общий случай задачи нелинейного программирования и градиентные методы.

Задача вариационного исчисления, "прямые" и "непрямые" методы. Задача оптимального управления, Принцип максимума Л.С. Понтрягина и метод динамического программирования Р. Беллмана.

*Методические указания к изучению раздела*

Литература: [1] § 4.5.

Центральные вопросы раздела: Критерий оптимальности. Задачи линейного и нелинейного программирования. Задачи вариационного исчисления и оптимального управления.

Контрольные вопросы:

- 15.1. Какие элементы могут входить в формулировку задачи оптимизации?
- 15.2. Для чего служит критерий оптимальности в задаче оптимизации?
- 15.3. Какому условию удовлетворяет оптимальное управление в задаче оптимизации?
- 15.4. Каковы должны быть уравнения связей, ограничения и критерий оптимальности для того, чтобы задача оптимизации называлась задачей линейного программирования?
- 15.5. В какой части допустимой области лежит решение задачи линейного программирования?
- 15.6. Каким методом решаются задачи линейного программирования?
- 15.7. Характеристика симплекс-метода.
- 15.8. Каковы должны быть уравнения связей, ограничения и критерий оптимальности для того, чтобы задача оптимизации называлась задачей нелинейного программирования?
- 15.9. Какими методами решаются задачи нелинейного программирования?
- 15.10. Характеристика метода деления отрезка пополам.
- 15.11. Характеристика метода золотого сечения.
- 15.12. Краткая характеристика градиентных методов.
- 15.13. В каких частях допустимой области может располагаться решение задачи нелинейного программирования?
- 15.14. Каковы особенности вида задачи вариационного исчисления?
- 15.15. На каких математических условиях основаны "непрямые" методы решения задач вариационного исчисления?
- 15.16. На каком приеме основаны "прямые" методы решения задач вариационного исчисления?
- 15.17. Каковы особенности вида задачи оптимального управления?
- 15.18. Какими методами решаются задачи оптимального управления?
- 15.19. На каких математических условиях основывается решение задач оптимального управления с помощью принципа максимума?
- 15.20. На каких математических условиях основывается решение задач оптимального управления методом динамического программирования?



## 16. Модели механики сплошной среды.

Понятие механики сплошной среды. Гипотезы математического моделирования сплошной среды: сплошности, непрерывности метрического пространства, введения декартовой системы координат, абсолютности времени.

Стационарное и нестационарное движение. Траектория частицы. Линия тока. Поток скорости. Вихревое и безвихревое движение. Физический смысл вихря. Примеры безвихревого и вихревого движения.

Массовые и поверхностные силы. Нормальное и касательное напряжение. Тензор внутренних напряжений. Идеальная жидкость. Давление. Упругая среда и теория упругости. Вязкая жидкость, закон Навье-Стокса. Изотропные и анизотропные среды. Коэффициенты вязкости для изотропной среды.

Баротропные жидкости: несжимаемая, изотермическая, политропическая, совершенный газ.

Критерии подобия аэродинамики: числа Маха, Рейнольдса, Струхала, Фруда, Эйлера, Ньютона.

О трудностях моделирования задач аэродинамики.

*Методические указания к изучению раздела*

Литература: [3] разделы 1 – 3.

Центральные вопросы раздела: Гипотезы механики сплошной среды. Линия тока. Вихревое и безвихревое движение. Тензор внутренних напряжений. Идеальная и вязкая жидкости. Давление. Баротропия. Аэродинамические критерии подобия.

Контрольные вопросы:

- 16.1. Что такое механика сплошной среды?
- 16.2. Основы статистического и феноменологического подходов к описанию движения среды.
- 16.3. Основные гипотезы механики сплошной среды.
- 16.4. Способ задания скорости. Установившееся и неуставившееся движения.
- 16.5. Траектория частиц, линия тока.
- 16.6. Основное свойство линий тока.
- 16.7. Физическая суть вихря. Безвихревое и вихревое движения.
- 16.8. Виды сил и моментов в механике сплошной среды.
- 16.9. Внутренние поверхностные силы, нормальное и касательное напряжения, тензор внутренних напряжений.
- 16.10. Идеальная жидкость, давление.
- 16.11. Вязкая жидкость, закон Навье-Стокса.
- 16.12. Изотропные и анизотропные среды.
- 16.13. Коэффициенты вязкости.
- 16.14. Баротропные среды: несжимаемая, изотермический процесс, политропический процесс, совершенный газ.
- 16.15. Критерии подобия аэродинамики.

## 5. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

№ п/п	А в т о р	Н а и м е н о в а н и е, и з д а т е л ь с т в о, г о д и з д а н и я
1	2	3
Основная литература:		
1	Кубланов М.С.	Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов: Учебное пособие. Часть I. Третье издание. – М.: МГТУ ГА, 2004. – 108 с.
2	Кубланов М.С.	Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов: Учебное пособие. Часть II. Третье издание. – М.: МГТУ ГА, 2004. – 125 с.
3	Кубланов М.С.	Аэродинамика и динамика полета: Учебное пособие. – М.: МГТУ ГА, 2000.
Учебно-методическая литература:		
4	Кубланов М.С., Трофимов В.В.	Моделирование систем и процессов: Методические указания по изучению дисциплины и выполнению контрольных и лабораторных работ для студентов II курса специальности 330500 дневного обучения. – М.: МГТУ ГА, 2006. – 45 с.
Дополнительная литература		
5	Ибрагимов И.А. и др.	Моделирование систем: Учебное пособие. – Баку: Азинефтехим, 1989. – 83 с.
6	Дыхненко Л.М. и др.	Основы моделирования сложных систем: Учебное пособие для вузов. – Киев: Вища школа. 1981. – 359 с.
7	Савченко А.А.	Введение в математическую статистику с применением в гражданской авиации. – Киев: МИИГА, 1975 – 132 с.
8	Савченко А.А.	Методические указания и контрольные задания по специальным разделам теории вероятностей. – М.: МИИГА, 1982. – 44 с.

1	2	3
9	Остославский И.В., Стражева И.В.	Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1969. – 500 с.
10	Корн Г., Корн Т.	Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1973. – 832 с.
11	Савченко А.А.	Многомерный статистический анализ для инженеров гражданской авиации. – М.: МИИГА, 1976. – 112 с.
12	Васильев Ф.П.	Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 520 с.
13	Годунов С.К., Рябенский В.С.	Разностные схемы (введение в теорию). – М.: Наука, 1973. – 400 с.
14	Добров Г.М. и др.	Экспертные оценки в научно-техническом прогнозировании. – Киев: Наукова Думка, 1974. – 160 с.
15	Вентцель Е.С.	Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
16	Вентцель Е.С.	Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964. – 576 с.
17	Вилисов В.Я. и др.	Экспертные методы в АСУ производством и отработкой ЛА. – М.: МАИ, 1984. – 72 с.
18	Пустыльник Е.И.	Статистические методы анализа и обработки наблюдений. – М.: Наука, 1968. – 288 с.
19	Хальд А.	Математическая статистика с техническими приложениями. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1956. – 664 с.
20	Шторм Р.	Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества. – М.: Мир, 1970. – 368 с.
21	Бормотов М.Ю., Гуров А.Г., Корунов С.С., Кукушкин С.Н.	Экспертные методы прогнозирования. – М.: МАИ, 1985. – 60 с.
22	Добров Г.М., Ершов Ю.В., Левин Е.И., Смирнов Л.П.	Экспертные оценки в научно-техническом прогнозировании. – Киев: Наукова Думка, 1974. – 160 с.

## 6. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА

### Организация лабораторного практикума

Согласно рабочей программе дисциплины лабораторный практикум состоит из пяти лабораторных работ, выполняемых на ПЭВМ студентами в индивидуальном порядке.

Программное обеспечение (ПО) практикума разработано для IBM-совместимых ПЭВМ любого типа, со средой MS-DOS любой редакции с кириллицей. ПО запускается как с дискет, так и с винчестера и не предъявляет каких-либо требований к наименованию директории, где оно располагается.

ПО состоит из командного файла `mmlab.bat`, выполняемых файлов `mmk1.exe`, `mmk2.exe`, `mmk3.exe`, `askk.exe`, `ncview.exe` и текстовых файлов краткого описания лабораторных работ `mm1.txt`, `mm2.txt`, `mm3.txt`. Для входа в практикум и проведения любой лабораторной работы следует запустить на выполнение лишь командный файл `mmlab.bat` – дальнейшие действия запрашиваются в диалоге со студентом.

### Инструкция по работе с лабораторным практикумом на ПЭВМ

Программа работает в диалоге – внимательно следуйте подсказкам на экране. В случае появления непонятных сообщений следует немедленно обратиться к преподавателю, ведущему занятия.

Ввести число – означает набрать с клавиатуры число в предписанном формате **И** нажать клавишу "Enter" ("Ввод").

Формат **I4** означает, что четырехзначное число **БЕЗ ДЕСЯТИЧНОЙ ТОЧКИ** следует набирать с первой позиции без пробелов.

Формат **F5.3** (**F10.0**) воспринимает любое число **С ДЕСЯТИЧНОЙ ТОЧКОЙ**, расположенное в первых 5 (соответственно 10) позициях, если это число содержит не более 5 (соответственно 10) цифр, **ВКЛЮЧАЯ** десятичную точку.

**НАЖАТЬ КЛАВИШУ** – означает только **ОДНО** это действие.

В режиме просмотра текста или результатов листание осуществляется клавишами "PgUp" и "PgDn" или "↑" и "↓". Для окончания просмотра следует нажать клавишу "F10".

Все результаты выполнения лабораторной работы высвечиваются на экране, а также записываются в файл "labrez.dat", который можно просмотреть после выхода из расчетной части работы. Продолжение расчетов после выхода невозможно, поэтому **ВСЮ ПРОГРАММУ** расчетов надо выполнить за один вход в расчетную часть.

## 7. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Ознакомление с системой математического моделирования динамики полета летательных аппаратов (СММ ДП ЛА)

Цель лабораторной работы: Ознакомиться с научным уровнем разработок современных математических моделей.

### Порядок выполнения работы

Работа проводится в лаборатории аэродинамики и динамики полета в режиме знакомства на компьютере с видом, структурой и возможностями системы в последней действующей для научных исследований редакции.

Отчетность не требуется.

## 8. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Оценка адекватности результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта

Цель лабораторной работы: оценка адекватности результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта с помощью оценки точности и непротиворечивости.

### Теоретические основы

В теории математического моделирования под адекватностью результатов, полученных с помощью математической модели, понимают их соответствие поведению оригинала. Для выявления этого соответствия необходимо сравнивать отдельные параметры объекта, полученные в расчетах и зарегистрированные при наблюдении за оригиналом в одних и тех же условиях. Очевидно, что сравнивать следует лишь соответствующие друг другу параметры между собой и только в той области функционирования объекта, в которой предполагается его исследовать. Таким образом, необходимо исследовать величину рассогласования результатов контрольного вычислительного эксперимента с результатами натурного наблюдения в тех же условиях:  $\Delta v = v_{\text{модели}} - v_{\text{оригинала}}$ .

Если моделируется процесс или множество состояний системы, то величина рассогласования принимает множество значений. Поэтому возникает необходимость применения статистических методов.

Для получения этого множества значений рассогласования необходимо иметь:

- исчерпывающую информацию о поведении оригинала в конкретном случае;
- исчерпывающие данные результатов контрольного вычислительного эксперимента, воспроизводящего тот же случай поведения объекта;
  - а для оценки адекватности с точки зрения целей исследования необходимо иметь:
- критерии оценки адекватности.

Цели исследования бывают самыми разнообразными, поэтому возможен выбор различных критериев. Для технических систем и процессов наиболее важными факторами при оценке **АДЕКВАТНОСТИ** необходимо считать **ТОЧНОСТЬ** и **НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ**.

Для большинства случаев исследований этих двух составляющих адекватности достаточно, поскольку в технике используются в основном подобные детерминированные математические модели, обладающие общим с оригиналом математическим описанием.

**ТОЧНОСТЬ** означает, что обобщенная характеристика рассогласования соответствующего параметра модели и оригинала должна быть не больше, чем заранее заданное значение приемлемой погрешности.

**НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ** подразумевает идентичный характер изменения соответствующих параметров, т.е. идентичный вид основных свойств функциональных зависимостей на отдельных участках траектории, как-то: возрастание, убывание, экстремумы, выпуклость и т.п.

В математической статистике известно несколько объектов, которые могут характеризовать точность и непротиворечивость.

Как известно даже на бытовом уровне, для повышения **ТОЧНОСТИ** измерений проводят не одно измерение, а несколько. Это делается не из-за того, что какое-то из них может оказаться ошибочным, а из-за замечательного свойства дисперсии средней арифметической величины измерений: уменьшаться с ростом числа повторений опытов:

$$D_N = \frac{D}{N}, \quad \text{или} \quad \sigma_N = \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

где  $D$  и  $\sigma$  – дисперсия и среднее квадратическое отклонение в одном опыте (измерении),  $D_N$  и  $\sigma_N$  – дисперсия и среднее квадратическое отклонение результата осреднения замеров по  $N$  опытам. Поэтому с помощью большего числа опытов достигают меньшего **РАССЕИВАНИЯ** (среднего квадратического отклонения) данных, т.е. большей точности.

Поэтому для оценки точности математической модели по сравнению с данными наблюдения за оригиналом можно использовать величину среднего квадратического отклонения, статистическую оценку  $s$  которого можно получить непосредственно из результатов сравнения. Однако такая оценка страдает неполнотой, так как не учитывает, насколько часто встречаются большие и ма-

лые, положительные и отрицательные рассогласования. Величина статистического среднего рассогласований  $\overline{\Delta v}$  страдает теми же недостатками, но может быть использована в качестве оценки СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ погрешности.

Так как точность следует определять единой оценкой всего множества наблюдаемых значений случайной величины рассогласования результатов вычислительного эксперимента и "истинного" значения наблюдаемой величины, то в качестве такой оценки должно выступать  $m$  – математическое ожидание рассогласования. Какое истинное значение оно имеет, нам знать не дано, но его можно оценить с помощью **ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ РАССОГЛАСОВАНИЯ**  $m$  оцениваемых параметров – этот подход дает возможность не только учесть все виды рассогласования, но и получить вероятностную характеристику точности. Так, например, может звучать вывод о точности в этом случае: с доверительной вероятностью 0,98 гарантируется рассогласование не более 0,3 м. Критерием оценки точности тогда является соблюдение этой пары значений, приемлемой с точки зрения целей исследования.

Поэтому наиболее полную оценку точности (вернее, погрешности) вычислительного эксперимента дает доверительный интервал для математического ожидания рассогласования: интервал, внутрь которого с заданной доверительной вероятностью попадает "истинное" значение  $m$  рассогласования:

$$\overline{\Delta v} - t(\gamma, N) \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} < m < \overline{\Delta v} + t(\gamma, N) \cdot \frac{s}{\sqrt{N}},$$

$$\overline{\Delta v} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^r N_i \Delta v_i, \quad s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^r N_i (\Delta v_i - \overline{\Delta v})^2};$$

где  $t(\gamma, N)$  определяется по распределению Стьюдента в случае нормального распределения рассогласования  $\Delta v$  при заданной доверительной вероятности  $\gamma$  и числе степеней свободы  $N$ ;  $N_i$  – число попаданий в  $i$ -й интервал наблюдаемых рассогласований  $\Delta v$ ;  $N$  – общее число наблюдаемых значений  $\Delta v$ . Центр этого доверительного интервала определяется значением средней статистической величины рассогласования  $\overline{\Delta v}$ . **РАЗМЕР ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА ТЕМ МЕНЬШЕ, ЧЕМ МЕНЬШЕ ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ  $\gamma$ , И ЧЕМ БОЛЬШЕ ЧИСЛО ОПЫТОВ  $N$ .**

Естественно, при планировании вычислительного эксперимента следует стремиться к тому, чтобы такая оценка погрешности (т.е. доверительный интервал) не выходила за границы требуемой с точки зрения целей исследования погрешности  $\pm \delta$ , чего можно добиться разумным увеличением числа опытов и уменьшением доверительной вероятности. Иными словами, следует стремиться к тому, чтобы доверительный интервал целиком укладывался внутри допустимой погрешности (от  $-\delta$  до  $+\delta$ ).

Если такого условия не удастся выполнить на данной серии опытов, то

следует или увеличить число опытов  $N$ , или уменьшить доверительную вероятность  $\gamma$ . Однако последнее значительно слабее влияет на результат, тем более, что значения доверительной вероятности  $\gamma < 0,7$  применять не желательно, так как это означает, что почти треть значений рассогласований будет выходить за границы доверительного интервала (и будет трудно уследить за поведением исследуемого параметра).

Единственным практическим недостатком такой оценки может быть лишь необходимость знать закон распределения исследуемого рассогласования.

**СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ** погрешность свидетельствует о закономерности рассогласования между моделью и оригиналом и не позволяет пользоваться ею. Для оценки систематической погрешности, как указано выше, можно исследовать величину статистического среднего рассогласований  $\overline{\Delta v}$ . Для этого тоже необходимо знать закон распределения рассогласования. Наличие существенной систематической ошибки, подчиняющейся нормальному закону распределения, проверяется с помощью критерия Стьюдента, по которому сравниваются две величины:

$$t = \frac{\overline{\Delta v}}{s} \sqrt{N} \quad \text{и} \quad t_{\text{крит.}}(1-\alpha, N-1).$$

Здесь  $t_{\text{крит.}}(1-\alpha, N-1)$  определяется по таблице распределения Стьюдента при уровне значимости  $\alpha$  (вероятности совершить ошибку первого рода: отвергнуть верную гипотезу) с  $N-1$  степенями свободы.

Если  $|t| < t_{\text{крит.}}$ , то систематическая ошибка НЕЗНАЧИМА, т.е. несущественна и может быть принята нулевой. В случае противоположного неравенства:  $|t| > t_{\text{крит.}}$  – систематическая ошибка ЗНАЧИМА, т.е. не может считаться нулевой.

**НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ** со статистической точки зрения может означать незначимость каждого отдельного значения рассогласования по сравнению с общим ходом отображаемой зависимости, иными словами, неподверженность рассогласования каким-либо закономерностям, непринципиальность – случайность. Последний термин и служит идеологической основой для построения критерия оценки непротиворечивости. Как известно, нормальный закон распределения характерен для случайной ошибки измерений. Поэтому достаточно проверить статистическую гипотезу о подчиненности рассогласования данных эксперимента и реального поведения объекта **НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ** распределения с нулевым математическим ожиданием  $m = 0$  (как у простой ошибки измерений без систематической погрешности). По критерию Пирсона  $\chi^2$  для этого сравниваются две величины:

$$\chi_{\text{наблюдаемое}}^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(N_i - Np_i)^2}{Np_i} \quad \text{и} \quad \chi_{\text{крит.}}^2(\alpha, n),$$

где  $p_i$  – вероятность попадания в  $i$ -й интервал нормально распределенной слу-



чайной величины с математическим ожиданием  $m = 0$  и среднеквадратическим отклонением  $\sigma = s$ ), а  $\chi_{\text{крит.}}^2(\alpha, n)$  определяется по таблице распределения  $\chi^2$  при уровне значимости  $\alpha$  (вероятности совершить ошибку первого рода: отвергнуть верную гипотезу) с  $n = r-2$  степенями свободы.

Если  $\chi_{\text{наблюдаемое}}^2 < \chi_{\text{крит.}}^2(\alpha, n)$ , то различие статистического и гипотетического (нормального) законов распределения НЕЗНАЧИМО. Т.е. при заданном уровне значимости  $\alpha$  гипотезу о поведении рассогласования между экспериментом и "истиной", как случайной ошибки измерений, можно принять и можно считать результаты вычислительного эксперимента не противоречащими реальности. В случае противоположного неравенства:  $\chi_{\text{наблюдаемое}}^2 > \chi_{\text{крит.}}^2(\alpha, n)$  расхождение ЗНАЧИМО (не может считаться случайным) и гипотезу следует отвергнуть, т.е. результаты вычислительного эксперимента противоречат реальному поведению объекта.

Только в том случае, когда выполнены условия И требуемой ТОЧНОСТИ, И НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ, можно считать результаты вычислительного эксперимента АДЕКВАТНЫМИ реальности с доверительной вероятностью  $\gamma$  и уровнем значимости  $\alpha$  в эксперименте из  $N$  опытов.

Условия точности и непротиворечивости можно проверить с помощью статистических критериев по следующему алгоритму, предварительно задав допустимую погрешность  $\Delta v_{\text{доп}}$ , уровни значимости и доверительную вероятность, исходя из целей исследования. В данной лабораторной работе за  $\Delta v_{\text{доп}}$  принимается значение около 0,1, что соответствует 10 % относительной погрешности. Уровни значимости и доверительную вероятность в лабораторной работе следует подбирать. В этом алгоритме строго соблюдается последовательность проверки статистических критериев, каждый следующий из которых опирается на вывод предыдущего. Действительно: для построения доверительного интервала и проверки гипотезы о нулевой систематической ошибке необходимо быть уверенным, что рассогласование подчиняется нормальному закону распределения, что может быть проверено по критерию Пирсона вначале алгоритма.

Алгоритм:

1► Выбирается один из параметров объекта, для которого есть результаты наблюдения  $\{V_k\}$  в  $N$  точках, и соответствующий параметр  $\{v_k\}$ , полученный в контрольном вычислительном эксперименте в тех же условиях в тех же точках.

Вычисляются разности  $\Delta v_k = v_k - V_k$ .

Вся область значений  $\Delta v$  разбивается на  $r$  интервалов таким образом, чтобы в каждый из них попало не менее пяти значений  $\Delta v_k$ .

Производится расчет количества попадания  $\Delta v_k$  в каждый  $i$ -й ( $1 \leq i \leq r$ ) интервал – частот  $N_i$ .

Определяются статистические оценки параметров распределения случайной величины  $\Delta v$ : выборочное среднее  $\overline{\Delta v}$  и несмещенная оценка дисперсии  $s^2$ .

Этот пункт алгоритма выполняется компьютером без участия студента при запуске расчетной части программного обеспечения.

2► Для проверки **непротиворечивости**, т.е. подчиненности рассогласования нормальному закону распределения, применяется критерий согласия Пирсона  $\chi^2$ . Уровень значимости  $\alpha$  достаточно проверить только для двух крайних (рекомендуемых компьютером) значений. Если  $\chi_{\text{набл}}^2 < \chi_{\text{крит}}^2(\alpha; r - 2)$ , то распределение  $\Delta v$  незначимо отличается от нормального, т.е. результаты вычислительного эксперимента можно считать **НЕ ПРОТИВОРЕЧАЮЩИМИ** реальному поведению оригинала. Если  $\chi_{\text{набл}}^2 > \chi_{\text{крит}}^2(\alpha; r - 2)$ , то значимое отличие распределения  $\Delta v$  от нормального свидетельствует о **ПРОТИВОРЕЧИИ** результатов вычислительного эксперимента реальному поведению оригинала и исследования адекватности следует прекратить.

3► Для оценки **систематической ошибки** проверяется гипотеза о равенстве нулю математического ожидания ( $m = 0$ ) рассогласования  $\Delta v$  с помощью критерия Фишера. Уровень значимости  $\alpha$  достаточно проверить только для двух крайних (рекомендуемых компьютером) значений. Если  $|t| > t(1 - \alpha_m; N - 1)$ , то дальнейшие исследования адекватности нужно прекратить, так как это означает существование систематической погрешности между результатами вычислительного эксперимента и реальным поведением оригинала. Если  $|t| < t(1 - \alpha_m; N - 1)$ , то систематическая погрешность отсутствует и можно продолжать исследование.

Замечание. Вывод об отсутствии систематической ошибки ( $a = 0$ ) лишь **подтверждает** возможность исследования непротиворечивости в п. 2, а противоположный вывод – опровергает, т.е. делает его ничтожным.

4► Для оценки **точности** математической модели строится доверительный интервал для математического ожидания рассогласования при заданной доверительной вероятности  $\gamma$ . Если наиболее удаленный от нуля конец доверительного интервала не выходит по модулю за допустимую погрешность  $\Delta v_{\text{доп}} = 0,1$ , то математическую модель можно считать достаточно точной по отношению к оригиналу. Для выполнения этого условия следует подобрать выгодное (наибольшее) значение доверительной вероятности от 0,7 до 0,999.

5► Если по п. 7 можно считать математическую модель не противоречащей оригиналу, а по п. 8 и достаточно точной, то результаты расчетов адекватны реальному поведению оригинала.

Замечание. Если оценка точности математической модели оказывается во много раз лучше допустимой (иными словами, погрешность практически неразличима), то даже в отсутствии непротиворечивости математическую модель можно признать адекватной.

### Программное обеспечение

Лабораторная работа № 2 выполняется с помощью имитатора результатов вычислительного эксперимента на математической модели. Он позволяет симулировать "точные значения реального объекта" и данные "неточного вычислительного эксперимента" на модели, а также:

- определить выборочные характеристики рассогласования (среднего выборочного и выборочную оценку среднеквадратического отклонения);
- проверить гипотезу о нормальном законе распределения рассогласования результатов вычислительного эксперимента с поведением реального объекта с помощью статистического критерия согласия Пирсона;
- проверить гипотезу о равенстве нулю математического ожидания рассогласования результатов вычислительного эксперимента с поведением реального объекта с помощью статистического критерия Стьюдента;
- построить доверительный интервал для математического ожидания рассогласования (погрешности).

### Порядок выполнения работы

1) Получить выборочные оценки параметров распределения рассогласования между моделью и оригиналом по данным 120 опытов (результат появляется на экране монитора сразу после входа в режим выполнения расчетов лабораторной работы).

2) Исходя из требуемой обоснованной последовательности действий, провести весь алгоритм оценки адекватности с помощью статистических критериев.

3) Если какие-то результаты проверки критериев Вас не удовлетворяют, повторить исследования с другими значениями уровней значимости, доверительной вероятности или допустимой погрешности. Следует учесть, что необходимость уменьшения доверительной вероятности вплоть до 0,7 свидетельствует о недопустимо низком качестве вычислительного эксперимента. Естественно, следует стремиться к как можно большему значению доверительной вероятности при соблюдении требуемой погрешности.

4) Основываясь на данных проверки статистических гипотез, сформулировать выводы о наличии систематической погрешности математической модели, о ее непротиворечивости и точности, а также в целом об адекватности математической модели реальному поведению оригинала.

Форма отчетности: значения основных точечных характеристик распределения рассогласования, итоговые выбранные значения уровней значимости, доверительной вероятности и допустимой погрешности, результаты проверки статистических гипотез, доверительный интервал для рассогласования, выводы о наличии систематической погрешности математической модели, о ее непротиворечивости и точности, а также в целом об адекватности математической модели реальному поведению оригинала.

## 9. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

### Идентификация математической модели разбега самолета Ан-2 при взлете

Цель лабораторной работы: разработка плана и проведение контрольного вычислительного эксперимента для идентификации одного недостающего числового параметра в математическом описании модели.

#### Теоретические основы

В процессе построения математических моделей при недостаточной степени их адекватности возникает необходимость уточнения, "доводки" модели. Такой процесс называется идентификацией (определением недостающих или неточно известных исходных) параметров или функциональных зависимостей модели с помощью результатов вычислительного эксперимента и данных о реальном поведении объекта.

Поскольку адекватность математической модели – это соответствие результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта, постольку для выявления этого соответствия необходимо провести сравнение параметров модели и оригинала в одних и тех же условиях. Если удовлетворительного с точки зрения задач исследования соответствия не наблюдается, то приходится проводить специальный контрольный вычислительный эксперимент по поэтапному подбору и коррекции параметров математической модели – подбору некоторых (неизвестных или неточно известных) входных данных математического описания по известным выходным результатам известного реального случая поведения объекта. Это и есть задача идентификации.

Чаще всего математические модели реальных объектов содержат в своем математическом описании нетривиальный вычислительный процесс, который не удается обратить. Это значит, что невозможно построить прямой вычислительный процесс в обратном направлении с тем, чтобы определять входные параметры по известным выходным. Поэтому задача идентификации относится к классу обратных задач и решается в основном методами последовательных приближений.

Для безусловности получения результата решения задачи идентификации необходимо строгое применение методов последовательных приближений, представление о физической сути процесса и о влиянии идентифицируемого (подбираемого) параметра на выходной параметр. Нарушение этих строгостей чаще всего приводит не к решению поставленной задачи, а к случайному попаданию в благоприятную лишь на первый взгляд ситуацию (например,  $2\frac{3}{4}$  землекопа) или к бесконечному вычислительному процессу. Даже в более благоприятном случае нельзя рассчитывать на то, что такая ситуация повторится когда-либо еще. Если же применять известные математические методы, то можно

опереться на доказанность их сходимости к решению именно поставленной задачи. Достаточно лишь проверить условия применимости выбранного метода, опираясь на представление о физической сути процесса.

Для идентификации одного входного скалярного параметра по известному значению выходного скалярного параметра можно воспользоваться методами деления отрезка пополам и секущих (хорд) – простейшими итерационными методами.

Для упомянутых итерационных методов сформулированы строгие математические условия применимости и доказана сходимость к решению уравнения. Произвольное искажение методов или "перебор" не гарантируют получение результата идентификации и в математическом моделировании недопустимы.

Итерационные методы применяются для отыскания действительного корня нелинейного алгебраического уравнения. С этой целью уравнение преобразуется к виду  $x = \varphi(x)$ , и далее строится процесс последовательных приближений ("пошаговое уточнение") по итерационной формуле:  $x^{[i+1]} = \varphi(x^{[i]})$ , т.е. по найденному на  $[i]$ -й итерации приближенному значению решения вычисляется  $[i+1]$ -я итерация. Такой процесс продолжается до тех пор, пока не будут выполнены условия обеспечения требуемой точности.

Рассмотрим способы решения задачи идентификации единственного числового параметра математической модели разбега самолета Ан-2. В этом случае удобно представить вычисляемое значение дистанции разбега в виде функции от искомого параметра:  $f(x)$ . Тогда задача идентификации представится, как задача отыскания такого значения  $x$ , которое обеспечивает известное (например, из летных испытаний) значение дистанции разбега  $g = f(x)$ .

Метод деления отрезка пополам:

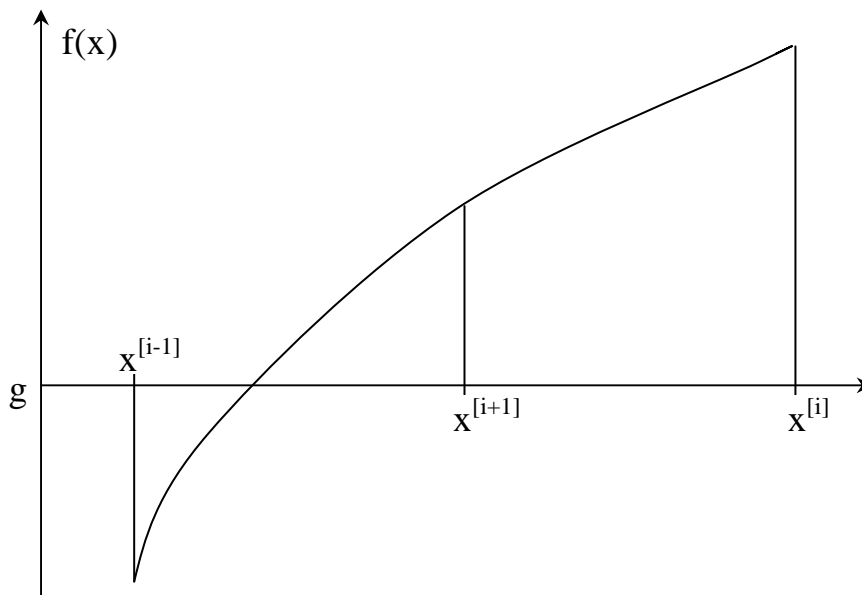


Рис. 1.

использует итерационное уравнение в виде:

$$x^{[i+1]} = \frac{1}{2} (x^{[i]} + x^{[i-1]})$$

**и ПРИМЕНЯЕТСЯ ТОЛЬКО В ТОЙ ОБЛАСТИ ИЗМЕНЕНИЯ  $x$ , ГДЕ БЕЗУСЛОВНО СУЩЕСТВУЕТ ЕДИНСТВЕННЫЙ КОРЕНЬ ИСКОМОГО УРАВНЕНИЯ.**

Для начала итераций выбирается такой интервал, на котором обязательно выполняются условия применимости метода. Такой выбор начального интервала называется **ОТДЕЛЕНИЕМ КОРНЕЙ**. Указанные условия можно выполнить, опираясь на теорему о монотонной на отрезке функции: всякая монотонная на отрезке функция принимает любое свое промежуточное значение в одной единственной точке внутри отрезка. В этом случае необходимо лишь показать монотонность на этом интервале исследуемой зависимости (для зависимости дистанции разбега от идентифицируемого параметра достаточно из физических или математических соображений обосновать ее монотонность), а также убедиться, что на концах этого отрезка  $x^{[0]}$  и  $x^{[1]}$  функция принимает значения по обе стороны от необходимого  $g$  (т.е. на одном конце  $f(x) > g$ , а на другом  $f(x) < g$ ).

В итоге процедуры отделения корней получается, что положение корня уравнения (искомое значения идентифицируемого параметра модели) известно с точностью до длины выбранного отрезка. Остается построить итерационный процесс таким образом, чтобы на каждой итерации уменьшать отрезок, на котором находится корень.

На каждом следующем шаге итераций метода деления отрезка пополам находится очередное приближение аргумента  $x^{[i+1]}$  по вышеуказанному итерационному уравнению (в центре отрезка), затем с помощью математической модели вычисляется значение  $f(x^{[i+1]})$  и выбирается та часть отрезка, на которой опять выполняются все условия применимости метода (рис. 1). Так как функция монотонна на всем отрезке, то она монотонна и на его части, поэтому достаточно выбрать тот (вдвое меньший) отрезок, где на одном конце  $f(x) > g$ , а на другом  $f(x) < g$ . Так как очередное приближение аргумента всегда лежит между концами отрезка текущей итерации, то после каждой итерации новый отрезок всегда меньше старого, и область возможного расположения корня постепенно сужается – стягивается в точку. Итерации завершают, когда будет выполнено условие заданной точности: по аргументу  $|x^{[i+1]} - x^{[i]}| < \varepsilon$  или по функции  $|f(x^{[i+1]}) - g| < \delta$ .

Этот экономный метод, как видно из формулы, не использует значения функции для определения очередного приближения; и даже при выборе части интервала для следующего шага использует не столько значения функции, сколько лишь ее знаки. Алгоритм этого метода предельно прост.

Метод секущих (метод хорд): **ПРИМЕНЯЕТСЯ, ПРОВОДИТСЯ И ЗАВЕРШАЕТСЯ АНАЛОГИЧНО МЕТОДУ ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ**, но имеет другую итерационную формулу для отыскания очередного приближения, основанную на пропорции для подобных треугольников (см. рис. 2):

$$x^{[i+1]} = x^{[i]} - \frac{x^{[i]} - x^{[i-1]}}{f(x^{[i]}) - f(x^{[i-1]})} \cdot \{f(x^{[i]}) - g\}$$

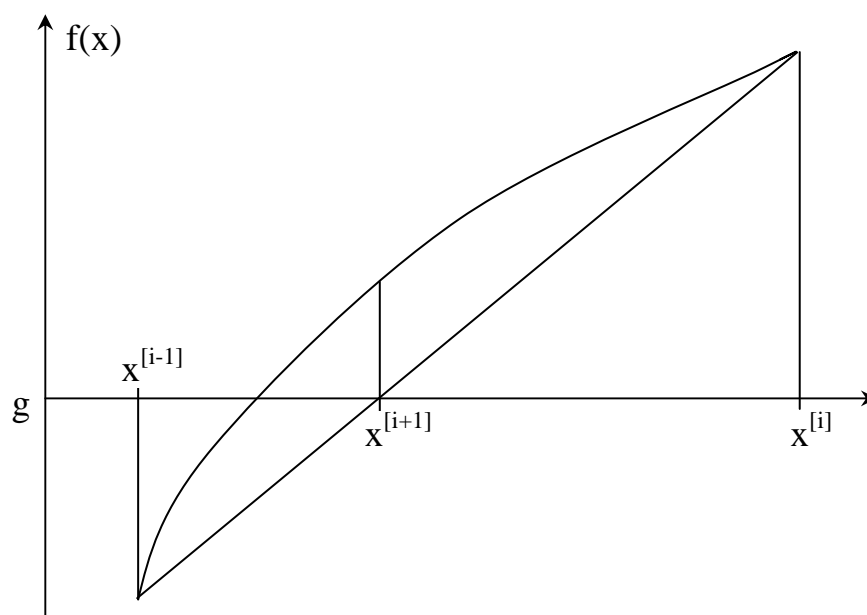


Рис. 2.

Этот метод использует дополнительную информацию о значениях функции в точках последовательных приближений, поэтому он априорно сходится быстрее, чем метод деления отрезка пополам. Однако эта скорость сходимости существенно зависит от выбора исходного приближения.

#### Программное обеспечение

Лабораторная работа № 3 выполняется с помощью учебной математической модели разбега самолета Ан-2 при взлете. Она позволяет рассчитывать дистанцию разбега при полностью заданном комплекте входных параметров математического описания.

#### Порядок выполнения работы

Комплект входных параметров, "истинное" значение дистанции разбега и указание недостающего (идентифицируемого) параметра приведены в таблице вариантов к домашнему заданию № 1 (раздел 7). В ней номер варианта выбирается по последним двум цифрам зачетной книжки студента, а идентифицируемый параметр, значение которого необходимо уточнить – подчеркнут.

Задавая полный комплект входных данных своего варианта с варьируемыми значениями идентифицируемого параметра (согласно применяемому методу последовательных приближений), необходимо добиться полного совпадения (до последней цифры) полученного расчетного значения дистанции разбега с заданным в варианте "истинным" ее значением, т.е.  $|f(x^{[i+1]} - g) < 0,5$ .

- 1) Провести процедуру отделения корней.
- 2) Провести идентификацию значения недостающего параметра методом деления отрезка пополам.
- 3) Провести идентификацию значения недостающего параметра методом секущих (методом хорд), начиная с того же исходного отрезка, что и в методе деления отрезка пополам.
- 4) Сравнить объем вычислительных экспериментов по п. 2 и п. 3.
- 5) Сформулировать вывод.

Форма отчетности: описание и обоснование плана контрольного вычислительного эксперимента с приведением результатов вычислений всех приближений (указать для каждого приближения значение идентифицируемого параметра и соответствующее ему значение дистанции разбега); вывод.

Таблица вариантов индивидуальных данных

№ вар.	m кг	f <sub>тр</sub>	c <sub>ха</sub>	c <sub>ya</sub>	P <sub>0</sub> кгс	L <sub>разб</sub> , м
1	<u>4500</u>	0, 020	0, 25	1,30	1500	203
2	4625	0, 020	<u>0, 30</u>	1,30	2000	166
3	5000	0, 020	0, 25	1,30	<u>2000</u>	236
4	4125	0, 035	0, 25	1,30	<u>1500</u>	223
5	<u>5000</u>	0, 020	0, 35	1,70	1500	401
6	<u>5000</u>	0, 035	0, 25	1,30	1500	342
7	5250	0, 035	0, 25	<u>1,50</u>	2000	232
8	5000	0, 020	<u>0, 30</u>	1,70	1800	187
9	<u>4500</u>	0, 050	0, 25	1,30	1800	170
10	4750	0, 050	0, 25	1,30	<u>1500</u>	373
11	5125	0, 050	0, 25	1,30	<u>2000</u>	245
12	5500	0, 050	<u>0, 20</u>	1,30	1400	700
13	<u>4500</u>	0, 020	0, 25	1,50	1400	154
14	4500	0, 020	0, 25	<u>1,70</u>	2000	115



№ вар.	m кг	f <sub>тп</sub>	c <sub>ха</sub>	c <sub>ya</sub>	P <sub>0</sub> кгс	L <sub>разб.</sub> м
15	<u>5000</u>	0, 020	0, 25	1,50	1500	232
16	5250	0, 020	<u>0, 30</u>	1,50	1400	381
17	4000	0, 035	0, 25	1,50	<u>1500</u>	155
18	4375	0, 035	0, 25	<u>1,70</u>	2000	115
19	<u>5000</u>	0, 035	0, 25	1,50	1800	163
20	5125	0, 035	<u>0, 20</u>	1,50	1300	472
21	5500	0, 035	0, 25	1,50	<u>1500</u>	213
22	4250	0, 050	0, 25	1,50	<u>1500</u>	121
23	<u>4000</u>	0, 050	0, 25	1,50	1500	210
24	5000	0, 050	<u>0, 20</u>	1,50	2000	168
25	<u>4500</u>	0, 050	0, 25	1,50	1900	218
26	4000	0, 020	0, 25	1,70	<u>1500</u>	75
27	4375	0, 020	0, 25	<u>1,30</u>	1500	140
28	4750	0, 020	<u>0, 35</u>	1,70	1400	188
29	<u>4500</u>	0, 020	0, 25	1,70	1900	146
30	5500	0, 020	0, 25	1,70	<u>1500</u>	188
31	4250	0, 035	0, 25	1,70	<u>2000</u>	139
32	<u>5000</u>	0, 035	0, 25	1,70	1900	114
33	5000	0, 035	<u>0, 35</u>	1,70	2000	131
34	<u>5000</u>	0, 035	0, 25	1,70	1500	252
35	4125	0, 050	<u>0, 35</u>	1,70	1300	152
36	4500	0, 050	0, 25	1,70	<u>1500</u>	119
37	4875	0, 050	0, 25	<u>1,30</u>	1500	189
38	<u>4500</u>	0, 050	0, 25	1,70	2000	151
39	4250	0, 020	0, 30	1,30	<u>2000</u>	157
40	4625	0, 020	<u>0, 20</u>	1,30	1500	424
41	5000	0, 020	0, 30	<u>1,70</u>	2000	226
42	5375	0, 020	0, 30	1,30	<u>1500</u>	349

№ вар.	m кг	f <sub>тп</sub>	c <sub>ха</sub>	c <sub>ya</sub>	P <sub>0</sub> кгс	L <sub>разб.</sub> м
43	<u>5000</u>	0, 035	0, 30	1,30	1500	230
44	4500	0, 035	<u>0, 20</u>	1,30	2000	166
45	4875	0, 035	0, 30	1,30	<u>1500</u>	253
46	<u>4500</u>	0, 035	0, 30	1,30	2000	290
47	4000	0, 050	<u>0, 20</u>	1,30	1400	228
48	4375	0, 050	0, 30	<u>1,70</u>	2000	167
49	<u>4000</u>	0, 050	0, 30	1,30	1800	263
50	5500	0, 050	0, 30	1,30	<u>1500</u>	473
51	4125	0, 020	0, 30	<u>1,30</u>	1300	230
52	4500	0, 020	<u>0, 20</u>	1,50	2000	135
53	<u>4500</u>	0, 020	0, 30	1,50	1500	285
54	5250	0, 020	0, 30	1,50	<u>1500</u>	213
55	4000	0, 035	0, 30	<u>1,30</u>	2000	97
56	<u>5000</u>	0, 035	0, 30	1,50	1500	199
57	4750	0, 035	0, 30	<u>1,30</u>	1400	301
58	5125	0, 035	0, 30	1,50	<u>1500</u>	211
59	4500	0, 035	<u>0, 35</u>	1,30	2000	156
60	4250	0, 050	<u>0, 25</u>	1,50	1400	224
61	<u>4000</u>	0, 050	0, 30	1,50	1900	157
62	5000	0, 050	0, 30	1,50	<u>1500</u>	214
63	<u>4500</u>	0, 050	0, 30	1,50	1500	499
64	<u>5000</u>	0, 020	0, 30	1,70	1300	162
65	4375	0, 020	<u>0, 20</u>	1,70	2000	95
66	4750	0, 020	0, 30	<u>1,30</u>	2000	122
67	5125	0, 020	0, 30	1,70	<u>2000</u>	345
68	5250	0, 020	<u>0, 35</u>	1,70	1400	276
69	<u>5000</u>	0, 035	0, 30	1,70	1500	142
70	4750	0, 035	0, 30	1,70	<u>1500</u>	123

№ вар.	m кг	f <sub>тп</sub>	c <sub>ха</sub>	c <sub>ya</sub>	P <sub>0</sub> кгс	L <sub>разб.</sub> м
71	5000	0, 035	<u>0, 25</u>	1,70	2000	145
72	<u>4500</u>	0, 035	0, 30	1,70	1900	188
73	4125	0, 050	0, 30	<u>1,30</u>	1400	156
74	<u>5000</u>	0, 050	0, 30	1,70	1900	119
75	4875	0, 050	0, 30	1,70	<u>1500</u>	141
76	<u>4500</u>	0, 050	0, 30	1,70	1400	338
77	4125	0, 020	<u>0, 20</u>	1,30	1400	398
78	<u>5000</u>	0, 020	0, 35	1,30	1900	212
79	4875	0, 020	0, 35	<u>1,70</u>	2000	221
80	5250	0, 020	0, 35	1,30	<u>1500</u>	433
81	<u>5000</u>	0, 035	0, 35	1,30	1800	230
82	5125	0, 035	0, 35	1,30	<u>1500</u>	426
83	4250	0, 050	0, 35	<u>1,70</u>	1500	341
84	4625	0, 050	<u>0, 25</u>	1,30	2000	245
85	<u>4500</u>	0, 020	0, 35	1,30	1900	443
86	4000	0, 020	0, 35	1,50	<u>2000</u>	217
87	4375	0, 020	0, 35	<u>1,30</u>	1900	131
88	4750	0, 020	<u>0, 20</u>	1,50	1800	213
89	4250	0, 035	0, 35	1,50	<u>1500</u>	142
90	<u>5500</u>	0, 035	0, 35	1,50	1500	316
91	5000	0, 035	0, 35	1,50	<u>1500</u>	205
92	5375	0, 035	<u>0, 20</u>	1,50	1900	287
93	<u>4500</u>	0, 035	0, 35	1,50	2000	279
94	4125	0, 050	0, 35	1,50	<u>2000</u>	209
95	4500	0, 050	0, 35	<u>1,70</u>	2000	139
96	<u>4000</u>	0, 050	0, 35	1,50	1900	211
97	4250	0, 020	0, 35	1,70	<u>2000</u>	172
98	4625	0, 020	0, 35	<u>1,30</u>	2000	125

№ вар.	m кг	f <sub>тр</sub>	c <sub>ха</sub>	c <sub>ya</sub>	P <sub>0</sub> кгс	L <sub>разб</sub> , м
99	4000	0, 050	<u>0, 30</u>	1,30	1300	254
100	<u>5000</u>	0, 025	0, 30	1,60	1800	143

## 10. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

### Гладкая аппроксимация экспериментальной зависимости

Цель лабораторной работы: выбор наилучшей аппроксимации экспериментальной поляры самолета Ту-134А полиномами (многочленами) 2-й, 3-й и 4-й степени.

#### Теоретические основы

Аппроксимация функции – это приближенная замена заданной сложной функциональной зависимости более простой функцией: алгебраическим полиномом (многочленом), тригонометрическим полиномом, или какой-либо другой функцией, которую можно построить с помощью метода наименьших квадратов. Но в любом случае подбор подходящего класса (вида) функциональной зависимости осуществляется исходя из **ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ** аппроксимируемой зависимости.

Метод наименьших квадратов основан на отыскании таких значений параметров **a** функциональной зависимости  $\varphi(x, \mathbf{a})$  заданного вида, которые минимизируют величину суммы квадратов отклонений вычисленных значений функции от соответствующих наблюдаемых значений:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, \mathbf{a})]^2 \rightarrow \min.$$

Поэтому все параметры  $a_j$  функции  $\varphi(x, \mathbf{a})$  определяются из условия минимума функции нескольких аргументов, т.е. из системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, \mathbf{a})] \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a_j} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

В важном частном случае полиномиальной аппроксимации (многочленами)

$$y = \varphi(x, \mathbf{a}) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m = \sum_{j=0}^m a_j x^j$$

в результате несложных преобразований получается "система нормальных уравнений метода наименьших квадратов":

$$\sum_{j=0}^m a_j \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^n y_i x_i^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m.$$

которая в развернутом виде выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_m \cdot \sum_{i=1}^n x_i^m = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 + \dots + a_m \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \cdot \\ \cdot \\ + a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^m + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} + \dots + a_m \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{2m} = \sum_{i=1}^n y_i x_i^m \end{array} \right.$$

Таким образом, задача аппроксимации, например, экспериментальной зависимости полиномом  $m$ -ой степени сводится к решению системы неоднородных линейных алгебраических уравнений с  $m+1$  неизвестными коэффициентами полинома.

Полярой самолета называется графическое изображение взаимной зависимости коэффициента аэродинамической подъемной силы  $c_{ya}$  и коэффициента аэродинамического лобового сопротивления  $c_{xa}$  (рис. 3). Поляра характеризует летные качества самолета и имеет некоторые характерные свойства.

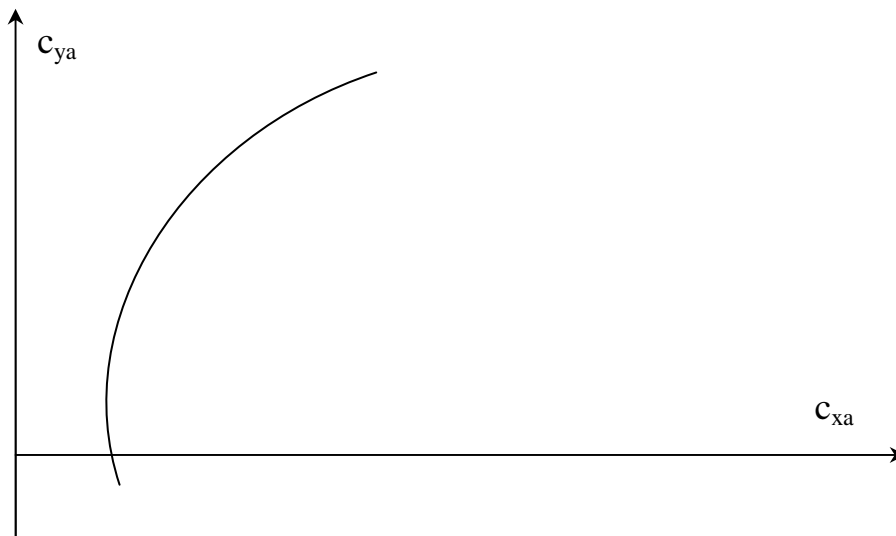


Рис. 3.

Во-первых, поляра – выпуклая кривая, т.е. у нее нет точек перегиба. Во-вторых, у нее есть точка минимального значения  $c_{xa}$ . Эту точку аэродинамики-экспериментаторы называют "носиком поляры".

Наличие минимального значения  $c_{xa}$  означает возможность использовать соответствующую ориентацию самолета относительно воздуха для того, чтобы производить полет на выгодном режиме с минимальным сопротивлением.

Обычно такой режим близок к крейсерскому, совершаемому на большой высоте с большой скоростью  $V$ . Большая скорость полета соответствует большому значению числа Маха  $M = \frac{V}{a}$ , где  $a$  – скорость звука.

Однако основным условием полета самолета на любых режимах является уравнивание веса подъемной силой  $Y_a$ , рассчитываемой в аэродинамике по следующей формуле:

$$mg = Y_a = c_{ya} \frac{\rho V^2}{2} S,$$

где  $mg$  – вес самолета,  $S$  – площадь крыла,  $\rho$  – плотность воздуха. Поэтому для того, чтобы летать на выгодных режимах с минимальным  $c_{xa}$ , необходимо иметь достаточное для выбранной скорости полета положительное значение  $c_{ya}$ . Так как крейсерский полет совершается на большой скорости, то "носик поляры" располагается при небольших значениях коэффициента подъемной силы  $c_{ya}$ .

Экспериментальная поляра самолета получается продувками модели в аэродинамической трубе. В каждой продувке после вывода установки на режим заданного числа Маха замеры сил производятся на всех возможных углах атаки модели. В реальном полете далеко не весь этот диапазон может быть реализован. Так, например, при больших числах Маха (при большой скорости полета) нельзя реализовать большие значения коэффициента подъемной силы  $c_{ya}$ , так как возникающая при этом большая подъемная сила (больше веса) создает большую перегрузку, угрожающую разрушением конструкции самолета. При малых числах Маха невозможен полет на малых  $c_{ya}$ , так как недостаток подъемной силы приведет к падению самолета. Поэтому для расчетов используется лишь та часть полученного в экспериментах диапазона значений коэффициента подъемной силы  $c_{ya}$ , которая соответствует числу Маха.

Таким образом, аппроксимация экспериментальной поляры, призванная играть роль модели, **ДОЛЖНА ОБЛАДАТЬ ВСЕМИ НЕОБХОДИМЫМИ ХАРАКТЕРНЫМИ СВОЙСТВАМИ ПОЛЯРЫ ЛИШЬ В ТОЙ ЧАСТИ, ДЛЯ КОТОРОЙ ОНА СЛУЖИТ.**

#### Программное обеспечение

Лабораторная работа № 1 выполняется с помощью учебной программы, реализующей метод наименьших квадратов для отыскания коэффициентов аппроксимирующего полинома 2-й, 3-й и 4-й степеней по "экспериментальной" зависимости.

#### Порядок выполнения работы

1) С помощью программы получить результаты аппроксимации поляры самолета Ту-134А полиномами 2-й, 3-й и 4-й степени.

2) Проанализировать пригодность каждой из них с точки зрения физичности отображаемой зависимости, свойств аппроксимирующей зависимости и точности приближения. При этом обратить внимание на:

– диапазон эксплуатационных значений  $c_{ya}$  (оценивается по числу  $M$  и составляет не менее 6 точек из представленной таблицы – сверху, снизу или в середине);

- положение точек перегиба на аппроксимациях;
- положение точек экстремумов на аппроксимациях;
- положение экстремума на экспериментальной поляре;
- погрешности аппроксимации;
- простоту расчетов аппроксимирующего многочлена.

3) Оценить степень достоверности отдельных точек в экспериментальной зависимости (например, если для всех полиномов погрешность высока – более 5 % – и имеет один знак, то доверие к такой экспериментальной точке невелико, и на ее основе делать выводы не следует).

4) Определить наиболее приемлемую по совокупности качеств аппроксимацию и предложить аргументированное обоснование.

Форма отчетности: итоговая таблица аппроксимации НА ЭКРАНЕ ДИСПЛЕЯ и устные аргументированные выводы по результатам анализа приближения.

## 11. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Ознакомление с программой GARLINA для приема зачета

Цель лабораторной работы: Ознакомиться и отработать навыки работы с программой GARLINA для приема зачета.

Порядок выполнения работы

Работа проводится в компьютерном классе в режиме, имитирующем зачет.

Отчетность не требуется.

## 12. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Номер выполняемого варианта определяется по двум последним цифрам шифра (номера зачетной книжки) студента.

Работа № 1. Для выполнения работы № 1 необходимо ознакомиться с примером, разобранным в § 2.1 учебного пособия [1]. Обратите внимание, что заданием требуется **ОТОБРАТЬ** и **СИСТЕМАТИЗИРОВАТЬ** соответствующие элементы математического описания и математической модели. Каждый требуемый элемент должен быть выписан в полном объеме без лишних записей. Бездумно переписанный из учебного пособия материал не зачитывается.

Задание: для математической модели определения скорости отрыва, времени и дистанции разбега самолета Ан-2 по горизонтальной взлетно-посадочной полосе (ВПП) в стандартных атмосферных условиях без возмущений

– выписать все необходимые составляющие математического описания модели:

- числовые данные,
- функциональные соотношения,
- методы вычисления требуемых параметров;

– перечислить лежащие в основе математической модели:

- основные допущения и предположения (кроме ссылок на использованные дисциплины привести не менее 5 конкретных предположений, использованных при разработке математического описания),

- способы перевода исходных и выходных данных с оригинала на модель и обратно.

Общие данные для всех вариантов:

- плотность воздуха  $\rho = 1,225 \text{ кг/м}^3$ ;
- площадь крыла  $S = 71,5 \text{ м}^2$ ;
- коэффициенты зависимости тяги от скорости:  $a = 0,002 \text{ с/м}$ ,  $b = 0,0002 \text{ с}^2/\text{м}^2$ .

Индивидуальные данные вариантов выбираются по таблице к лабораторной работе № 3 (см. стр. 32 – 36).

Работа № 2. Для выполнения работы № 2 необходимо ознакомиться с примерами, разобранными в § 3.2 учебного пособия [1]. Обратите внимание, что заданием требуется получение функциональной зависимости для характеристики ударной волны, поэтому не все возможные критерии подобия необходимо рассматривать. Приветствуется логическое обоснование выбора нужных случаев, а также физическая интерпретация полученного результата.



Задание: требуется с помощью П-теоремы составить вид функциональной зависимости для математического описания модели взрывного воздействия. Для контрольной точки, находящейся на расстоянии  $R$  от взрыва, требуется выявить вид функциональной зависимости характеристики ударной волны от характеристики взрыва, расстояния  $R$  и двух параметров, характеризующих атмосферу (выбираются студентом самостоятельно).

Примечание. Ударная волна в контрольной точке в различных вариантах характеризуется одной из следующих величин (их размерности студент определяет самостоятельно):  $t$  – время прихода ударной волны;  $\Delta p$  – интенсивность ударной волны (разность давлений перед и после волны);  $V$  – скорость прохождения ударной волны.

Таблица вариантов заданий

№ вар.	характеристика ударной волны	характеристика взрыва, размерность	
1	$t$	$W$	Дж
2	$\Delta p$	$W$	Дж
3	$V$	$W$	Дж
4	$t$	$N$	Вт
5	$\Delta p$	$N$	Вт
6	$V$	$N$	Вт
7	$t$	$J$	Н·с
8	$\Delta p$	$J$	Н·с
9	$V$	$J$	Н·с
10	$t$	$F$	Н
11	$\Delta p$	$F$	Н
12	$V$	$F$	Н
13	$t$	$m$	$Па \cdot м \cdot с^2$
14	$\Delta p$	$m$	$Па \cdot м \cdot с^2$
15	$V$	$m$	$Па \cdot м \cdot с^2$
16	$t$	$q$	$Па \cdot м \cdot с$
17	$\Delta p$	$q$	$Па \cdot м \cdot с$
18	$V$	$q$	$Па \cdot м \cdot с$
19	$t$	$w$	$Дж/м^3$

№ вар.	характеристика ударной волны	характеристика взрыва, размерность	
20	$\Delta p$	w	Дж/м <sup>3</sup>
21	V	w	Дж/м <sup>3</sup>
22	t	n	Вт/м <sup>3</sup>
23	$\Delta p$	n	Вт/м <sup>3</sup>
24	V	n	Вт/м <sup>3</sup>
25	t	i	Н·с/м <sup>3</sup>
26	$\Delta p$	i	Н·с/м <sup>3</sup>
27	V	i	Н·с/м <sup>3</sup>
28	t	f	Н/м <sup>3</sup>
29	$\Delta p$	f	Н/м <sup>3</sup>
30	V	f	Н/м <sup>3</sup>
31	t	$\beta$	Па·с <sup>2</sup> /м <sup>2</sup>
32	$\Delta p$	$\beta$	Па·с <sup>2</sup> /м <sup>2</sup>
33	V	$\beta$	Па·с <sup>2</sup> /м <sup>2</sup>
34	t	$\tau$	Па·с/м <sup>2</sup>
35	$\Delta p$	$\tau$	Па·с/м <sup>2</sup>
36	V	$\tau$	Па·с/м <sup>2</sup>
37	t	W	Дж/м
38	$\Delta p$	W	Дж/м
39	V	W	Дж/м
40	t	N	Вт/м
41	$\Delta p$	N	Вт/м
42	V	N	Вт/м
43	t	J	Н·с/м
44	$\Delta p$	J	Н·с/м
45	V	J	Н·с/м
46	t	F	Н/м
47	$\Delta p$	F	Н/м

№ вар.	характеристика ударной волны	характеристика взрыва, размерность	
48	V	F	H/м
49	t	m	Па·с <sup>2</sup>
50	Δp	m	Па·с <sup>2</sup>
51	V	m	Па·с <sup>2</sup>
52	t	q	Па·с
53	Δp	q	Па·с
54	V	q	Па·с
55	t	w	Дж/м <sup>4</sup>
56	Δp	w	Дж/м <sup>4</sup>
57	V	w	Дж/м <sup>4</sup>
58	t	n	Вт/м <sup>4</sup>
59	Δp	n	Вт/м <sup>4</sup>
60	V	n	Вт/м <sup>4</sup>
61	t	i	H·с/м <sup>4</sup>
62	Δp	i	H·с/м <sup>4</sup>
63	V	i	H·с/м <sup>4</sup>
64	t	f	H/м <sup>4</sup>
65	Δp	f	H/м <sup>4</sup>
66	V	f	H/м <sup>4</sup>
67	t	β	Па·с <sup>2</sup> /м <sup>3</sup>
68	Δp	β	Па·с <sup>2</sup> /м <sup>3</sup>
69	V	β	Па·с <sup>2</sup> /м <sup>3</sup>
70	t	τ	Па·с/м <sup>3</sup>
71	Δp	τ	Па·с/м <sup>3</sup>
72	V	τ	Па·с/м <sup>3</sup>
73	t	W	Дж/м <sup>2</sup>
74	Δp	W	Дж/м <sup>2</sup>
75	V	W	Дж/м <sup>2</sup>

№ вар.	характеристика ударной волны	характеристика взрыва, размерность	
76	t	N	Вт/м <sup>2</sup>
77	Δp	N	Вт/м <sup>2</sup>
78	V	N	Вт/м <sup>2</sup>
79	t	J	Н·с/м <sup>2</sup>
80	Δp	J	Н·с/м <sup>2</sup>
81	V	J	Н·с/м <sup>2</sup>
82	t	F	Н/м <sup>2</sup>
83	Δp	F	Н/м <sup>2</sup>
84	V	F	Н/м <sup>2</sup>
85	t	m	Па·с <sup>2</sup> /м
86	Δp	m	Па·с <sup>2</sup> /м
87	V	m	Па·с <sup>2</sup> /м
88	t	q	Па·с/м
89	Δp	q	Па·с/м
90	V	q	Па·с/м
91	t	w	Дж/м <sup>5</sup>
92	Δp	w	Дж/м <sup>5</sup>
93	V	w	Дж/м <sup>5</sup>
94	t	n	Вт/м <sup>5</sup>
95	Δp	n	Вт/м <sup>5</sup>
96	V	n	Вт/м <sup>5</sup>
97	t	i	Н·с/м <sup>5</sup>
98	Δp	i	Н·с/м <sup>5</sup>
99	V	i	Н·с/м <sup>5</sup>
100	t	f	Н/м <sup>5</sup>

**Работа № 3.** Для выполнения работы № 3 необходимо ознакомиться с примером, разобранным в § 3.5 учебного пособия [1]. Обратите внимание, что заданием требуется получение подробного вывода по результатам расчетов.

**Задание:** Требуется симитировать работу аэродрома методом Монте-Карло. Найти время, за которое совершат посадку и освободят ВПП 10 самолетов. Выделить интервалы времени, в течение которых ВПП свободна более 5 минут, т.е. когда вылетающий самолет может произвести взлет. Выделить номера самолетов, которым будет отказано в посадке по причине занятости ВПП.

Интервалы времени между очередными подлетами самолетов к ВПП  $\Delta t_C$  – случайная величина. Время, в течение которого ВПП занята совершающим посадку самолетом,  $\Delta t_3$  – тоже случайная величина. Интегральные функции распределения этих случайных величин заданы таблицами:

$\Delta t_C$ , мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1(\Delta t_C)$	0	0,02	0,02	0,23	0,40	0,56	0,71	0,83	0,92	0,97	1

$\Delta t_3$ , мин	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$F_2(\Delta t_3)$	0	0,01	0,02	0,05	0,19	0,40	0,67	0,85	0,96	0,99	1

При реализации метода Монте-Карло следует использовать последовательность случайных чисел, ЧИТАЕМУЮ ПО СТРОКАМ из следующей таблицы, НАЧИНАЯ С МЕСТА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ строки с номером предпоследней цифры зачетной книжки студента и столбца с номером последней цифры. (В таблице выделено первое случайное число для 48-го варианта). Для получения случайного числа следует каждую пару цифр использовать в качестве двух десятичных знаков после нуля целых. Расчеты производить с точностью до десятых долей минуты.

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	94	96	37	43	14	33	90	79	99	69
<b>1</b>	59	31	55	23	09	93	34	22	14	35
<b>2</b>	82	41	97	44	19	83	34	85	78	37
<b>3</b>	44	51	82	05	89	33	64	03	38	58
<b>4</b>	14	58	66	38	28	24	47	02	61	19
<b>5</b>	17	98	21	00	74	05	88	18	03	62
<b>6</b>	10	75	06	27	90	19	24	60	67	11
<b>7</b>	69	12	39	40	81	73	02	12	53	54
<b>8</b>	25	16	51	99	81	01	03	41	32	29
<b>9</b>	18	30	50	40	39	30	66	89	95	37
	62	14	64	98	06	08	59	62	82	15
	23	94	79	03	68	49	67	73	85	